

Comportement en conditions de périodicité 1-D

Après avoir traité des cas de la cellule isolée et de la cellule dans un réseau 2-D périodique, notre étude s'oriente naturellement vers le cas intermédiaire de la cellule dans un réseau 1-D périodique. L'objectif de cette section est ainsi d'exprimer, d'implémenter et de valider la fonction de Green traduisant cette nouvelle condition de périodicité.

Après avoir détaillé la méthodologie de calcul nécessaire à l'écriture de la fonction de Green en conditions de périodicité 1-D, des confrontations théorie/théorie puis théorie/expérience seront réalisées afin de valider son expression. L'étude théorique consistera à confronter, pour des répartitions de cellule quasi-identique, les résultats obtenus avec le modèle d'une cellule dans un réseau 1-D périodique à ceux obtenus avec les méthodes de calcul développées pour la cellule isolée et la cellule dans un réseau 2-D périodique. Expérimentalement on comparera, pour des dispositifs composés d'une unique colonne de cellules, l'impédance électrique mesurée à celle simulée à partir du comportement d'une cellule dans un réseau 1-D périodique.

7.1 Détermination de la fonction de Green en conditions de périodicité 1-D

L'introduction de la condition de périodicité 1-D à la cellule cMUT nécessite d'exprimer la fonction de Green traduisant cette même condition. Ainsi, on cherche à déterminer l'expression de la fonction Green traduisant le comportement d'un réseau 1-D périodique de points sources en conditions de baffle rigide. Cette fonction est notée par la suite (G_{1D}) . Un schéma décrivant la géométrie du problème à modéliser est présenté figure 7.1. Le réseau de points à modéliser est orienté suivant l'axe y du repère. Le pas de périodicité entre deux points sources est nommé d_y .

7.1. DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN EN CONDITIONS DE PÉRIODICITÉ 1-D

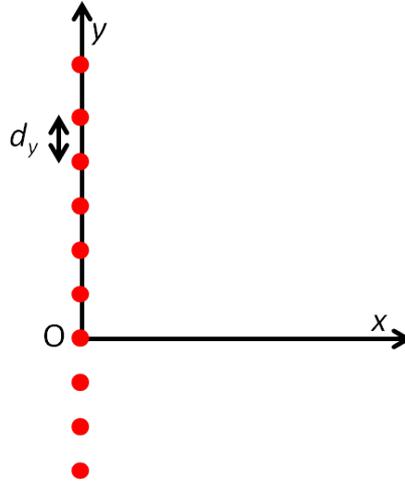


FIGURE 7.1 – Schéma d'un réseau 1-D périodique de points sources.

La fonction de Green 1-D traduisant cette répartition de points sources s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 G_{1D}(x, y, \omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(x, y - nd_y, \omega) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} G(x, y, \omega) \otimes \delta(y - nd_y)
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

où :

- $G(x, y, \omega)$ est la fonction de Green dans un milieu fluide semi-finie,
- $\delta(y)$ est la fonction de dirac,
- \otimes indique le produit de convolution.

Par conséquent, la fonction de Green 1-D périodique s'exprime dans l'espace des vecteurs d'onde sous la forme :

$$\hat{G}_{1D}(k_x, k_y, \omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{G}(k_x, k_y, \omega) \delta\left(k_y - \frac{2n\pi}{d_y}\right)
 \tag{7.2}$$

avec \hat{G} l'expression de la fonction de green exprimée dans l'espace des vecteurs d'onde.

Selon la méthodologie de calcul développée ici, l'expression de la fonction de Green 1-D périodique est déterminée dans l'espace des vecteurs d'onde (domaine de Fourier). Ainsi,

7.1. DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN EN CONDITIONS DE PÉRIODICITÉ 1-D

le calcul de la fonction de Green 1-D périodique est réalisé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
G_{1D}(x, y, \omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_{1D}(k_x, k_y, \omega) e^{jk_x x} e^{jk_y y} d_{k_x} d_{k_y} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{G}(k_x, k_y, \omega) \delta\left(k_y - \frac{2n\pi}{d_y}\right) e^{jk_x x} e^{jk_y y} d_{k_x} d_{k_y} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{G}\left(k_x, \frac{2n\pi}{d_y}, \omega\right) \delta\left(k_y - \frac{2n\pi}{d_y}\right) e^{jk_x x} e^{jk_y y} d_{k_x} d_{k_y} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(k_y - \frac{2n\pi}{d_y}\right) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}\left(k_x, \frac{2n\pi}{d_y}, \omega\right) e^{jk_x x} d_{k_x} \right] e^{jk_y y} d_{k_y}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Le calcul de l'expression entre crochet est détaillé dans l'annexe B (équation B.14). Il a ainsi été démontré que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}\left(k_x, \frac{2n\pi}{d_y}, \omega\right) e^{jk_x x} d_{k_x} = \frac{\rho_0 \omega}{2} H_0^{(1)} \left(x \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{2n\pi}{d_y}\right)^2} \right) \tag{7.4}$$

avec $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce à l'ordre 0.

L'équation de la fonction de Green 1-D périodique devient par conséquent :

$$\begin{aligned}
G_{1D}(x, y, \omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\rho_0 \omega}{2} H_0^{(1)} \left(x \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{2n\pi}{d_y}\right)^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(k_y - \frac{2n\pi}{d_y}\right) e^{jk_y y} d_{k_y} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\rho_0 \omega}{2} H_0^{(1)} \left(x \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{2n\pi}{d_y}\right)^2} \right) e^{j \frac{2n\pi}{d_y} y}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Ainsi, on retrouve l'expression de la fonction de Green 1-D périodique démontrée, dans le domaine de l'électromagnétisme, par Capolino *et al.* [20].

Afin d'analyser la fonction de Green 1-D périodique, l'expression de la pression rayonnée par une ligne ($P_l(x, y, \omega)$) source infinie, déterminée en annexe (équation B.6), est reportée :

$$P_l(x, y, \omega) = \frac{\rho_0 \omega}{2} H_0^{(1)} \left(x \sqrt{k_0^2 - k_{y0}^2} \right) e^{jk_{y0} y} \tag{7.6}$$

En la comparant à cette expression, la fonction de Green 1-D périodique peut être interprétée comme la somme de la pression générée par une infinité de lignes sources excitées avec des phases différentes. De plus, une brève analyse théorique des harmoniques spatiales générées par la fonction de Green 1-D périodique permet de démontrer que chaque harmonique spatiale n est négligeable tant que la fréquence est inférieure à $n \frac{c_0}{d_y}$ (fréquences de résonance de la cellule de Bragg). A titre d'illustration, nous avons représenté figure 7.2 les deux premières harmoniques spatiales de la fonction de Green 1-D périodique. Il est ainsi clairement identifié que la deuxième harmonique spatiale est négligeable tant que la

7.1. DÉTERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN EN CONDITIONS DE PÉRIODICITÉ 1-D

fréquence est inférieure à 30 MHz. Cette fréquence correspond à la première résonance de la cellule de Bragg pour le cas simulé. Ainsi, tant que la première harmonique spatiale n'est pas atteinte, c'est-à-dire tant que $f < \frac{c_0}{d_y}$, la fonction de Green 1-D périodique exprime la pression générée par une ligne source infinie excitée avec une phase nulle.

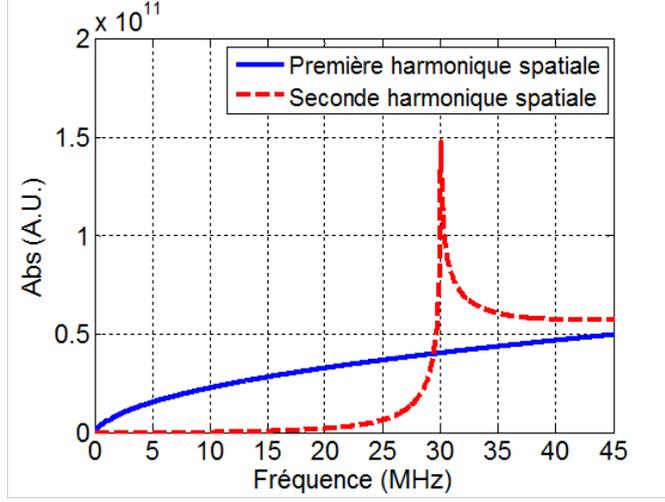


FIGURE 7.2 – Evolution des deux premières harmoniques spatiales de la fonction de Green 1-D périodique en fonction de la fréquence. Les composantes sont tracées pour un pas de périodicité $d_y=50\mu\text{m}$ et pour $x = 27 \mu\text{m}$. Ce cas correspond au couplage de deux points du maillage de la membrane distants de $27 \mu\text{m}$.

Une fois l'expression de la fonction Green en conditions de périodicité 1-D établie, elle est introduite à la matrice de condition aux frontières. Ainsi, pour chaque couple de points (i,j) maillant la membrane, les éléments de la matrice $[K_{fluide\ 1D}]$ sont calculés de la façon suivante :

$$K_{fluide\ 1D}, ij = G_{1D}(x_j - x_i, y_j - y_i, \omega)\delta_x \quad \text{si } i \neq j \quad (\text{Fonction de Green 1-D}) \quad (7.7)$$

La fonction de Hankel divergeant en zéro, il est impossible d'utiliser la formule précédente pour définir les termes de la matrice $[K_{fluide\ 1D}]$ lorsque $i = j$. La solution proposée ici, consiste à utiliser l'impédance de rayonnement d'un fil infini pour déterminer l'impédance de rayonnement d'un élément du maillage sur lui-même. Etant donné que la fonction de Green 1-D périodique se comporte comme une ligne source infinie jusqu'à la première harmonique spatiale, il est possible de faire cette approximation sans trop introduire d'erreur. Notons cependant que des méthodes plus complexes ont été développées dans la littérature afin d'exprimer de façon précise l'expression de la fonction de Green 1-D périodique en zéro [20, 38]. Ainsi, la largeur du fil est fixée à δ_x (pas du maillage suivant x). Puis en posant $k = \left[\sqrt{k_0^2 + \frac{2n\pi}{d_y}} \right]$ on obtient d'après [81] que :

$$K_{fluide\ 1D}, ii = \rho_0 c_0 k_0 \delta_x \left[H_0^2(k\delta_x) - \frac{H_1^2(k\delta_x)}{k\delta_x} + \frac{2j}{\pi(k\delta_x)^2} + \frac{\pi}{2} (H_1^2(k\delta_x)S_0(k\delta_x) - H_0^2(k\delta_x)S_1(k\delta_x)) \right] \quad (7.8)$$

7.2. DÉFINITION DU SCHEMA ÉLECTROACOUSTIQUE ÉQUIVALENT

avec :

- H_0^2 la fonction de Hankel de seconde espèce à l'ordre 0,
- H_1^2 la fonction de Hankel de seconde espèce à l'ordre 1,
- S_0 la fonction de Struve à l'ordre 0,
- S_1 la fonction de Struve à l'ordre 1.

En reprenant les équations établies dans le cas de la cellule isolée (équation 5.20) et en introduisant la matrice de condition aux frontières traduisant les conditions de périodicité 1-D ($[K_{fluide\ 1D}]$), il est possible d'établir l'équation comportementale d'une cellule dans un réseau 1-D périodique. Ainsi, le déplacement d'une membrane ($[u]$) dans un réseau 1-D de cellules est donné par l'équation suivante :

$$[u] = [-\omega^2[M] + [K] - [K_{soft}] - j\omega[K_{fluide\ 1D}]]^{-1} [p_{dyn}] \quad (7.9)$$

7.2 Définition du schéma électroacoustique équivalent

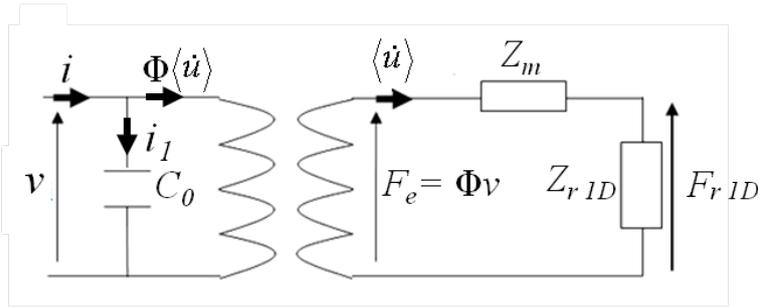


FIGURE 7.3 – Schéma électroacoustique équivalent d'une cellule cMUT dans un réseau 1-D périodique

Le schéma électroacoustique décrivant le comportement d'une cellule cMUT dans un réseau 1-D est présenté figure 7.3. Etabli toujours selon la définition de Foldy [41], sa structure est inchangée par rapport à celle du schéma traduisant le comportement d'une cellule isolée. La différence, entre les deux répartitions de cellule, réside dans la définition de l'impédance de rayonnement. En effet, dans le cas où la cellule est en conditions de périodicité 1-D, l'impédance de rayonnement exprime en plus du couplage de la cellule sur elle-même, le couplage de l'ensemble des cellules du réseau 1-D périodique. Ainsi, la force de rayonnement associée à cette impédance ($F_{r\ 1D}$) traduit, pour le piston équivalent, l'ensemble des forces exercées sur la membrane (force exercée par la membrane sur elle-même + force exercée par les membranes du réseau 1-D). En respectant la définition de Foldy [41], on définit l'impédance de rayonnement d'une cellule dans un réseau 1-D périodique ($Z_{r\ 1D}$) de la manière suivante :

$$Z_{r\ 1D} = \frac{2P_{r\ 1D}}{|\langle \dot{u} \rangle|^2} \quad (7.10)$$

avec $P_{r\ 1D}$ la puissance acoustique de radiation de la membrane dans le cas où celle-ci est située dans un réseau 1-D périodique. Numériquement, elle s'exprime à partir de la matrice

7.2. DÉFINITION DU SCHÉMA ÉLECTROACOUSTIQUE ÉQUIVALENT

de condition aux frontières traduisant les conditions de périodicité 1-D ($[K_{fluide\ 1D}]$). Ainsi, on a :

$$P_{r\ 1D}(\omega) = \frac{1}{2}[\dot{u}][K_{fluide\ 1D}][\dot{u}]^* \quad (7.11)$$

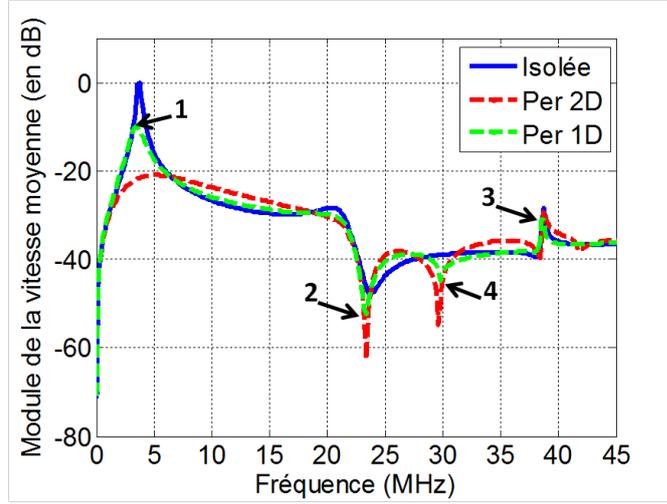


FIGURE 7.4 – Vitesses moyennes de déplacement de la membrane isolée (courbe bleue), dans un réseau 2-D périodique (courbe rouge) et dans un réseau 1-D périodique (courbe verte). La tension de polarisation est fixée à $V_{DC} = 0.5V_c$.

La réponse en vitesse d'une cellule dans un réseau 1-D est comparée figure 7.4 à celles obtenues pour une cellule isolée et pour une cellule dans un réseau 2-D. La cellule cMUT étudiée est la cellule de référence présentée section 5.4. Le milieu de propagation est toujours de l'eau. Les pas des réseaux périodiques sont identiques et valent $50\ \mu\text{m}$. De façon prévisible, le cas de la cellule dans un réseau 1-D périodique apparaît comme une situation intermédiaire aux deux autres répartitions de cellule. En effet, les couplages entre cellules étant plus faibles que pour le cas du réseau 2-D périodique, il apparaît sur la courbe de la réponse en vitesse de la cellule dans un réseau 1-D, que la résonance du mode 1 est moins amortie (référence 1). Les fréquences de résonance des autres modes sont identiques quel que soit l'environnement de la membrane (références 2 et 3). De plus, il est intéressant de noter que la périodicité du réseau 1-D provoque, de façon identique au réseau 2-D, une fréquence de coupure sur la réponse en vitesse de la cellule (référence 4). Le pas du réseau 1-D étant identique à celui du réseau 2-D, les fréquences de coupure sont identiques dans les deux cas.

L'impédance électrique étant une grandeur souvent mesurée sur les dispositifs cMUT, nous allons, à partir du schéma équivalent, chercher à établir son expression théorique dans le cas d'une cellule dans un réseau 1-D. Selon le schéma électroacoustique équivalent (figure 7.3), on peut établir les équations suivantes :

$$i = i_1 + \Phi\langle\dot{u}\rangle \quad (7.12)$$

$$i_1 = j\omega C_0 v \quad (7.13)$$

7.2. DÉFINITION DU SCHEMA ÉLECTROACOUSTIQUE ÉQUIVALENT

$$\langle \dot{u} \rangle = \frac{\Phi}{Z_m + Z_{r\ 1D}} v \quad (7.14)$$

A partir de ces trois équations, l'admittance d'une cellule dans un réseau 1-D périodique ($Y_{cellule\ 1D}$) s'exprime sous la forme :

$$Y_{cellule\ 1D} = \frac{i}{v} = \left[j\omega C_0 + \frac{\Phi^2}{(Z_m + Z_{r\ 1D})} \right] \quad (7.15)$$

Les cellules cMUT étant associées en parallèle pour former une colonne, le calcul de l'admittance équivalente d'une colonne de cMUTs revient à sommer l'admittance de chacune des cellules. En considérant que les comportements des cellules d'une colonne sont tous identiques et équivalents à celui d'une cellule dans un réseau 1-D périodique, l'expression de l'admittance d'une colonne de cMUTs (Y_{col}) devient :

$$\begin{aligned} Y_{col} &= N_{cel} Y_{cellule\ 1D} \\ &= N_{cel} \left[j\omega C_0 + \frac{\Phi^2}{(Z_m + Z_{r\ 1D})} \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

avec N_{cel} le nombre de cellules cMUT présentes dans la colonne.

Par conséquent, l'impédance électrique d'une colonne de cMUTs (Z_{col}) est simplement obtenue de la façon suivante :

$$Z_{col} = \frac{1}{Y_{col}} \quad (7.17)$$

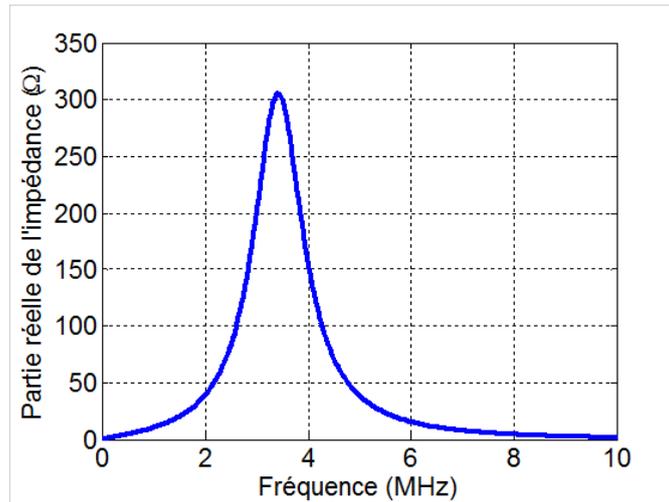


FIGURE 7.5 – (a) Partie réelle de l'impédance électrique simulée pour une colonne composée de 100 cellules. La topologie des cellules est identique à la cellule de référence décrite section 5.4. La tension de polarisation est fixée à : $V_{DC} = 0.5V_c$

La partie réelle de l'impédance d'une colonne de cMUTs est présentée figure 7.5. Pour ce cas, on considère que la colonne est composée de 100 cellules cMUT de topologie identique

à celle de la cellule de référence décrite section 5.4. L'espace inter-cellules est fixé à $50 \mu\text{m}$. La bande passante de la colonne de cMUTs apparaît centrée autour de 3.4 MHz. Elle est identique à la bande passante mesurée sur la réponse en vitesse de la cellule dans un réseau 1-D périodique (figure 7.4). Ainsi, on a vérifié que la mesure de l'impédance électrique permet bien d'identifier les fréquences de résonance d'un dispositif cMUT.

7.3 Confrontation théorique

Les résultats obtenus en utilisant la fonction de Green 1-D périodique sont confrontés ici, sur des répartitions de cellule similaire, à ceux obtenus avec le modèle développé pour une cellule isolée (chapitre 5) et pour une cellule dans un réseau 2-D (chapitre 6). Tous les résultats, présentés dans cette section, sont réalisés dans l'eau avec des cellules identiques à la cellule de référence décrite section 5.4.

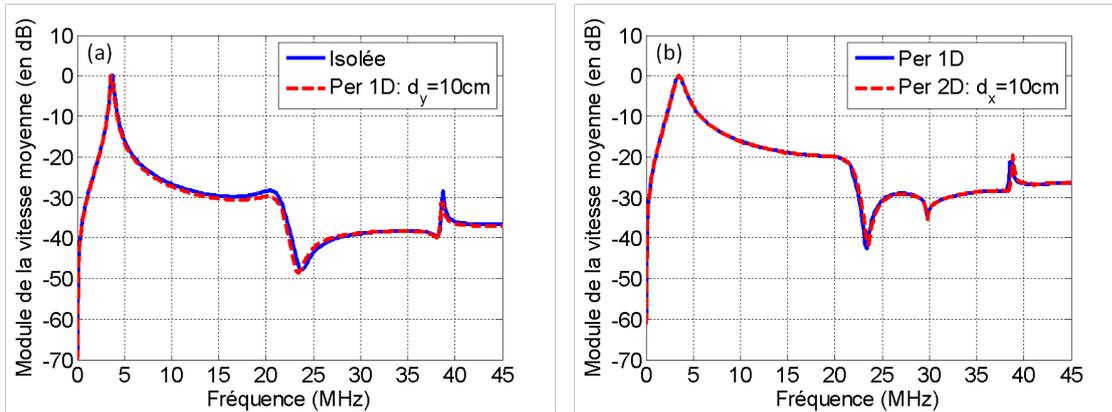


FIGURE 7.6 – (a) Réponses en fréquence de la vitesse moyenne de déplacement d'une cellule isolée (courbe bleue) et d'une cellule dans un réseau 1-D avec un pas de périodicité de 10 cm. (b) Réponses en fréquence de la vitesse moyenne de déplacement d'une cellule dans un réseau 1-D périodique (courbe bleue) et d'une cellule dans un réseau 2-D avec un pas de périodicité suivant x de 10 cm. Pour toutes ces courbes la tension de polarisation est fixée à : $V_{DC} = 0.5V_c$

Le cas de la cellule isolée est approché à partir du modèle d'une cellule dans un réseau 1-D périodique en choisissant un pas inter-cellules grand. La figure 7.6-(a) compare la réponse en vitesse d'une cellule isolée avec celle d'une cellule dans un réseau 1-D périodique dont le pas de périodicité suivant y a été fixé à 10 cm. On observe figure 7.6-(a) que les réponses en vitesse de la cellule sont identiques quelle que soit la méthode de calcul. De façon similaire, le comportement d'une cellule dans un réseau 1-D est simulé en choisissant, selon une direction, un pas inter-cellules important (10 cm aussi) dans le modèle d'un réseau 2-D périodique. Les réponses en vitesse des 2 modèles sont comparées figure 7.6-(b). Les pas de périodicité suivant y sont identiques ($50 \mu\text{m}$). Encore une fois, les réponses en fréquences se superposent parfaitement.

On démontre sans ambiguïté que le modèle d'une cellule dans un réseau 1-D périodique permet bien d'assurer la continuité des résultats entre le cas de la cellule isolée et le cas

de la cellule dans un réseau 2-D périodique. L'implémentation de la fonction de Green 1-D périodique pour le calcul du comportement d'une cellule dans un réseau 1-D est ainsi validée.

7.4 Confrontation expérimentale

Afin de valider expérimentalement la fonction de Green 1-D périodique développée, des dispositifs comportant une seule colonne de cMUTs ont été fabriqués de façon à confronter leur impédance électrique mesurée à celle simulée. Les mesures d'impédance présentées ici ont été réalisées dans l'huile selon le protocole expérimental décrit section 4.2. Quatre dispositifs expérimentaux, possédant chacun des géométries de cellule différentes, ont été mesurés puis simulés. Les caractéristiques géométriques de chacun de ces dispositifs sont présentées tableau 7.1. Quelle que soit la configuration, le pas inter-cellules (d_y) est de $6 \mu\text{m}$. Les propriétés mécaniques des matériaux, utilisées pour les simulations, sont présentées section 5.4 (Tableau 5.1). Il est important de préciser qu'expérimentalement, les colonnes sont séparées les unes des autres d'une distance de $400 \mu\text{m}$ alors que dans les simulations elles sont considérées isolées.

La figure 7.7 représente pour chaque géométrie de cellule testée, la partie réelle de l'impédance électrique mesurée et simulée pour les quatre topologies de cMUTs. On constate que, quelle que soit la géométrie de la cellule, et cela même pour le dispositif composé de cellules rectangulaires (dispositif 4), les simulations se superposent parfaitement aux mesures en terme de fréquences de résonance. Les irrégularités observées sur les mesures sont dues à la présence des colonnes de cellules voisines dans le cas expérimental. Malgré l'éloignement de $400 \mu\text{m}$, il subsiste des interactions entre les colonnes.

Ces résultats valident l'expression de la fonction de Green 1-D périodique et son implémentation numérique. De plus, il est démontré que le comportement d'une colonne de cMUTs, de hauteur finie, est assimilable à un réseau 1-D infini de cellules. En effet, au vu de l'important nombre de cellules présentes dans une colonne (plus d'une centaine), il est possible de négliger les effets de bord acoustiques sans introduire d'erreurs significatives.

TABLE 7.1 – Caractéristiques géométriques des dispositifs composés d'une unique colonne de cellule cMUT

Dispositif	Dimensions de la membrane	Dimensions de l'électrode	Nombre de cellules dans la colonne
1	$27 \times 27 \mu\text{m}^2$	$19 \times 19 \mu\text{m}^2$	242
2	$32 \times 32 \mu\text{m}^2$	$23 \times 23 \mu\text{m}^2$	211
3	$37 \times 37 \mu\text{m}^2$	$26 \times 26 \mu\text{m}^2$	186
4	$27 \times 37 \mu\text{m}^2$	$19 \times 26 \mu\text{m}^2$	186

7.4. CONFRONTATION EXPÉRIMENTALE

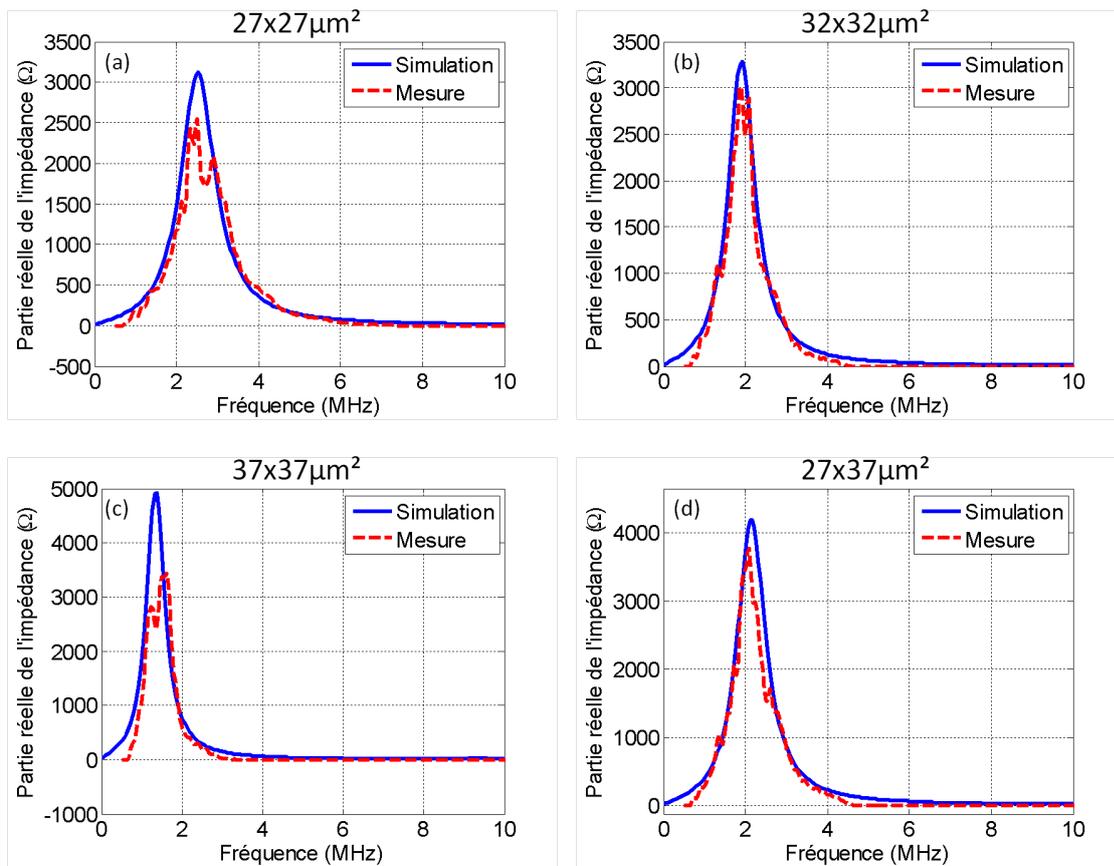


FIGURE 7.7 – Partie réelle de l'impédance électrique mesurée (courbes rouges) et simulée (courbes bleues) pour les dispositifs composés d'une colonne de cellules de dimensions : (a) $27 \times 27 \mu\text{m}^2$, (b) $32 \times 32 \mu\text{m}^2$, (c) $37 \times 37 \mu\text{m}^2$, (d) $27 \times 37 \mu\text{m}^2$. Toutes les courbes sont obtenues pour des tensions de polarisation fixées à : $V_{DC} = 0.75V_c$

Conclusion

Le comportement d'une cellule cMUT en milieu fluide a été modélisé dans cette deuxième partie, pour différentes conditions aux limites : cellule isolée, cellule dans un réseau 2-D périodique et cellule dans un réseau 1-D périodique. Partant d'un même formalisme numérique, décrit pour la cellule isolée, nous avons, sans difficulté, pu traiter les deux autres cas en modifiant uniquement la matrice de couplage cMUTs/fluide, dite matrice des frontières. Pour le cas de périodicité 1-D, cette matrice a été développée en s'appuyant sur l'expression de la fonction de Green associée à un réseau de sources 1-D périodique, dont nous avons, à ce titre, pu établir une expression analytique. Dans les trois situations, le calcul est mené sans aucune hypothèse simplificatrice. Les trois modèles ont ensuite été confrontés afin de valider l'implémentation numérique de cette matrice des frontières en conditions de périodicité 1-D. Nous en avons confirmé la validité par des résultats expérimentaux.

Des trois situations décrites, seul le cas du réseau de périodicité 2-D se rapproche d'une situation réelle de transducteurs. Ce modèle a ainsi permis de retrouver des points de comportement connus des technologies cMUT. En particulier, il a été démontré l'existence de fréquences de coupure d'origine mécanique et d'autres liées à la périodicité des sources. On les retrouve dans la réponse en fréquence des transducteurs. La dépendance de la fréquence centrale et de la bande passante au taux de couverture sont aussi des tendances que l'on peut retrouver sans difficulté avec cette approche. Enfin, nous avons proposé une façon originale d'expliquer l'existence du principal mode de couplage dans les barrettes, avec une validation expérimentale des simulations proposées. Ce modèle de propagation en milieu 2-D périodique ne décrit toutefois pas tous les phénomènes rencontrés dans le rayonnement d'un élément de barrette. Il faut pour approcher de la réalité introduire, dans la simulation, la possibilité de limiter le nombre de cMUTs présents sur la surface. C'est l'objectif de la prochaine partie. Toutefois, il est clair que dans le cas où les éléments de barrettes possèdent un nombre suffisant de cMUTs pour les assimiler à des sources périodiques, cette approche convient. Cependant, il est nécessaire d'en définir proprement les limites, comme nous le ferons dans la section 8.2.

Troisième partie

Modélisation d'un élément de
barrette cMUT

Introduction

L'objectif de cette partie est de définir une stratégie de modélisation permettant de décrire le comportement d'un élément de barrette cMUT. La modélisation précise d'un émetteur nécessite la prise en compte de plusieurs paramètres, tels que : l'agencement des cellules au sein de l'élément, les couplages inter-cellules et les couplages inter-éléments. La grande difficulté posée par l'ensemble de ces contraintes réside dans l'échelle des ordres de grandeur mise en jeu au sein d'une sonde cMUT. Nous sommes, à l'échelle d'une cellule, à quelques dizaines de micromètres pour atteindre, à l'échelle de la barrette, plusieurs dizaines de millimètres. On comprend ainsi que l'utilisation d'outils numériques complets capables de considérer la structure d'une sonde dans sa totalité peut s'avérer extrêmement couteuse en termes de temps de calcul et de puissance machine nécessaire.

L'approche que nous proposons ici ne considère qu'une seule source de couplage, le fluide. Les couplages causés par le substrat ne sont pas pris en compte. Les intégrer à la simulation d'une barrette ne présente pas d'intérêt, car ils n'interagissent pas de manière directe avec la réponse acoustique nominale d'un élément de barrette cMUT, contrairement aux sondes de technologies PZT. Ces couplages, ainsi que leur impact sur les performances élémentaires de la sonde, peuvent être simulés séparément. La stratégie de simulation présentée ici, se démarque des méthodes décrites dans la littérature [109, 100, 119, 85], car elle modélise chaque élément de barrette comme un ensemble de colonnes de cMUTs couplées, plutôt que plusieurs cellules cMUT considérées unitairement. Chaque colonne est naturellement assimilée à un réseau 1-D périodique de cellules cMUT. Deux raisons justifient ce choix. La première est liée à la topologie d'un émetteur ultrasonore dont la hauteur est bien supérieure à sa largeur (facteur 100). La seconde résulte de l'étude réalisée section 7.4, où nous avons prouvé expérimentalement la validité de cette hypothèse. À ce titre, l'ensemble des approximations et des grandeurs définies dans ce chapitre (chapitre 7) seront réutilisées ici.

De cette hypothèse simplificatrice, nous pouvons alors construire un modèle numérique exact associant plusieurs colonnes de cMUTs et tenant compte des couplages mutuels inter-colonnes. Cette approche est comparable à ce qui a pu être fait, par ailleurs, dans la littérature, à travers les travaux de Caronti *et al.* [24] et Yaralioglu *et al.* [144], au moyen des éléments finis. Nous présentons ce premier modèle dans le chapitre 8. Le chapitre 9 propose de simplifier ce modèle numérique par une hypothèse forte visant à alléger le calcul des couplages mutuels entre colonnes de cMUTs. Pour cela, on fait l'hypothèse que les cMUTs vibrent comme des pistons parfaits, ce qui permet de déterminer une matrice des impédances mutuelles, indépendamment du champ de vitesse propre à chaque membrane. Cette matrice des impédances mutuelles inter-colonnes est ensuite associée au schéma électroa-

coustique équivalent d'une colonne de cMUTs, pour construire le schéma électroacoustique équivalent d'un émetteur. Cette approche dérive des travaux abordés dans le cadre de la thèse de Cyril Meynier [84] où la simplification était menée au niveau de la cellule cMUT, ce qui nécessitait, pour déterminer la réponse d'un émetteur, de tenir compte des couplages mutuels inter-cMUTs et donc des temps de calcul bien plus importants. Dans ce même chapitre, nous intégrons à la modélisation d'un émetteur la présence d'éléments voisins inactifs afin de construire un modèle complet de barrette cMUT. Le chapitre 10 propose une validation expérimentale du modèle simplifié par des mesures d'impédance électrique et des mesures de couplage inter-colonnes.

Enfin, à travers les différents résultats théoriques et expérimentaux présentés dans les chapitres 9 et 10, nous mettrons en avant l'existence de modes parasites qui proviennent de couplages inter-colonnes au sein d'un même émetteur. Ces modes, que l'on appelle modes de baffle ou effets de baffle, ont déjà été discutés dans la littérature, mais jamais réellement expliqués. Nous proposerons, dans le chapitre 11, par une décomposition en modes propres de la matrice de rayonnement d'un émetteur, d'établir de manière analytique l'origine de ces phénomènes. Nous utiliserons, par ailleurs, cette même analyse pour optimiser la réponse en fréquence d'un émetteur, et plus précisément sa bande passante.

Chapitre 8

Modélisation exacte d'un élément de barrette

Sur la base des équations de comportement d'une colonne de cMUTs déjà présentées précédemment (chapitre 7), nous établissons ici celles d'un ensemble de N colonnes couplées. Nous présentons, par ailleurs, le calcul du champ de pression rayonné par un émetteur. Une étude, non exhaustive, visant à analyser l'impact du nombre de colonnes couplées sur la réponse de l'élément est proposée. Il s'agira notamment de faire un comparatif avec les situations extrêmes que sont les cas des réseaux 1-D périodique (chapitre 7) et 2-D périodique (chapitre 6).

8.1 Equations de comportement d'un ensemble de N colonnes couplées

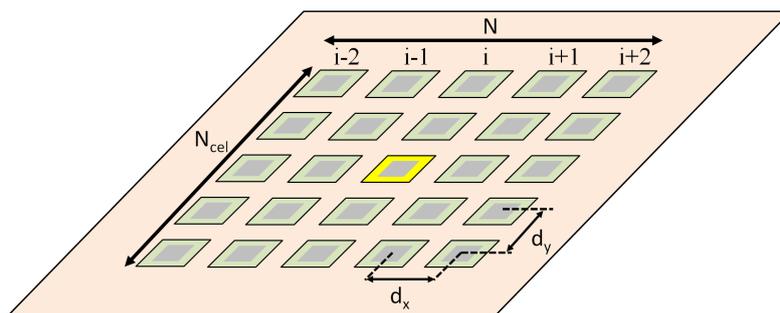


FIGURE 8.1 – Schéma descriptif de l'élément de barrette cMUT à modéliser. Par la suite, les équations sont établies pour la cellule de couleur jaune appartenant à la colonne i .

De base, un élément de barrette est défini comme un ensemble de plusieurs cellules cMUT mises en parallèles. La topologie générique d'un émetteur est représentée figure 8.1. Chacun est composé d'un nombre fini de lignes et de colonnes. On note N le nombre de colonnes et N_{cel} le nombre de cellules par colonne. Le pas entre deux colonnes (axe x) est

8.1. EQUATIONS DE COMPORTEMENT D'UN ENSEMBLE DE N COLONNES COUPLÉES

noté par d_x et celui entre deux lignes (axe y), d_y . On suppose naturellement que toutes les cellules présentes sur la barrette sont identiques. La modélisation de l'élément complet nécessite, sans l'introduction de conditions de périodicité, la prise en compte de l'ensemble des couplages inter-cellules. Pour un élément, on a ainsi $N \times N_{cel}$ couplages à modéliser. En reprenant les hypothèses formulées pour l'étude de la cellule isolée (chapitre 5), l'équation comportementale d'une cellule (nommée i) dans un élément de barrette s'écrit :

$$\rho(x, y) \frac{d^2 u_i(x, y, t)}{dt^2} = -K_m [u_i(x, y, t)] + K_{perte} \frac{du_i(x, y, t)}{dt} + p_{e,i}(x, y, t) + p_{r,i}(x, y, t) + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{tot}} p_{mut,ij}(x, y, t) \quad (8.1)$$

où :

- $u_i(x, y, t)$ est le déplacement de la membrane de la cellule i ,
- K_m est l'opérateur dérivé appliqué au déplacement (présenté section 5.1),
- K_{perte} est le terme traduisant les pertes mécaniques de la membrane de la cellule i ,
- $p_{e,i}(x, y, t)$ est la pression électrostatique exercée sur la cellule i ,
- $p_{r,i}(x, y, t)$ est la pression rayonnée par la cellule i sur elle-même,
- $p_{mut,ij}(x, y, t)$ est la pression mutuelle exercée entre la cellule i et la cellule j ,
- N_{tot} est le nombre total de cellules présentes sur l'élément ($N_{tot} = N_{cel} \times N$).

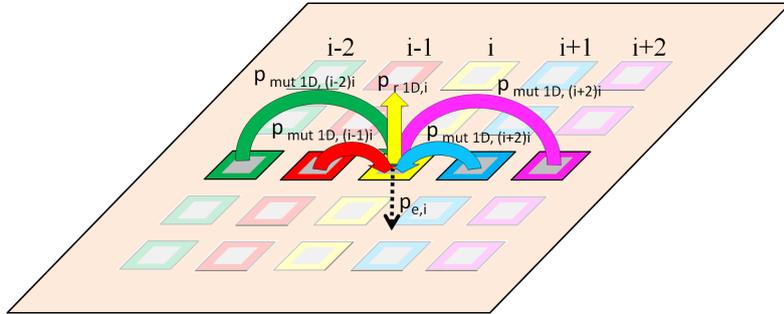


FIGURE 8.2 – Représentation en condition de périodicité 1-D des pressions exercées sur une cellule de la colonne i placée dans un élément barrette

Partant de l'hypothèse simplificatrice visant à assimiler chaque colonne à un réseau périodique 1-D, le problème est réduit à la modélisation de N colonnes couplées (voir figure 8.2). La modélisation d'un élément de barrette devient alors une extension du cas périodique 1-D présenté chapitre 7. L'équation du comportement des cellules de la colonne i appartenant à l'élément de barrette devient alors :

$$\rho(x, y) \frac{d^2 u_i(x, y, t)}{dt^2} = -K [u_i(x, y, t)] + K_{perte} \frac{du_i(x, y, t)}{dt} + p_{e,i}(x, y, t) + p_{r\ 1D,i}(x, y, t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N p_{mut\ 1D,ij}(x, y, t) \quad (8.2)$$

8.1. EQUATIONS DE COMPORTEMENT D'UN ENSEMBLE DE N COLONNES COUPLÉES

où :

- $p_{r\ 1D,i}(x, y, t)$ est la pression rayonnée par la colonne i ,
- $p_{mut\ 1D,ij}(x, y, t)$ est la pression exercée par les cellules de la colonne j sur celles de la colonne i .

Si, comme dans la partie précédente, on suppose être en régime sinusoïdal, avec une linéarisation des forces électrostatiques, cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$-\omega^2[M][u_i] = -[K][u_i] + [K_{soft}][u_i] + [p_{dyn}] + [p_{r\ 1D,i}] + \sum_{j=1, j \neq i}^N [p_{mut\ 1D,ij}] \quad (8.3)$$

où :

- $[u_i]$ est le vecteur déplacement de la cellule i ,
- $[M]$ est la matrice des masses,
- $[K]$ est la matrice de raideur complexe tenant compte de l'amortissement,
- $[K_{soft}]$ est la matrice de softening,
- $[P_{dyn}]$ est le vecteur pression électrostatique appliquée à la cellule i ,
- $[p_{r\ 1D,i}]$ est le vecteur associé à la pression $p_{r\ 1D,i}(x, y, t)$,
- $[p_{mut\ 1D,ij}]$ est le vecteur associé aux pressions mutuelles $p_{mut\ 1D,ij}(x, y, t)$.

Le champ de pression $[p_{r\ 1D,i}]$ est relié au champ de déplacement $[u_i]$ par l'intermédiaire de la matrice de frontière ($[K_{fluide\ 1D}]$) précédemment établie :

$$[p_{r\ 1D,i}] = j\omega[K_{fluide\ 1D}][u_i] \quad (8.4)$$

De façon similaire, pour déterminer la pression mutuelle exercée par les cellules de la colonne j sur celles de la colonne i , on utilisera une matrice de frontière $[K_{mut\ 1D,ij}]$ dédiée :

$$[p_{mut\ 1D,ij}] = j\omega[K_{mut\ 1D,ij}][u_j] \quad (8.5)$$

où les termes de $[K_{mut\ 1D,ij}]$ traduisent les interactions mutuelles entre chaque noeud du maillage des cellules i et j . Autrement dit, en appelant k les points maillant une cellule de la colonne i et l les points du maillage d'une cellule de la colonne j , la matrice de frontière $[K_{mut\ 1D,ij}]$ est obtenue de la façon suivante :

$$[K_{mut\ 1D,ij,kl}] = G_{1D}(x_k - x_l, y_k - y_l, \omega)\delta_x \quad (8.6)$$

avec :

- G_{1D} la fonction de Green 1-D périodique,
- (x_l, y_l) les coordonnées du point l ,
- (x_k, y_k) les coordonnées du point k
- δ_x le pas du maillage en x .

Pour chacune des N colonnes de l'élément, on obtient l'équation de comportement suivante (avec $i \in \{1; 2; \dots; N\}$) :

$$[-\omega^2[M] + [K] - [K_{soft}] - j\omega[K_{fluide\ 1D}]] [u_i] - j\omega \sum_{j=1, j \neq i}^N [K_{mut\ 1D,ij}][u_j] = [p_{dyn}] \quad (8.7)$$

8.2. IMPACT DU NOMBRE DE COLONNES SUR LA RÉPONSE D'UN ÉLÉMENT

Par conséquent, la recherche des vecteurs déplacements des cellules de chacune des N colonnes passe par la résolution d'un système linéaire de N équations couplées. En y associant une condition de symétrie, c'est-à-dire que le comportement de la colonne i est identique à celui de la colonne $N - i$, la taille du système à résoudre est réduite à $\frac{N}{2}$ si le nombre de colonnes est pair et à $\frac{N+1}{2}$ si le nombre de colonnes est impair. Chaque membrane étant maillée par $N_x \times N_y$ points, on a à résoudre pour un nombre pair de colonnes, $N_x \times N_y \times \frac{N}{2}$ équations (respectivement pour un nombre impair de colonnes on doit résoudre $N_x \times N_y \times \frac{N+1}{2}$). Malgré la réduction du nombre de degrés de liberté apportée par la mise en place des conditions de périodicité 1-D, les temps de calcul peuvent augmenter très rapidement avec le nombre de colonnes. A titre d'exemple, pour un élément composé de 6 colonnes et un maillage fixé à 40 points dans chacune des directions de la cellule, le calcul du vecteur déplacement de chacune des cellules nécessite la résolution de 4800 équations à chaque pas de fréquence.

Dans la littérature, les performances acoustiques d'un élément sont généralement définies par la topologie du champ de pression rayonné, à savoir sa répartition spatiale et son spectre. A partir du champ de déplacement obtenu pour chaque colonne, on peut sans difficulté déterminer le champ de pression, en s'appuyant sur la formulation intégrale de Rayleigh :

$$p_{ray}(r, \omega) = \frac{j\omega\rho_0 e^{j\omega t}}{2\pi} \int \int_{S_0} v_n(r_0, \omega) \frac{e^{jk_0|r-r_0|}}{|r-r_0|} dS_0 \quad (8.8)$$

avec :

- r la position du point de calcul de la pression (point cible),
- r_0 la position du point source,
- S_0 l'ensemble des surfaces sources.

Pour ce calcul, on fait l'hypothèse que les conditions de baffle sont rigides d'une part, et d'autre part, on assimile chaque cMUT à un piston auquel on associe comme vitesse particulière v_n , la vitesse particulière moyenne calculée à partir des champs de déplacement.

8.2 Impact du nombre de colonnes sur la réponse d'un élément

Afin d'illustrer la totalité des calculs mis en place, nous avons déterminé la réponse exacte d'un réseau de plusieurs colonnes couplées, successivement 2, 4 et 8 colonnes. Les cellules simulées sont identiques à celles étudiées dans la section 5.4. Il s'agit de membranes de dimensions $27 \times 27 \mu\text{m}^2$. Les pas inter-lignes (d_y) et inter-colonnes (d_x) sont identiques pour toutes les configurations simulées et valent $50 \mu\text{m}$. Dans tous les cas, les simulations sont réalisées dans l'eau.

La figure 8.3 présente le cas 2 colonnes et le compare aux cas des réseaux 1-D périodique et 2-D périodique. On voit clairement que la réponse de l'élément est principalement centrée sur une seule fréquence (3.3 MHz) avec très peu de bande passante. Cette fréquence correspond, comme pour le cas une colonne (réseau 1-D périodique), au mode de résonance fondamentale des membranes couplées avec le fluide (référence 1). En hautes fréquences,

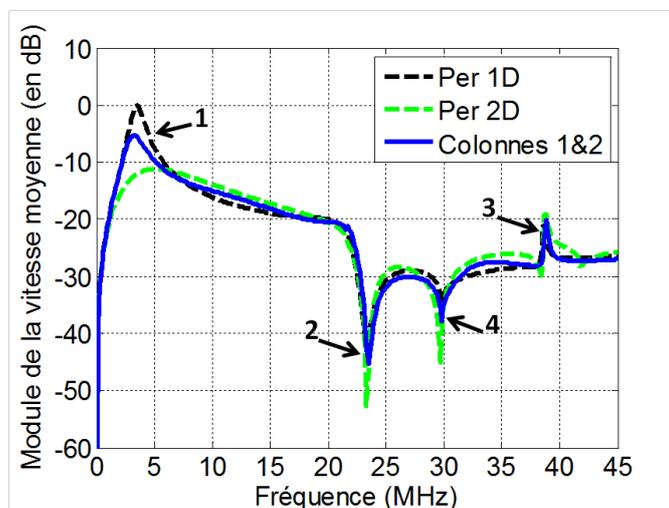


FIGURE 8.3 – Vitesse moyenne de déplacement des cellules appartenant à un élément composé de 2 colonnes (courbe bleue) comparée à celles obtenues dans le cas de la cellule dans un réseau 1-D périodique (courbe noire) et dans un réseau 2-D périodique (courbe verte).

on retrouve la fréquence de coupure liée à la périodicité en y (référence 4) et les fréquences de résonance des modes 2 et 3 des membranes (respectivement références 2 et 3). Rappelons que la bande passante utile de l'élément est délimitée par la fréquence de coupure provoquée par le mode 2 de résonance des membranes. Passée cette fréquence, les éléments cMUTs ne sont plus utilisables pour les applications ultrasonores.

Lorsque l'on analyse la réponse en fréquence de l'élément constitué de 4 colonnes (figure 8.4), on observe globalement que sa bande passante se rapproche de celle d'un réseau 2-D périodique de cellules. Avec 4 colonnes, le fluide commence à fournir un effet de masse suffisant pour gagner en bande passante. En hautes fréquences, les fréquences de coupures liées à la périodicité en y (référence 4) et aux modes de membranes d'ordre supérieur restent inchangées (respectivement références 2 et 3). La grande différence, avec le cas du réseau 2-D périodique, réside dans l'apparition d'une forte coupure dans le spectre (référence 5). Il est intéressant de remarquer qu'à la fréquence correspondant à cette coupure, les membranes des colonnes du centre et celles des colonnes du bord vibrent en opposition de phase (figure 8.4-(c)). Bien connu de la littérature [24, 13, 14], ce phénomène, appelé effet de baffle, a été démontré comme étant dû aux interactions inter-colonnes. Le chapitre 11 sera dédié à l'analyse de ce phénomène et plusieurs approches seront proposées afin de le supprimer ou le diminuer.

Pour l'élément composé de 8 colonnes (figure 8.5), on constate que le nombre de résonance parasite augmente avec le nombre de colonnes couplées. Trois modes de résonance, associés chacun à une topologie bien précise de déplacement des cellules, sont ainsi observés pour cet élément (figure 8.5 (c), (d) et (e)). Bien que plus compliquées à décrire, ces topologies de mode seront parfaitement prédites et expliquées par l'analyse mise en place dans le chapitre 11.

8.2. IMPACT DU NOMBRE DE COLONNES SUR LA RÉPONSE D'UN ÉLÉMENT

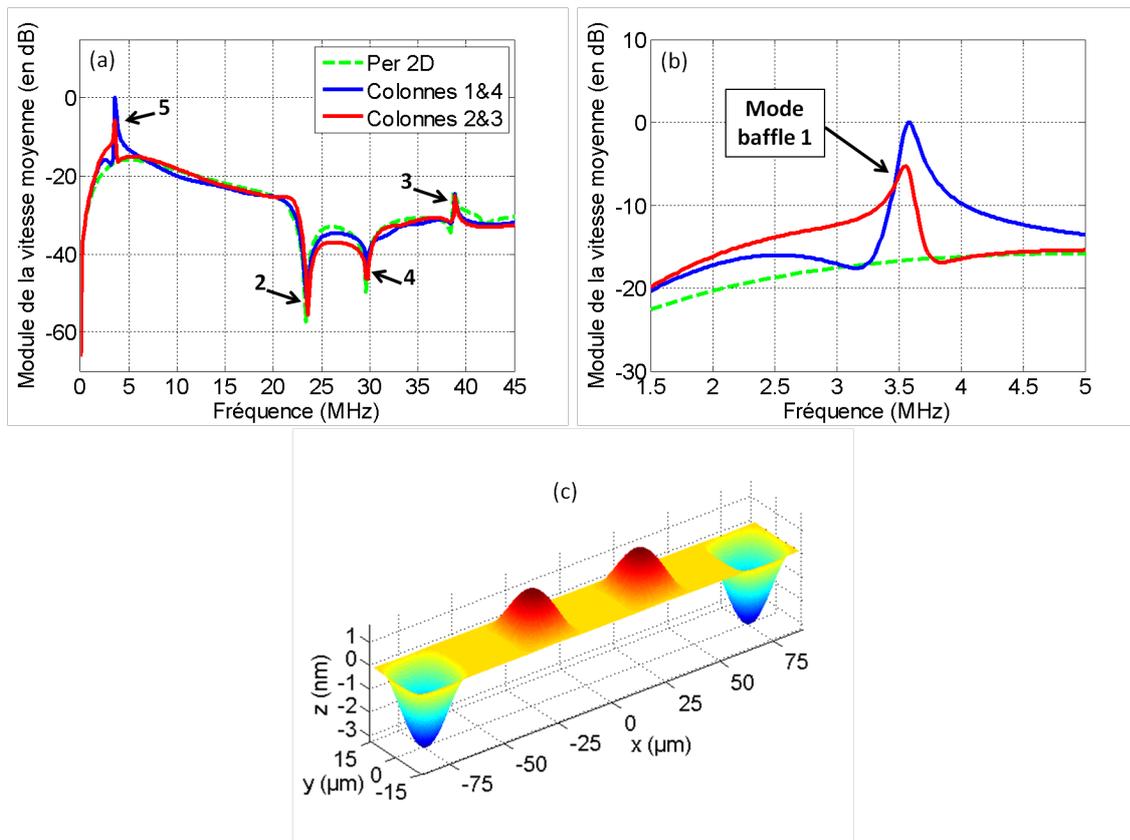


FIGURE 8.4 – (a) et (b) Vitesses moyennes de déplacement des cellules appartenant à un élément composé de 4 colonnes, comparées à celle obtenue dans le cas de la cellule dans un réseau 2-D périodique (courbe verte). (c) Forme des déplacements de chacune des cellules composant l'élément à la fréquence de résonance du premier mode de baffle ($f=3.6$ MHz).

8.2. IMPACT DU NOMBRE DE COLONNES SUR LA RÉPONSE D'UN ÉLÉMENT

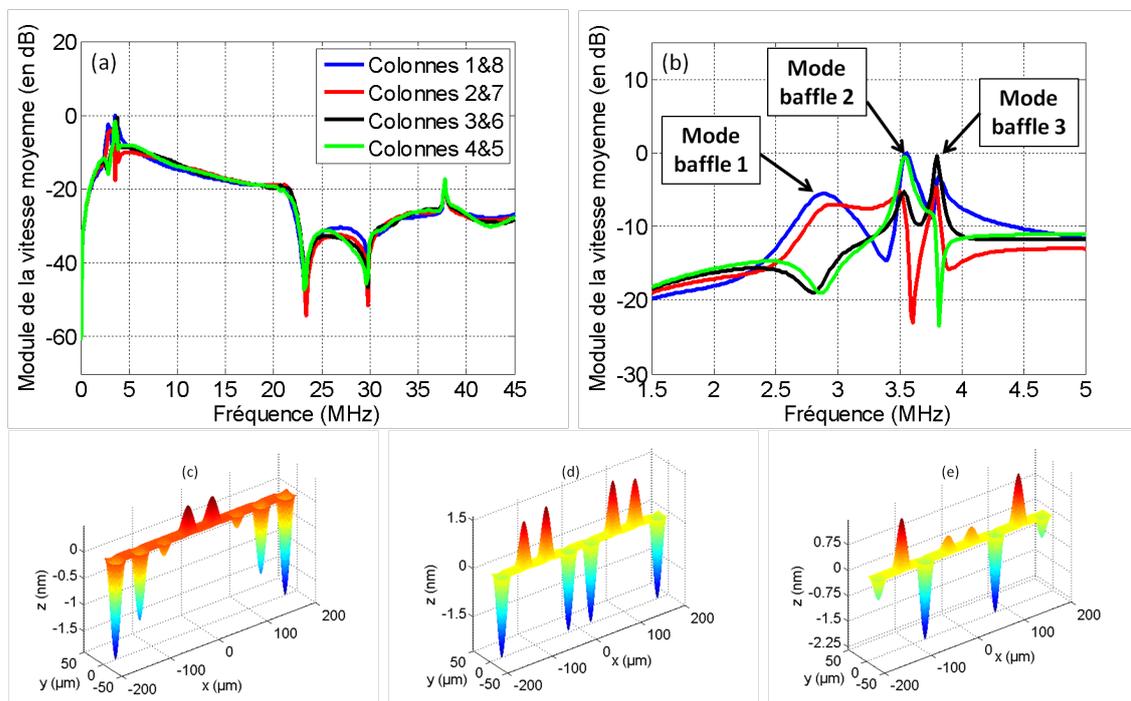


FIGURE 8.5 – (a) et (b) Vitesses moyennes de déplacement des cellules appartenant à un élément composé de 8 colonnes. Forme des déplacements de chacune des cellules composant l'élément : (c) à la fréquence de résonance du premier mode de baffle parasite ($f=2.8$ MHz), (d) à la fréquence de résonance du deuxième mode de baffle parasite ($f=3.8$ MHz) et (e) à la fréquence de résonance du troisième mode de baffle parasite ($f=3.6$ MHz).

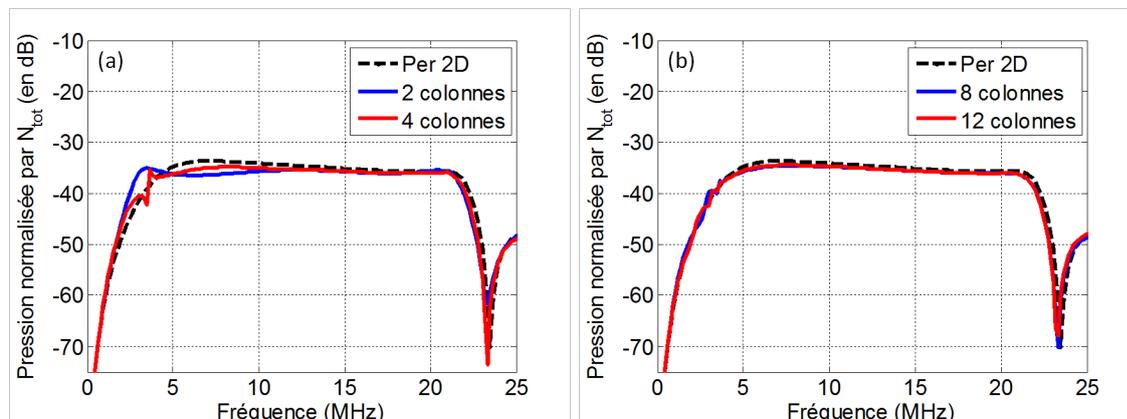


FIGURE 8.6 – Pression rayonnée en champ lointain (20 cm) pour : (a) une cellule dans un réseau 2-D périodique (courbe noire), un élément composé de 2 colonnes (courbe bleue) et un élément composé de 4 colonnes (courbe rouge) et (b) une cellule dans un réseau 2-D périodique (courbe noire), un élément composé de 8 colonnes (courbe bleue) et un élément composé de 12 colonnes (courbe rouge). Chaque spectre est normalisé par le nombre de cellules (N_{tot}) présentes dans l'élément simulé.

Pour chacune de ces configurations (2, 4 et 8 colonnes et réseau 2-D périodique), auxquelles on ajoute le cas 12 colonnes, nous avons déterminé le champ de pression rayonné par la source. Compte tenu de la bande passante des réponses en vitesse, nous nous sommes placés à 20 cm afin d'être en champ lointain pour chacune des composantes fréquentielles. Afin que les grandeurs simulées soient comparables, la pression obtenue a été normalisée par le nombre de colonnes présentes dans l'élément. L'ensemble des résultats est représenté figure 8.6. Lorsque le nombre de colonnes augmente, on observe, sur le spectre de la pression rayonnée, que l'amplitude des coupures liées aux effets de baffle est réduite. Dans le cas 12 colonnes, ces oscillations sont quasiment indétectables. Ce phénomène provient du fait que la pression rayonnée est la somme des contributions de chacune des cellules et naturellement, tous ces modes ne s'additionnent pas forcément de manière constructive en champ lointain. On peut faire remarquer que lorsque le nombre de colonnes est faible, le début de la réponse en fréquence est marquée par la présence de ces pics parasites, qui rendent difficiles la détermination de la fréquence de coupure basse du spectre, et donc de sa bande passante. Des méthodes, afin de s'affranchir de cette difficulté, seront présentées dans le chapitre 11. Enfin, à partir de 8 colonnes, on voit que les bandes passantes simulées se superposent pratiquement à celle obtenue pour le réseau 2-D périodique de cellules. Ce résultat est en accord avec celui avancé par Ballandras *et al.* [2] qui ont évalué à 16 le nombre de cellules nécessaires pour converger vers le cas périodique. Notons cependant que ce résultat n'est valable que pour la pression rayonnée. Si l'on analyse les vitesses moyennes de chaque colonne, il y aura toujours, localement, les modes de baffle présents dans la réponse en fréquence.