



Comportement et Modélisation des Elastomères

————— oOo —————

Trois principaux points sont développés dans ce chapitre. Dans un premier temps, une revue de l'état de l'art sur les différents phénomènes qui caractérisent le comportement des élastomères est présentée. Puis les différentes théories prenant en compte ces phénomènes seront exposées. On passera ainsi en revue les comportements hyperélastiques, les différentes formulations visco-élastiques, ainsi qu'un certain nombre de travaux ayant trait à la prise en compte de l'endommagement. Par la suite sera décrite la démarche mise en place en vue du choix et de la validation d'une formulation thermodynamique adéquate et ce à partir de considérations expérimentales. Enfin seront présentés les travaux de mise en place et de validation d'un modèle éléments finis incorporant la formulation thermodynamique préalablement identifiée.

————— oOo —————

PLAN DU CHAPITRE II

II.1 Etat de l'art	43
II.1.1 Introduction et généralité sur les élastomères	43
II.1.2 Comportement hyperélastique	44
II.1.2.a Energie libre	45
II.1.2.b Incompressibilité et quasi-incompressibilité	47
II.1.3 Comportement viscoélastique	49
II.1.3.a formulations intégrales	49
II.1.3.b Formulations différentielles	53
II.1.4 Effet MULLINS et endommagement	54
II.1.4.a Approche micro-mécanique	54
II.1.4.b Approches phénoménologiques	56
II.2 Choix du modèle	59
II.2.1 Essais expérimentaux	59
II.2.1.a Description des essais	59
II.2.1.b Dispositif expérimental	59
II.2.2 Détermination du modèle	60
II.2.2.a Constatations expérimentales	60
II.2.2.b Modèles rhéologiques	61
II.2.2.c Eléments du modèle	64
II.2.3 Identification du modèle et des paramètres mécaniques	65
II.2.3.a Présentation de la démarche	65
II.2.3.b Algorithme d'identification	65
II.2.3.c Choix du modèle rhéologique et résultats d'identification	67
II.2.3.d Choix de l'énergie libre principale	70
II.3 Mise en oeuvre numérique	73
II.3.1 Formulation variationnelle	73
II.3.2 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis	74
II.3.3 Discrétisation temporelle	75
II.3.4 Intégration locale	77
II.3.4.a Intégration de la loi complémentaire et détermination de la variable interne	77
II.3.4.b Calcul de la matrice tangente élémentaire	78
II.3.5 Choix des éléments finis	79
II.3.5.a Rappels sur les instabilités numériques des éléments mixtes	79
II.3.5.b Choix et test des éléments	79
II.3.5.c Choix de ε	83
II.3.6 Validation	84
II.3.6.a Présentation du problème numérique et choix des discrétisations	84
II.3.6.b Comparaisons des résultats	85
II.4 Conclusion	89

II.1 Etat de l'art

II.1.1 Introduction et généralité sur les élastomères

Les élastomères appartiennent à la famille des **hauts polymères**, c'est-à-dire qu'ils sont constitués de chaînes macromoléculaires plus ou moins longues, avec ou sans ramifications. Ceci leur confère un **point de fusion** assez bas permettant une mise en forme aisée, une **faible rigidité** et une **grande déformabilité**. Ces propriétés font qu'il sont de plus en plus présents dans les industries aéronautique, automobile, du bâtiment... Ils sont utilisés sous forme de caoutchoucs (*i.e.* pratiquement sous forme brute), matières plastiques, vernis...

Pour se restreindre à des utilisations mécaniques, on pourra citer leur emploi :

- dans des pièces se substituant à des ensembles mécaniques complets, tels que les bras élastomériques développés dans l'industrie aéronautique, composés de baguettes de composites noyées dans une matrice élastomérique dont le rôle est, sur un hélicoptère, de remplacer les trois articulations d'une pale ;
- en tant que matrice de multimatériaux ; cette technologie est notamment utilisée dans la fabrication de lamifiés métal-élastomère, ou encore dans les pneumatiques ;
- dans des pièces qui mettent à profit leur grande déformabilité telles que les DIAS d'Ariane V chargés de transmettre les charges de poussée à la structure en l'isolant des oscillations ;
- sur de nombreux mécanismes exploitant le pouvoir amortissant de certains d'entre eux.

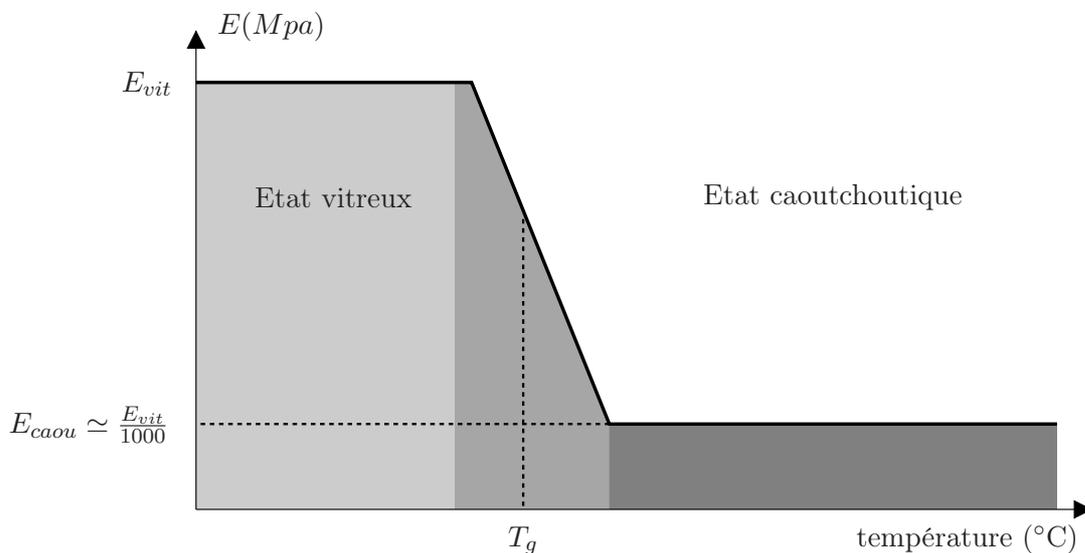


FIGURE II.1 – Evolution du module d'YOUNG en fonction de la température.

Il est possible de distinguer deux grandes familles d'élastomères, les **caoutchoucs à usage général** et ceux **à usage spécifique**. A l'état initial, l'élastomère est dans un **état caoutchoutique**, c'est-à-dire que les chaînes macromoléculaires peuvent glisser les unes sur les autres (c'est

l'état, entre autre, du caoutchouc naturel). Ces libertés de déplacement permettent au matériau de subir de grandes déformations sans rupture. Cependant, les macromolécules étant indépendantes les unes des autres, le retour à l'état initial ne peut se faire sans une intervention extérieure, en vue d'augmenter ou d'établir son pouvoir de recouvrement élastique. Des liaisons entre les chaînes sont mises en place, créant ainsi un réseau tridimensionnel qui solidarise les chaînes entre elles. C'est ce qu'on appelle la **vulcanisation** ou **réticulation** des élastomères.

Ce traitement confère alors à notre matériau trois plages de comportement, dépendant de la température d'utilisation. FIG. II.1 est représentée l'évolution du module d'YOUNG en fonction de la température. Bien que schématisées, les transitions brutales d'un état à l'autre sont assez représentatives de la réalité.

A des températures assez basses, on est en présence d'un palier de comportement *i.e.* les caractéristiques du matériau sont pratiquement indépendantes de la température. L'élastomère ne possède pas encore ses propriétés de haute déformabilité et de faible rigidité : il est en **état vitreux**, le module d'YOUNG est de l'ordre du Gpa et a un comportement **fragile**.

Une augmentation de la température conduit le matériau dans une **zone de transition vitreuse** que l'on a l'habitude de centrer (à $\pm 25\%$) autour de la **température de transition** T_g . Dans cette zone, une partie des liaisons commence à rompre, ce qui permet ainsi un glissement d'une partie des chaînes les unes par rapport aux autres. Le comportement de l'élastomère est alors **viscoélastique** et les coefficients matériau sont fortement dépendants de la température. Enfin, si la température est bien au dessus de T_g , le matériau se trouve alors dans un **état caoutchoutique**. Le comportement en début de zone s'apparente à de l'**hyperélasticité** ou de la **visco-hyperélasticité** avec un module de YOUNG égal à environ $1/1000^e$ de celui de l'état vitreux. En fin de zone, on est en présence d'un **écoulement**.

Il est évident que les propriétés de l'élastomère vont dépendre de sa vulcanisation, de sa composition mais aussi en grande partie, de la nature des adjonctions qui vont y être incorporées. Ces **charges** seront, dans la plupart des cas, des **noirs de carbone** ou des **silices**. Une description plus approfondie de leurs effets sera faite au § II.1.4 concernant les approches micromécaniques du comportement.

II.1.2 Comportement hyperélastique

Les élastomères sont souvent utilisés pour leur grande faculté de déformation. Cependant, ces chargements importants font apparaître plusieurs problèmes, en particulier la non-linéarité des déformations par rapport aux contraintes et le dépassement du cadre des petites perturbations ($\nabla_X \vec{u} \neq \mathcal{O}(\bar{\bar{F}} - \bar{\bar{1}})$). Une manière de contourner ces difficultés, est d'utiliser une énergie libre de type hyperélastique. On obtient, à partir des résultats du chapitre I, pour un matériau isotrope, non dissipatif, dans le cas isotherme et sous les hypothèses \mathcal{H} . I.1, \mathcal{H} . I.2, \mathcal{H} . I.3 et \mathcal{H} . I.5, les

lois de comportement (I.80a),(I.81a) et (I.82a) qui, avec les équations d'équilibre (I.30) et (I.32), définiront complètement l'évolution du matériau. Les équations locales sont les suivantes, en configuration mixte par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- équation d'équilibre} \\ \text{div}_X \bar{\pi} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} \quad \text{sur } \Omega, \\ \text{- conditions limites} \\ \bar{\pi} \cdot \vec{N} = \bar{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_u, \\ \text{- loi de comportement} \\ \bar{\pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}} \quad \text{sur } \Omega. \\ \text{ou, dans le cas incompressible} \\ \bar{\pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{F}} + p \bar{F}^{-1} \quad \text{sur } \Omega \\ \text{et} \\ J(\vec{u}) = \det \bar{F} = 1 \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

On voit que le comportement du matériau ne dépend que du choix de l'énergie libre.

Ce type de formulation peut être utilisé notamment pour des caoutchoucs naturels éventuellement chargés avec des particules de noir de carbone.

II.1.2.a Energie libre

La littérature présente principalement deux catégories d'énergies libres (et par conséquent deux modèles, le comportement étant complètement déterminé par son choix). On distingue donc les approches statistiques et phénoménologiques.

De nombreuses formes de l'énergie ont été proposées, des revues plus complètes sont proposées par BOUKAMEL [1988] ; JAZZAR [1993]. Ici ne seront présentées que les plus utilisées.

- Approches statistiques

Ces approches ont pour fondement des considérations de structures moléculaires. Une des principales, réalisée par TRELOAR [1943], est basée sur une étude thermodynamique et statistique d'un élastomère réticulé. Elle suppose une distribution gaussienne de la distance entre les extrémités des chaînes, l'équirépartition des points de réticulation, la prise en compte de l'entropie comme la somme des entropies élémentaires des chaînes et une transformation isochore (**incompressibilité** du matériau). Sous ces hypothèses, cette approche permet d'aboutir à une expression de l'énergie libre spécifique dite de NÉOHOKE :

$$\psi = \frac{1}{2} N k T (I_1 - 3), \quad (\text{II.2})$$

avec N , le nombre de chaînes moléculaires par unité de volume, T la température absolue, et k la constante de BOLTZMANN. Le domaine de validité de cette description est d'environ 50% de déformation locale.

D'autres études, modifiant l'une ou l'autre des hypothèses du modèle néohookéen, conduisent à des théories quelque peu modifiées.

- Approches phénoménologiques

Ces théories s'appuient sur des démarches purement mathématiques et expérimentalement corrélées [TRELOAR, 1957]. On expose ci-dessous les principaux modèles couramment utilisés pour des matériaux à transformation isochore :

- Modèle de MOONEY-RIVLIN :

$$\psi = a_1(I_1 - 3) + a_2(I_2 - 3). \quad (\text{II.3})$$

Cette expression peut être considérée comme valide pour des plages de déformation pouvant aller jusqu'à 100%.

- Modèle de MOONEY :

$$\psi = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty}} a_{mn}(I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m, \quad (\text{II.4})$$

Le domaine de validité de la généralisation du modèle précédent dépend du degré du polynôme choisi.

- Modèle de GENT-THOMAS [GENT et THOMAS, 1973]

$$\psi = a_1(I_1 - 3) + a_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.5})$$

Cette description permet une modélisation correcte pour des déformations inférieures à 200%.

- Modèle de HART-SMITH [HART-SMITH, 1966]

$$\psi = a_1 \int \exp(a_2(I_1 - 3)^2) dI_1 + a_3 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (\text{II.6})$$

Cette énergie libre spécifique décrit correctement le matériau pour des déformations inférieures à 500%.

- Modèle de OGDEN [OGDEN, 1972]

L'auteur de ce modèle choisit de faire intervenir les dilatations principales⁽¹⁾ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)

(1). valeurs propres

de \bar{C} :

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (\text{II.7})$$

La performance de ce modèle, tout comme celui de MOONEY dépend du degré de développement choisi. Le choix des couples de paramètres (μ_i, α_i) peut s'avérer délicat car conduisant à des violations du critère de HILL⁽²⁾.

- LAMBERT-DIANI et REY [1998] proposent pour le cas de matériaux incompressibles, une forme générale de densité d'énergie ainsi qu'une méthodologie d'identification des coefficients associés.

REMARQUE II.1

L'ensemble des expressions proposées ci-dessus, décrit des matériaux isotropes incompressibles. le cas compressible peut être traité par extension de l'écriture des modèles de OGDEN ou MOONEY-RIVLIN, *i.e.*

$$\psi = \sum_{\substack{0 \leq m \leq \infty \\ 0 \leq n \leq \infty \\ 0 \leq p \leq \infty}} a_{mn} (I_1 - 3)^n (I_2 - 3)^m (I_3 - 3)^p. \quad (\text{II.8})$$

□

II.1.2.b Incompressibilité et quasi-incompressibilité

La solution d'un problème hyperélastique peut être déduite de la résolution des équations locales. Une autre approche consiste à chercher le champ minimisant l'énergie potentielle du système sur l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles \mathcal{V} , en imposant ou non une contrainte d'incompressibilité. Le problème se ramène à :

$$\mathcal{M}: \text{Trouver}(\vec{u}) \in \mathcal{V} \setminus \vec{u} \text{ minimise } \int_{\Omega} \rho_0 \psi(I_1, I_2, I_3) dV - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS, \quad (\text{II.9})$$

auquel il est possible de rajouter la condition d'incompressibilité :

$$J = \det \bar{F} = 1. \quad (\text{II.10})$$

De manière plus générale, dans le cas d'un matériau hyperélastique, isotrope, incompressible ou quasi-incompressible, il est commode de considérer l'énergie libre spécifique sous la forme [OGDEN, 1972 ; CHEN *et al.*, 1997] :

$$\psi = \bar{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \frac{1}{\varepsilon} G(J), \quad (\text{II.11})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{I}_1 = I_1 I_3^{-1/3}, \\ \bar{I}_2 = I_2 I_3^{-2/3}, \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

(2). les tenseurs \bar{S} et \bar{E} (dans une description eulérienne) ne sont plus définis positifs [LARABA-ABBES, 1998]

où ε est un petit paramètre positif décrivant le degré d'incompressibilité du matériau.

Le cas où $\varepsilon = 0$ correspond au cas incompressible, $G(J)$ étant nulle aussi, on décline alors ψ sous la forme :

$$\psi = \bar{\psi}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \bar{\psi}(I_1, I_2). \quad (\text{II.13})$$

Dès lors, un problème incompressible ou quasi-incompressible se décline comme le problème de minimisation suivant :

$$\mathcal{M}_\varepsilon : \text{Trouver } \vec{u} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L}_\varepsilon(\vec{u}) = \inf_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}_\varepsilon(\vec{v}), \quad (\text{II.14})$$

$$\text{avec : } \mathcal{L}_\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R} \\ \vec{v} \longmapsto \int_{\Omega} \left[\rho_0 \bar{\psi}(\bar{I}_1(\vec{v}), \bar{I}_2(\vec{v})) + \frac{1}{\varepsilon} G(J(\vec{v})) \right] dV - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

La mise en oeuvre numérique de ce type de formulation cause de nombreux problèmes tels que

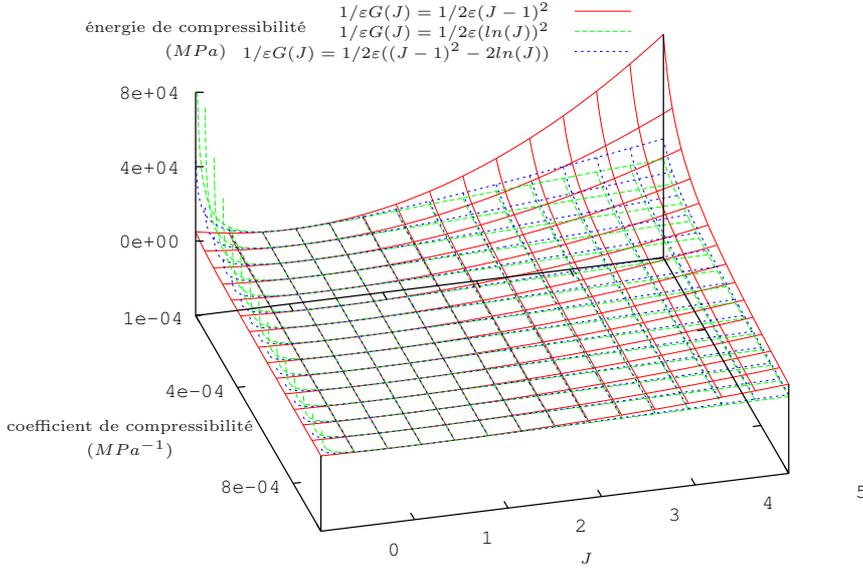


FIGURE II.2 – Evolution des différentes formes d'énergie de compressibilité.

des phénomènes de verrouillages. Une formulation en **lagrangien perturbé** permet de palier ces difficultés. On définit G^* la fonction conjuguée de G telle que :

$$\forall J > 0 \quad \frac{1}{\varepsilon} G(J) = \sup_{p \in \mathcal{R}} (p(J-1) - G^*(p)). \quad (\text{II.16})$$

Le problème \mathcal{M}_ε devient un problème de détermination de point selle :

$$\boxed{\mathcal{M}'_\varepsilon : \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{R} \setminus \mathcal{L}_\varepsilon(\vec{u}, p) = \inf_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \sup_{p \in \mathcal{R}} \mathcal{L}'_\varepsilon(\vec{v}, p)} \quad (\text{II.17})}$$

$$\text{avec : } \mathcal{L}'_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \\ (\vec{v}, p) \longmapsto \int_{\Omega} [\rho_0 \bar{\psi}(\bar{I}_1(\vec{v}), \bar{I}_2(\vec{v})) + p(J-1) - G^*(p)] dV \\ \qquad \qquad \qquad - \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega_F} \vec{T} \cdot \vec{v} dS. \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

En FIG. II.2 sont représentées trois fonctions d'énergie classiques. On voit que la première permet de ramener le matériau à un volume nul ($J = 0$) pour une énergie finie. C'est pour éviter ce contresens physique que les deux autres ont été définies. Cependant, pour des matériaux peu compressibles (le domaine d'étude de ce paragraphe), ces trois fonctions sont équivalentes et peuvent être indifféremment utilisées [CHEN *et al.*, 2000].

II.1.3 Comportement viscoélastique

Les modèles hyperélastiques présentés ci-dessus ne rendent pas compte de la sensibilité de certains matériaux à la vitesse de chargement, d'un caractère dissipatif ou d'un éventuel décalage de la réponse par rapport à la sollicitation. Ces phénomènes relèvent du caractère **viscoélastique** des élastomères.

Même si ce phénomène est assez bien maîtrisé dans le cadre des petites déformations (combinaison des lois d'**élasticité linéaire**, de la théorie de la **viscosité de NEWTON** et le principe de **superposition de BOLTZMANN** [CHRISTENSEN, 1971]), il n'en va pas de même pour les grandes transformations, où la viscoélasticité demeure un important domaine d'investigation.

Dans ce cadre, deux grandes approches se détachent :

- les **formulations intégrales** qui considèrent les contraintes comme une fonction de l'histoire des contraintes,
- les **formulations différentielles**, qui sont principalement axées sur la théorie de l'**état associé** (cf. \mathcal{H} . I.1), des **matériaux standards généralisés** ou des **relations d'ONSAGER**.

Cette approche est pour une grande part basée sur les équations présentées au chapitre I.

II.1.3.a formulations intégrales

Un certain nombre d'études a mis en évidence que la réponse d'un élastomère, soumis à une sollicitation de traction simple, obéit à la loi monodimensionnelle :

$$\sigma(\lambda, t, T) = E(t, T)H(\lambda), \quad (\text{II.19})$$

où σ représente la contrainte uniaxiale, λ la sollicitation en déformation, t le temps, T la température. E est le module de relaxation et H une fonction (éventuellement non linéaire) de λ . Cette loi de comportement met en évidence le découplage de l'influence de la température et de la déformations sur la contrainte et que la non-linéarité de cette dernière est entièrement due à l'éventuelle non linéarité de H .

Partant de ces constatations et d'une généralisation du principe de superposition de BOLTZMANN, de nombreuses formulations ont élaborées :

- Modèle F.L.V. (Finite Linear Viscoelasticity)

COLEMAN et NOLL [1961] partent de l'équation de comportement générale d'un matériau simple incompressible [TRUESDELL et NOLL, 1973] :

$$\bar{R}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{R} = -p\bar{1} + f(\bar{E}) + \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\bar{E}, \bar{E}_d(s)) \quad (\text{II.20})$$

où $\bar{\sigma}$ le tenseur des contraintes de CAUCHY, \bar{R} le tenseur des rotations issu de la décomposition polaire de \bar{F} , p la pression hydrostatique due à l'incompressibilité, \bar{E} le tenseur de GREEN-LAGRANGE et $\bar{E}_d(s) = \bar{E}(t-s) - \bar{E}$.

Les auteurs postulent que l'histoire des températures et des déformations a une influence sur les grandeurs actuelles inversement proportionnelle à leur éloignement dans le temps. C'est ce qu'on appelle **la mémoire évanescence** des élastomères. Ceci permet un développement asymptotique de la fonctionnelle \mathcal{F} conduisant à :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + \bar{R} \cdot f(\bar{E}) \cdot \bar{R}^T + \bar{R} \cdot \left[\int_0^{\infty} \dot{\bar{K}}(\bar{E}, s) : \bar{E}_d(s) ds + \mathcal{O}(\|\bar{E}_d(s)\|^2) \right] \cdot \bar{R}^T. \quad (\text{II.21})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs ou égaux à 2, en choisissant le tenseur de CAUCHY-GREEN gauche pour mesure des déformations et en introduisant l'énergie libre spécifique ψ , (II.21) nous donne :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{1} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1, I_2) \bar{B} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1, I_2) \bar{B}^{-1} \int_0^{\infty} 2 \dot{\bar{\Phi}}(\bar{B}, s) : \bar{J}(s) ds, \quad (\text{II.22})$$

avec I_1 et I_2 les deux premiers invariants de \bar{B}

$$\text{et } \bar{J}(s) = \bar{F}^{-T} \cdot (2\bar{E}(t-s) + \bar{1}) \cdot \bar{F}^{-1} - \bar{1} = \bar{C}_t(t-s) - \bar{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}(\bar{B}, s) &= \frac{1}{2} (\bar{R} \boxtimes \bar{F}) : (\dot{\bar{K}}(\bar{E}, s) - \dot{\bar{K}}(\bar{E}, \infty)) : (\bar{F}^T \boxtimes \bar{R}^T) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 2}} \phi_{\max(i,j)}(s) (\bar{B}^i \boxtimes \bar{B}^j) + \sum_{\substack{0 \leq i \leq 1 \\ 0 \leq j \leq 2}} \phi_{ij}(s) (\bar{B}^i \otimes \bar{B}^j) \text{ dans le cas isotrope.} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Il est à noter que l'hypothèse de mémoire évanescence entraîne :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_i = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{ij} = 0 \quad (\text{II.24})$$

REMARQUE II.2

Ramenée au cadre des petites perturbations, la relation (II.22) donne :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = -p\bar{1} + \bar{\bar{K}}_0(0) : \bar{\varepsilon}(t) + \int_0^\infty \bar{\dot{K}}_0(s) : \bar{\varepsilon}(t-s) ds \\ \bar{\bar{K}}_0(s) = K(s)(\bar{1} \otimes \bar{1}) + 2G(s)(\bar{1} \boxtimes \bar{1} - \frac{1}{3}\bar{1} \otimes \bar{1}). \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

□

- Modèle M.F.L.V. (Modified Finite Linear Viscoelasticity)

Ce modèle développé par MORMAN [1988], introduit une mesure généralisée des déformations :

$$\begin{cases} \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}), \\ \text{avec } \bar{\bar{H}}(\bar{0}) = \bar{0}, \\ \text{et } \left. \frac{\partial \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}})}{\partial \bar{\bar{E}}} \right|_{\bar{\bar{E}}=0} = \bar{1} \boxtimes \bar{1}. \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

De même que pour le modèle F.L.V., un développement asymptotique de \mathcal{F} est réalisé, considérant \mathcal{F} fonction de la mesure généralisée des déformations. L'auteur postule alors que le premier terme de ce développement est égal au module de relaxation défini pour le précédent modèle sous l'hypothèse des petites perturbations (II.25) :

$$\bar{\bar{R}}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{R}} = -p\bar{1} + f(\bar{\bar{E}}) + \int_0^\infty \bar{\dot{K}}_0(s) : \underbrace{(\bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}(t-s)) - \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}))}_{\bar{\bar{H}}_d(s)} ds. \quad (\text{II.27})$$

En considérant la séparation temps \ déformation et en intégrant les différentes contributions sphériques, les auteurs déduisent :

$$\bar{\bar{R}}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{R}} = -p\bar{1} + \frac{2}{3}E_e \bar{\bar{H}}(\bar{\bar{E}}) + \frac{2}{3} \int_0^\infty \dot{E}(s)(\bar{1} \boxtimes \bar{1}) : \bar{\bar{H}}_d(s) ds, \quad (\text{II.28})$$

où $E(s)$ est la contribution déviatorique de $G(s)$ dans l'expression de $\bar{\dot{K}}_0(s)$ et E_e , sa limite à l'infini.

- Modèle B.K.Z. [Bernstein, Kearsley, et Zapas, 1963]

Les auteurs partent d'une approche monodimensionnelle en viscoélasticité linéaire, sous une sollicitation de cisaillement $\Delta\gamma$, pour laquelle la réponse en contrainte $\Delta\tau(t)$ suit la loi :

$$\Delta\tau(t) = G(t-t')\Delta\gamma, \quad (\text{II.29})$$

avec G , le module de cisaillement du matériau. Le principe de superposition de BOLTZMANN

donne alors pour une sollicitation continue :

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \int_{-\infty}^t G(t-t') d\gamma(t') \\ &= \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{d\gamma}{dt'}(t') dt' \\ &= [G(t-t')\gamma(t')]_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \frac{dG}{dt'}(t-t')\gamma(t') dt'.\end{aligned}\tag{II.30}$$

Choisissant une description eulérienne des efforts, prenant $\tau_0(t)$ ($= G(0)\gamma(0)$) nul et considérant un module de cisaillement tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$, les auteurs obtiennent :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t m(t-t')\gamma(t') dt'\tag{II.31}$$

$$\text{en posant } m = \frac{dG}{dt}.$$

Ils supposent alors l'existence d'un potentiel $W(\gamma, t)$ dont dérive m , si bien que :

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial W}{\partial \gamma}(\gamma(t'), t-t')\gamma(t') dt'.\tag{II.32}$$

Il est alors possible de généraliser cette relation en trois dimensions, en définissant préalablement les tenseurs cinématiques permettant le passage de la configuration $C(t')$ à $C(t)$:

$$\bar{\bar{F}}(t, t') = \frac{\partial x(t)}{\partial x(t')},\tag{II.33a}$$

$$\bar{\bar{C}}(t, t') = \bar{\bar{F}}^T(t, t') \cdot \bar{\bar{F}}(t, t'),\tag{II.33b}$$

$$\bar{\bar{E}}(t, t') = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}}(t, t') - \bar{\bar{1}}).\tag{II.33c}$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, on a alors :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{1}} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}(t, t') \cdot \frac{\partial W}{\partial E(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^T(t, t') dt'\tag{II.34}$$

La mise en place du tenseur de FINGER :

$$\bar{\bar{F}}(t') = \frac{\partial x(t')}{\partial x(t)} = \bar{\bar{F}}^{-1}(t, t'),\tag{II.35}$$

permet la description complète du tenseur de CAUCHY :

$$\bar{\bar{\sigma}}(t) = -p\bar{\bar{1}} + \int_{-\infty}^t \bar{\bar{F}}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial W}{\partial E(t, t')} \cdot \bar{\bar{F}}^{-T}(t') dt'\tag{II.36}$$

Ce type d'approche a connu de nombreux succès dans les années 70-80. Cependant, se pose le problème de l'identification des différentes fonctionnelles de réponse qui sont liées à un matériau et difficilement généralisables à un autre. Une fois cette fonctionnelle déterminée, le stockage de l'histoire des déformations peut se révéler être un problème numérique assez restrictif. L'utilisation des formulations différentielles semble conduire à des modèles beaucoup plus maniables, en particulier sur ces deux derniers points.

II.1.3.b Formulations différentielles

C'est sous l'hypothèse de l'état local (\mathcal{H} . I.1) que se déclinent ces modélisations. Les différents travaux de SIDOROFF [1974, 1975a,b, 1976, 1977] ont en grande partie contribué à leur mise en place. Outre ces derniers, qui sont largement décrits dans le Chapitre I, d'autres auteurs ont abordé ce type de formulation.

LEONOV [1992] présente une généralisation du modèle de MAXWELL (FIG. I.7(a)). Le formalisme eulérien est adopté ce qui permet l'expression de la contrainte comme suit :

$$\bar{\sigma} = 2\rho\bar{B} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\bar{B}}, \quad (\text{II.37})$$

tandis que la dissipation se met sous la forme :

$$\phi = \bar{\sigma} : \bar{D}^v. \quad (\text{II.38})$$

Les relations d'ONSAGER permettent ensuite de relier linéairement \bar{D}^v et $\bar{\sigma}$.

LE TALLEC et RAHIER [1994] obtiennent une description lagrangienne d'un matériau isotrope et incompressible en mettant en oeuvre une généralisation du modèle de ZENER (FIG. I.7(c)). Dans le cadre des matériaux standards généralisés (\mathcal{H} . I.5), sous l'hypothèse de découplage de l'énergie libre du paragraphe § I.5.6 et en choisissant (\bar{C}, \bar{C}_v) pour variables internes, on obtient pour loi de comportement et loi complémentaire :

$$\begin{cases} \bar{S} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial\bar{C}} + p\bar{C}^{-1} = 2\rho_0 \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{C}} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{C}} \right) + p\bar{C}^{-1} \\ \left(\bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{C}_v^{-1} \cdot \frac{\partial\psi_2}{\partial\dot{\bar{C}}_v} \right)_D = 0. \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Par la suite, les auteurs orientent leur choix sur une forme hyperélastique simple des énergies libres et quadratique du potentiel de dissipation :

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{K_1}{4} \text{tr}\bar{C} \\ \psi_2 = \frac{K_2}{4} \text{tr}\bar{C}_e = \frac{K_2}{4} \text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C}) \\ \varphi = \frac{\nu}{2} \text{tr}\bar{D}_v^2 = \frac{\nu}{8} \text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{C}}_v \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \dot{\bar{C}}_v), \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \bar{S} = \frac{K_1}{2} \bar{1} + \frac{K_2}{2} \bar{C}_v^{-1} + p\bar{C}^{-1} \\ \nu \bar{C}_v^{-1} + K_2 \left(\frac{\text{tr}(\bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C})}{3} \cdot \bar{C}_v - \bar{C} \right) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Le même modèle est étudié par SEUNG *et al.* [1997] : les énergies libres utilisées sont aussi de type hyperélastique (MOONEY-RIVLIN), mais la loi complémentaire est directement obtenue à l'aide d'une loi d'écoulement déduite d'analyses expérimentales.

Ces deux derniers modèles corrèlent convenablement l'expérience.

REMARQUE II.3

L'ensemble des modèles présentés précédemment (intégrales ou différentiels) négligent les effets thermiques et considèrent donc une transformation isotherme. \square

II.1.4 Effet MULLINS et endommagement

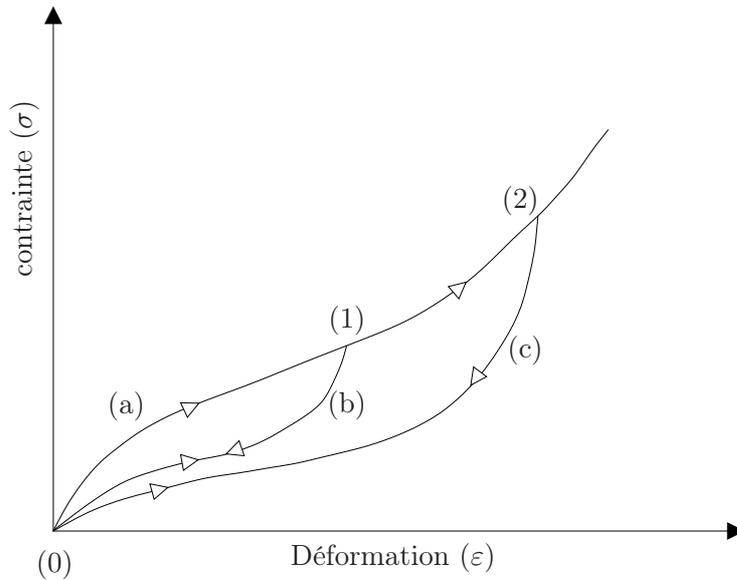


FIGURE II.3 – *Chargement cyclique d'un élastomère.*

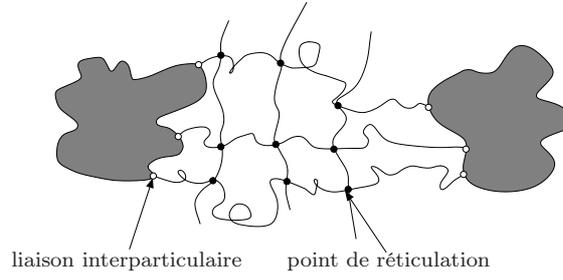
L'effet MULLINS peut être mis en évidence par un essai de traction cyclique (FIG. II.3) [GOVINDJEE et SIMO, 1991]. Partant d'un état initial (0), considéré comme vierge de sollicitations, la courbe de premier chargement suit le chemin (a). Si l'on décharge le matériau arrivé à l'état (1), la courbe de premier déchargement est le chemin (b). Si un deuxième chargement est ensuite appliqué, le chemin suivi sera alors (b) jusqu'à atteindre l'état (1), puis la courbe de chargement se confond à nouveau avec le chemin (a). Si l'on décharge le matériau une fois arrivé à un état (2) ($\epsilon_2 \geq \epsilon_1$), la décharge suit (c). En cas de nouveau chargement, le chemin est (c) tant que $\epsilon \leq \epsilon_2$ et redevient (a) par la suite.

La plupart des auteurs s'accorde pour attribuer ce caractère spécifique des élastomères à un phénomène d'**endommagement**. De même que pour les modèles hyperélastiques, on distingue les approches micro-mécaniques des approches phénoménologiques.

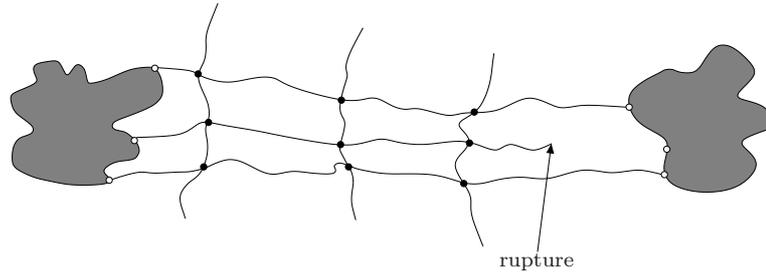
II.1.4.a Approche micro-mécanique

- Modèle de GOVINDJEE et SIMO [GOVINDJEE et SIMO, 1991, 1992]

Les auteurs attribuent l'effet MULLINS à une rupture des chaînes interparticulaires au delà



(a) Configuration vierge.



(b) Configuration déformée.

FIGURE II.4 – *Modèle d'endommagement: rupture des liaisons interparticulaires* [GOVINDJEE et SIMO, 1991].

d'une longueur maximale. Dans une approche purement micro-mécanique, l'élastomère est vu comme un composite constitué d'une matrice élastomérique dans laquelle sont dispersées de fines particules de carbone. L'étude d'un VER (Volume Élémentaire Représentatif), où les inclusions sont supposées rigides, amène une expression de l'énergie libre :

$$\psi(\lambda_a) = (1 - \nu_p)(\psi_{cc}(\lambda_a^m) + \psi_{pp}(\lambda_a^m, \mu)), \quad (\text{II.42})$$

avec ν_p la fraction volumique de carbone, μ la variable d'endommagement qui est directement reliée à l'élongation maximum sur toute l'histoire des déformations, λ_a les élongations macroscopiques, λ_a^m leurs analogues dans la matrice élastomère :

$$\lambda_a \text{ valeurs propres de } \bar{\bar{F}} \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{II.43})$$

$$\lambda_a^m \text{ valeurs propres de } \bar{\bar{R}} \cdot \frac{\bar{\bar{U}} - \nu_p \bar{\bar{1}}}{1 - \nu_p} \quad a \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{II.44})$$

ψ_{pp} représente l'énergie libre spécifique des chaînes interparticulaires :

$$\begin{cases} \psi_{pp}(\lambda_a^m, \mu) = \frac{N_{pp}}{3} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{A}_X} P(n, R) w(n, \lambda_a^m R) dR dn, \\ \mathcal{A}_X = \{(n, R) \mid n a \phi > \mu R\} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

où N_{pp} est le nombre de ces chaînes par unité de volume, $P(n, R)$ la probabilité d'en trouver une en X , de longueur R et constituée de n monomères de longueur moyenne a . \mathcal{A}_X est l'ensemble des couples de caractéristiques (n, R) d'une chaîne n'ayant pas été étirée au delà de ϕ fois leur extension maximum.

L'énergie libre des chaînes joignant les points de réticulation (ψ_{cc}) peut, par des considérations phénoménologiques, être choisie de type OGDEN [GOVINDJEE et SIMO, 1992].

II.1.4.b Approches phénoménologiques

- modèle de SIMO

SIMO [1987] associe à un modèle viscoélastique standard, une variable d'endommagement Θ^m . Se plaçant dans une configuration lagrangienne, l'énergie libre se décline :

$$\psi(\bar{\bar{E}}, \bar{\bar{Q}}, \Theta^m) = g(\Theta^m)\psi^0(\bar{\bar{E}}) - \bar{\bar{Q}} : \bar{\bar{E}} + \psi^l(\bar{\bar{Q}}) \quad (\text{II.46})$$

$$(\text{II.47})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_t^m = \max_{s \in]-\infty, t]} \sqrt{2\psi^0(\bar{\bar{E}}(s))} \\ g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ deux coefficients réels liés au matériau} \\ \bar{\bar{E}} \text{ le tenseur de GREEN-LAGRANGE} \\ \bar{\bar{Q}} \text{ un tenseur associé au caractère visqueux du matériau} \\ \psi^l(\bar{\bar{Q}}) \text{ une énergie libre associée à la viscosité.} \end{array} \right.$$

Ceci mène alors, en introduisant $K(t)$ la fonction de relaxation du matériau, à l'expression du second tenseur de PIOLA-KIRCHOFF :

$$\bar{\bar{S}} = \int_0^\infty K(t-s) \frac{d}{ds} \left(g(\Theta^m) \frac{\partial \psi^0}{\partial \bar{\bar{E}}} \left(\bar{\bar{E}}(s) \right) \right) ds. \quad (\text{II.48})$$

- modèle de MIEHE

Pour MIEHE [1995], relier l'endommagement à l'allongement maximal ou à un maximum d'énergie libre sont des concepts simplifiés car ils ne tiennent pas compte d'un éventuel cumul d'endommagement. Ce phénomène peut être constaté expérimentalement sur un essai cyclé, pour lequel le matériau subit un assouplissement permanent et ce, pour des élongations n'excédant pas l'élongation maximale vue par l'élastomère au cours de son histoire des déformations.

Se basant sur des travaux classiques [CHABOCHE, 1988 ; LEMAÎTRE, 1984] ayant trait à l'endommagement dans le cas général, l'auteur propose d'enrichir le modèle de SIMO, donnant lieu à un endommagement discontinu et un apport continu traduisant l'accumulation de ce dernier.

La mise en place de cette formulation passe par la considération d'une variable interne d'endommagement de type scalaire d telle que :

$$\psi = (1 - d)\psi_0, \quad (\text{II.49})$$

où ψ_0 représente l'énergie libre spécifique du matériau vierge de tout endommagement et $d \in [0, 1]$. Si l'on se limite au seul phénomène d'endommagement d'un matériau isotrope au cours d'une transformation isotherme, (I.53) nous donne pour une description eulérienne :

$$\phi = \left(\bar{\sigma} - 2\rho\bar{B} \cdot (1 - d) \frac{\partial\psi_0}{\partial\bar{B}} \right) : \bar{D} + \psi_0\dot{d} \geq 0. \quad (\text{II.50})$$

Si l'on suppose que seul le phénomène d'endommagement est dissipatif, on arrive à :

$$\bar{\sigma} = 2\rho(1 - d)\bar{B} \frac{\partial\psi_0}{\partial\bar{B}} = (1 - d)\bar{\sigma}_0, \quad (\text{II.51a})$$

$$\phi = \psi_0\dot{d} \geq 0 \quad (\text{II.51b})$$

La loi de comportement (II.51a) est complétée par deux lois d'évolution indépendantes gouvernant respectivement l'endommagement continu et l'endommagement discontinu :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta). \quad (\text{II.52})$$

Les fonctions d_α et d_β vérifient les conditions suivantes qui traduisent respectivement un état initial non endommagé, une évolution croissante et irréversible de l'endommagement et la limite de ce dernier :

$$\begin{cases} d_\alpha(0) = d_\beta(0) = 0 \\ \dot{d}_\alpha \geq 0 \\ \dot{d}_\beta \geq 0 \\ d_\alpha(\infty) + d_\beta(\infty) \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

Les variables α et β gouvernent respectivement l'endommagement discontinu de type MULLINS et celui d'accumulation continu :

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} \psi_0(s), \quad (\text{II.54a})$$

$$\beta(t) = \int_0^t |\dot{\psi}_0(s)| ds. \quad (\text{II.54b})$$

Ces variables suivent les lois d'évolution :

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \dot{\psi}_0 & \text{si } \psi - \alpha = 0 \text{ et } \dot{\psi}_0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.55a})$$

$$\dot{\beta} = |\dot{\psi}_0|. \quad (\text{II.55b})$$

L'auteur propose deux expressions des fonctions d_α et d_β :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right], \quad (\text{II.56a})$$

$$d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right], \quad (\text{II.56b})$$

avec $d_\alpha^\infty, d_\beta^\infty, \eta_\alpha$ et η_β quatres paramètres dépendant du matériau.

REMARQUE II.4

La partie discontinue de ce modèle est très proche de celle du modèle de SIMO. Seules les descriptions – eulérienne pour SIMO, lagrangienne pour MIEHE – diffèrent. Le passage du second au premier est donc très facile. □

REMARQUE II.5

ANDRIEUX *et al.* [1997] se sont attachés à prendre en compte une compressibilité induite par l'endommagement dans le cas de matériaux initialement incompressibles. □

II.2 Choix du modèle

II.2.1 Essais expérimentaux

II.2.1.a Description des essais

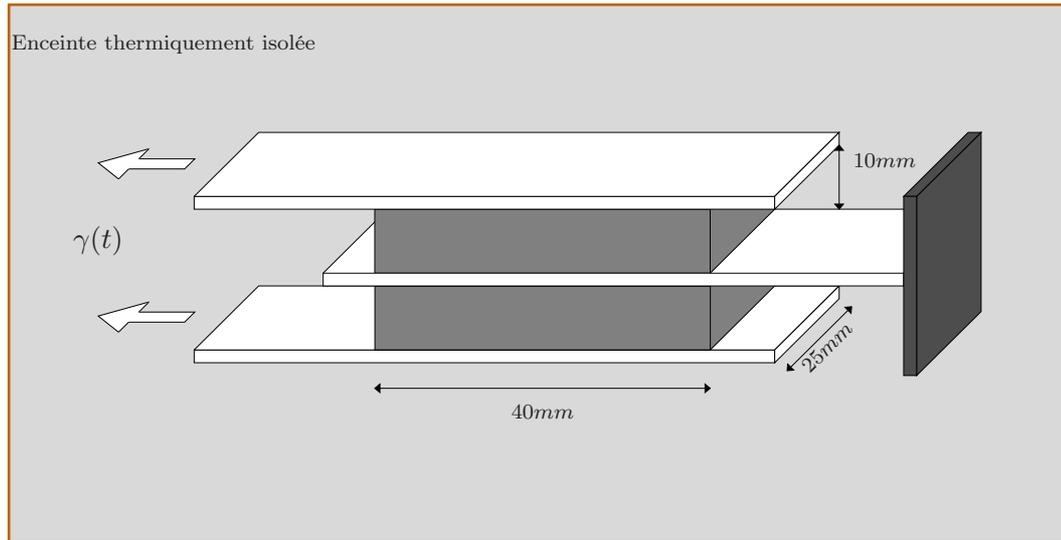


FIGURE II.5 – *Éprouvette de double cisaillement.*

L'ensemble des essais expérimentaux présentés ci-dessous est réalisé sur des éprouvettes bi-couches élastomère/métal, plus communément appelées **éprouvettes de double cisaillement** (FIG. II.5). L'armature centrale de cette dernière est fixe tandis que les deux armatures extérieures sont animées d'un déplacement sinusoïdal, de fréquence f et d'amplitude Γ :

$$\gamma(t) = \Gamma \sin(2\pi ft). \quad (\text{II.57})$$

Avant de commencer les mesures, trois cycles d'accommodation sont réalisés, afin de limiter l'apparition de l'effet MULLINS décrit § II.1.4. Ces exemples présentent l'avantage de posséder une solution semi-analytique sous une hypothèse de cisaillement globale homogène.

Par ailleurs, ces essais sont relativement simples à mettre en oeuvre. De plus, ce type de sollicitations mécaniques est couramment rencontré dans des parties vitales d'ensembles mécaniques ou ayant trait à la sécurité telles que les pièces de liaison entre le moyeu rotor et la pale.

II.2.1.b Dispositif expérimental

L'élastomère utilisé pour ces expériences est du **diméthyl-vinyl-siloxan vulcanisé** ; les armatures sont en acier. La campagne expérimentale a été menée par la Société EUROCOPTER. L'éprouvette est montée dans une enceinte thermostatée, refroidie par une circulation d'azote et

éventuellement réchauffée par une résistance.

Le déplacement est imposé par un vérin hydraulique. La mesure des réactions est réalisée à l'aide d'un capteur de force situé dans le mors mobile.

II.2.2 Détermination du modèle

II.2.2.a Constatations expérimentales

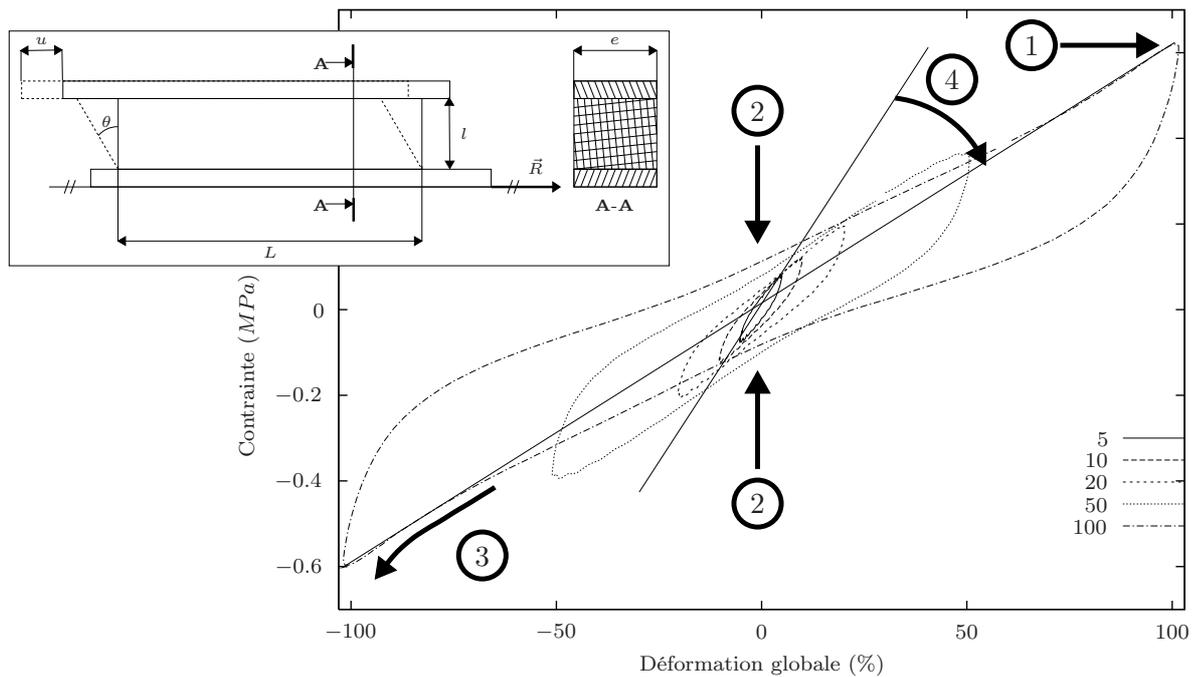


FIGURE II.6 – Essais expérimentaux, Contrainte ($\frac{R}{e \times L}$, MPa) - Déformation globale ($\tan \theta = \frac{u}{l}$, %), $T = 23 \text{ }^\circ\text{C}$.

La figure FIG. II.6 représente des résultats d'essais de cisaillement cyclique pour différentes amplitudes de sollicitations.

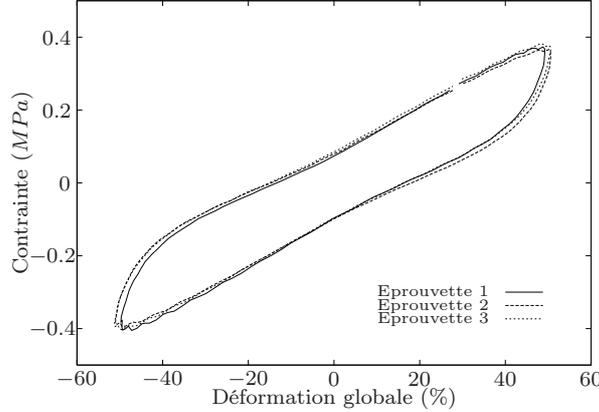
Plusieurs phénomènes sont mis en évidence. En particulier, on note :

- la présence d'un **point anguleux** (①) au changement du signe de la sollicitation.
- l'existence d'un **étranglement** de l'hystérésis au passage à l'origine (②).
- un **raidissement** pour les amplitudes de sollicitations importantes (③).
- Enfin, un **raidissement global** du matériau (④) pour les faibles amplitudes du taux de cisaillement.

REMARQUE II.6

Les seuls essais réalisés et présentés dans ce paragraphe sont des cycles stabilisés. Ceci est assez

limitant car on ne peut mettre en évidence l'effet MULLINS ou un quelconque autre endommagement. Pratiquement, l'expérimentateur réalise quelques cycles préliminaires pour éliminer tout phénomène de ce type, car ils ne sont pas représentatifs des conditions de vol. \square



REMARQUE II.7

Ces résultats sont à traiter avec précautions. En effet, on constate FIG. II.7 qu'il peut y avoir une dispersion relative des résultats expérimentaux qui exige une certaine prudence dans l'identification des paramètres ou la comparaison avec des résultats numériques. \square

FIGURE II.7 – *Dispersion des résultats sur trois éprouvettes de double cisaillement, amplitude de 50%, $T = 25^\circ\text{C}$.*

II.2.2.b Modèles rhéologiques

Nous adoptons une approche différentielle du comportement viscoélastique. Le cadre thermodynamique est celui introduit dans le premier chapitre de ce manuscrit, à savoir :

- une formulation en grandes déformations basée sur l'état local \mathcal{H} . I.1,
- une dissipation résultant uniquement de la déformation globale, des variables internes et de la conduction thermique (\mathcal{H} . I.2),
- un découplage des effets thermiques et mécaniques dans la dissipation (\mathcal{H} . I.3),
- l'introduction d'une variable interne par le biais d'un état intermédiaire de type visqueux ($\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}_e \cdot \bar{\bar{F}}_v$),
- le cadre des matériaux standards généralisés postulant l'existence d'un pseudo-potential de dissipation (\mathcal{H} . I.5),
- un matériau isotrope,
- un découplage de l'énergie libre en une somme de fonctions isotropes des variables d'états (§ II.2.2.b),
- l'incompressibilité globale et visqueuse du matériau.

A ce jeu d'hypothèses vient s'ajouter la suivante :

HYPOTHÈSE II.1

On suppose les phénomènes mécaniques indépendants des effets thermiques. Ceci nous permet de considérer l'énergie libre et le pseudo-potential fonction des uniques grandeurs mécaniques.

REMARQUE II.8

Cette hypothèse restreint fortement le domaine de validité de notre modèle. En effet, pour des essais cyclés, présentés au paragraphe § II.2.1.a, il est possible d'observer une variation de température à coeur de l'élastomère pouvant aller jusqu'à plusieurs dizaines de degrés, variation qui peut modifier considérablement le comportement du matériau (FIG. II.1). Le modèle découlant des hypothèses précédentes ne sera donc considéré valide que sur les premiers cycles de l'essai. \square

D'après (I.110), (I.120), (I.121), (I.112), (I.112), le modèle est gouverné par⁽³⁾ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{tot} = \psi(\bar{\bar{C}}) + \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) + \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}, \dot{\bar{\bar{C}}}_v) \\ \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}} + p \bar{\bar{C}}^{-1} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} \right) \\ \det \bar{\bar{F}} = 1 \\ \det \bar{\bar{F}}_v = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.58})$$

Nous explicitons les équation précédentes, à l'aide des modèles rhéologiques de MAXWELL, POYNTING-THOMSON et ZENER, ces derniers étant des modèles classiquement utilisés dans la modélisation en petites perturbations de la viscoélasticité.

- MAXWELL

Ce modèle est un des plus simples rencontrés dans la littérature. Il met en jeu un ressort en série avec un amortisseur. Il est obtenu à partir du modèle global présenté dans le premier chapitre en figure FIG. I.8(b), en considérant uniquement la branche \mathcal{P}_1 (*i.e.* un seul état intermédiaire) et en prenant nulle la rigidité du ressort parallèle.

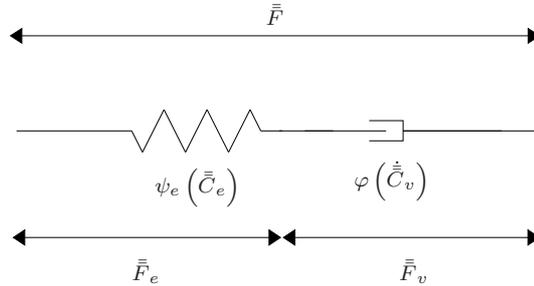


FIGURE II.8 – Modèle de MAXWELL.

(3). On se placera dans un cadre de description mixte, mais il aurait été cependant possible de choisir une description eulérienne ou lagrangienne

Ce modèle conduit aux formes suivantes de l'énergie libre et du potentiel de dissipation :

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) & \psi_e \text{ isotrope} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}_v). \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

En annexe E est présentée la forme développée des équations (II.58c) et (II.58d) :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

- POYNTING-THOMSON

Le modèle présenté FIG. V.1 est obtenu en considérant l'unique branche \mathcal{P}_1 du modèle général FIG. I.8(b).

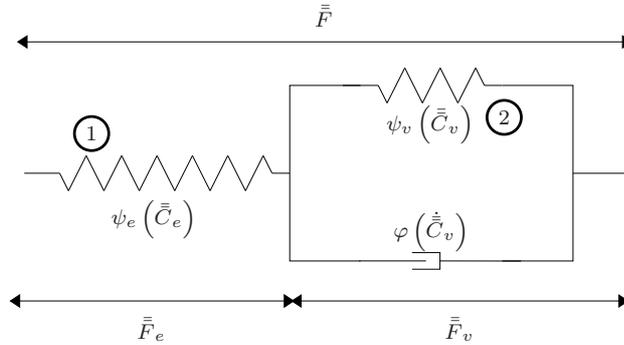


FIGURE II.9 – *Modèle de POYNTING-THOMSON.*

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) + \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) & \psi_e, \psi_v \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{\bar{C}}_v). \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

Le modèle est alors régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\bar{C}}_v} - \rho_0 \bar{\bar{C}}_v^{-1} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{C}}_v^{-1} \right) \\ \quad + \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial I_1^v} + \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \bar{\bar{1}} - \frac{\partial \psi_v}{\partial I_2^v} \bar{\bar{C}}_v + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

- ZENER

L'obtention de ce dernier modèle se fait une fois de plus à partir du modèle général FIG. I.8(b). On considère, dans ce cas, l'assemblage en parallèle des branches \mathcal{E} et \mathcal{P}_1 avec, pour cette dernière, une coupure (ressort à énergie libre nulle) à la place du ressort en parallèle.

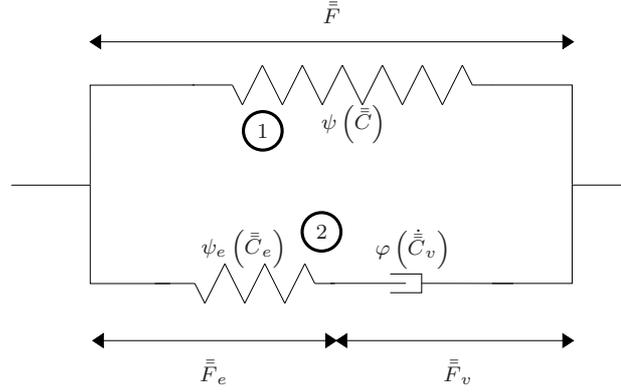


FIGURE II.10 – Modèle de ZENER.

$$\begin{cases} \psi^{tot} = \psi_e(\bar{C}_e) + \psi(\bar{C}) & \psi_e, \psi \text{ isotropes} \\ \varphi^{int} = \varphi^{int}(\bar{C}_v). \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

Le comportement du matériau est alors régi par :

$$\begin{cases} \bar{\pi} = 2\rho_0 \bar{F} \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \bar{C} \\ \quad + \bar{C}_v^{-1} \cdot \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + p \bar{F}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\bar{C}}_v} - \bar{C}_v^{-1} \cdot \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \cdot \left(\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \right) \bar{1} - \frac{\partial \psi_e}{\partial I_2^e} \bar{C} \cdot \bar{C}_v^{-1} \right) + q \bar{C}_v^{-1} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

II.2.2.c Eléments du modèle

Afin de complètement définir les modèles précédents, on affecte aux différentes parties élastiques des formes hyperélastiques d'énergie libre (§ II.1.2.a). On observe en particulier les formes de NÉO-HOOKE, GENT-THOMAS, HART-SMITH et MOONEY-RIVLIN.

Le pseudo-potentiel de dissipation est choisi, par analogie aux modèles rhéologiques sous l'hypothèse des petites perturbations, comme une fonction quadratique de la forme [BOUKAMEL *et al.*, 1997]:

$$\varphi(\dot{\bar{C}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{C}}_v : \dot{\bar{C}}_v = \frac{\nu}{2} \text{tr} \dot{\bar{C}}_v^2. \quad (\text{II.65})$$

Ce dernier choix permet la réécriture de l'équation complémentaire (II.58d) sous la forme :

$$\dot{\bar{C}}_v + q \bar{C}_v^{-1} = -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{C}_v} \right). \quad (\text{II.66})$$

II.2.3 Identification du modèle et des paramètres mécaniques

Avertissement : ce travail fait l'objet d'une collaboration avec A. BOUKAMEL et donnera lieu à une publication qui est actuellement en cours de rédaction [BOUKAMEL et MÉO, 2000].

II.2.3.a Présentation de la démarche

Nous présentons, dans un premier temps, un algorithme d'identification de paramètres, utilisable pour tous les modèles présentés § II.2.2.b et ce quelle que soit les formes d'énergies libres affectées aux composants élastiques de ces modèles.

Par la suite, nous choisissons la forme de l'énergie libre, afin de nous consacrer uniquement à l'identification du modèle rhéologique.

Enfin, une fois le modèle rhéologique adopté, nous nous attachons à déterminer une forme adéquate d'énergie libre et ce en terme de coût d'identification et de validité des résultats.

II.2.3.b Algorithme d'identification

En vue d'identifier les paramètres des différents modèles, nous disposons des courbes expérimentales présentées FIG. II.6. Nous choisissons un essai avec une amplitude de déformation de 50% à une fréquence de $3.5Hz$.

L'identification se fait semi-analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel MATHEMATICA[©]. Nous prenons en compte les hypothèses suivantes :

- la rigidité de l'acier étant très supérieure à celle de l'élastomère, la déformations des mors est négligée,
- le cisaillement de l'élastomère est uniforme :

$$\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.67})$$

- le pseudo gradient visqueux est de la forme :

$$\bar{\bar{F}}_v = \begin{bmatrix} \gamma_{v11} & \gamma_v & 0 \\ 0 & \gamma_{v22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{v33} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.68})$$

On définit les points expérimentaux par les $2 \times N$ couples $(\gamma_i, \tau_i)^{(4)}$, avec :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1 \dots N\} \\ \dot{\gamma}_i < 0 \quad \forall i \in \{N \dots 2N\} \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

(4). déformation/contraainte

L'hystérésis définie par ces $2 \times N$ couples n'étant pas bijective, il est préférable de décomposer les résultats expérimentaux en deux parties bijective. On adopte les définitions suivantes (FIG. II.11) :

- la courbe moyenne entre la descente ($\dot{\gamma} < 0$) et la montée ($\dot{\gamma} \geq 0$) :

$$t_i = \frac{\tau_i + \tau_{2N-i}}{2} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}, \quad (\text{II.70})$$

- et l'écart entre ces deux courbes est :

$$d_i = \tau_i - \tau_{2N-i} \quad \forall i \in \{1 \dots N\}. \quad (\text{II.71})$$

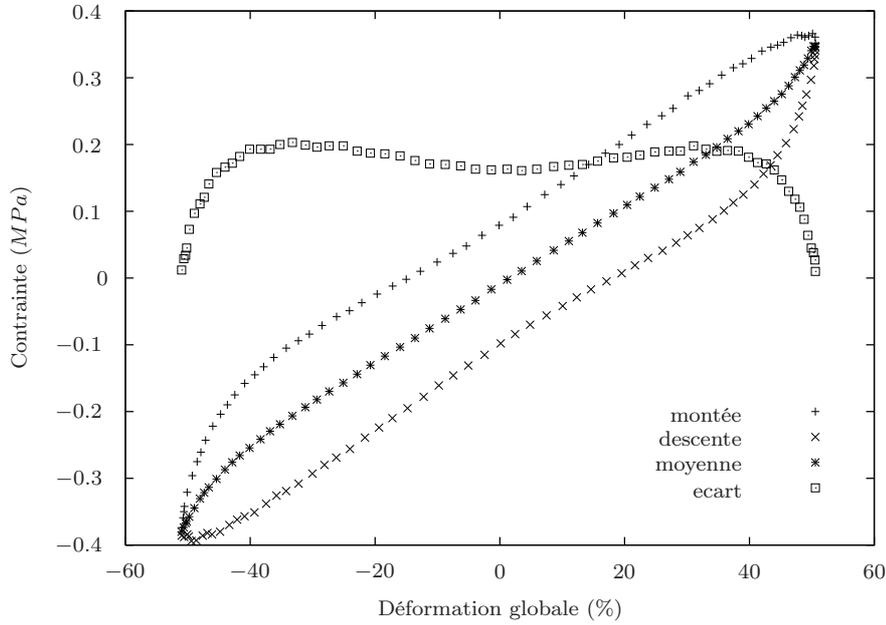
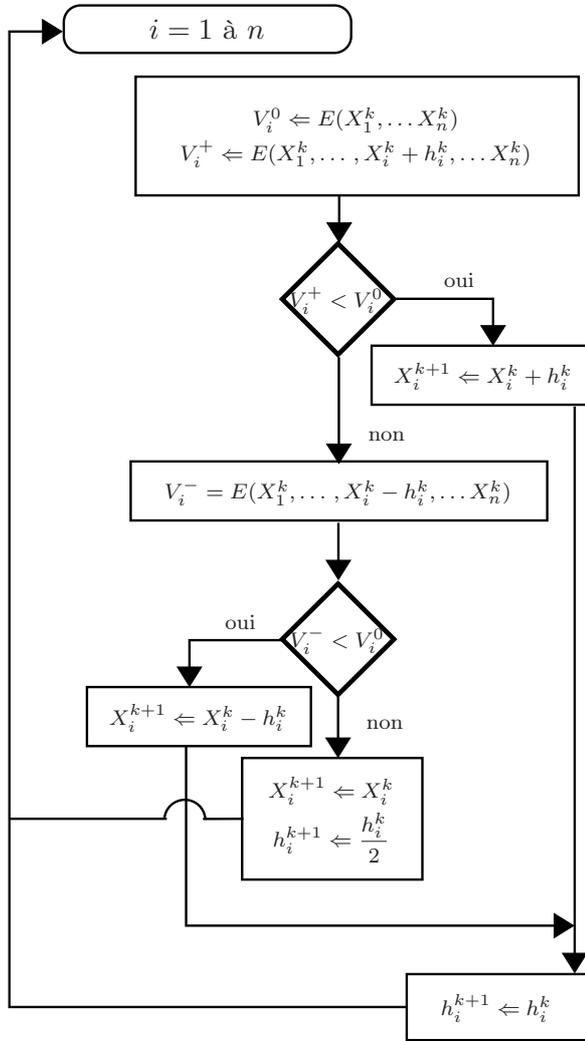


FIGURE II.11 – *Découplage des courbes expérimentales.*

L'identification des paramètres du matériau $\tilde{X} = (\tilde{X}_1 \dots \tilde{X}_n)$ peut se ramener à la minimisation de l'écart entre les courbes expérimentales (γ_i, t_i) , (γ_i, d_i) et leurs homologues théoriques. Cet écart peut être caractérisé par la **distance des moindres carrés** :

$$E(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - t(X)|_{\gamma_i})^2 + \sum_{i=1}^n (d_i - d(X)|_{\gamma_i})^2} \quad (\text{II.72})$$

On adopte l'algorithme de minimisation II.1.



Algorithme II.1 Algorithme d'identification des paramètres matériaux

requis : $X^0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$

requis : $H^0 = (h_1^0, \dots, h_n^0)$

requis : Précision sur E : ε

tant que $E(X) > \varepsilon$ **faire**

pour $i = 1$ à n **faire**

$V_i^0 \leftarrow E(X_1^k, \dots, X_n^k)$

$V_i^+ \leftarrow E(X_1^k, \dots, X_i^k + h_i^k, \dots, X_n^k)$

si $V_i^+ < V_i^0$ **alors**

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k + h_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow h_i^k$

sinon

$V_i^- = E(X_1^k, \dots, X_i^k - h_i^k, \dots, X_n^k)$

si $V_i^- < V_i^0$ **alors**

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k - h_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow h_i^k$

sinon

$X_i^{k+1} \leftarrow X_i^k$

$h_i^{k+1} \leftarrow \frac{h_i^k}{2}$

fin si

fin si

fin pour

fin tant que

II.2.3.c Choix du modèle rhéologique et résultats d'identification

L'objet de ce chapitre est d'identifier le modèle le plus adapté à modéliser le comportement de notre matériau (FIG. II.11). Les énergies libres choisies sont définies TAB. II.1. Le pseudo-potential de dissipation est choisi de la forme (II.65). Les ressorts ① et ② (cf. FIG. V.1 et FIG. II.10) sont respectivement définis par des formes de GENT-THOMAS et NÉOHOOKE.

L'identification porte donc pour les modèles de ZENER et POYNTING-THOMSON, sur les 2 coefficients c_1 et c_2 de l'énergie libre de GENT-THOMAS, le coefficient a_1 de la loi de NÉOHOOKE et le coefficient de viscosité ν , c'est-à-dire sur 4 coefficients.

	ZENER	POYNTING-THOMSON
ψ_e ou ψ^a	GENT-THOMAS	GENT-THOMAS
ψ_v	NÉOHOOKE	NÉOHOOKE

TABLEAU II.1 – *Energies libres élastiques et visqueuses des différents modèles.*

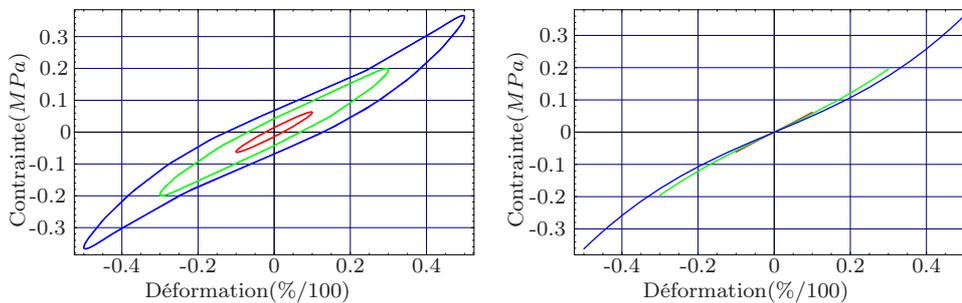
^a respectivement pour les modèles de POYNTING-THOMSON et ZENER

Le modèle de MAXWELL pouvant être obtenu à partir des modèles de POYNTING-THOMSON et ZENER par la suppression de l'une des deux composantes de l'énergie libre, il n'est pas nécessaire de le tester. En effet si ce modèle est repressatif du matériau alors l'algorithme II.1 convergera vers un jeu de caractéristiques correspondant au modèle de MAXWELL, *i.e.* $c_1 = c_2 = 0$ pour ZENER ou $a_1 = 0$ pour POYNTING-THOMSON.

On obtient les résultats suivant pour **400** itérations de l'algorithme II.1 :

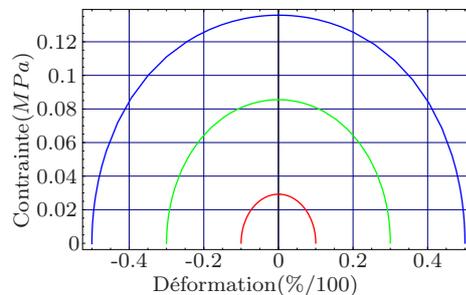
- Modèle de ZENER

Les caractéristiques identifiées du modèle de ZENER sont données TAB. II.2. Sur les figures FIG. II.12 sont représentées les homologues numériques des courbes expérimentales définies FIG. II.11 et ce pour des sollicitations de cisaillement allant de 10% à 50% de cisaillement global.



(a) Courbes d'hystérésis.

(b) Courbes moyennes



(c) Courbes écart

FIGURE II.12 – *Résultats d'identification sur le modèle de ZENER (cisaillement 10%, 20%, 50%).*

	GENT-THOMAS		NÉOHOKE	φ
	c_1 (MPa)	c_2 (Mpa)	a_1 (Mpa)	ν (MPa.s)
identification	1,02	-4,52577	0.790917	0.29898

TABLEAU II.2 – Résultats d'identification - modèle de ZENER

Deux des phénomènes attendus (cf. § II.2.2.a) sont observés, à savoir un point anguleux au changement de signe de la sollicitation, ainsi qu'un raidissement dans la zone de sollicitation maximum. En revanche, ni étranglement, ni raidissement global pour des faibles valeurs de cisaillement ne sont constatés.

- Modèle de POYNTING-THOMSON

A l'instar de celui de ZENER, le modèle de POYNTING-THOMSON présente deux des phénomènes que l'on cherche à modéliser (cf. FIG. II.6), à savoir le raidissement général de l'hystérésis pour les faibles taux de cisaillement global et l'étranglement de la courbe dans les zones de sollicitation proche de zéro. On constate de plus, un léger raidissement de la courbe au changement de signe de la sollicitation.

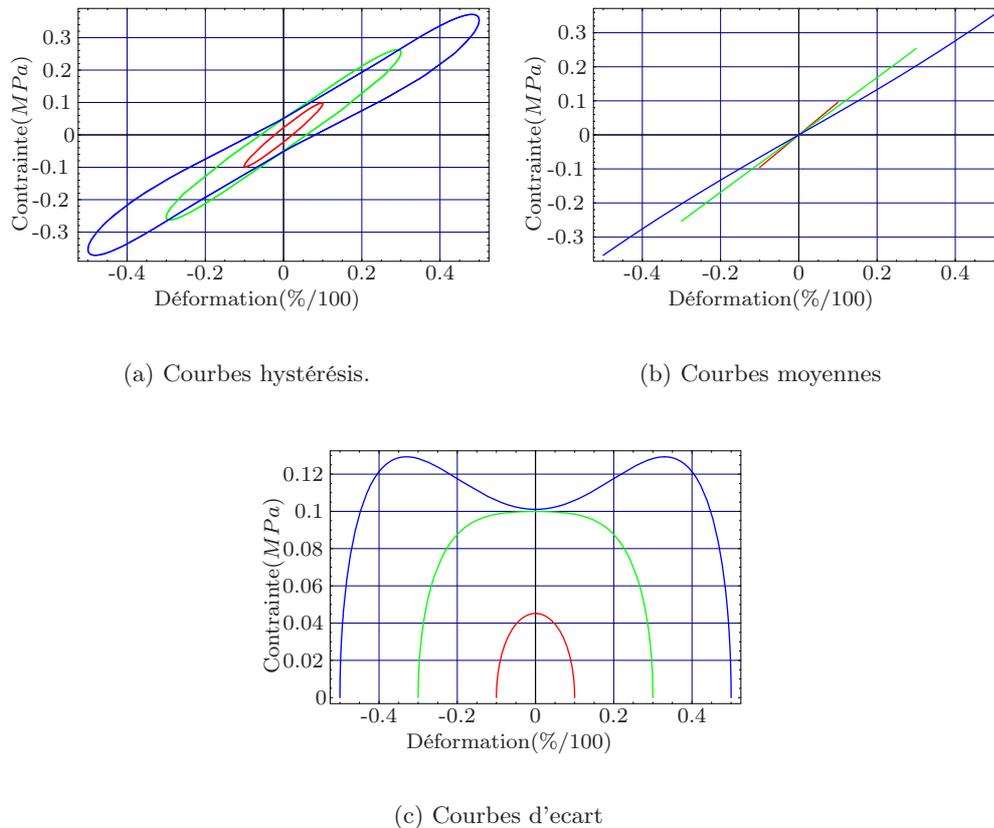


FIGURE II.13 – Résultats d'identification sur le modèle de POYNTING-THOMSON (cisaillement 10%, 20%, 50%).

	GENT-THOMAS		NÉOHOKE	φ
	c_1 (MPa)	c_2 (MPa)	a_1 (MPa)	ν (MPa.s)
identification	1.65851	-3.42677	0.0300972	0.0751336

TABLEAU II.3 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON

Le point anguleux n'est vraiment marqué que pour des essais d'amplitude supérieure à 50% de déformation (FIG. II.6). **Il paraît donc raisonnable d'adopter le modèle de POYNTING-THOMSON pour le reste de l'étude.**

REMARQUE II.9

La restriction de l'identification aux uniques modèles de ZENER et POYNTING-THOMSON, se justifie *a posteriori*, par la non-convergence vers des identifications qui les rendraient équivalents à un modèle de MAXWELL. □

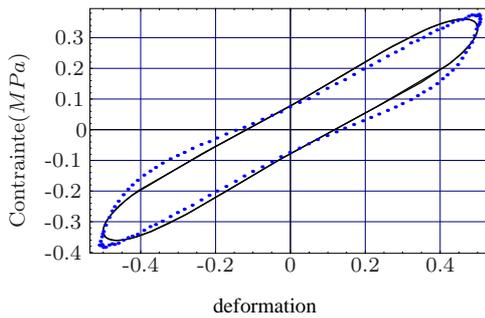


FIGURE II.14 – Comparaison des résultats semi-analytiques sur le modèle POYNTING-THOMSON et expérimentaux sur un essai d'amplitude de cisaillement 50%.

La comparaison des résultats semi-analytiques menés sur le POYNTING-THOMSON avec les résultats expérimentaux obtenus pour une amplitude de sollicitation de 50% (cf. FIG. II.14) donne des résultats assez bons. Les écarts peuvent être dus naturellement au modèle, mais aussi à l'hypothèse de cisaillement uniforme prise en compte pour le calcul semi-analytique. Cette approximation ne sera naturellement plus présente dans la mise en oeuvre élément finis présentée § II.3.

II.2.3.d Choix de l'énergie libre principale

Maintenant que le modèle rhéologique est déterminé, il faut postuler une forme acceptable de l'énergie libre. Cette dernière doit à la fois être suffisamment riche pour ne pas déprécier le modèle en le linéarisant, et de forme peu complexe pour ne pas introduire trop de coefficients matériau dont la détermination par l'algorithme des moindres carrés deviendrait trop imprécise. Une énergie libre de forme NÉOHOKE est affectée au potentiel ψ_v (FIG. V.1, ressort ②) et les formes de type MOONEY-RIVLIN, GENT-THOMAS et HART-SMITH sont comparées pour le potentiel élastique ψ_e (FIG. V.1, ressort ①).

Les coefficients identifiés du modèle incluant une énergie libre de GENT-THOMAS sont donnés TAB. II.3 tandis que les caractéristiques des modèles faisant intervenir le potentiel de HART-SMITH ou MOONEY-RIVLIN sont données respectivement TAB. II.4 et TAB. II.4. La stabilisation de l'algorithme II.1 est obtenue par environ 4000 itérations, soit 1000 fois plus que pour la détermination du modèle faisant intervenir le potentiel de GENT-THOMAS.

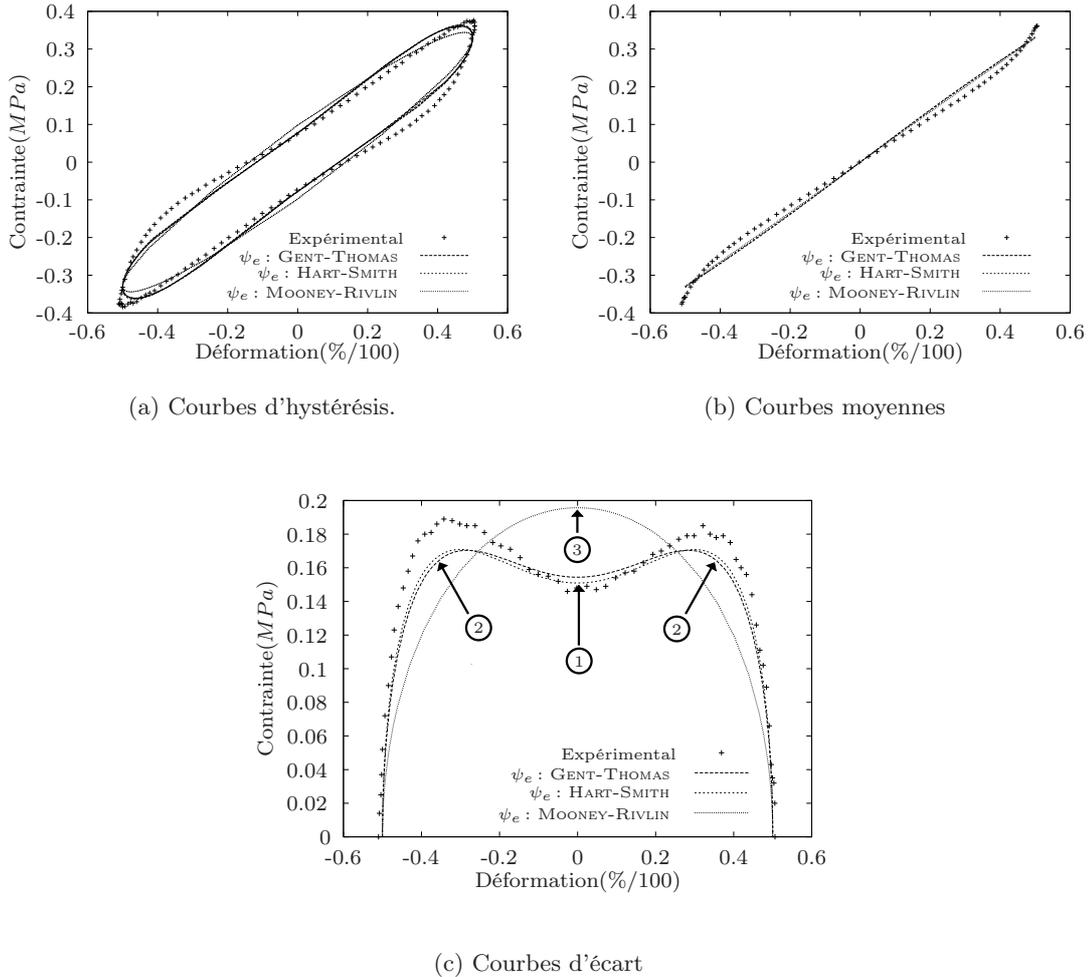


FIGURE II.15 – Comparaison des formulations basées sur le modèle de POYNTING-THOMSON et faisant intervenir les formes de potentiel de GENT-THOMAS de sc Hart-Smith ou de MOONEY-RIVLIN.

D'après la figure FIG. II.15(c), il semble évident que le modèle de MOONEY-RIVLIN soit à exclure. Sa forme, trop linéaire, ne rend pas possible la modélisation de l'étranglement de l'hystérésis ③. L'apport de la forme de POYNTING-THOMSON par rapport au modèle de GENT-THOMAS est surtout visible sur les courbes d'écart FIG. II.15(c). Une minimisation globale de la distance entre la courbe numérique donnée par le modèle employant la forme de HART-SMITH,

	HART-SMITH			NÉOHOOKE	φ
	c_1 (MPa)	c_2 (Mpa)	c_3	a_1 (Mpa)	ν (MPa.s)
identification	1.65982	-3.44561	0.23147	0.022071	0.075062

TABLEAU II.4 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON incluant une énergie libre principale de type HART-SMITH

	MOONEY-RIVLIN		NÉOHOOKE	φ
	c_1 (MPa)	c_2 (MPa)	a_1 (MPa)	ν (MPa.s)
identification	0.18853	0.19072	0.015537	0.06886

TABLEAU II.5 – Résultats d'identification - modèle de POYNTING-THOMSON incluant une énergie libre principale de type MOONEY-RIVLIN

est observée. Ce phénomène est d'autant plus accentué sur les maxima ② et le minimum ①, ce qui témoigne d'un rétrécissement de l'hystérésis plus réaliste.

Cependant, la dispersion des résultats expérimentaux (cf. remarque II.7) ne justifie pas nécessairement une telle précision, d'autant que le coût d'identification du modèle de HART-SMITH est nettement supérieur à celui de GENT-THOMAS. Le choix de ce dernier semble donc être un bon compromis entre validité des résultats numériques et coût d'identification.

II.3 Mise en oeuvre numérique

II.3.1 Formulation variationnelle

On rappelle le problème à traiter :

- comportement du matériau (modèle de POYNTING-THOMSON)

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{tot} = \psi_v(\bar{\bar{C}}_v) + \psi_e(\bar{\bar{C}}_e) = a_1 (I_1^v - 3) + c_1 (I_1^e - 3) + c_2 \ln\left(\frac{I_1^e}{3}\right) \\ \varphi = \varphi(\dot{\bar{\bar{C}}}_v) = \frac{\nu}{2} \dot{\bar{\bar{C}}}_v : \dot{\bar{\bar{C}}}_v \\ \bar{\bar{\pi}} = 2\rho_0 \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}} + \bar{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}} + p \bar{\bar{F}}^{-T} \\ \frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{\bar{C}}}_v} + q \bar{\bar{C}}_v^{-1} = -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{\bar{C}}_v} \right) \\ \det \bar{\bar{F}} = 1 \\ \det \bar{\bar{F}}_v = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.73})$$

- équation d'équilibre

$$\operatorname{div}_X \bar{\bar{\pi}} + \rho_0 \vec{f} = \vec{0} \quad \text{sur } \Omega, \quad (\text{II.74})$$

- conditions aux limites

$$\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{N} = \vec{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_F. \quad (\text{II.75})$$

Le problème d'équilibre est équivalent à celui présenté (II.17).

HYPOTHÈSE II.2

On considère le cas d'un matériau "fortement" quasi-incompressible, si bien que J est très proche de 1.

Cette hypothèse permet de justifier :

- les formes de G et G^* définies § II.1.2.b :

$$G(J) = \frac{1}{2}(J-1)^2 \Leftrightarrow G^*(p) = \frac{\varepsilon}{2} p^2, \quad (\text{II.76})$$

- et d'après JAZZAR [1993], les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = I_1 \\ \bar{I}_2 = I_2. \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

La transformation visqueuse est considérée comme totalement incompressible, il n'est donc nul besoin d'introduire un champ annexe homologue à p . La condition $\det \bar{\bar{C}}_v$ permettra l'élimination du réel q introduit par l'incompressibilité visqueuse.

Le problème (II.17) peut alors être découpé en deux parties dépendant respectivement des variations de déplacement et de pression :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u = \int_\Omega \left(\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{F}} + p \frac{\partial J}{\partial \bar{F}} \right) : \delta \bar{F}(\delta \bar{u}) dV - \int_\Omega \bar{f} \cdot \delta \bar{u} dV - \int_{\partial \Omega_F} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} dS = 0 \quad \forall \delta \bar{u} \in \mathcal{V} \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p = \int_\Omega (J - 1 - \varepsilon p) \delta p dV = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

auxquelles on rajoute les équations (II.73).

II.3.2 Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

La résolution du système intégrale (II.78), par la méthode des éléments finis, passe par une discrétisation des formes intégrales à l'aide d'une somme des formes élémentaires $\mathcal{W}_\varepsilon^{ue}$ et $\mathcal{W}_\varepsilon^{pe}$ fonctions de \vec{u}_e, p_e respectivement le champ de déplacement élémentaire et le champ de pression élémentaire et de $\delta \vec{u}_e, \delta p_e$ leurs homologues virtuels :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u(\vec{u}, p, \delta \vec{u}, \delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathcal{W}_\varepsilon^{ue}(\vec{u}_e, p_e, \delta \vec{u}_e, \delta p_e), \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p(\vec{u}, p, \delta \vec{u}, \delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathcal{W}_\varepsilon^{pe}(\vec{u}_e, p_e, \delta \vec{u}_e, \delta p_e). \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

Puis, en introduisant (II.58c) et en adoptant une notation vectorielle pour les différentes grandeurs tensorielles, on explicite les formes intégrales élémentaires :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^{ue}(\vec{u}_e, p_e, \delta \vec{u}_e, \delta p_e) = \int_{\Omega_e} \langle \delta \bar{F} \rangle \langle \bar{\pi} \rangle dV - \int_{\Omega_e} \langle \delta \vec{u}_e \rangle \langle \bar{f} \rangle dV - \int_{\Omega_e^F} \langle \delta \vec{u}_e \rangle \langle \bar{T} \rangle dS \\ \mathcal{W}_\varepsilon^{pe}(\vec{u}_e, p_e, \delta \vec{u}_e, \delta p_e) = \int_{\Omega_e} \delta p^e (J - 1 - \varepsilon p) dV \end{cases} \quad (\text{II.80})$$

On introduit alors les fonctions classiques d'interpolation des éléments finis [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1991] :

- en notant $[N_u^e]$, les fonctions d'interpolation en déplacement relatives à l'élément e que nous supposons isoparamétrique⁽⁵⁾ et $\{U^e\}$ les déplacements nodaux, on a :

$$\vec{u}_e = [N_u^e] \{U^e\}. \quad (\text{II.81})$$

- $[B]$ désigne la matrice de déformation construite à partir des dérivées des fonctions d'interpolation. Cette grandeur permet l'évaluation du gradient de la transformation sur un élément :

$$\{\bar{F}\} = [B] \{U^e\}. \quad (\text{II.82})$$

(5). Les noeuds géométriques et d'interpolation sont confondus

On obtient alors au niveau global :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_\varepsilon^u(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta U^e \rangle \left([k_t] \{ \Delta U^e \} + [g] \{ \Delta P^e \} + \{ r \} - \{ f_{ext} \} \right) = 0 \\ \mathcal{W}_\varepsilon^p(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta P^e \rangle \left([g]^T \{ \Delta U^e \} - \varepsilon [m_p] \{ \Delta P^e \} + \{ i \} \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.86})$$

Les grandeurs élémentaires⁽⁶⁾ sont :

– la matrice tangente élémentaire :

$$[k_t] = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \frac{\partial \{ \bar{\pi} \}}{\partial \{ \vec{u} \}} dV; \quad (\text{II.87})$$

– la matrice d'incompressibilité :

$$[g] = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \frac{\partial J}{\partial \{ \bar{F} \}} \langle N_p^e \rangle dV; \quad (\text{II.88})$$

– le terme de perturbation :

$$\varepsilon [m_p] = \int_{\Omega_e} \varepsilon \{ N_p^e \} \langle N_p^e \rangle dV; \quad (\text{II.89})$$

– le résidu élémentaire :

$$\{ r \} = \int_{\Omega_e} \{ B \}^T \{ \bar{\pi} \} dV; \quad (\text{II.90})$$

– les sollicitations élémentaires :

$$\{ f_{ext} \} = \int_{\Omega_e} [N_u^e] \{ \vec{f} \} - \int_{\Omega_e^F} [N_u^e] \{ \vec{T} \} dS; \quad (\text{II.91})$$

– le résidu d'incompressibilité

$$\{ i \} = \int_{\Omega_e} \{ N_p^e \} (J - 1 - \varepsilon p) dV. \quad (\text{II.92})$$

Enfin les éléments finis mis en oeuvre sont discontinus en pression⁽⁷⁾, si bien que l'annulation de (II.80b) passe par l'annulation de chacun des termes élémentaires, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^{p_e}(\vec{u}_e + \Delta\vec{u}_e, p_e + \Delta p_e) &= 0 \forall \{ \delta P_e \} \\ \Leftrightarrow \{ \Delta P_e \} &= \frac{1}{\varepsilon} [m_p]^{-1} ([g]^T \{ \Delta U_e \} + \{ i \}) \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

(6). Dépendant exclusivement des champs de déplacement et de pression aux points d'intégration

(7). Les motivations de ce choix sont données § II.3.5 qui concerne le type d'élément fini mis en oeuvre.

Cette opération de **condensation statique** de la pression permet ensuite d'exprimer (II.80a) sous la forme :

$$\mathcal{W}_\varepsilon^u(\vec{u} + \Delta\vec{u}, p + \Delta p) = \sum_{e=1}^{Nel} \langle \delta U^e \rangle \left(\left([k_t] + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} [g]^T \right) \{ \Delta U^e \} + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} + \{ r \} - \{ f_{ext} \} \right) = 0, \quad \forall \langle \delta U \rangle = \frac{Nel}{A} \langle \delta U_e \rangle, \quad (\text{II.94})$$

avec $\frac{Nel}{A}$ l'opérateur classique d'assemblage.

Soit au niveau global :

$$\begin{aligned} \langle \delta U \rangle ([K_t] \{ \Delta U \} - \{ R \}) &= 0 \quad \forall \langle \delta U \rangle \\ \Leftrightarrow [K_t] \{ \Delta U \} &= \{ R \}, \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

où

$$\begin{cases} [K_t] = \frac{Nel}{A} \left([k_t] + \frac{1}{\varepsilon} [g] [m_p]^{-1} [g]^T \right), \\ \{ R \} = \frac{Nel}{A} \left(\{ f_{ext} \} - \{ r \} - [g] [m_p]^{-1} \{ i \} \right). \end{cases} \quad (\text{II.96})$$

II.3.4 Intégration locale

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont en grandes partie issus des travaux de thèse de C. GABRIELI [1995].

HYPOTHÈSE II.3

Les problèmes modélisés par la suite suivront une cinématique plane (déformations planes ou contraintes planes). La variable interne peut être considérée comme suivant cette cinématique, *i.e.*

$$\bar{C}_v \quad \setminus \quad C_{v_{13}} = C_{v_{23}} = C_{v_{31}} = C_{v_{32}} = 0 \quad (\text{II.97})$$

II.3.4.a Intégration de la loi complémentaire et détermination de la variable interne

La cinématique plane, l'hypothèse \mathcal{H} . II.3 ainsi que l'incompressibilité de la transformation intermédiaire permettent d'exprimer la composante $C_{v_{33}}$ et $\dot{C}_{v_{33}}$ en fonction des autres composantes non nulles de \bar{C}_v et de leurs dérivées :

$$C_{v_{33}} = \frac{1}{C_{v_{11}} C_{v_{22}} - C_{v_{12}}^2}, \quad (\text{II.98a})$$

$$\dot{C}_{v_{33}} = - \frac{\dot{C}_{v_{11}} C_{v_{22}} + C_{v_{11}} \dot{C}_{v_{22}} - 2 \dot{C}_{v_{12}} C_{v_{12}}}{(C_{v_{11}} C_{v_{22}} - C_{v_{12}}^2)^2} \quad (\text{II.98b})$$

La forme de l'équation complémentaire (II.58d) :

$$\frac{\partial \varphi^{int}}{\partial \dot{\bar{C}}_v} + q \bar{C}_v - 1 = -\rho_0 \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial \bar{C}_v},$$

permet d'isoler le réel q résultant la condition d'incompressibilité intermédiaire :

$$q = - \left(\dot{C}_{v33} + \rho_0 \frac{\partial \psi^{tot}}{\partial C_{v33}} \right) \quad (\text{II.99})$$

En utilisant les résultats (II.98) et (II.99), l'équation complémentaire (II.58d) peut être mise sous la forme⁽⁸⁾ :

$$\boxed{\dot{\bar{C}}_v(t) = \mathcal{G} \left(t, \bar{C}_v(t) \right)} \quad (\text{II.100})$$

Cette équation est ensuite résolue en chaque point d'intégration de l'élément à l'aide du schéma classique d'EULER implicite.

II.3.4.b Calcul de la matrice tangente élémentaire

Comme le montre l'équation (II.87), le calcul de la matrice tangente élémentaire passe par la détermination en chaque point d'intégration de la grandeur matricielle $\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \bar{u}}$. Or il est possible d'écrire ce terme sous la forme :

$$\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{u}\}} = \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{F}\}}}_{\textcircled{1}} [B] + \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\pi}\}}{\partial \{\bar{C}_v\}} \frac{\partial \{\bar{C}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}}}_{\textcircled{2} \textcircled{3}} [B]. \quad (\text{II.101})$$

Les termes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ de l'équation (II.101) sont calculés analytiquement. Quant au terme $\textcircled{3}$, il est déterminé par une résolution grâce au schéma implicite de CRANK-NICHOLSON de l'équation :

$$\frac{\partial \{\dot{\bar{C}}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \{\bar{F}\}} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \{\bar{C}_v\}} \frac{\partial \{\bar{C}_v\}}{\partial \{\bar{F}\}}. \quad (\text{II.102})$$

cette dernière est obtenue par la différentiation de l'équation (II.100).

REMARQUE II.10

La résolution de l'équation (II.102) par la méthode implicite de CRANK-NICHOLSON nécessite la connaissance de $\{\bar{C}_v\}$ à chaque itération de calcul. Par conséquent le pas de temps choisi pour cette détermination doit être le même que celui choisi pour la résolution par le schéma itératif d'EULER implicite de l'équation (II.100). □

(8). Ceci est réalisé grâce au logiciel de calcul formel Mathematica[©]

II.3.5 Choix des éléments finis

II.3.5.a Rappels sur les instabilités numériques des éléments mixtes

La formulation proposée dans les paragraphes § II.3.3-II.3.2 nécessite le développement d'éléments finis mixtes [MALKUS et HUGHES, 1978 ; MALKUS, 1980]. La technique de condensation statique des degrés de liberté en pression exposée § II.3.3 est rendue possible par l'association de fonctions de forme discontinues [NAGTEGALL *et al.*, 1974]. Bien que pratique pour des raisons évidentes de taille de problème, ces discontinuités introduisent de nombreux problèmes d'instabilités numériques tels que des effets damier ou des modes sablier⁽⁹⁾ [ODEN, 1978 ; ODEN et KIKUCHI, 1982]

Ces instabilités qui sont d'autant plus accentuées que le problème est proche de l'incompressibilité ($\varepsilon \rightarrow 0$) ou que le maillage est irrégulier, sont attribuées par Oden, Kikuchi, et Song [1982] au non respect du critère discret LBB (LADYSZHENSKAYA, BABUŠKA, BREZZI). L'application numérique de ce critère a grandement été étudié en élasticité petites perturbations par CHAPELLE et BATHE [1993] et en élasticité grandes déformations par LE TALLEC [1981]. Des applications, autres que la mécanique des solides, sont données par BATHE [2001].

La condition LBB n'est qu'une condition suffisante à la non-apparition d'instabilité numérique. De nombreux auteurs ont mis en exergue le cas d'éléments finis mixtes ne vérifiant pas la condition LBB mais donnant tout de même des résultats acceptables [CRISFIELD et NORRIS, 2000]. Ainsi, sont apparus de nombreux "patch-tests" visant à valider un élément, ces tests sont souvent moins exigeants d'un point vue numérique que la condition LBB. On citera en particulier les travaux de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] ; BABUŠKA et NARASIMHAN [1997].

II.3.5.b Choix et test des éléments

Quatre éléments sont mis en oeuvre :

	interpolation		LBB	Patch-test ^a
	déplacement	pression		
Q8-P1	quadratique (8 noeuds)	uniforme (1 noeud)	oui	oui
Q8-P4	quadratique (8 noeuds)	bilinéaire	non	non
T6-P1	quadratique (6 noeuds)	uniforme (1 noeud)	non	oui
T6-P3	quadratique (6 noeuds)	bilinéaire	non	non

TABLEAU II.6 – *Éléments finis mis en oeuvre.*

^a Au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997]

Pour chacun des éléments présentés dans le tableau TAB. II.6, on réalise le test FIG. II.22, sous (9). Modes de déformation à énergie nulle.

l'hypothèse des déformations planes et pour un déplacement de 7 mm, *i.e.* 70% de déformation globale.

Les caractéristiques des problèmes à résoudre sont données TAB. II.7.

Ce test nous permet de vérifier d'une part la qualité de la formulation en grandes déformations et d'autre part la rigueur de la prise en compte de la quasi-incompressibilité. D'autres tests sont disponibles, mais ne sont adaptés qu'aux formulations en petites perturbations [CRISFIELD et NORRIS, 2000].

Nous retenons les deux critères de vérification suivants :

- la régularité de la pression dans le solide ;
- la conservation de l'énergie qui s'écrit sous l'hypothèse \mathcal{H} . I.2 et dans le cadre isotherme défini par \mathcal{H} . II.1 comme suit :

$$\left(\bar{\pi} - p\bar{F}^{-T} \right) : \dot{\bar{F}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}} : \dot{\bar{C}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{C}_v} : \dot{\bar{C}}_v = 0. \quad (\text{II.103})$$

	Degrés de liberté du problème	
	déplacement	pression
Q8-P1	550	64
Q8-P4	550	256
T6-P1	578	128
T6-P3	578	384

TABLEAU II.7 – Taille du problème suivant le type d'élément adopté.

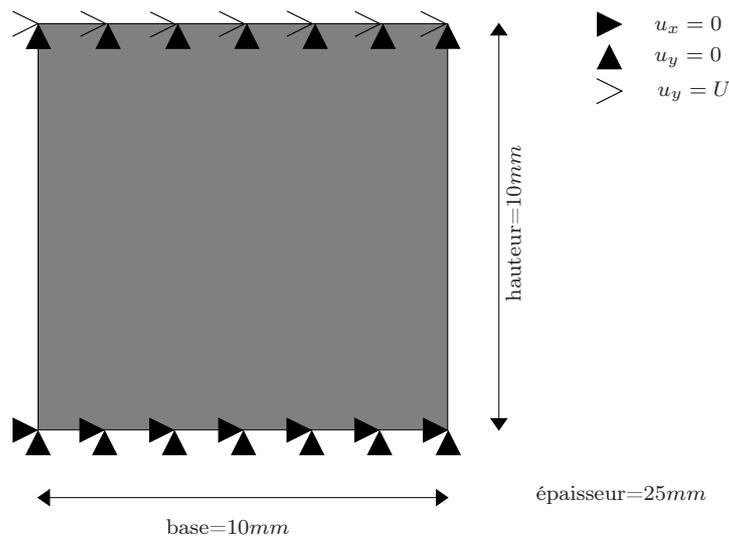


FIGURE II.16 – Patch test.

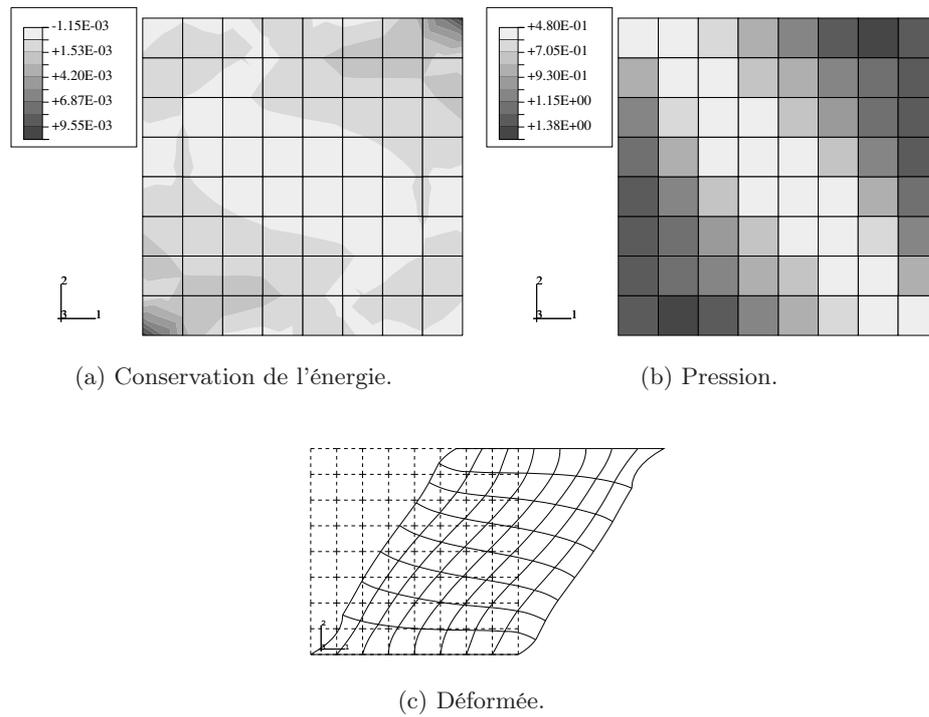


FIGURE II.17 – Test de validité de l'élément Q8P1.

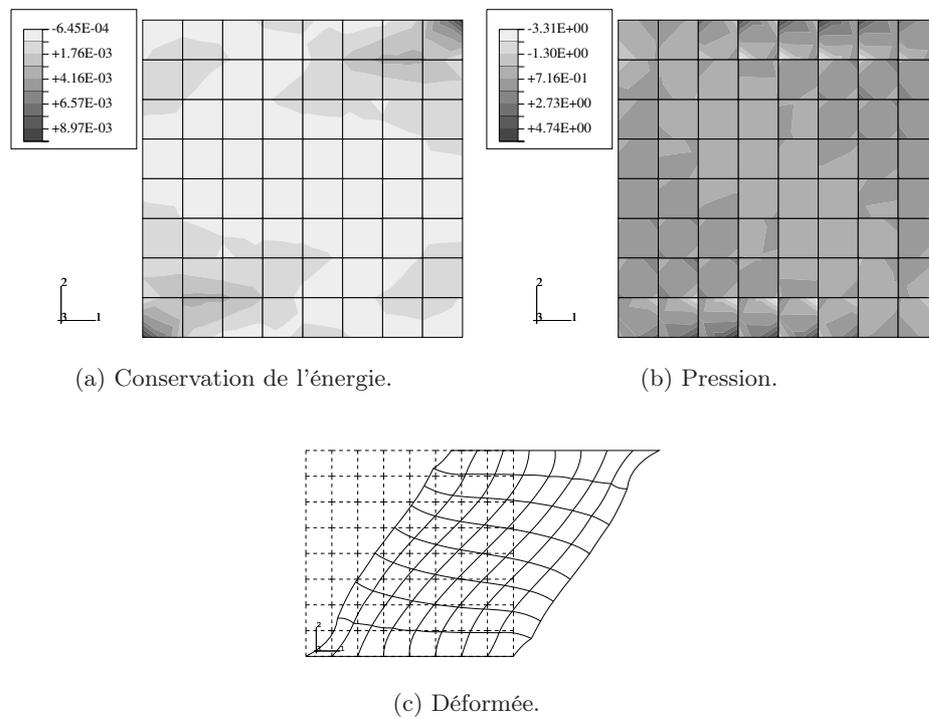


FIGURE II.18 – Test de validité de l'élément Q8P4.

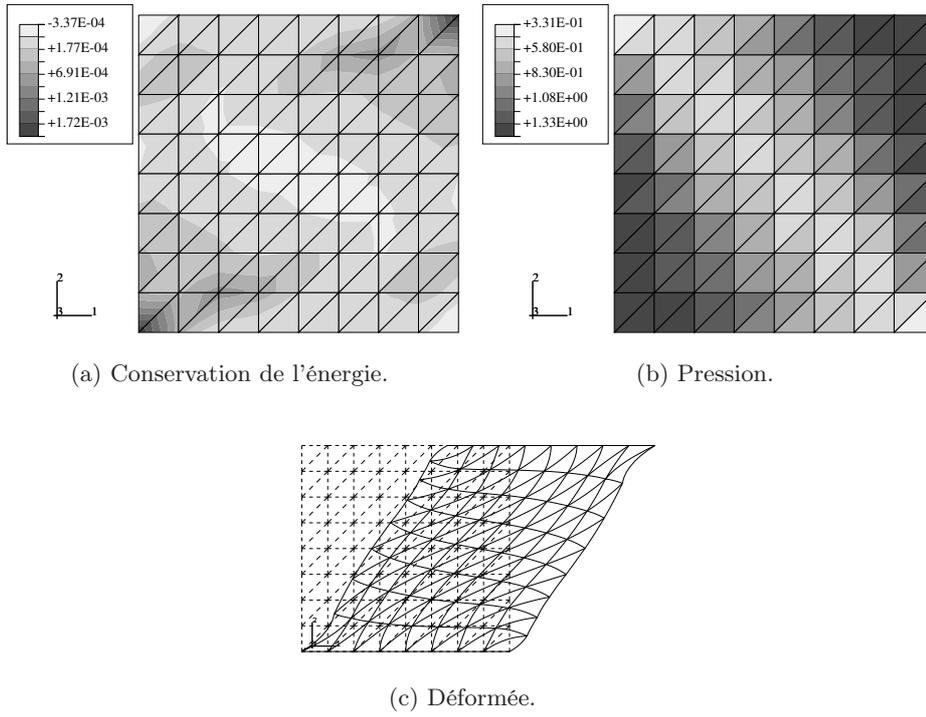


FIGURE II.19 – Test de validité de l'élément T6P1.

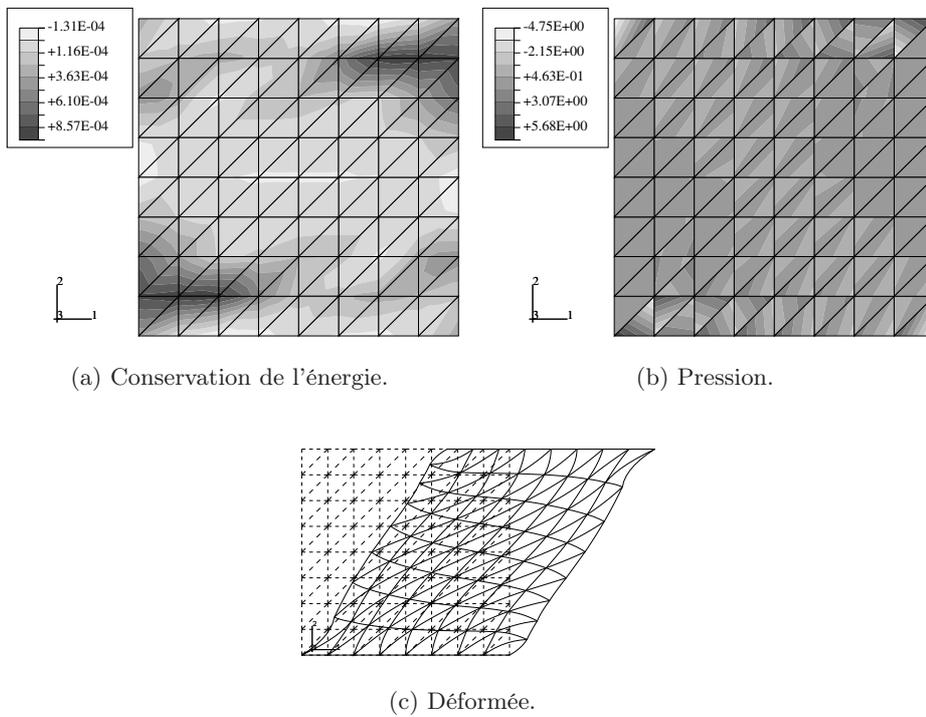


FIGURE II.20 – Test de validité de l'élément T6P3.

Du point de vue de la pression, les résultats présentés FIG. II.17(b), FIG. II.18(b), FIG. II.19(b) et FIG. II.20(b) sont tout à fait en accord avec la théorie. A savoir les éléments ne vérifiant ni la condition LBB, ni le patch-test au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] (Q8-P4, T6-P3), présentent d'importantes discontinuités de pression, ce qui témoigne de la forte instabilité numériques de ces éléments. Les discrétisations spatiales obtenues à partir des éléments T6-P1 et Q8-P1 présentent une répartition de pression régulières et sont pratiquement équivalentes en termes de répartition et d'extrema.

Sur le plan énergétique, la discrétisation utilisant les éléments triangulaires vérifie jusqu'à 10 fois mieux la conservation de l'énergie (II.103). Cependant, les éléments triangulaires peuvent conduire à des discrétisations anisotropes qui peuvent induire des écarts dans les résultats. En effet, ces éléments laissent un grand nombre de choix quant au motif du maillage (FIG. II.21). Il est souhaitable de choisir des motifs isotropes tels que les motifs "croix" ou "drapeau anglais".

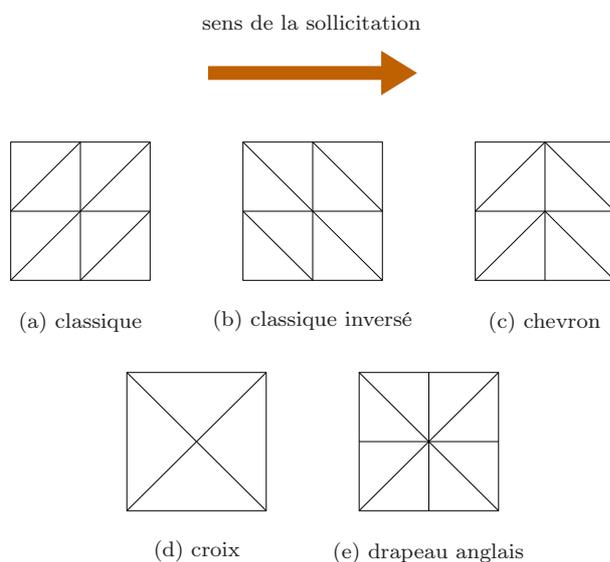


FIGURE II.21 – *Différents motifs de maillage utilisant des éléments triangulaires.*

Ces essais numériques, nous conduisent à éliminer les éléments Q8-P4 et T6-P3 des discrétisations éléments finis à venir. Seuls les éléments à déplacement quadratique et à pression constante seront utilisés, en ayant une attention particulière sur le motif utilisé dans le cas d'un découpage spatial faisant intervenir des éléments triangulaires de type T6-P1.

II.3.5.c Choix de ε

Les tests précédents faisant principalement intervenir du cisaillement, l'incompressibilité du matériau n'a que peu d'influence. Cependant, si l'on veut mettre en oeuvre des essais faisant intervenir cette dernière (compression, traction ...), il nous faut déterminer le coefficient ε permettant de traiter l'hypothèse de quasi-incompressibilité global du matériau. Pour ce faire on met en

oeuvre, l'essai décrit FIG. II.22(a) pour le modèle POYNTING-THOMSON, les coefficients du modèle étant donnés TAB. II.3. On fait varier ε de 0.1 à 0.0001 MPa^{-1} . La réaction (FIG. II.22(b))

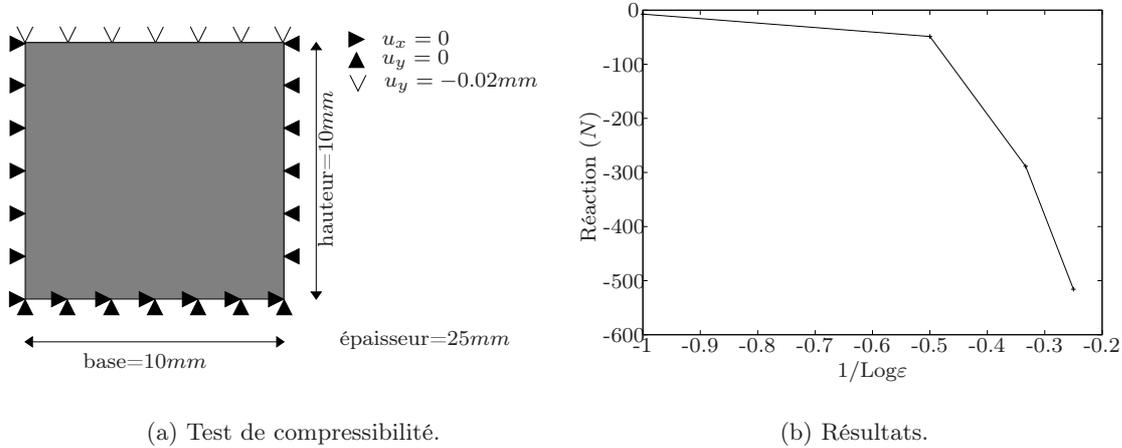


FIGURE II.22 – Description et résultat du test sur le coefficient de compressibilité.

semble tendre, pour $1/\text{Log}\varepsilon$ tendant vers 0 (*i.e.* pour des valeurs de ε faibles), vers une asymptote verticale qui peut être assimilée à la limite de compressibilité. Pour des valeurs de ε supérieures à 0.001 MPa^{-1} le problème ne peut être considéré comme quasi-incompressible. Les calculs présentés par la suite sont effectués avec :

$$\varepsilon = 0.0005 \text{ MPa}^{-1}$$

II.3.6 Validation

II.3.6.a Présentation du problème numérique et choix des discrétisations

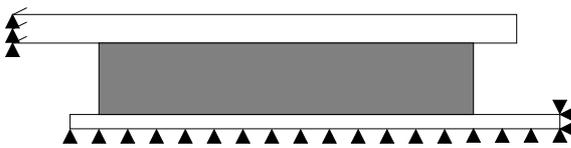


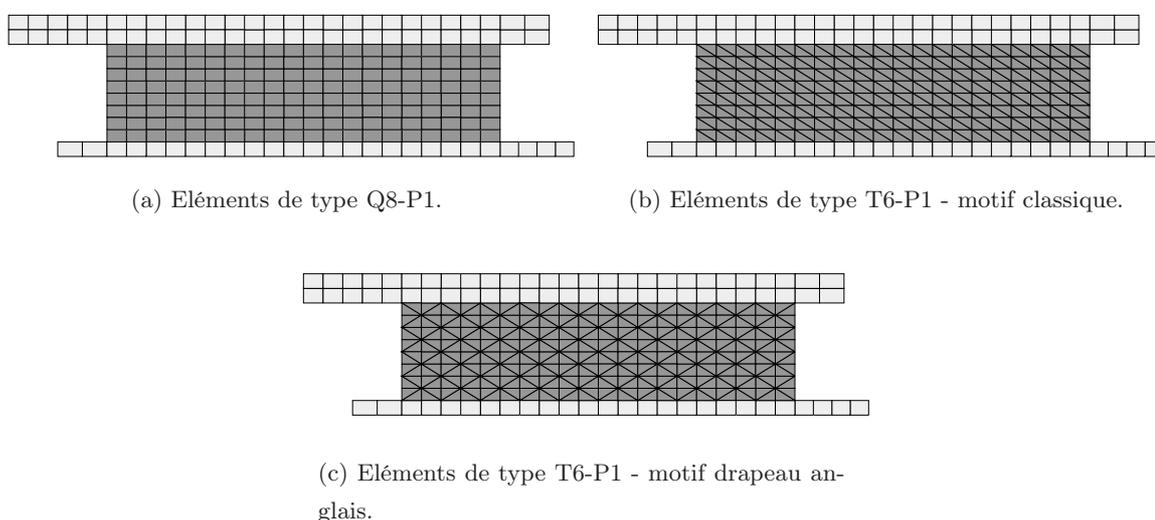
FIGURE II.23 – Conditions aux limites du problème

L'objet est ici de confronter notre modèle au résultats expérimentaux exposés FIG. II.6.

On choisit de ne modéliser qu'une demi éprouvette pour des raisons de symétrie, on fait l'hypothèse des déformations planes. Le modèle de POYNTING-THOMSON est affecté des énergies libres de GENT-THOMAS et NÉO-HOOKE respectivement pour les potentiels ψ_e et ψ_v . La forme du pseudo-potential de dissipation est donnée (II.65). Les caractéristiques de l'élastomère sont alors données TAB. II.3 ; les caractéristiques d'un acier classique est adoptés pour les mors, à savoir un module d'YOUNG de 210000 MPa et un coefficient de POISSON de 0.3.

Sur le plan de la discrétisation spatiale, trois maillages sont adoptés. Les caractéristiques de ces dernier sont donnés TAB. II.8

	type d'élément	Nombre de degrés de liberté		motifs
		déplacement	pression	
Maillage ①	Q8-P1	809	240	
Maillage ②	T6-P1	969	400	classique
Maillage ③	T6-P1	969	400	drapeaux anglais

TABLEAU II.8 – *Caractéristiques des différentes discrétisations spatiales d'une demi éprouvette.*FIGURE II.24 – *Discrétisations spatiales d'une demi éprouvette.*

II.3.6.b Comparaisons des résultats

Les résultats obtenus sur les trois maillages présentés FIG. II.24 sont présentés FIG. II.25 en terme de courbes contrainte/déformation.

Il est possible de constater, dans un premier temps, que les trois discrétisations spatiales donnent des résultats pratiquement identiques. On constate qu'il faut au minimum trois cycles de sollicitations pour obtenir une stabilisation de la réponse numérique. Ce phénomène est souvent constaté expérimentalement et peut être associé :

- à de l'effet MULINS (cf. § II.1.4 au cours du premier cycle si le matériau est vierge),
- à un endommagement continu [MIEHE, 1995]
- à un arrangement des chaînes moléculaires pouvant créer une viscosité.

Pour notre modèle numérique, seul le phénomène de viscosité – puis qu’il est le seul pris en compte dans le modèle présenté – peut expliquer cette stabilisation retardée.

Les résultats présentés, bien que relativement proches de la courbe expérimentale, ne correspondent cependant pas à l’allure générale des courbes obtenues au court de l’identification (cf FIG. II.15(a) ou FIG. II.14). Deux explications peuvent être données. Dans un premier temps, il semble que l’hypothèse de cisaillement uniforme des couches d’élastomère qui est faite lors de l’identification pour ramener le problème a un problème monodimensionnel, ne soit pas vérifiée. En effet, on constate FIG. II.26(a) et FIG. II.26(b) que les composantes E_{11} et E_{22} du tenseur de GREEN-LAGRANGE ne sont pas uniformes dans l’élastomère. De plus, il est possible de remarquer FIG. II.26(c) que l’armature métallique supérieure subit, en plus du déplacement imposé suivant \vec{x} , un déplacement suivant \vec{y} pouvant amener une compression supplémentaire dans le matériau élastomérique.

Par conséquent l’identification sur un modèle monodimensionnel, bien que relativement bonne, devra être appréhendée avec prudence et nécessitera une vérification sur un calcul élément finis.

Il est en outre possible de vérifier sur le présent calcul l’influence du motif de maillage sur les

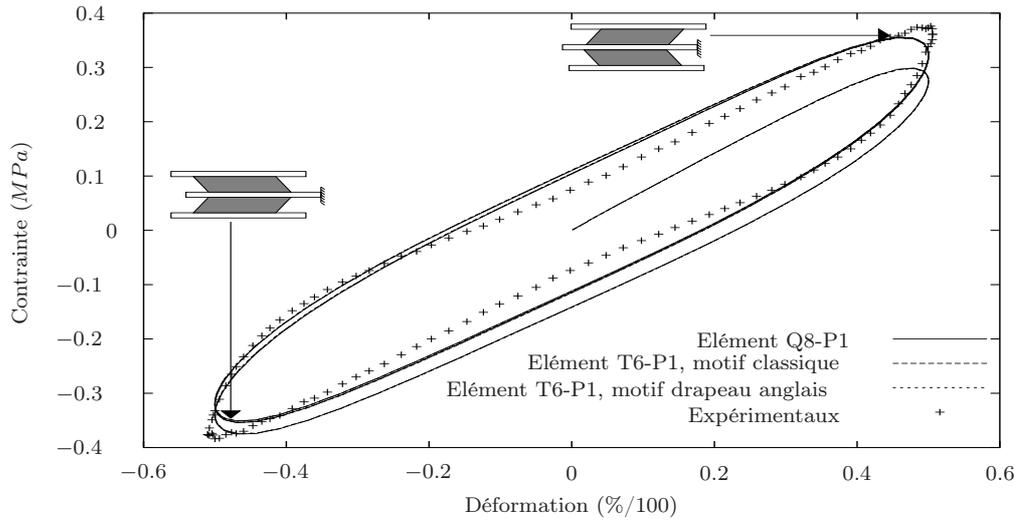


FIGURE II.25 – Comparaison des résultats expérimentaux (amplitude cisaillement 50% - fréquence 3.1 Hz) et des résultats éléments finis.

résultats. Sur la figure FIG. II.27 est reporté en abscisse le temps de l’essai numérique (trois cycles) et en ordonnée la grandeur :

$$\left| \frac{\pi_{xy}^{ang} - \pi_{xy}^{cla}}{(\pi_{xy}^{ang} + \pi_{xy}^{cla})/2} \right|, \quad (\text{II.104})$$

où π_{xy}^{ang} et π_{xy}^{cla} sont les contraintes obtenues pour des discrétisations utilisant des éléments T6-P1 et ce, respectivement, pour des motifs en drapeau anglais ou classique.

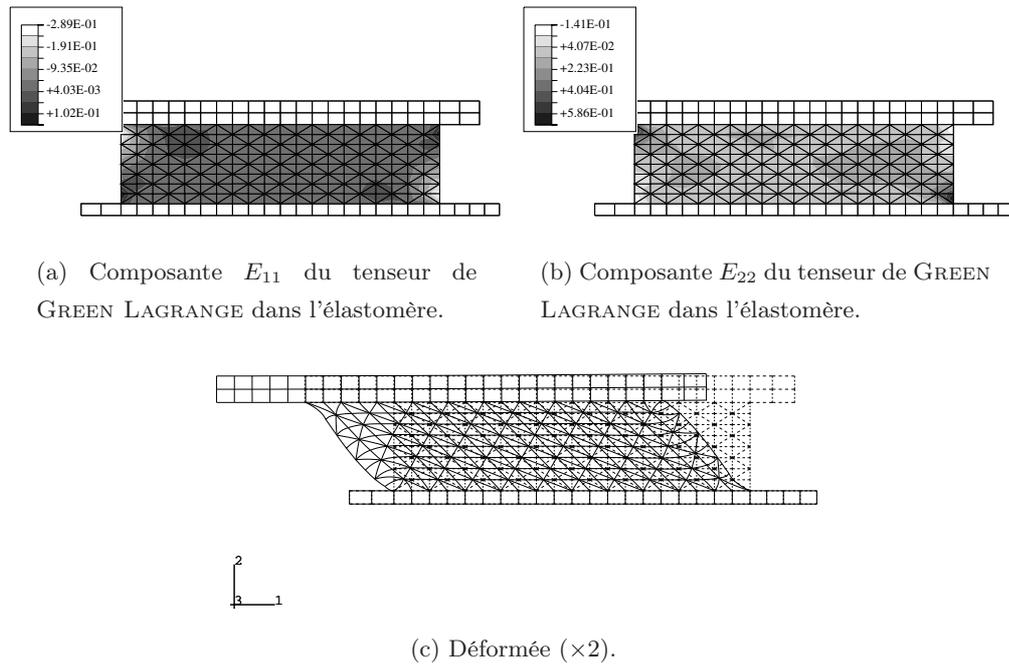


FIGURE II.26 – Résultats d'un calcul éléments finis sur un maillage utilisant des éléments T6-P1 et un motif en drapeau anglais, amplitude du cisaillement 50% (troisième cycle).

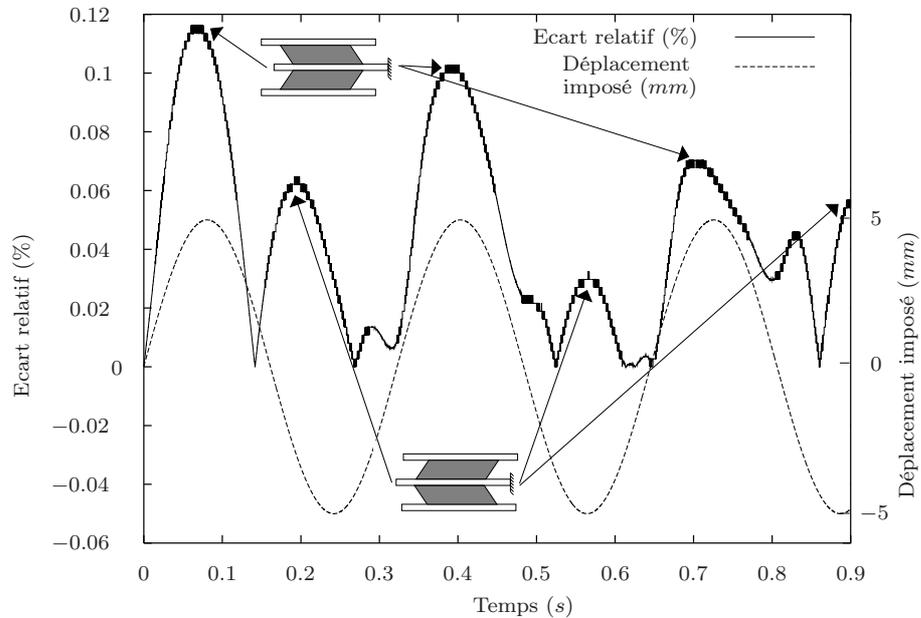


FIGURE II.27 – Comparaison des réponses en contrainte obtenues à partir des maillages faisant intervenir des éléments T6-P1, organisés en motifs classiques ou drapeaux anglais.

Les maxima des écarts sont rencontrés aux extrema de sollicitation et sont plus importants pour les extrema négatifs de déplacement. Ceci confirme l'influence de l'anisotropie du maillage faisant intervenir un motif classique. On constate cependant que cet écart relatif est relativement peu important et que, au moins sur ce type de modélisation, l'une ou l'autre des discrétisation peut être utilisée.

II.4 Conclusion

Suite à une étude bibliographique décrivant les principaux phénomènes qui caractérisent le comportement mécanique des élastomères, à savoir hyperélasticité, viscoélasticité ou endommagement, une formulation thermodynamique est choisie et présentée. Celle-ci se plaçant dans le cadre de l'état local, une variable interne est introduite par le biais d'un état intermédiaire.

De manière plus concrète, on présente les équations qui régissent cette formulation dans le cadre de la généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques de MAXWELL, ZENER et POYNTING-THOMSON.

Un algorithme d'identification des paramètres des modèles est mis en exergue. Ce dernier est basé sur une minimisation de la distance au sens des moindres carrés entre des résultats expérimentaux et semi-analytiques obtenus sous une hypothèse de cisaillement homogène et par le biais d'un logiciel de calcul formel. Ceci nous permet de privilégier le modèle de POYNTING-THOMSON. On affecte à ce dernier un pseudo-potentiel quadratique fonction de la dérivée temporelle de la variable interne \bar{C}_v . Le choix de l'énergie libre fait l'objet d'une étude permettant de mettre en avant une forme de type hyperélastique de GENT-THOMAS pour l'énergie libre principale du modèle. Ce choix est principalement motivé par un rapport qualité des résultats, coût d'identification.

Une fois le modèle fixé, il est possible de réaliser son implantation dans le code éléments finis S.I.C. On réalise ce passage aux éléments finis en se basant sur une formulation variationnelle obtenue dans le cadre des matériaux quasi-incompressibles. La formulation éléments finis ainsi obtenue fait alors intervenir en plus du champ de déplacement, un champ additionnel de pression. Ce dernier est choisi discontinu d'un élément à un autre. Ces formulations permettent entre autre d'éviter les phénomènes de "locking" mais peuvent être numériquement instables. Afin d'éviter ces problèmes, seuls des éléments vérifiant le critère LBB [CHAPELLE et BATHE, 1993] ou un "patch test" proposé par ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997] seront utilisés. Un test supplémentaires est proposé en vue de vérifier la stabilité des éléments choisis dans le cadre des grandes déformations.

Enfin, le modèle éléments finis est confronté aux essais expérimentaux. Trois différentes discrétisations spatiales sont adoptées. Il ressort de ces essais numériques que notre modèle est peu ou pas sensible au motif de discrétisation et au type d'éléments – dans la mesure où ils vérifient le critère LBB [CHAPELLE et BATHE, 1993 ; LE TALLEC, 1981] ou un patch test au sens de ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1997].

Ces essais numériques montrent, en outre, les limites du modèle monodimensionnel utilisé dans l'algorithme d'identification. Par la suite, les différentes caractéristiques de nos modèles pourront être identifiées par le biais de cet algorithme, mais devront obligatoirement faire l'objet d'une vérification éléments finis.