Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

Sommaire

8.1 Introduction 233

8.1.1 Motivation 233

8.1.2 Une nouvelle approche 235

8.2 Caractérisation des utilités progressives ayant le même portefeuille optimal 235

8.2.1 Définition des utilités équivalentes 235

8.2.2 Synthèse des conditions d'optimalité 236

8.3 Approche par les flots stochastiques 237

8.3.1 Richesse optimale monotone 238

8.3.2 La richesse optimale comme flot stochastique . . 239

8.4 Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné 240

8.4.1 Existence d'une utilité progressive pour un portefeuille optimal donné 240

8.4.2 Construction de toutes les utilités progressives de portefeuille optimal donné 243

8.5 Dual progressif 248
8.6 Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire 249
8.6.1 Utilités progressives de type puissances et richesses optimales 250
8.6.2 Aversion au risque aléatoire et portefeuille optimal 250
8.7 Flots et EDP stochastiques 253
8.7.1 Formule d'Itô pour les flots stochastiques et flots inverses 254
8.7.2 EDP stochastique de l'utilité définie à partir de la composition des flots 256
8.8 Retour sur le marché initial 260
8.8.1 Conditions nécessaires d'optimalité dans cet univers et constructions des utilités progressives . . 261
8.8.2 Quelques remarques 262

Résumé : Nous avons vu dans les chapitres précédents comment les méthodes classiques d'équation aux dérivées partielles et de dualité nous permettent de comprendre les processus d'utilités progressives et leur dual convexe. La volatilité Γ de ces utilités joue un rôle fondamental dans ce nouveau concept d'utilités. Le terme Γ'/u' s'interprète comme une prime de risque supplémentaire, entièrement générée par l' utilité stochastique. Par contre, ces approches classiques ne nous permettent pas de répondre à toutes les questions que nous nous sommes posées et qui sont essentiellement : l'unicité, l'existence et surtout comment construire ces utilités dans un cadre général. C'est pour cette raison que nous allons nous intéresser au développement d'une nouvelle approche de ces problèmes d'optimisation de portefeuille même dans le cas classique. L'idée de ce chapitre est très simple, basée sur l'interprétation de la dérivée de l'utilité tout au long de la trajectoire optimale. La nouvelle approche que nous proposons est une approche efficace basée simplement sur des techniques de changement de variables, inversion de flot stochastique et sur les conditions nécessaires d'optimalité que nous rappelons dans une première partie de ce chapitre.
Dans le paragraphe 8.4.1, et sous l'hypothèse de monotonie de la richesse optimale, nous montrons dans le cas où cette richesse X^* est une vraie martingale

qu'il existe au moins une utilité progressive dont l'optimum est X^* et la mesure martingale minimale est constante.
Dans le paragraphe 8.4.2, toujours partant des mêmes idées et hypothèses, et après avoir introduit la notion de flot stochastique et rappelé l'hypothèse de recollement des stratégies, nous proposons de construire toutes les utilités progressives dont le portefeuille optimal est donné. Bien que le fait que la mesure martingale minimale ne soit pas constante soit une difficulté supplémentaire, les preuves ainsi établies dans le cas particulier où les ensembles de contraintes $(\mathcal{K}_t)_{t\geq 0}$ sont des espaces vectoriels se généralisent simplement au cas général des cônes convexes.
Dans une troisième partie de ce chapitre et à l'aide des techniques de composition et d'inversion des flots stochastiques, nous établissons une deuxième preuve des résultats précédents en se basant sur les EDP stochastiques. Ceci nous permet alors de faire le lien avec les résultats des chapitres précédents et de proposer une méthode de résolution des EDP stochastiques associées aux utilités progressives.
Enfin, nous retournons à l'univers d'investissement de départ décrit dans 5.2 et où le taux court et la prime du marché sont notés respectivement par r et η. Puis, nous montrons que les utilités progressives décroissantes étudiées par Zariphopoulou et al. [88] et M. Tehranchi et al. [36] et que nous avons abordées dans 7.7 représentent de bons exemples s'écrivant sous la forme d'une primitive de la composée de deux flots stochastiques inversibles. Ceci vient par conséquent appuyer notre approche.

8.1 Introduction

8.1.1 Motivation

Nous avons vu dans les deux derniers chapitres et particulièrement dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2 que, étant donnés une condition initiale $u(0,.)$ et un ensemble de contraintes $\mathcal{K}$, il existe une très large classe d'utilités *progressives* cohérentes avec ce marché financier et cette condition initiale. En d'autres termes, telles qu'elles sont définies, les utilités progressives ne sont pas uniques, la situation est donc différente de la situation classique, où la fonction de valeurs associée au problème d'optimisation de portefeuille avec utilité terminale donnée est unique. Ceci n'est pas surprenant car le choix de l'utilité aujourd'hui ne fixe pas celle du futur.

L'idée est alors de définir des classes d'équivalence qui rassemblent toutes les utilités progressives ayant certains critères en commun. La question qui se pose essentiellement est la suivante : quel critère choisir pour définir une classe ?

Pour comprendre le choix que nous effectuerons dans la suite, rappelons les notions de base (Chapitre 1) suivantes :

– Une fonction d'utilité est une représentation numérique des préférences d'un agent sur le marché financier. Elle sert à identifier sa stratégie optimale d'investissement selon le critère de l'utilité espérée.

– Dans le cas *classique*, il est bien connu que deux fonctions d'utilités qui ont même aversion au risque sont équivalentes dans le sens où elles génèrent la même richesse optimale à la maturité T, pour tout capital initial x. Ceci est essentiellement dû au fait qu'un investisseur ne fait la différence entre deux utilités que si et seulement si les richesses optimales associés aux deux problèmes d'optimisation sont différentes. En effet, tout ce qui intéresse un agent financier est le gain réalisé à la date de maturité de sa gestion et son risque.

Donc, dire que deux utilités qui ont la même richesse optimale sont équivalentes est un bon critère de définition. Comme les utilités *progressives* sont indépendantes de la maturité, contrairement aux utilités *classiques*, cela revient à imposer que les portefeuilles optimaux soient identiques pour toute richesse initiale et à tout instant $t \geq 0$ et non seulement à l'horizon comme dans le cadre *classique*.

8.1.2 Une nouvelle approche

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives sont très difficiles à exploiter, en particulier il est difficile de caractériser les propriétés de la volatilité qui garantissent que la résolution de l'EDPS conduira à des solutions concaves et monotones. Ces questions sont encore restées sans réponse, sauf dans le cas où la volatilité est nulle (mais le marché non martingale) comme l'ont montré M. Tehranchi et al [36] et Zariphopoulou et al. [88].
Dans ce chapitre nous proposons une troisième manière d'aborder ces questions autour des utilités progressives, qui n'est ni une approche par des équations aux dérivées partielles ni par des méthodes de dualité ; il s'agit tout simplement d'une méthode de changement de variable et d'inversion de flots stochastiques. En effet, puisque nous connaissons plusieurs propriétés de la dérivée d'une utilité progressive tout au long de la trajectoire optimale (c-à-d. $u'(t, X^{x,u})$) données par les propriétés 8.1, la question est la suivante : Pouvons nous tirer plus d'informations sur la dérivée en elle-même $u'(t, x)$ à partir de ces propriétés ?

8.2 Caractérisation des utilités progressives ayant le même portefeuille optimal

8.2.1 Définition des utilités équivalentes

Pour simplifier, nous nous plaçons dans un **marché martingale**, dans lequel le numéraire de marché est pris comme numéraire de référence.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 6, cela implique en particulier qu'il n'y a pas de taux d'intérêt, ni de prime de risque c-à-d. $r = 0$, et $\eta = 0$, et que les richesses admissibles sont des martingales locales.
Utiliser un marché martingale n'est qu'un choix de représentation ; une fois établis les résultats recherchés dans cet univers d'investissement, nous pouvons toujours retraduire les résultats dans n'importe quel marché par la technique du changement de numéraire, que nous avons exposée dans le chapitre 6 ; l'équivalence entre les utilités progressives dans les différents marchés donnée par le

théorème 6.1 est évidemment un résultat clé pour le faire.

Définition 8.1. *Dans un marché martingale donné, deux utilités progressives u et v sont équivalentes si les portefeuilles optimaux correspondants, $X^{x,u}_{.}$ et $X^{x,v}_{.}$, sont indistinguables, pour toute richesse initiale $x > 0$. La classe d'équivalence associée à un processus de richesse optimal $X^*_{.}(x)$ est désignée par $\mathcal{U}(X^*)$.*

8.2.2 Synthèse des conditions d'optimalité

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats et notations, établis dans les chapitres précédents, qui joueront un rôle important dans la suite. Étant donnée une utilité progressive u, les conditions d'optimalité dans un marché "martingale" impliquent que la dérivée de l'utilité étudiée tout au long du portefeuille optimal, c-à-d. $(u'(t, X^{x,u}_t))$, est une martingale locale positive que nous désignons par $(\mathcal{Y}_u(t,x))_{t\geq 0, x>0}$. Nous avons montré dans le théorème 7.6 paragraphe 7.6 du chapitre précédent, que la martingale normalisée $\mathcal{Y}_u(t,x)/\mathcal{Y}_u(0,x)$ est la mesure martingale optimale du problème d'optimisation dual. La notation $\mathcal{Y}$ sert à évoquer que ce processus joue le rôle d'une mesure martingale équivalente et non pas d'une richesse.

Nous rappelons les conditions que doivent satisfaire nécessairement les processus optimaux $X^{x,u}$ et $\mathcal{Y}_u(t,x)$ comme nous les avons établies au théorème 7.1 du paragraphe 7.3. Pour cela, nous commençons par définir un ensemble de propriétés auquel nous nous référerons souvent dans la suite ; sauf mention contraire, nous supposons que le marché de référence est "martingale", contraint par le cône convexe $\mathcal{K}$.

Définition 8.2. *Une famille de couples de semimartingales continues, indexées par un paramètre (de richesse) $x > 0$, $\{(X^x_t, \mathcal{Y}(t,x)); t \geq 0, x > 0\}$ est dite satisfaire les conditions $(\mathcal{O}^*)$ dans le marché martingale contraint par $\mathcal{K}$, si :*

(O1) *Pour tout x>0, le processus $(X^x_t; t \geq 0)$ est un portefeuille admissible, et donc une martingale locale.*

(O2) *Pour tout x>0, le processus $(\mathcal{Y}(t,x); t \geq 0)$ est une martingale locale.*

(O3) *Le processus $\big(X^x_t \mathcal{Y}(t,x); t \geq 0\big)$ est une* **martingale**.

(O4) *Pour toute stratégie admissible* π *et pour tout capital initial* x'*, le processus* $(X_t^{x',\pi}; t \geq 0)$ *est une martingale locale positive, et pour tout* $(x, x') > 0$*, les processus* $(X_t^{x',\pi}\mathcal{Y}(t,x)); t \geq 0)$ *sont des surmartingales positives (des martingales locales si l'espace des contraintes* $\mathcal{K}$ *est un espace vectoriel)*

Nous notons $\mathcal{Z}$ *l'ensemble des couples* $(X, \mathcal{Y})$ *vérifiant les conditions* $(\mathcal{O}^*)$.

Dans l'étude des utilités progressives faite dans les chapitres précédents, nous avons établi le lien entre ces processus et la fonction d'utilité :

Proposition 8.1. *Soit* $X^{x,u}$ *le processus optimal d'une utilité progressive* u *dans un marché martingale contraint par* $\mathcal{K}$.
La dérivée de l'utilité progressive u *le long de la trajectoire optimale est un processus* $\mathcal{Y}_u(t,x)$ *défini par* $(u'(t, X_t^{x,u}))_{t\geq 0, x>0} \overset{def}{=} (\mathcal{Y}_u(t,x))_{t\geq 0, x>0}$.
Le couple $\{(X_t^{x,u}, \mathcal{Y}_u(t,x)); t \geq 0, x > 0\}$ *vérifie les conditions* $(\mathcal{O}^*)$ *(définition 8.2), qui sont donc des conditions nécessaires d'optimalité.*

Par suite, un processus de richesse admissible X^x ne peut être le portefeuille optimal d'une utilité progressive que s'il existe un processus $\mathcal{Y}(t,x)$ tel que le couple $(X^{x,*}, \mathcal{Y}(., x))$ vérifie les propriétés $(\mathcal{O}^*)$.
Remarque Pour l'étude détaillée des deux familles de processus, voir l'étude du chapitre 5.

8.3 Approche par les flots stochastiques

Puisque nous connaissons plusieurs propriétés de la dérivée d'une utilité progressive le long de la trajectoire optimale (c-à-d. $(u'(t, X_t^{x,u})))$ données dans la proposition 8.1, la question est la suivante : Pouvons nous obtenir plus d'information sur la dérivée en elle-même $u'(t,x)$ à partir de ces propriétés ?
Bien que ceci puisse paraître un peu trop demander, car nous cherchons à caractériser la dérivée d'une utilité stochastique à partir de son comportement sur une trajectoire très particulière, la réponse à cette question est positive et simple, si *le processus de richesse optimal est strictement croissant par rapport à sa condition initiale* x.

Cela implique immédiatement que le processus $\mathcal{Y}_u(t,x)$ défini par

$$\mathcal{Y}_u(t,x) \stackrel{def}{=} u'(t, X_t^{x,u})$$

est lui monotone décroissant par rapport à la richesse initiale x.
En notant par $\mathcal{X}^u(t,z)$ l'inverse (par rapport à x) de $X_t^{x,u}$, il est possible de retrouver $u'(t,z)$ à partir de la martingale $\mathcal{Y}_u(t,x)$ et du processus $\mathcal{X}^u(t,z)$ à l'aide de la formule

$$u'(t,z) = \mathcal{Y}_u(t, \mathcal{X}^u(t,z)), \ \forall t \geq 0, z > 0.$$

Cette identité est à la base de la construction que nous proposons dans ce chapitre.

8.3.1 Richesse optimale monotone

Cette hypothèse de monotonie de la richesse optimale est très naturelle car dans les résultats que nous avons établis dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2, la richesse optimale est strictement monotone et même deux fois différentiable par rapport au capital initial x, sous certaines hypothèses additionnelles. Ceci est encore vrai dans le cadre des utilités progressives décroissantes dans le temps, c'est-à-dire le cas d'une volatilité nulle dans un marché non martingale, étudiées dans le paragraphe 7.7 du chapitre précédent (voir l' équation (7.47) et la remarque 7.8). Nous pouvons aussi retrouver ces propriétés de la richesse optimale dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille, utilités puissance, logarithmiques et exponentielles et dans la multitude d'exemples proposés par Huyên Pham dans [94] et par Ioannis Karatzas et Steven Shreve dans [55].

Pour conclure, remarquons que dans un univers sans arbitrage *financièrement* la richesse optimale ne peut être que croissante par rapport à la richesse initiale, car sinon en investissant moins d'argent on pourrait obtenir le même gain. Mathématiquement, des problèmes techniques peuvent apparaître, ce qui conduit à poser cette propriété comme une hypothèse.

Hypothèse 8.1. *Nous désignons par $(X_t^*(x); t \geq 0)$ le processus de richesse* admissible*, qui est le processus optimal d'au moins une utilité progressive. En* *plus des conditions nécessaires, énoncées dans la proposition 8.1, nous supposons que :*

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0, \quad x \mapsto X_t^*(x) \quad \text{est continue strictement croissante,} \\ &\text{et vérifie} \quad X_t^*(0) = 0 \quad X_t^*(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Les seuls processus $\mathcal{Y}(t, x)$ tels que $(X_t^*(x), \mathcal{Y}(t, x))$ vérifient les conditions d'optimalité $\mathcal{O}^*$ définies en (8.2) vérifient également une hypothèse de monotonie, décroissante cette fois-ci,

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0, \qquad x \mapsto \mathcal{Y}(t, x), \text{ est strictement décroissante, positive ;} \\ &\text{et vérifie les} \quad \text{conditions d'Inada si} \quad \mathcal{Y}(t, 0) = +\infty, \quad \mathcal{Y}(t, \infty) = 0. \end{aligned}$$

8.3.2 La richesse optimale comme flot stochastique

L'hypothèse de stricte monotonie de la richesse $(X_t^*(x))$ nous amène naturellement à la considérer comme la valeur partant à la date s d'un capital $X_s^*(x)$ d'un flot stochastique $(X_t^*(s, x))$, que nous définissons ci-dessous. Nous pourrons ensuite considérer la richesse comme partant d'une richesse x à la date 0 ou partant d'une richesse z à la date s.

Proposition 8.2. *Soit un processus $(X_t^*(x))$ strictement monotone par rapport à x à valeurs dans $[0, \infty)$. Son inverse $\mathcal{X}(t, z) = (X_t^*(.))^{-1}(z)$ est aussi un flot strictement monotone, défini sur $[0, \infty)$.*
Nous prolongeons le flot X^* et le flot inverse $\mathcal{X}$ aux dates intermédiaires $(s < t)$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} X_t^*(s, x) &= X_t^*(\mathcal{X}(s, x)) \\ \mathcal{X}_s(t, z) &= (X_t^*(s, .))^{-1}(z) = X_s^*(\mathcal{X}(t, z)). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Les règles de composition des flots sont alors valables pour $X_t^*(s, x)$ et $\mathcal{X}_s(t, z)$.

(i) *l'égalité $X_t^*(s, x) = X_t^*(\alpha, X_\alpha^*(s, x))$ est vraie pour tout $0 \leq \alpha \leq s \leq t$ p.s..*
l'égalité $\mathcal{X}_s(t, z) = \mathcal{X}_s(\alpha, \mathcal{X}_\alpha(t, z))$ est vraie pour tout $0 \leq s \leq \alpha \leq t$ p.s..

(ii) *On a toujours $X_t^*(t, x) = x, \mathcal{X}_t(t, z) = z$, et plus généralement*
$\mathcal{X}_s(t, X_t^*(s, x)) = x, \quad X_t^*(s, \mathcal{X}_s(t, x)) = x$, pour tout $0 \leq s \leq t$.

Pour plus de détails ainsi que des propriétés plus précises, voir l'appendice A.6, et plus généralement le livre de Kunita [74], et les articles [67, 73, 72, 66, 71, 77] pour la théorie générale des flots stochastiques.
Par le même raisonnement du paragraphe 5.4.3 du chapitre 5, nous supposons dans toute la suite que l'hypothèse de recollement 5.3 est satisfaite, à savoir :

Hypothèse 8.2. *Pour toutes stratégies π^1 admissible entre la date 0 et la date t_1 et π^2 admissible entre la date t_1 et la date t_2, la stratégie π associée au vecteur de proportions δ défini par $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$ est une stratégie admissible sur l'intervalle $[0, t_2]$ et ce quels que soient t_1 et t_2 tels que $0 \leq t_1 \leq t_2$.*
δ^1 et δ^2 désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies π^1 et π^2.

Remarque 8.1. *Il est important de noter que la stratégie π dans cette hypothèse est différente de la stratégie d'investissement $\hat{\pi} = \pi^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \pi^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$, car ceci dépend du niveau de la richesse à la date t_1.*

Cette hypothèse nous permet essentiellement de déduire que les richesses à l'instant t, partant de x à une date intermédiaire s et notées par $(X_t^\pi(s,x))_{t \geq s}$ sont admissibles, en particulier la richesse $(X_t^*(s,x))_{t \geq s}$. En effet, il suffit de prendre la richesse $\mathcal{X}(s,x)$ comme richesse initiale, de suivre la stratégie π^1 jusqu'a la date s, puis à partir de cette date s, à la quelle nous observons une richesse x, de considérer la stratégie π. Ce qui est équivalent à l'identité

$$X_t^{\hat{\pi}}(\mathcal{X}(s,x)) = X_t^\pi(s, X_s^*(\mathcal{X}(s,x)) = X_t^\pi(s,x).$$

8.4 Construction des utilités progressives de portefeuille optimal donné

8.4.1 Existence d'une utilité progressive pour un portefeuille optimal donné

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, notre objectif est de construire les utilités progressives de portefeuille optimal donné, sur le marché financier martingale où les portefeuilles sont contraints par $\mathcal{K}$, sous l'hypothèse de richesse X^* strictement monotone. L'étude précédente montre que si la richesse optimale est une martingale, (et non seulement une martingale locale), la mesure martingale $\mathcal{Y}(t,x)/\mathcal{Y}(0,x) = 1$ est admissible au sens où le couple $(X^*, \mathcal{Y}(0,x))$ vérifie les conditions $\mathcal{O}^*$ de la définition 8.2. Choisissons la condition initiale de $\mathcal{Y}(0,x) = u_0'(x)$ comme la dérivée d'une fonction concave, vérifiant les conditions d'Inada. La remarque 8.1 suggère une forme très simple pour associer une utilité progressive $u(t,x)$ de portefeuille optimal monotone donné. Si $\mathcal{X}(t,z)$ est l'inverse du flot $X_t^*(x)$, le processus croissant $u(t,x)$, valant 0 en 0, de dérivée

$$u'(t,x) = u_0'(\mathcal{X}(t,x))$$

est un bon candidat pour être une utilité progressive, puisque, étant donnée la monotonie du flot $\mathcal{X}(t,x)$, la fonction $u'(t,x)$ reproduit les propriétés de monotonie et de signe de la fonction $u_0'(x)$. Une autre propriété remarquable de ce champ aléatoire est que $u'(t, X_t^*(x)) = u_0'(x)$, ce qui est une autre manière d'exprimer que la mesure martingale optimale est constante. Nous sommes alors en mesure d'énoncer l'un des résultats importants de cette section.

Théorème 8.1. *Soit $X_t^*(x)$ un processus de portefeuille admissible, monotone par rapport à la condition initiale, et* **martingale**. *Désignons par $\mathcal{X}(t,z)$ le flot inverse associé.*
Pour toute fonction d'utilité u_0 telle que $u_0'(\mathcal{X}(t,z))$ soit intégrable au voisinage de $z=0$, le processus stochastique

$$u(t,x) = \int_0^x u_0'(\mathcal{X}(t,z))dz, \quad u(t,0) = 0 \tag{8.2}$$

est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par $\mathcal{K}$, admettant X^* comme processus optimal, et la martingale constante comme mesure martingale optimale.

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes. La première consiste à montrer que si le processus d'utilité considéré tout au long de la stratégie optimale est une martingale, alors le processus X^* est optimal, ou ce qui est équivalent, l'utilité conditionnelle de n'importe quel portefeuille admissible, de richesse optimale à une date intermédiaire égale à x est plus faible que celle de X^*. La seconde étape est alors de montrer que le processus $u(t, X_t^*(x))$ est une martingale.

Démonstration. de l'optimalité de X^*, si $u(t, X_t^*(x))$ est une martingale locale. Pour montrer ce résultat, nous nous appuyons sur les flots stochastiques générés par le processus de richesse optimal et son inverse comme dans la section précédente 8.3.2. En effet pour comparer les utilités conditionnelles, vues de la date s, nous nous limitons aux portefeuilles dont la richesse à la date s est la même et vaut x. Du point de vue du portefeuille admissible X^*, cela revient à travailler pour $s \leq t$ avec le flot $X^*_.(s,x)$, et son inverse $\mathcal{X}_s(t,z)$.
Considérons un processus de richesse admissible, $(X_t^\pi(s,x); s \leq t)$, de richesse initiale à la date s égale à x. Par concavité de $u(t,x)$, nous avons les inégalités trajectorielles suivantes,

$$u\big(t, X_t^\pi(s,x)\big) - u\big(t, X_t^*(s,x)\big) \leq \big(X_t^\pi(s,x) - X_t^*(s,x)\big)u'\big(t, X_t^*(s,x)\big).$$

D'après les propriétés de la proposition 8.2 du flot stochastique $X_t^*(s,x)$ et de son inverse $\mathcal{X}_s(t,z)$, nous voyons sans peine que comme pour la date initiale 0, pour la date s prise comme nouvelle date de départ, $u'\big(t, X_t^*(s,x)\big) = u'(s,x)$. Revenons au membre de droite de l'inégalité, qui est transformé en $\big(X_t^\pi(s,x) - X_t^*(s,x)\big)u'(s,x)$. Puisque le portefeuille $X^\pi_.$ est admissible dans un marché martingale, le processus $X_t^\pi(s,x)$ est une surmartingale, d'espérance conditionnelle vue de s inférieure à x. D'autre part, le processus $X_t^*(s,x)$ est par hypothèse une vraie martingale. Par suite, l'espérance conditionnelle du membre de droite est négatif. On en déduit que celle du membre de gauche l'est aussi, et donc

$$\mathbb{E}\big(u(t, X_t^\pi(s,x)/\mathcal{F}_s\big) \leq \mathbb{E}\big(u(t, X_t^*(s,x))/\mathcal{F}_s\big) \leq u(s,x)$$

si nous utilisons le fait que nous montrerons ci-dessous que $u(t, X_t^*(s,x))$ est une martingale locale, et donc une surmartingale positive. □

La deuxième étape qui a un intérêt pour elle-même est énoncée sous forme de lemme.

Lemme 8.1. *Pour tout $s \geq 0$ le processus $(u(t, X_t^*(s,x)))_{t \geq s}$ est une martingale. En particulier elle est donnée par*

$$u(t, X_t^*(s,x)) = \int_0^{\mathcal{X}(s,x)} u_0'(z)\, d_z X_t^*(z) = u'(s,x)X_t^*(s,x) - \int_0^{\mathcal{X}(s,x)} X_t^*(z) du_0'(z).$$

Démonstration. Par définition,

$$u(t, X_t^*(s,x)) = \int_0^{X_t^*(s,x)} u_0'(\mathcal{X}(t,z))dz$$

Dans la suite, nous notons $\tilde{u}_0'(y) = (u_0')^{-1}(y)$, et rappelons que d'après les conditions d'Inada $u_0'(0) = +\infty$.
Faisons ensuite le changement de variable croissant $z' = \mathcal{X}(t,z)$, qui est équivalent à $z = X_t^*(z')$, ceci donne

$$u(t, X_t^*(s,x)) = \int_0^{\mathcal{X}(s,x)} u_0'(z)\, d_z\, X_t^*(z)$$

La notation $d_z X^*$ est utilisée pour rappeler que nous considérons une différentielle en z.
Il s'ensuit que par une simple intégration par parties,

$$u(t, X_t^*(s,x)) = u'(s,x)X_t^*(s,x) - \int_0^{\mathcal{X}(s,x)} X_t^*(z)du_0'(z).$$

Comme $(X_t^*(s,x))_{t\geq s}$ est une "vraie" martingale et comme la borne supérieure de l'intégrale $\mathcal{X}(s,x)$ peut être considérée comme une constante ($s \leq t$), d'après le théorème de Fubini-Tonelli, l'intégrale en z de $(X_t^*(z),\ t \geq s)$ par rapport à $du_0'(z)$ est encore une martingale. Par conséquent $(u(t, X_t^*(s,x)))_{t\geq s}$ étant la différence de deux martingales est une martingale. □

8.4.2 Construction de toutes les utilités progressives de portefeuille optimal donné

Nous avons montré dans le théorème 8.1 que pour toute richesse optimale monotone X^*, si X^* est une vraie martingale, nous pouvons construire au moins une utilité progressive de richesse optimale X^* et de mesure martingale optimale constante.
Nous nous posons maintenant la question de déterminer les utilités progressives associées à des mesures martingales plus générales $\mathcal{Y}$ telles que les conditions d'optimalité $\mathcal{O}^*$ soient satisfaites pour le couple $(X^*, \mathcal{Y})$. Comme nous l'avons vu, l'intuition est de rechercher u sous la forme $u'(t,x) = \mathcal{Y} o \mathcal{X}(t,x)$, où $\mathcal{X}(t,x)$ est le flot inverse de X^*. La condition de monotonie de X^* entraîne que le flot

$\mathcal{Y}$ doit être monotone décroissant pour garantir que $u'(t,x)$ est décroissant.
En résumé, rappelons les hypothèses que doivent satisfaire le couple $(X^*, \mathcal{Y})$ dans un marché martingale contraint par $\mathcal{K}$.

(M1) Les champs aléatoires $(X_t^*(x); x \geq 0, t \geq 0)$ et $(\mathcal{Y}(t,x); x \geq 0, t \geq 0)$ sont strictement monotones : $X_t^*(x)$ est croissant de 0 à $+\infty$, alors que $\mathcal{Y}(t,x)$ est décroissant de $+\infty$ à 0, de sorte que les conditions d'Inada sont satisfaites. $\mathcal{Y}(0,x)$ est une fonction décroissante, notée $u_0'(x)$. On suppose de plus que $\mathcal{Y}(t,x)$ est intégrable en x, au voisinage de $x = 0$.

(O1) Pour tout x, $(X_t^*(x))_{t\geq 0}$ est un portefeuille de richesse admissible, et donc une martingale locale. De même, le processus $(\mathcal{Y}(t,x))_{t\geq 0}$ est une martingale locale positive

(O2) Pour tout $x > 0$, le processus $(X_t^{x,*}\mathcal{Y}(t,x))_{t\geq 0}$ est une "vraie" martingale.

(O3) Pour toute stratégie admissible π et pour tout capital initial x et x', le processus $(X_t^\pi(x')\mathcal{Y}(t,x))_{t\geq 0}$ est une surmartingale positive, (une martingale locale dans le cas où l'espace des contraintes $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel.)

Lorsque les contraintes sont décrites par un espace vectoriel, la condition (**O3**) implique que la martingale locale $\mathcal{Y}(t,x)_{t\geq 0}$ est orthogonale aux processus de richesse admissibles $X_t^\pi(x')$ pour tout $\pi \in \mathcal{K}$. Ceci implique que sa volatilité est dans l'espace $(\mathcal{K})^\perp$ orthogonal de $\mathcal{K}$.
Une des conséquences de cette propriété est que la propriété de martingale du processus de richesse $(X_t^*(x)\mathcal{Y}(t,x))_{t\geq 0, x>0}$ s'étend à la dérivée (si elle existe) du processus X^* par rapport à x. Pour justifier le passage à la limite induit par la dérivation, nous sommes amenés à supposer une hypothèse de "domination" sur le processus de richesse optimal. Remarquons que cette hypothèse n'est introduite que pour justifier le résultat de la proposition 8.3, qui suit.

Hypothèse 8.3. *H1 local) Pour tout x, il existe un processus adapté positif et intégrable, $U_t(x) > 0$ tel que si $\mathbf{B}(x,\alpha)$ désigne la boule de centre x et de rayon α*

$$\forall y, y' \in \mathbf{B}(x,\alpha), |X_t^*(y) - X_t^*(y')| < |y - y'|\, U_t(x),\ t \geq 0. \tag{8.3}$$

H2 global) On suppose de plus que $U_t(x)$ est croissant par rapport à x et que $U^I_t(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t,z)U_t(z)dz$ est une variable intégrable pour tout $t \geq 0$.

Sous cette hypothèse, nous avons le résultat suivant qui nous sera d'une grande utilité pour la suite.

Proposition 8.3. *Supposons l'hypothèse 8.3. Si la dérivée par rapport à x du processus croissant $X^*_t(x)$, notée $D_x X^*_t(x)$ existe en tout point x, alors $\mathcal{Y}(t,x)D_x X^*_t(x)$ est une martingale.*
Plus généralement, sans hypothèse de dérivabilité, il en est de même du processus

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t,z)d_z X^*_t(z). \tag{8.4}$$

Remarque 8.2. *Nous montrons dans la preuve du théorème 8.2, que la quantité*

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t,z)d_z X^*_t(z).$$

n'est autre que $u(t, X^*_t(x))$ où u est un processus que nous définissons dans la suite. En particulier, cette proposition n'est autre qu'une généralisation du lemme 8.1 où nous remplaçons la quantité déterministe u'_0 par le processus $\mathcal{Y}$.

Démonstration. a) Nous commençons par supposer $X^*_t(x)$ dérivable en x. Pour $0 < \epsilon < \alpha$, le processus $\mathcal{Y}(t,x)\big(X^*_t(x+\epsilon) - X^*_t(x)\big)$ est une surmartingale positive, et donc d'après l'hypothèse 8.3 il en est de même de sa dérivée à droite en ϵ, soit $\mathcal{Y}(t,x)D^+_x X^*_t(x)$ est une surmartingale positive.
Le même raisonnement fait en regardant la dérivée à gauche montre que

$$\mathcal{Y}(t,x)\big(X^*_t(x) - X^*_t(x-\epsilon)\big)$$

est une martingale locale positive dans le cas des contraintes de type espace vectoriel. L'hypothèse 8.3 implique que cette martingale locale est une vraie martingale, et que la propriété passe à la limite quand ϵ tend vers 0. Comme le processus est supposé dérivable, nous avons établi la propriété recherchée.
Dans le cas des contraintes de type cône, $\mathcal{Y}(t,x)\big(X^*_t(x) - X^*_t(x-\epsilon)\big)$ est une sous-martingale positive. L'hypothèse 8.3 est utilisée pour montrer que l'on peut

encore passer à la limite et déduire que $\mathcal{Y}(t,x)D_x^- X_t^*(x)$ est une sousmartingale positive. Comme par l'hypothèse de dérivabilité faite sur X^*, $D_x^- X_t^*(x) = D_x^+ X_t^*(x) = D_x X_t^*(x)$, le processus positif $\mathcal{Y}(t,x)D_x X_t^*(x)$ est une sous et surmartingale donc une martingale.

b) Dans le cas général, nous utilisons les sommes de Darboux pour étudier les propriétés de l'intégrale $S(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t,z)d_z X_t^*(z)$. Nous faisons donc une subdivision de $[0,x]$ en intervalles $]z_n, z_{n+1}]$, dont le pas tend vers 0. Nous considérons les deux suites d'approximation par au-dessous ou par au-dessus,

$$\begin{aligned} S_N(t,x) &= \sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t,z_n)\big(X_t^*(z_{n+1}) - X_t^*(z_n)\big) \\ S'_N(t,x) &= \sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t,z_{n+1})\big(X_t^*(z_{n+1}) - X_t^*(z_n)\big). \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que ci-dessus, la suite $S_N(t,x)$ est une surmartingale positive, alors que la suite $S'_N(t,x)$ est une sous-martingale positive, et une martingale locale positive si les contraintes forment un espace vectoriel.

Dans tous les cas, grâce à l'hypothèse 8.3 , les processus positifs $S_N(t,x)$ et $S'_N(t,x)$ sont majorés par

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \mathcal{Y}(t,z_{n+1})U_t(z_{n+1})$$

et donc sous l'hypothèse 8.3 global, ces sommes sont majorées par $U_t^I(x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t,z)U_t(z)dz$. Par suite, les propriétés de sous et surmartingale passent à la limite et donc

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t,z)d_z X_t^*(x)$$

est une martingale. □

Nous avons maintenant tous les éléments pour construire des utilités progressives de portefeuille optimal donné.

Théorème 8.2. *Soit un marché martingale, d'espace de contraintes $\mathcal{K}$. Nous nous donnons :*

– un processus de richesse admissible $(X_t^*(x)); x > 0$*, qui est une martingale locale strictement monotone par rapport à* x*, dont le processus inverse est désigné par* $\mathcal{X}(t,x)$*.*

– une famille $(\mathcal{Y}(t,x)); x \geq 0$ *de martingales locales strictement positives, strictement décroissantes par rapport à* x *satisfaisant les conditions d'Inada,* $\mathcal{Y}(t,0) = +\infty, \quad \mathcal{Y}(t,+\infty) = 0$*, et telles que* $\mathcal{Y}(t,x)$ *soit intégrable au voisinage de* $x = 0$*. En particulier, la condition initiale* $\mathcal{Y}(0,x) = u_0'(x)$ *est une fonction décroissante satisfaisant les conditions d'Inada.*

– On suppose que le couple satisfait les conditions nécessaires d'optimalité rappelées en 8.4.2, qui impliquent notamment que la volatilité du processus $\mathcal{Y}(t,x)$ *appartiennent au cône orthogonal de l'espace des contraintes.*

– Les processus $(\mathcal{Y}(t,x)X_t^*(x); x > 0)$ *sont des vraies martingales.*

Définissons un processus d'utilité stochastique, concave et croissante, par

$$u(t,x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t,z))dz. \tag{8.5}$$

Sous l'hypothèse 8.3, $u(t,x)$ *est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par* $\mathcal{K}$*, de condition initiale* u_0 *admettant* X^* *comme processus optimal, et la martingale locale* $\mathcal{Y}(t,x)/\mathcal{Y}(0,x)$ *comme mesure martingale optimale.*

Dans le premier exemple, pour une utilité initiale donnée, nous construisons une utilité progressive de portefeuille optimal donné. L'extension que nous donnons ici, qui à des points techniques près, caractérise toutes les utilités progressives équivalentes à la précédente, exprime seulement comment on doit diffuser la fonction $u_0'(x)$ pour rester dans le cadre des utilités progressives. La réponse est intuitive puisqu'elle exprime qu'il suffit de garder un champ monotone décroissant de martingales qui n'influent pas sur le marché de référence.

Démonstration. La preuve se fait en deux étapes, comme dans la construction de la section précédente. La cohérence avec l'univers d'investissement repose sur deux propriétés essentielles :

– d'une part sur le fait que $u'(t, X_t^*(x)) = \mathcal{Y}(t,x)$ et donc que pour tout portefeuille admissible, $X_t^\pi(x)u'(t, X_t^*(x))$ est une surmartingale,

– d'autre part que le processus $X_t^*(x)u'(t, X_t^*(x))$ est une "vraie" martingale,

– et enfin sur le fait que $u(t, X_t^*(x))$ est une martingale.

Il n'y a pas de modification à apporter à la preuve du théorème 8.1, pour montrer que la compatibilité avec l'univers d'investissement est automatique si nous montrons $u(t, X_t^*(x))$ est une martingale.
Pour se faire, nous procédons comme dans l'exemple précédent en écrivant que $u(t, X_t^*(x)) = \int_0^{X_t^{x,\pi}} \mathcal{Y}o\mathcal{X}(t, z')dz' = \int_0^\infty \mathcal{Y}o\mathcal{X}(t, z')\mathbb{1}_{\{0 \leq z' \leq X_t^*(x)\}}dz'$.
Faisons le changement de variable un peu différent $\mathcal{X}(t, z') = z$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} u(t, X_t^*(x)) &= \int_0^\infty \mathcal{Y}(t, z)\mathbb{1}_{\{0 \leq X^*(t,z) \leq X_t^*(x)\}}d_z(X^*(t, z)) \\ &= \int_0^x \mathcal{Y}(t, z)d_z(X^*(t, z)) \end{aligned}$$

puisque par stricte monotonie de $X_t^*(x)$,

$$X^*(t, z) \leq X_t^*(x) \Longleftrightarrow z \leq x.$$

Puisque nous avons montré dans la proposition 8.3 que

$$\int_0^x \mathcal{Y}(t, z)d_z(X^*(t, z))$$

est une vraie martingale, il en est de même du processus $u(t, X_t^*(x))$. □

8.5 Dual progressif

En termes de dual convexe d'utilité progressive, les résultats des paragraphes précédents peuvent s'énoncer sous la formulation duale suivante :

Théorème 8.3. *Soit $X_t^*(x)$ un processus de portefeuille admissible, monotone par rapport à la condition initiale, et* **martingale**. *Pour toute fonction d'utilité u_0 dont le dual convexe est noté $\tilde{u}_0$, le processus stochastique $\tilde{u}$ défini par*

$$\tilde{u}(t, y) = \int_y^{+\infty} X_t^*(\tilde{u}_0'(z))dz, \tag{8.6}$$

est le dual convexe d'une utilité progressive u dans le marché martingale contraint par $\mathcal{K}$, admettant X^* comme processus optimal, et la martingale constante *comme mesure martingale optimale. En particulier, sa dérivée n'est qu'une simple transformation de la richesse X^*, donnée par*

$$\tilde{u}'(t,y) = -X_t^*(\tilde{u}_0'(y)) \tag{8.7}$$

Sinon dans un cadre plus général :

Théorème 8.4. *Soit un marché martingale, d'espace de contraintes $\mathcal{K}$. Nous nous donnons :*

– un processus de richesse admissible $(X_t^*(x)); x > 0$, qui est une martingale locale strictement monotone par rapport à x.

– une famille $(\mathcal{Y}(t,x)); x \geq 0$ de martingales locales strictement positives, strictement décroissante par rapport à x satisfaisant les conditions d'Inada, $\mathcal{Y}(t,0) = +\infty, \quad \mathcal{Y}(t,+\infty) = 0$, et telles que $\mathcal{Y}(t,x)$ soit intégrable au voisinage de $x = 0$. En particulier, la condition initiale $\mathcal{Y}(0,x) = u_0'(x)$ est une fonction décroissante satisfaisant les conditions d'Inada.

– On suppose que le couple satisfait les conditions nécessaires d'optimalité rappelées en 8.4.2, qui impliquent notamment que la volatilité du processus $\mathcal{Y}(t,x)$ appartiennent au cône orthogonal de l'espace des contraintes.

– Les processus $(\mathcal{Y}(t,x)X_t^*(x); x > 0)$ sont des vraies martingales.

Définissons le processus stochastique $\tilde{u}$ par

$$\tilde{u}(t,y) = \int_y^{+\infty} X_t^*((\mathcal{Y})^{-1}(t,z))dz. \tag{8.8}$$

Sous l'hypothèse 8.3, $\tilde{u}(t,y)$ est le dual convexe d'une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par $\mathcal{K}$, admettant X^* comme processus optimal, et la martingale locale $\mathcal{Y}(t,x)/\mathcal{Y}(0,x)$ comme mesure martingale optimale.
En particulier,

$$\tilde{u}'(t,y) = -X_t^*((\mathcal{Y})^{-1}(t,y)). \tag{8.9}$$

8.6 Exemple basé sur une aversion au risque aléatoire

L'idée de ce paragraphe est de construire, à partir d'utilités progressives simples indexées par un paramètre α, une utilité progressive plus générale et ce en raisonnant uniquement en termes de richesses optimales et en considérant des tirages aléatoires du paramètre α. Les utilités puissances, dans ce qui suit, sont des exemples concrets pour illustrer la méthode proposée.

8.6.1 Utilités progressives de type puissances et richesses optimales

Nous avons vu dans le chapitre 4 de ce manuscrit, que les utilités progressives de type puissance sont de la forme

$$u_\alpha(t,x) = Z_t^\alpha \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{8.10}$$

où Z est un processus strictement positif de la forme,

$$\frac{dZ_t^\alpha}{Z_t^\alpha} = -\frac{1-\alpha}{2\alpha}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\gamma_t)\|^2 dt + \gamma_t dW_t, \quad Z_0 = 1.$$

Comme la partie orthogonale de Z^α n'a aucune influence sur les portefeuilles, nous supposons que $\gamma_t \in \mathcal{K}_t\sigma_t,\ t \geq 0$ pour simplifier l'approche.
La richesse optimale $X^{*,\alpha}$ donnée par

$$X_t^{*,\alpha}(x) = xX_t^{*,\alpha}(1) = xe^{\frac{1}{\alpha}\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2\alpha^2}\int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds} \tag{8.11}$$

est une vraie martingale, linéaire par rapport à sa condition initiale x.
La mesure martingale optimale $\mathcal{Y}^\alpha$ associée est constant, donnée par

$$\mathcal{Y}^\alpha(t,x) = u'_\alpha(t, X_t^{*,\alpha}(x)) = x^{-\alpha}.$$

8.6.2 Aversion au risque aléatoire et portefeuille optimal

À ce stade le coefficient α, qui joue le rôle de l'aversion au risque relative, était supposé constant, il s'agit du cas le plus simple des utilités puissances progressives. Mais il est tout à fait concevable que l'aversion au risque d'une utilité progressive est en général aléatoire. En effet, nous pouvons imaginer, à la date $t = 0$, que l'investisseur tire au hasard la valeur de ce coefficient. À chaque réalisation α il associe :

- un poids $\nu(\alpha)$ (ν est une mesure positive finie),

- une proportion $x_\alpha(x)$ de sa richesse initiale (strictement croissante en x, $x_\alpha(x) \to \infty$ si $x \to \infty$) qu'il va investir sur le marché financier en considérant u_α comme utilité, il réalisera ainsi $X^{*,\alpha}(x_\alpha(x))$ comme richesse (associée à ce tirage).

Sa richesse finale, par conséquent, est la somme pondérée par ν de toutes ses richesses $X^{*,\alpha}(x_\alpha(x)) = x_\alpha(x)X^{*,\alpha}(1)$, c-à-d.

$$\begin{cases} X_t^*(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) X_t^{*,\alpha}(1)\nu(d\alpha) \\ x = \int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x)\nu(d\alpha). \end{cases} \tag{8.12}$$

De manière analogue, en raisonnant par dualité, nous définissons le processus $\mathcal{Y}$ par

$$\mathcal{Y}(t,x) = \mathcal{Y}(0,x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} (x_\alpha(x))^{-\alpha} d\nu(\alpha) \tag{8.13}$$

que nous supposons **bien défini et intégrable au voisinage de** 0. Dans la suite, nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse 8.4. *Supposons qu'il existe un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}_+^*$ tel que la volatilité γ de Z satisfait*

$$\mathbb{E}(e^{k\int_0^t \Pi_{\mathcal{K}_s\sigma_s}(\gamma_s)dW_s - \frac{k^2}{2}\int_0^t \|\Pi_{\mathcal{K}_s\sigma_s}(\gamma_s)\|^2 ds}) = 1, \ \forall k \in \mathcal{I}, t \geq 0$$

nous montrons alors le résultat suivant :

Proposition 8.4. *Supposons que l'hypothèse 8.4 est satisfaite. Alors si la mesure ν est à support dans $\mathcal{I}$, le processus X^* est une richesse* **admissible** *strictement croissante en x et une vraie* **martingale***.*

Démonstration. En effet, par définition X^* est une martingale locale positive, dont la volatilité est donnée par

$$[\int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x) X_t^{*,\alpha}(1)\frac{\nu(d\alpha)}{\alpha}]\gamma_t.$$

Puisque le terme $[\int_{\mathbb{R}_+^*} x_\alpha(x)X_t^{*,\alpha}(1)\frac{\nu(d\alpha)}{\alpha}]$ est strictement positif, $\gamma \in \mathcal{K}\sigma$ et les contraintes sont de types cônes (stable par multiplication positive), la stratégie

ci-dessus est bien dans l'ensemble des contraintes, de plus X^*, ci-dessus, est positive et ce par définition c'est donc une richesse admissible. X^* est strictement croissante en x est une simple conséquence de la stricte croissance des proportions $x_\alpha(.)$ et le fait que $X^{*,\alpha}(1)$ est indépendant de x.
Le fait que X^* défini ci-dessus est une vraie martingale est une simple conséquence de l'hypothèse 8.4 et du théorème de Fubini.

□

Les hypothèses du théorème 8.1 sont alors satisfaites, nous déduisons d'après ce théorème, sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, que pour toute fonction d'utilité u_0, telles que $u_0'(\mathcal{X}(t,x))$ est intégrable au voisinage de 0, le processus stochastique u défini par

$$\begin{cases} u(t,x) = \int_0^x u_0'(\mathcal{X}(t,z))dz \\ u(t,0) = 0. \end{cases} \tag{8.14}$$

est une utilité progressive, dans le marché martingale contraint par $\mathcal{K}$, admettant X^* comme processus optimal, et la martingale constante comme mesure martingale optimale.

Cas particulier : utilités progressives décroissantes

Par contre il existe une fonction d'utilité u_0 très particulière. Cette fonction n'est autre que $\mathcal{Y}(0,x)$ définie dans (8.13), en termes de dual convexe de l'utilité progressive u associée à cette condition initiale, nous savons d'après le théorème 8.3, que $\tilde{u}$ est donnée par

$$\tilde{u}(t,y) = \int_y^{+\infty} X_t^*(\mathcal{Y}^{-1}(0,z))dz = \int_{\mathbb{R}_+^*} \big(\int_y^{+\infty} x_\alpha(\mathcal{Y}^{-1})dz\big) X_t^{*,\alpha}(1)d\nu(\alpha)$$

où

$\mathcal{Y}^{-1}(0,x)$ désigne l'inverse en x de $\mathcal{Y}(0,x)$.

Si de plus nous choisissons les fonctions x_α telles que

$$x_\alpha(x) = (\mathcal{Y}(0,x))^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Cette dernière identité devient, après intégration en z,

$$\tilde{u}(t,y) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} \big(1 - y^{1-\frac{1}{\alpha}} X_t^{*,\alpha}(1)\big) d\nu(\alpha)$$

ce qui n'est autre que la représentation, dans le marché martingale, des **utilités progressives décroissantes dans le temps**, que nous avons abordées à la fin du chapitre précédent au paragraphe 7.7. Ces utilités ont été étudiées essentiellement par Zariphopoulou et al. [88] et par M. Tehranchi et al. [36]. Dans [88], M. Musiela et T. Zariphopoulou ont développé plusieurs exemples avec des mesures ν particulières ainsi que les propriétés de la richesse optimale.

Quelques remarques

Dans la construction ci-dessus, la famille $\{X^{*,\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$ constitue la famille de richesses optimales associées à des utilités progressives $\{u_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$ de type puissance données par (8.10). Il est important de noter, ensuite, que le processus de construction que nous avons proposé dans ce paragraphe se généralise facilement et n'est pas spécifique aux utilités puissances. En effet, nous pouvons considérer une famille quelconque de richesses $\{X^{*,\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+^*\}$ indexée par un paramètre α, associée à des utilités progressives qui ne sont pas forcément du même type. Ainsi par le même raisonnement il est facile de construire la richesse X^*. Par contre, nous notons le fait que les $X^{*,\alpha}$ sont toutes des martingales a joué un rôle fondamental pour satisfaire les conditions d'optimalité. Cette propriété, dans un cas plus général, peut alors être remplacée par $X^{*,\alpha}, \alpha \in R_+^*$ sont des martingales sous la même probabilité $\mathbb{Q}$.
NB : Le point clé de cette section est de raisonner directement en termes de richesse optimale et non pas en termes d' utilité progressive. Et ce pour la simple raison que la somme de deux utilités progressives n'est pas une utilité progressive, sauf dans le cas très particulier où les deux richesses optimales et les deux mesures martingales (locales) optimales sont identiques. Par contre la somme de deux richesses admissibles est toujours une richesse admissible.

8.7 Flots et EDP stochastiques

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié les utilités progressives de portefeuille optimal monotone donné par des méthodes de changement de variables et d'analyse convexe, ce qui permet notamment de faire des hypothèses minimales.

Il est naturel d'essayer d'étudier les propriétés de ces utilités progressives, définies comme composées de flots stochastiques (8.5), notamment leur volatilité, par des méthodes de calcul stochastique, qui exigeront bien sûr plus de régularité sur les flots qui interviennent. Les outils sont la formule d'Itô-Ventzel 5.1 appliquée au flot stochastique composé $\mathcal{Y}o\mathcal{X}$, qui demande des propriétés de régularité telles que nous avons rappelées dans le paragraphe 5.4.1.
Nous commençons par établir une formule de composition des flots dans un résultat préliminaire. Une formule qui nous sera d'une grande utilité pour démontrer le résultat principal de cette section et faire le lien avec les résultats des chapitres précédents, notament la dynamique (6.40) satisfaite par les utilités progressives dans un marché où les richesses sont des martingales locales.

8.7.1 Formule d'Itô pour les flots stochastiques et flots inverses

Soient ϕ et ψ deux flots stochastiques, unidimensionnels, dont les dynamiques sont les suivantes,

$$d\phi(t,x) = \mu(t,x)dt + \gamma(t,x)dW_t,$$
$$d\psi(t,x) = \alpha(t,x)dt + \nu(t,x)dW_t.$$

Le but de ce paragraphe est d'établir, sous les bonnes hypothèses, la dynamique du flot composé $\phi o \psi$ dans un premier temps, puis d'établir, si ϕ est inversible, la dynamique de son inverse que nous noterons ξ.
Pour cela, toujours d'après la théorie des flots stochastiques développée en particulier dans le livre de H. Kunita [74] et rappelée en Appendice A.6, nous faisons les hypothèses permettant d'appliquer le lemme d'Itô-Ventzel et nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 8.5. [1] *Supposons que les flots ϕ et ψ sont tels que $\phi(t,x)$ un $\mathcal{C}^2$-processus et une $\mathcal{C}^1$-semimartingale tel que ses caractéristiques locales (μ,γ) sont dans la classe $\mathcal{B}^{1,0}$ et $\psi(t,x)$ est une semimartingale continue à valeurs dans*

[1] Les définitions des classes $\mathcal{B}^{m,\delta}$, $\mathcal{C}^m$-processus et $\mathcal{C}^{m'}$ semimartingales sont fournies dans les sections A.2 et A.11.

$\mathcal{I}$ le domaine de ϕ . Alors le flot composé $\phi o\psi(t,x)$ est une semimartingale continue obéissant à la dynamique

$$\begin{aligned} d(\phi o\psi)(t,x) &= \mu(t,\psi(t,x))dt + \gamma(t,\psi(t,x))dW_t \\ &+ \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\psi(t,x))d\psi(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,\psi(t,x))||\nu||^2(t,x)dt \\ &+ \langle\frac{\partial\gamma}{\partial x}(t,\psi(t,x)),\nu(t,x)\rangle dt. \end{aligned} \tag{8.15}$$

La volatilité du flot composé est donnée par

$$\sigma_t^{\phi o\psi} = \gamma(t,\psi(t,x)) + \frac{\partial\phi}{\partial x}(t,\psi(t,x))\nu(t,x).$$

Nous particularisons maintenant la formule au cas des flots et de leurs inverses. Partant d'un flot ϕ de coefficients (μ,γ), vérifiant les hypothèses du théorème 8.5, nous notons $\xi(t,y)$ son inverse, et ses coefficients (α^ξ,ν^ξ).

Lemme 8.2. *Si en plus des hypothèses du théorème 8.5, le flot stochastique ϕ est inversible par rapport à sa condition initiale, alors son inverse $\xi(t,y)$ est deux fois différentiable et obéit à la dynamique suivante,*

$$\begin{cases} d\xi(t,y) = \nu^\xi(t,y)dW_t + \Big(\frac{1}{2}\partial_y(\frac{\|\nu^\xi\|^2}{\xi'(t,y)})(t,y) - \mu(t,\xi(t,y))\xi'(t,y)\Big)dt \\ \nu^\xi(t,y) = -\xi'(t,y)\gamma(t,\xi(t,y)) \end{cases} \tag{8.16}$$

où ξ' et ξ'' désignent respectivement la dérivée première et seconde par rapport à y de ξ.

Établir la dynamique du flot inverse ξ n'est pas un résultat nouveau dans la théorie des flots stochastiques, (Théorème 4.2.10 page 131 de [74]). Par contre, ce qui est vraiment nouveau dans ce lemme, est de remarquer que la dynamique de ξ peut s'écrire sous la forme très particulière (8.16). La similarité entre cette forme et celle de la dynamique (6.40) d'une utilité progressive est un argument clé de la suite.

Démonstration. La preuve est essentiellement basée sur la formule d'Itô généralisée établie au théorème (8.5). Nous appelons (α^ξ,ν^ξ) les coefficients de ξ.

En effet par définition, nous avons

$$\begin{aligned}
d\phi(t,\xi(t,y)) &= 0 \\
&= \mu(t,\xi(t,y))dt + \gamma(t,\xi(t,y))dW_t + \phi'(t,\xi(t,y))d\xi(t,y) \\
&+ \frac{1}{2}\phi''(t,\xi(t,y)) < d\xi(t,y) > + < \phi'(t,\xi(t,y)), \nu^\xi(t,y) > dt
\end{aligned}$$

Partant des identités suivantes

$$\phi'(t,\xi(t,y)) = \frac{1}{\xi'(t,y)}, \quad \phi''(t,\xi(t,y)) = -\frac{\xi''}{(\xi')^3}(t,y),$$

la forme nécessaire des coefficients de ξ est :

$$\begin{aligned}
\alpha^\xi(t,y) &= -\xi'(t,y)\mu(t,\xi(t,y)) + \xi' < \gamma(t,\xi(t,y)), \gamma'(t,\xi(t,y)) > \\
&+ \frac{1}{2}\xi''(t,y)\|\gamma(t,\xi(t,y))\|^2 \\
\nu^\xi(t,y) &= -\xi'(t,y)\gamma(t,\xi(t,y)).
\end{aligned}$$

α^ξ se réécrit donc comme

$$\alpha^\xi(t,y) = -\xi'(t,y)\mu(t,\xi(t,y)) + \frac{1}{2}\partial_y\big(\xi'(t,y)\|\gamma\|^2(t,\xi(t,y))\big).$$

Une autre formulation utilisant que $\xi' \neq 0$ et la forme de la volatilité de ξ est

$$\alpha^\xi(t,y) = -\xi'(t,y)\mu(t,\xi(t,y)) + \frac{1}{2}\partial_y\big(\|\nu^\xi(t,y)\|^2/\xi'(t,y)\big).$$

□

8.7.2 EDP stochastique de l'utilité définie à partir de la composition des flots

Le but de ce paragraphe est de décrire la décomposition de l'utilité progressive u, définie dans (8.5), notamment sa volatilité Γ_u en fonction de celle de la richesse optimale X^* et du processus $\mathcal{Y}$. Il n'est pas nécessaire de supposer connu le fait que u, définie dans (8.5) soit une utilité progressive, car le calcul stochastique nous permettra de le retrouver directement.
Nous commençons par préciser les hypothèses de régularité sur les flots $\mathcal{X}^*_.(x)$ et $\mathcal{Y}(.,x)$ nécessaires pour notre propos.

Hypothèse 8.5. – *Le processus de richesse optimale $X^*_.(x)$ est une famille de martingales locales qui, par rapport à la richesse initiale x, est strictement croissante, deux fois continûment dérivable, et telle que les coefficients de sa décomposition d'Itô*

$$dX_t^*(x) = \gamma(t,x)dW_t, \quad \gamma \in \mathcal{K} \tag{8.17}$$

appartiennent à la classe $\mathcal{B}^{1,0}$.

– *La famille de martingales locales $(\mathcal{Y}_.(x))$ est par rapport à x, strictement décroissante, deux fois continûment dérivable, et telle que les coefficients de sa décomposition d'Itô*

$$d\mathcal{Y}(t,x) = \nu(t,x)dW_t, \quad \nu \in (\mathcal{K}\sigma)^* \cap \gamma^{\perp} \tag{8.18}$$

appartiennent à la classe $\mathcal{B}^{1,0}$. Notons aue $(\mathcal{K}\sigma)^* \cap \gamma^{\perp} = (\mathcal{K}\sigma)^{\perp}$ si $\mathcal{K}$ est un sous espace vectoriel.

– *La condition initiale $\mathcal{Y}(0,.) = u_0'(.)$ est une fonction décroissante sur $(0,\infty)$ de classe $\mathcal{C}^2$.*

L'hypothèse sur la richesse optimale est introduite pour garantir que le flot inverse est bien une famille de semimartingales d'Itô dont on connaît les coefficients.

Théorème 8.6. *Soit $(X_t^*(x))$, and $(\mathcal{Y}(t,x))$ deux flots stochastiques satisfaisant les hypothèses et notations 8.5. Alors le processus u défini par*

$$u(t,x) = \int_0^x \mathcal{Y}(t,\mathcal{X}(t,z))dz$$

satisfait

$$\begin{cases} du(t,x) &= \frac{1}{2}\big[u''(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2\big]dt + \Gamma_u(t,x)dW_t, \\ \Gamma_u(t,x) &= \displaystyle\int_0^x [\nu(t,\mathcal{X}(t,z)) - u''(t,z)\gamma(t,\mathcal{X}(t,z))]dz + C_t, \\ \Gamma_u'^{,\mathcal{K}}(t,x) &= -u''(t,x)\gamma(t,\mathcal{X}(t,x)). \end{cases} \tag{8.19}$$

u est donc une utilité progressive puisque sa dynamique vérifie aussi,

$$du(t,x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{\|\Gamma_u'^{,\mathcal{K}}(t,x)\|^2}{u''(t,x)}\Big]dt + \Gamma_u(t,x)dW_t$$

de classe $\mathcal{C}^3$ en x, dont la dérivée de la volatilité Γ_u est la somme des deux vecteurs orthogonaux $\nu(t,\mathcal{X}(t,x))$, qui appartient au cône orthogonal des contraintes, et $(-u''(t,x))\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))$ qui est colinéaire à la volatilité de la richesse optimale.

Démonstration. Sous l'hypothèse 8.5 pour X^*, supposé de plus martingale locale, la dynamique de l'inverse $\mathcal{X}$ de X^* satisfait, d'après le lemme 8.2, c-à-d.,

$$d\mathcal{X}(t,y) = -\mathcal{X}'(t,y)\gamma(t,\mathcal{X}(t,y))dW_t + \frac{1}{2}\partial_y\big(\mathcal{X}'(t,y)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,y))\|^2\big)dt.$$

Les hypothèses faites sur les flots X et $\mathcal{Y}$ impliquent que nous pouvons appliquer la formule d'Itô-Ventzel au flot composé $\mathcal{Y}o\mathcal{X}$, pour étudier le flot $u'(t,x)$. Nous commençons par nous intéresser au terme en dW_t, dont le coefficient est la dérivée de la volatilité de l'utilité Γ_u. Comme $(\mathcal{Y}'o\mathcal{X})\mathcal{X}' = u''$, la formule (8.5) nous donne que

$$\Gamma'_u(t,x) = \nu(t,\mathcal{X}(t,x)) - u''(t,x)\gamma(t,\mathcal{X}(t,x)). \tag{8.20}$$

Cette décomposition du vecteur de volatilité se fait pas l'intermédiaire de deux vecteurs orthogonaux, le premier $\nu(t,\mathcal{X}(t,x))$ appartient par hypothèse à l'espace orthogonal des contraintes, le second est proportionnel à la volatilité de la richesse optimale et appartient par hypothèse à l'espace des contraintes. Par suite la projection $\Gamma'^{,\mathcal{K}}_u(t,x)$ de Γ'_u sur l'espace $\mathcal{K}_t\sigma_t$ est le vecteur $\Gamma'^{,\mathcal{K}}_u(t,x) = (-u''(t,x))\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))$.
Comme $u' = \mathcal{Y}o\mathcal{X}$, cette volatilité n'est autre que celle de u', et pour retrouver celle de u, il suffit d'intégrer en x pour obtenir le résultat.

Nous nous intéressons maintenant au drift $\mu^{u'}$ de la dérivée de l'utilité progressive $\mathcal{Y}o\mathcal{X}$. Sous les hypothèses précédentes, par l'équation (8.15), nous avons

$$\begin{aligned} \mu^{u'}(t,x) &= \frac{1}{2}(\mathcal{Y}'o\mathcal{X})(t,x)\big(\mathcal{X}'(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2\big)' \\ &+ \big[\frac{1}{2}(\mathcal{Y}''o\mathcal{X})(t,x)\|\mathcal{X}'(t,x)\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2 \\ &- \mathcal{X}'(t,x) < \nu(t,\mathcal{X}(t,x)),\gamma(t,\mathcal{X}(t,x)) > \big]. \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer cette équation en utilisant d'une part que par hypothèse $<\nu,\gamma>= 0$, d'autre part que

$$(\mathcal{Y}'o\mathcal{X}(t,x))' = \mathcal{Y}''o\mathcal{X}(t,x)\mathcal{X}'(t,x)$$
$$u''(t,x) = \mathcal{Y}'o\mathcal{X}(t,x)\mathcal{X}'(t,x).$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned}
\mu^{u'}(t,x) &= \frac{1}{2}\big((\mathcal{Y}' o \mathcal{X}(t,x)\mathcal{X}'(t,x)(\mathcal{X}'(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2) \\
&+ (\mathcal{Y}'' o \mathcal{X})(t,x)\mathcal{X}'(t,x)[\mathcal{X}'(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2]'\big) \\
&= \frac{1}{2}\big[\mathcal{Y}' o \mathcal{X}(t,x)\mathcal{X}'(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2\big]' \\
&= \frac{1}{2}\big[u''(t,x)\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2\big]'. \qquad (8.21)
\end{aligned}$$

Enfin, en intégrant par rapport à x, et en utilisant que $u(t,0) \equiv 0$, nous déduisons que u suit la dynamique

$$du(t,x) = \frac{u''(t,x)}{2}\|\gamma(t,\mathcal{X}(t,x))\|^2 dt + \Gamma_u(t,x)dW_t.$$

Ce dernier terme s'interprète à l'aide de la projection de la dérivée de la volatilité sur l'espace des contraintes, puisque

$$\Gamma_u^{',\mathcal{K}}(t,x) = (-u''(t,x))\gamma(t,\mathcal{X}(t,x)).$$

Nous avons alors la forme équivalente, caractéristique des utilités progressives,

$$du(t,x) = \frac{\|\Gamma_u^{',\mathcal{K}}(t,x)\|^2}{2\,u''(t,x)}dt + \Gamma_u(t,x)dW_t.$$

Il nous reste à vérifier par des outils du calcul stochastique, que u est bien une utilité progressive et que les flots X^* et $\mathcal{Y}$ sont bien optimaux pour le problème primal et le problème dual. Ceci est rendu facile d'après (8.20), par les résultats du chapitre 5, la proposition 6.1 du chapitre 6 et les théorèmes 7.3 et 7.6 du chapitre 7. Comme précédemment, nous notons $X^u(t,x)$ et $L^{\tilde{u}}$ les processus optimaux aux problèmes dual et primal associés à l'utilité u, dont nous savons qu'ils vérifient

$$\begin{cases}
dX^u(t,x) = -\dfrac{\Gamma_u^{',\mathcal{K}}}{u''}(t,X^u(t,x))dW_t \\
d(u'(0,x)L^{\tilde{u},u'(0,x)}) = \dfrac{\Gamma_u^{',\perp}}{u''}(t,X^u(x))dW_t.
\end{cases}$$

Ces équations se récrivent, en utilisant que $\Gamma_u^{',\mathcal{K}} = u''(t,x)\gamma(t\xi(t,x))$,

$$\begin{cases}
dX^u(t,x) = \gamma\big(t,\mathcal{X}(t,X^u(t,x))\big)dW_t \\
d(u'(0,x)L_t^{\tilde{u},u'(0,x)}) = \nu\big(t,\mathcal{X}(t,X^u(t,x))\big)dW_t.
\end{cases}$$

Ceci qui implique que X^u a la même dynamique que X^* (puisque $\mathcal{X}(t, X_t^*(x) = x)$ qui à son tour (par le même raisonnement) vérifie $u(t, X_t^*(x))$ est une martingale locale. Les deux portefeuilles $X^u(t,x)$ et $X_t^*(x)$ sont optimaux et de même richesse initiale. Par la stricte concavité de u , ils ne peuvent qu' être égaux. De la même manière, on montre que $L_t^{\tilde{u},u'(0,x)} = \mathcal{Y}(t,.)/\mathcal{Y}(0,.)$ est la mesure martingale optimale pour u.

□

8.8 Retour sur le marché initial

Comme notre but au début de cette seconde partie est d'étudier les utilités progressives dans l'univers d'investissement $\mathcal{M}^{r,\eta}$ décrit dans le paragraphe 5.2 du chapitre 5, nous donnons dans cette section les équivalents des résultats des paragraphes précédents établis dans le cadre de marché martingale où le taux court et la prime de marché sont nulles. Pour cela, il est important de rappeler quelques notations et résultats des chapitres précédents. Nous rappelons essentiellement l'univers d'investissement du chapitre 5 et comment nous sommes arrivés au marché martingale à partir de cet univers, paragraphe 6.2 chapitre 6.

Univers d'investissement de départ :
L'univers d'investissement initial consiste en un marché financier où les processus de richesse notés $\tilde{X}$ obéissent à la dynamique suivante,

$$d\tilde{X}_t^{x,\pi} = r_t\tilde{X}_t^{x,\pi}dt + \pi_t\sigma_t(dW_t + \eta_t dt),\ \ \tilde{X}_0^{x,\pi} = x,\ \ \pi_t \in \mathcal{K}_t$$

où η désigne la prime de risque appelée aussi prime de marché, et r le taux court. Le processus $H^{r,\eta}$, l'inverse du numéraire de marché, est le processus stochastique défini par

$$\frac{dH_t^{r,\eta}}{H_t^{r,\eta}} = -r_t dt - \eta_t dW_t.$$

En particulier, pour toute stratégie $\pi \in \mathcal{K}$, le processus $H_t^{r,\eta}\tilde{X}^{x,\pi}$ est une martingale locale positive (sous la probabilité $\mathbb{P}$).

8.8.1 Conditions nécessaires d'optimalité dans cet univers et constructions des utilités progressives

Soit v une utilité progressive dans le marché initial décrit ci-dessus. En adoptant des notations similaires aux paragraphes précédents nous notons $\tilde{X}^*(x)$ la richesse optimale associée et $\tilde{\mathcal{Y}}$ le processus défini par $\tilde{\mathcal{Y}}(t,x) = v'(t, \tilde{X}^*_t(x))$. D'après les résultats du théorème 7.2, ces processus satisfont les conditions nécessaires d'optimalité suivantes :

(M1) Les champs aléatoires $(\tilde{X}^*_t(x); x \geq 0, t \geq 0)$ et $(\tilde{\mathcal{Y}}(t,x); x \geq 0, t \geq 0)$ sont strictement monotones : $\tilde{X}^*_t(x)$ est croissant de 0 à $+\infty$, alors que $\tilde{\mathcal{Y}}(t,x)$ est décroissant de $+\infty$ à 0, de sorte que les conditions d'Inada sont satisfaites. $\tilde{\mathcal{Y}}(0,x)$ est une fonction décroissante, notée $u_0'(x)$. On suppose de plus que $\tilde{\mathcal{Y}}(t,x)$ est intégrable en x, au voisinage de $x = 0$.

(O'1) Pour tout x, $(\tilde{X}^*_t(x))_{t\geq 0}$ est un portefeuille de richesse admissible, et donc $(\tilde{X}^*_t(x)H^{r,\eta}_t)$ est une martingale locale. De même, le processus $(\tilde{\mathcal{Y}}(t,x))_{t\geq 0}$ est une surmartingale positive

(O2) Pour tout x, le processus $(\tilde{X}^*_t(x)\tilde{\mathcal{Y}}(t,x))_{t\geq 0}$ est une "vraie" martingale.

(O3) Pour toute stratégie admissible π et pour tout capital initial x et x', le processus $(\tilde{X}^\pi_t(x')\tilde{\mathcal{Y}}(t,x))_{t\geq 0}$ est une surmartingale positive, (une martingale locale dans le cas où l'espace des contraintes $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel.)

Notons que les conditions $(M1)$, $(O2)$ et $(O3)$ sont identiques aux conditions nécessaires $(M1)$, $(O2)$ et $(O3)$ du paragraphe 8.4.2, seulement $(O'1)$ est légèrement différente de $(O1)$.

Définition 8.3. *Une famille de couples de semimartingales continues, indexées par un paramètre (de richesse) $x > 0$, $\{(\tilde{X}^*_t(x), \tilde{\mathcal{Y}}(t,x)); t \geq 0, x > 0\}$ est dite satisfaire les conditions $(\mathcal{O}'^*)$ dans le marché de paramètres (r, η) contraint par $\mathcal{K}$, si elle satisfait les conditions $(M1)$, $(O'1)$, $(O2)$ et (O3) ci-dessus.*

Remarque 8.3. *Comme dans le cadre des sections précédentes, la richesse optimale $\tilde{X}^*$ étant fixée, nous pouvons montrer à l'aide du lemme 7.2 et de la dynamique (7.16) que toutes les $\tilde{\mathcal{Y}}$ telles que $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$ satisfait les conditions $(\mathcal{O}'^*)$, obéissent à la dynamique suivante*

$$\frac{d\tilde{\mathcal{Y}}(t,x)}{\tilde{\mathcal{Y}}(t,x)} = -r_t dt + (\nu_t\sigma_t - \eta_t)dW_t, \quad \nu_t \in \mathcal{K}^*_t \cap (\gamma_t)^\perp \tag{8.22}$$

où nous avons noté γ la stratégie optimale. Dans le cas où $\mathcal{K}_t$ est espace vectoriel, $\mathcal{K}_t^* \cap (\gamma_t)^\perp = \mathcal{K}^\perp$.

Comme nous avons déjà pu le remarquer à plusieurs reprises, les preuves des théorèmes 8.1 et 8.2 ainsi que la proposition 8.3 sont essentiellement basées sur les conditions nécessaires $(O2)$ et $(O3)$ du paragraphe 8.4.2. Comme ces conditions sont encore satisfaites dans ce marché, nous pouvons alors reproduire le même raisonnement et des preuves identiques pour établir le résultat suivant :

Théorème 8.7. *Soit $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$ un couple de processus stochastiques qui satisfait les conditions $(\mathcal{O}'^*)$ et l'hypothèse 8.3. En notant $\tilde{\mathcal{X}}$ l'inverse par rapport à x de $\tilde{X}^*$, le processus v défini par*

$$v(t,x) = \int_0^x \tilde{\mathcal{Y}} o \tilde{\mathcal{X}}(t,z)dz \tag{8.23}$$

- ✓ *est une utilité progressive de portefeuille optimale $\tilde{X}^*$.*
- ✓ *Le processus $\tilde{\mathcal{Y}}(t,x)/\tilde{\mathcal{Y}}(0,x)$ est le processus optimal au problème dual.*

8.8.2 Quelques remarques

Il est intéressant de remarquer que ce dernier théorème peut être démontré directement à l'aide du théorème 8.2, et les résultat du chapitre précédent, et ce dans les deux cas suivants :

Hypothèse 8.6.
- *Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{K}_t$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.*
- *La prime de marché η satisfait $\eta_t \sigma_t^{-1} \in \mathcal{K}_t \cap (-\mathcal{K}_t)$ si $\mathcal{K}_t$ est simplement un cône convexe.*

En effet, sous ces deux hypothèses, nous avons pu, dans le paragraphe 6.4, montrer que le changement de numéraire $H^{r,\eta}$ n'affecte pas l'espace des contraintes et par conséquent les contraintes sont les mêmes dans les deux marchés (le marché décrit initial et le marché martingale).
Montrons maintenant le théorème 8.7. Pour cela quelques rappels sont nécessaires.
Marché martingale :

Le marché martingale considéré dans ce chapitre est le marché financier dont les richesses sont obtenues par le changement de numéraire $1/H^{r,\eta}$, c-à-d. les richesse X du marché martingale sont données par $X = \tilde{X}H^{r,\eta}$ ($\tilde{X}$ représente les richesse dans le marché initial), pour plus de détails voir paragraphe 6.2 pour le changement de numéraire de manière générale et le paragraphe 6.4 pour le cas particulier où le numéraire est $1/H^{r,\eta}$.
Nous avons montrer dans le paragraphe 6.2, qu'il existe une équivalence entre les utilités progressives des deux marchés et ce dans le théorème 6.1 (théorème général pour les changement de numéraire), dont une version est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 8.1. *Soit $(v(t,x))_{t\geq 0,x>0}$ un champ aléatoire. Alors v est une utilité progressive dans le marché initial $\mathcal{M}^{r,\eta}$, si et seulement si le champ aléatoire u défini par*

$$u(t,x) \stackrel{def}{=} v(t, \frac{x}{H_t^{r,\eta}})$$

est une utilité progressive dans le marché martingale. Si de plus $X^{x,*}$ et $\tilde{X}^{x,*}$ désignent respectivement les processus de richesses optimales générés par u et v, alors, $\tilde{X}^{x,*} = X^{x,*}/H_t^{r,\eta}$.

Par conséquent, si X^* satisfait l'hypothèse de monotonie 8.1 et l'hypothèse 8.3, ceci est équivalent à : la richesse optimale $\tilde{X}^{x,*}$ (associée à v) satisfait les mêmes hypothèses. Si de plus $\mathcal{X}$ et $\tilde{\mathcal{X}}$ désignent les inverses respectifs de ces deux richesses optimales alors pour tout $t \geq 0$ et $z > 0$,

$$\tilde{\mathcal{X}}(t,z) = \mathcal{X}(t, zH_t^{r,\eta}). \tag{8.24}$$

Finalement, si u est une utilité progressive dans le marché martingale de richesse optimale $X^{x,*}$ strictement croissante (vérifiant l'hypothèse 8.3), alors par le théorème 8.2, il existe un processus $\mathcal{Y}$ strictement décroissant : $(X^{x,*}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{Z}$ tel que

$$u(t,x) = \int_0^x \mathcal{Y} o \mathcal{X}(t,z)dz.$$

En appliquant le résultat du corollaire précédent, v est donnée par

$$v(t,x) = u(t, xH_t^{r,\eta}) = \int_0^{xH_t^{r,\eta}} \mathcal{Y} o \mathcal{X}(t,z')dz'.$$

Par le changement de variable $z = z'/H_t^{r,\eta}$, cette dernière identité se réécrit

$$v(t,x) = \int_0^x H_t^{r,\eta} \mathcal{Y} o \mathcal{X}(t, zH_t^{r,\eta})dz.$$

Notons par $\tilde{\mathcal{Y}}$ la sous-martingale défini par $\tilde{\mathcal{Y}} \stackrel{def}{=} H_t^{r,\eta}\mathcal{Y}$. D'après l'identité (8.24),

$$v(t,x) = \int_0^x \tilde{\mathcal{Y}} o \tilde{\mathcal{X}}(t,z)dz.$$

Remarque 8.4. *Remarquons enfin que le couple* $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$ *satisfait les conditions* $(\mathcal{O}'^*)$ *(voir définition 8.3) puisque, sous les hypothèses 8.6, les deux assertions suivantes sont équivalentes,*

1. $(\tilde{X}^*, \tilde{\mathcal{Y}})$ *satisfait les conditions* $(\mathcal{O}'^*)$.
2. $(\tilde{X}^* H^{r,\eta}, \frac{\tilde{\mathcal{Y}}}{H^{r,\eta}})$ *satisfait les conditions* $(\mathcal{O}'^*)$.