

Compléments à l'analyse du temps CPU pour le système gaz-liquide

Ce chapitre est un complément au chapitre 6 qui concerne l'analyse de la complexité de la méthode de relaxation pour le système diphasique isotherme non compositionnel (système gaz-liquide).

Nous présentons une série d'encadrés qui détaillent le coût des opérations de base du schéma. Nous donnons également le détail des expériences qui ont servi à décomposer le temps CPU des schémas numériques.

1. Calcul de (a, b) de base : **12 opérations**

$$A_\alpha = -(P_\tau)_\alpha + (P_v)_\alpha^2, \quad B_\alpha = (\sigma_Y)_\alpha^2, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{a} = \sqrt{\max(A_{\mathbf{L}}, A_{\mathbf{R}})}, \quad \tilde{b} = \sqrt{\max(B_{\mathbf{L}}, B_{\mathbf{R}})} \quad (\text{A.2})$$

2. Calcul du a assurant $\tau_{\mathbf{L}}^* > 0, \tau_{\mathbf{R}}^* > 0$: **22 opérations**

$$\tau_\alpha = 1/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \min(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}}), \quad \beta = -\frac{v_{\mathbf{L}} - v_{\mathbf{R}}}{2}, \quad \gamma = -\left| \frac{P_{\mathbf{L}} - P_{\mathbf{R}}}{2} \right| \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \quad \bar{a} = \max\left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 1.\right) \quad (\text{A.5})$$

3. Calcul du b assurant $Y^* \in [0, 1]$: **10 opérations**

$$(\rho\Phi)_\alpha = \rho_\alpha\Phi_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{b} = \max(|(\rho\Phi)_{\mathbf{L}} + (\rho\Phi)_{\mathbf{R}}|/2 + |(\rho\Phi)_{\mathbf{L}} - (\rho\Phi)_{\mathbf{R}}|/2, 1) \quad (\text{A.7})$$

4. Calcul de (a, b) final : **2 opérations**

$$a = \max(\tilde{a}, \bar{a}), \quad b = \max(\tilde{b}, \bar{b}) \quad (\text{A.8})$$

FIG. A.1 – Détail du calcul des coefficients de relaxation

1. Calcul de (a, b) : **46 opérations**, voir figure (A.1).

2. Calculs intermédiaires : **6 opérations**

$$\tau_\alpha = 1/\rho_\alpha, \quad Y_\alpha = \chi_\alpha/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.9})$$

3. Calcul des états intermédiaires dans le problème de Riemann : **32 opérations**

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{L}}^* &= \tau_{\mathbf{L}} + (\Pi_{\mathbf{L}} - \Pi^*)/a^2, & \tau_{\mathbf{R}}^* &= \tau_{\mathbf{R}} + (\Pi_{\mathbf{R}} - \Pi^*)/a^2 \\ \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, & v^* &= \tilde{v} + \langle \Pi \rangle / a \\ Y^* &= \bar{Y} - \langle \Sigma \rangle / b, & \Sigma^* &= \bar{\Sigma} - b \langle Y \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

4. Calcul des valeurs propres : **8 opérations**

$$\lambda = (v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}, v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^*, v^*, v^* + b\tau_{\mathbf{R}}^*, v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.11})$$

5. Solution du problème de Riemann : **5 opérations**

$$\rho = 1/\tau_s, \quad \chi = \rho Y_s, \quad q = \rho v_s, \quad (\rho\Pi) = \rho\Pi_s, \quad (\rho\Sigma) = \rho\Sigma_s \quad (\text{A.12})$$

avec $(\tau, Y, v, \Pi, \Sigma)_s$ la solution du problème de Riemann.

6. Évaluation du flux numérique : **17 opérations**

(a) Calculs intermédiaires : **3 opérations**

$$v = q/\rho, \quad \Pi = (\rho\Pi)/\rho, \quad \Sigma = (\rho\Sigma)/\rho \quad (\text{A.13})$$

(b) évaluation finale : **14 opérations**

$$\mathbf{H}^{relaxation} = f(u) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{avec } f = (q, \chi v - \Sigma, \rho v^2 + \Pi, q\Pi + a^2 v, q\Sigma - b^2 \chi/\rho)^T \quad (\text{A.15})$$

FIG. A.2 – Détail du calcul du flux du schéma de relaxation

1. Calculs intermédiaires : **4 opérations**

$$Y_\alpha = \chi/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.16})$$

2. Calcul des Jacobiennes à gauche et à droite : **20 opérations**

$$A_\alpha = A(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{avec } A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 + P_\rho & 2v + P_q & P_\chi \\ -Yv - \sigma_\rho & Y - \sigma_q & v - \sigma_\chi \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

3. Calcul des éléments propres : **1476 opérations**

(a) Calcul des valeurs propres, des vecteurs propres à droite, à gauche et à droite : **1422 opérations**

$$A_\alpha \Rightarrow \Lambda_\alpha, R_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.19})$$

(b) Calcul des vecteurs propres à gauche, à gauche et à droite : **54 opérations**

$$L_\alpha = R_\alpha^{-1}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.20})$$

4. Calcul des flux physiques à gauche et à droite : **12 opérations**

$$f_\alpha = f(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{avec } f(u) = (q, \chi q/\rho - \sigma, q^2/\rho + P)^T \quad (\text{A.22})$$

5. Calcul de la matrice de diffusion : **246 opérations**

$$|A_{\mathbf{L}}| = R_{\mathbf{L}} K |\Lambda_{\mathbf{L}}| L_{\mathbf{L}}, \quad |A_{\mathbf{R}}| = R_{\mathbf{R}} K |\Lambda_{\mathbf{R}}| L_{\mathbf{R}} \quad (\text{A.23})$$

$$D = \frac{1}{2} (|A_{\mathbf{L}}| + |A_{\mathbf{R}}|), \quad K = (k_1, k_2, k_3)^T \quad (\text{A.24})$$

6. Évaluation du flux numérique : **33 opérations**

$$\mathbf{H}^{Tacite} = \frac{1}{2} (f_{\mathbf{L}} + f_{\mathbf{R}}) + \frac{1}{2} D (u_{\mathbf{L}} - u_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.25})$$

FIG. A.3 – Détail du calcul du flux du schéma Tacite

Étape physique : 129 I opérations et 10 I évaluations

1. Calcul des flux numériques : 114
- I
- opérations

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \mathbf{H}(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad i = 0, I \quad (\text{A.26})$$

2. Mise à jour de
- u_i^*
- : 15
- I
- opérations

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad u_i^* = u_i^n - \theta (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}), \quad i = 1, I \quad (\text{A.27})$$

Étape mathématique : 404 I opérations et 3 I évaluations

1. Calculs préliminaires : 2 opérations

$$\theta = \Delta t / (2\Delta x), \quad (\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.28})$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

2. Construction du premier membre : 399
- I
- opérations et 3
- I
- évaluations

- (a) Calcul des matrices Jacobiennes modifiées : 106
- I
- opérations

$$\tilde{A}^\alpha = \tilde{A}^\alpha(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.29})$$

- (b) Calcul de la matrice de diffusion : 143
- I
- opérations

$$|\tilde{A}^{Roe}| = |\tilde{A}^{Roe}|(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.30})$$

- (c) Calcul des dérivées de la fonction
- $I = (\rho P)(u)$
- : 3
- I
- évaluations

$$(\partial I / \partial \rho)_i, \quad (\partial I / \partial \chi)_i, \quad (\partial I / \partial q)_i \quad (\text{A.31})$$

- (d) Calcul des matrices
- $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{i+1}$
- : 150
- I
- opérations

$$\alpha_i = \theta \left(\tilde{A}^{\mathbf{L}} + |\tilde{A}^{Roe}| \right), \quad \gamma_{i+1} = \theta \left(\tilde{A}^{\mathbf{R}} - |\tilde{A}^{Roe}| \right), \quad \beta_i = \mathbb{I} + \alpha_i - \gamma_i$$

3. Construction du second membre : 5
- I
- opérations

$$b_i = u_i^* - u_i^n \quad (\text{A.32})$$

Résolution du système linéaire : 384 I opérations

FIG. A.4 – Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire (blocs de taille 5, demi-largeur de bande 9)

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice Jacobienne du système de relaxation modifiée par annulation des valeurs propres associées aux ondes lentes. Il s'agit de la matrice $\tilde{A}(\mathbf{v})$ définie de la façon suivante. Notons $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho v, \rho \Pi, \rho \Sigma)^T$ l'inconnue du système de relaxation et $\mathcal{G}(\mathbf{v}) = (\rho v, \rho Y v - \Sigma, \rho v^2 + \Pi, \rho v \Pi + a^2 v, \rho v \Sigma - b^2 Y)^T$ le flux numérique. Notons $A(\mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$ la Jacobienne du flux physique. Ses valeurs propres sont $\Lambda(\mathbf{v}) = \text{Diag}(v - a\tau, v - b\tau, v, v + b\tau, v + a\tau)$ et vérifient $A(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\Lambda(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$ avec $R(\mathbf{v})$ la matrice des vecteurs propres et $L(\mathbf{v}) = R^{-1}(\mathbf{v})$. On note $\tilde{\Lambda}(\mathbf{v}) = \text{Diag}(v - a\tau, 0, 0, 0, v + a\tau)$ et $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\tilde{\Lambda}(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$. Notons

$$\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau, \quad d = \frac{1}{a^2 \tau} \quad (\text{A.33})$$

Les colonnes de la matrice $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R\tilde{\Lambda}L = \{\tilde{A}_j\}_{j=1,5}$ sont les suivantes. La deuxième et la cinquième colonne sont nulles $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_5 = 0$ tandis que les autres valent

$$\tilde{A}_1 = d \begin{pmatrix} -\mathcal{I}v \\ -Y\mathcal{I}v \\ -2v^2a^2\tau - \Pi(v^2 + a^2\tau^2) \\ -\mathcal{I}^2v \\ -\Sigma\mathcal{I}v \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \\ 2v \\ \mathcal{I} \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_4 = d \begin{pmatrix} v \\ Yv \\ v^2 + a^2\tau^2 \\ \mathcal{I}v \\ \Sigma v \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la matrice $\tilde{A}(\mathbf{v})$ requiert 53 opérations.

FIG. A.5 – Détail de la matrice $\tilde{A}(\mathbf{v})$

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice de Roe de la méthode de relaxation modifiée par annulation des valeurs propres associées aux ondes lentes. Il s'agit de la matrice $|\tilde{A}^{Roe}|(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ définie par $|\tilde{A}^{Roe}| = \left(R|\tilde{\Lambda}|L \right)(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ avec $|\tilde{\Lambda}| = \text{Diag}(|v_L - a\tau_L|, 0, 0, 0, |v_R + a\tau_R|)$ et $L = R^{-1}$. La matrice $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ est défini dans le rapport et nous ne rappellerons pas sa définition ici. Nous notons

$$\begin{aligned} \bar{v}_L &= v_L - a\tau_L, & \bar{v}_R &= v_R + a\tau_R, \\ \mathcal{I}_L &= \Pi_L + a^2\tau_L, & \mathcal{I}_R &= \Pi_R + a^2\tau_R, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

ainsi que

$$d = 1/[-v^*(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L) - \bar{v}_L(\Pi^* - \mathcal{I}_R) - \bar{v}_R(\mathcal{I}_L - \Pi^*)]. \quad (\text{A.35})$$

Soient

$$\mathbf{p}_L = d|\bar{v}_L| \begin{pmatrix} 1 \\ Y_L \\ \bar{v}_L \\ \mathcal{I}_L \\ \Sigma_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_R = d|\bar{v}_R| \begin{pmatrix} 1 \\ Y_R \\ \bar{v}_R \\ \mathcal{I}_R \\ \Sigma_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Les colonnes de la matrice $|\tilde{A}^{Roe}| = \left\{ |\tilde{A}_j^{Roe}| \right\}_{j=1,5}$ sont les suivantes.

1. La colonne 1 est donnée par $|\tilde{A}_1^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$ avec $\alpha = \Pi^* \bar{v}_R - v^* \mathcal{I}_R$ et $\beta = v^* \mathcal{I}_L - \Pi^* \bar{v}_L$.
2. La colonne 2 est nulle, i.e., $|\tilde{A}_2^{Roe}| = 0$.
3. La colonne 3 est donnée par $|\tilde{A}_3^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$ avec $\alpha = \mathcal{I}_R - \Pi^*$ et $\beta = \Pi^* - \mathcal{I}_L$.
4. La colonne 4 est donnée par $|\tilde{A}_4^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$ avec $\alpha = v^* - \bar{v}_R$ et $\beta = \bar{v}_L - v^*$.
5. La colonne 5 est nulle, i.e., $|\tilde{A}_5^{Roe}| = 0$.

Le calcul de la matrice $|\tilde{A}^{Roe}|$ requiert 89 opérations.

FIG. A.6 – Détail de la matrice $|\tilde{A}^{Roe}|$

Étape physique : 129 I opérations et 10 I évaluations

Étape mathématique : 458 I opérations et 3 I évaluations

1. étape mathématique 1 : 404 I opérations et 3 I évaluations

2. étape mathématique 2 : 54 I opérations

(a) Réduction du premier membre : 54 I opérations

$$\tilde{\alpha}_i = \mathcal{R}(\alpha_i), \quad \tilde{\beta}_i = \mathcal{R}(\beta_i), \quad \tilde{\gamma}_i = \mathcal{R}(\gamma_i) \quad (\text{A.37})$$

$$\mathcal{R}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{12} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{13} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{15} \\ A_{21} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{22} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{23} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{25} \\ A_{31} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{32} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{33} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{35} \\ A_{51} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{52} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{53} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

(b) Réduction du second membre : **0** opérations

$$\tilde{b}_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^5) \quad (\text{A.39})$$

Résolution du système linéaire : 244 I opérations

FIG. A.7 – Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire réduit (blocs de taille 4, demi-largeur de bande 7)

Étape physique : 1800 I opérations et 16 I évaluations

1. Calcul des flux numériques : 1791
- I
- opérations

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \mathbf{H}(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad i = 0, I \quad (\text{A.40})$$

2. Mise à jour de
- u_i^*
- : 9
- I
- opérations

$$\theta = \Delta t / \Delta x, \quad u_i^* = u_i^n - \theta (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}), \quad i = 1, I \quad (\text{A.41})$$

Il faut noter que le schéma de relaxation utilise un flux numérique à 3 composantes.

Étape mathématique : 513 I opérations

1. Calculs préliminaires : 2 opérations

$$\theta = \Delta t / (2\Delta x), \quad (\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.42})$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

2. Construction du premier membre : 510
- I
- opérations

- (a) Calcul de la matrice de diffusion : 240
- I
- opérations

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\lambda^1, 0, \lambda^3) \quad (\text{A.43})$$

$$|\tilde{A}^\alpha| = R^\alpha K |\tilde{\Lambda}^\alpha| L^\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.44})$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (|\tilde{A}^{\mathbf{L}}| + |\tilde{A}^{\mathbf{R}}|) \quad (\text{A.45})$$

- (b) Calcul des matrices Jacobiennes : 216
- I
- opérations

$$\tilde{A}^\alpha = R^\alpha \tilde{\Lambda}^\alpha L^\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.46})$$

- (c) Calcul des matrices
- α_i
- ,
- β_i
- et
- γ_{i+1}
- : 54
- I
- opérations

$$\tilde{\alpha}_i = \theta (\tilde{A}^{\mathbf{L}} + \tilde{D}), \quad \tilde{\gamma}_{i+1} = \theta (\tilde{A}^{\mathbf{R}} - \tilde{D}), \quad \beta_i = \mathbb{I} + \alpha_i - \gamma_i \quad (\text{A.47})$$

3. Construction du second membre : 3
- I
- opérations

$$b_i = u_i^* - u_i^n \quad (\text{A.48})$$

Résolution du système linéaire : 136 I opérations

FIG. A.8 – Détail du schéma Tacite semi-implicite linéaire (blocs de taille 3, demi-largeur de bande 5)

Publié dans : [10], [4]

Fermetures :

- Thermodynamique : liquide incompressible, gaz parfait, $a_G = 100$ m/s
- Hydrodynamique : glissement nul

Solution : Détente en λ^- . Date finale : $T = 0.8$ s.

Vitesses de propagation : $\lambda_L^- = -40.12$ m/s et $\lambda_R^- = -15.77$ m/s.

États gauche et droit :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 500 \\ 0.2 \\ 34.4233 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 400 \\ 0.2 \\ 50 \end{pmatrix}$$

FIG. A.9 – Détail du cas 1, glissement nul

Publié dans : [26], [10], [4]

Fermetures :

- Thermodynamique : liquide incompressible, gaz parfait, $a_G = 300$ m/s
- Hydrodynamique : Zuber-Findlay, $c_0 = 1.07$, $c_1 = 0.2162$ m/s.

Solution : . Choc-Discontinuité de Contact-Choc Date finale : $T = 0.5$ s.

Vitesses de propagation : $\sigma^- = -40.03$ m/s, $\sigma^0 = 10$ m/s et $\sigma^+ = 67.24$ m/s.

États gauche et droit :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 453.197 \\ 0.00705 \\ 24.8074 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 454.915 \\ 0.0108 \\ 1.7461 \end{pmatrix}$$

FIG. A.10 – Détail du cas 2, Zuber-Findlay

Publié dans : [53], [26]

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 10000 m, horizontal
- Diamètre : 0.146 m
- Pas d'espace : 200 m

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Modèle thermodynamique : liquide compressible, gaz parfait
- Modèle hydrodynamique : glissement nul

Conditions opératoires :

- Durée de stabilisation : 3000 s
- Durée de la rampe : 10 s
- Condition limite amont sur le débit de gaz : 0.2 à 0.4 kg/s
- Condition limite amont sur le débit de liquide : 20 kg/s
- Condition limite aval sur la pression : 10 bars

FIG. A.11 – Détail de l'expérience 1 avec Conditions Limites

Publié dans : [26]

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 80 m, **vertical**
- Diamètre : 0.146 m
- Pas d'espace : 1.6 m

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Modèle thermodynamique : liquide compressible, gaz parfait
- Modèle hydrodynamique : glissement Zuber-Findlay IFP

Conditions opératoires :

- Durée de stabilisation : 10 s
- Durée de la rampe : 100 s
- Condition limite amont sur le débit de gaz : 0.114 à 0. kg/s
- Condition limite amont sur le débit de liquide : 1.628 kg/s
- Condition limite aval sur la pression : 10 bars

FIG. A.12 – Détail de l'expérience 2 avec Conditions Limites

Nous montrons dans ce paragraphe le coût des évaluations des lois de fermeture.

Le calcul le plus élémentaire est celui de la pression : dans le tableau suivant, on indique le coût d'évaluation de la fonction φ en supposant que l'on connaît déjà la pression p . La même remarque vaut pour les dérivées partielles p_X et φ_X ($X = \tau, v, Y, \rho, \chi$ ou q). Notons que le calcul du glissement est plus ou moins complexe selon le type de loi : nous considérons ici le glissement de Zuber-Findlay (historique).

	Incompressible	Compressible
p	7	21
p_X	12	29
φ	16	20
φ_X	35	62

Une fois calculée p et φ , on calcule les fonctions P et σ et leurs dérivées. Le coût dépend alors des dérivées que l'on souhaite obtenir, puisque de nombreuses opérations sont éliminées si on calcule les dérivées de façon groupée.

Dans le cas du schéma de relaxation explicite, on a besoin de $P, \sigma, P_{\tau,v}$ et σ_Y . Le bilan total est donné ci-après.

	Incompressible	Compressible
p	7	21
p_τ	12	29
φ	16	20
$\varphi_{\tau,v,Y}$	3×35	3×62
σ	4	5
$\sigma_{\tau,v,Y}$	24	24
P	2	2
$P_{\tau,v}$	7	7
Total	177	294

Dans le cas du schéma tacite explicite, on a besoin de $P, \sigma, P_{\rho,q,\chi}$ et $\sigma_{\rho,q,\chi}$. Le bilan total est donné ci-après.

	Incompressible	Compressible
p	7	21
$p_{\rho,q,\chi}$	3×12	3×29
φ	16	20
$\varphi_{\rho,q,\chi}$	3×35	3×62
σ	4	5
$\sigma_{\rho,q,\chi}$	24	24
P	2	2
$P_{\rho,q,\chi}$	3×7	3×7
Total	215	366

FIG. A.13 – Détail des coûts des évaluations de base dans le cas de la loi de glissement Zuber-Findlay

Annexe B

Thermodynamique des fluides polyphasiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats relatifs aux caractéristiques thermodynamiques des fluides polyphasiques. En particulier, nous calculons les densités et pressions maximales pour ces fluides. Puis, nous montrons de quelles équations la pression est solution dans le cas d'un mélange gaz-liquide et dans le cas d'un mélange compositionnel à 2 constituants. Dans tous les cas, nous supposons que le gaz est parfait et nous distinguons le cas du liquide compressible de celui du liquide incompressible.

B.1 Caractéristiques thermodynamiques des fluides compressibles

Nous évaluons dans ce paragraphe la pression maximale d'un fluide diphasique compressible.

Nous supposons que le liquide faiblement compressible et le gaz (parfait) sont soumis aux lois

$$\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad \rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2} \quad (\text{B.1})$$

où ρ_L^0, p^0, a_L et a_G sont des constantes données. Nous supposons que $a_G < a_L$. Par ailleurs, nous appellerons liquide incompressible le liquide qui suit la loi $\rho_L(p) = \rho_L^0$.

Considérons les paramètres $\rho_L^0 = 1000$. (kg/m³), $a_L = 500$. (m/s), $a_G = 300$. (m/s), $p^0 = 10^5$ (Pa) et une température fixée à $T = 20$ (°C). Les figures (B.1–B.2) donnent une illustration de la fonction densité définie par $\rho(p, Y) = \frac{1}{\frac{Y}{\rho_G(p)} + \frac{1-Y}{\rho_L(p)}}$ pour $Y = 0.1$ et $Y = 0.5$ dans le cas d'un liquide incompressible, puis dans le cas d'un liquide compressible.

On constate que, pour des pressions faibles, on a bien $\rho_G(p) \leq \rho \leq \rho_L(p)$. Puis les courbes se croisent et même s'inversent au delà d'une pression limite. On peut considérer que cette pression limite est maximale car il est bien évident que nos modèles sont faux au-delà : il est bien connu qu'il faut alors utiliser des modèles plus fins, type Van Der Waals, car les interactions entre molécules sont plus grandes. On vérifie également qu'un fluide compressible permet d'atteindre des densités maximales d'autant plus importantes que le liquide est compressible, c'est à dire d'autant plus que a_L est petit.

– Dans le cas d'un liquide incompressible, la pression et la densité maximale sont

$$\bar{p} = a_G^2 \rho_L^0, \quad \bar{\rho} = \rho_L^0. \quad (\text{B.2})$$

– Dans le cas d'un liquide compressible, on introduit

$$q = 1 - \frac{a_G^2}{a_L^2} \quad (\text{B.3})$$

et la pression et la densité maximale sont

$$\bar{p} = \frac{a_G^2 \left(\rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2} \right)}{q}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2}}{q}. \quad (\text{B.4})$$

On vérifie facilement que $q > 0$ puisque par hypothèse $0 < a_G < a_L$.

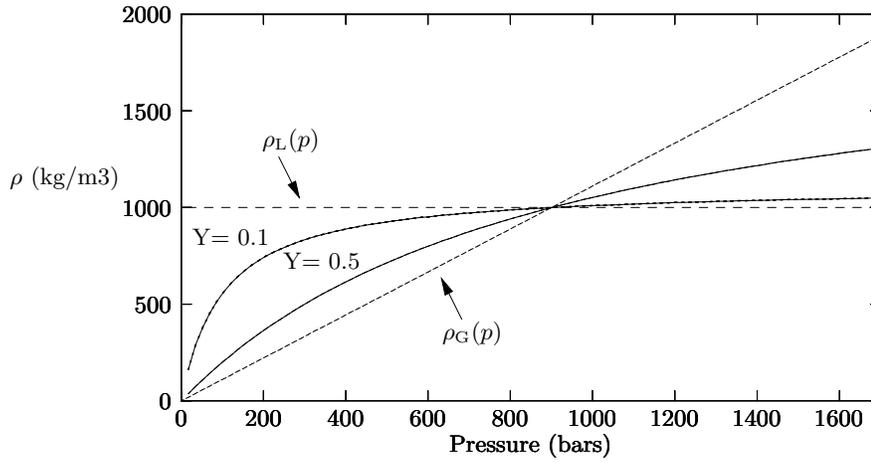


FIG. B.1 – Densité avec un liquide incompressible

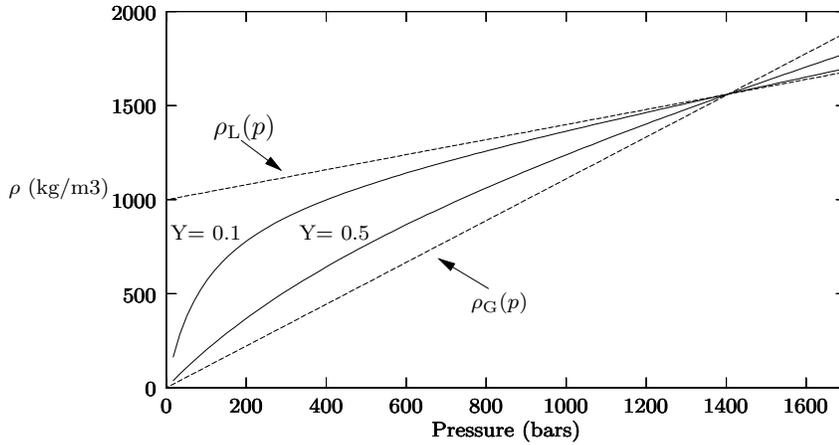


FIG. B.2 – Densité avec un liquide compressible

B.2 Calcul de la pression

Nous détaillons ici le calcul de la pression dans le cas d'un mélange gaz-liquide et dans le cas d'un mélange compositionnel à 2 constituants. Dans tous les cas, la pression est solution d'un polynôme dont le degré varie avec la complexité du modèle : le polynôme est de degré 1 dans le cas simple

du liquide incompressible dans un mélange gaz-liquide et il est de degré 3 dans le cas du liquide compressible d'un mélange de 2 constituants.

Nous constaterons que, dans le cas du modèle gaz-liquide, il est possible de démontrer l'existence de la pression. Par contre, dans le cas du modèle à 2 constituants, nous ne pourrions conclure.

B.2.1 Modèle gaz-liquide

Dans ce paragraphe, nous considérons un mélange diphasique isotherme non compositionnel pour lequel la fraction massique de gaz est calculée en fonction de la pression est la densité par

$$Y(\rho, p) = \frac{\rho_G(p)}{\rho} \frac{\rho_L(p) - \rho}{\rho_L(p) - \rho_G(p)}. \quad (\text{B.5})$$

Nous allons vérifier que dans le cas d'un liquide incompressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 1 tandis que dans le cas d'un liquide compressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 2. Dans les deux cas, nous saurons démontrer l'existence de la pression.

B.2.1.1 Cas du liquide incompressible

Ici, nous calculons la pression dans le cas particulier où $\rho_L(p) = \rho_L^0$. Rappelons que les égalités (B.2) définissent les pression et densités maximales \bar{p} et $\bar{\rho}$. On introduit la notation

$$\theta(\rho) = \frac{\rho_L^0}{\rho} - 1, \quad \rho \in]0, \bar{\rho}]. \quad (\text{B.6})$$

La quantité θ est sans dimension. Il est facile de vérifier que $\theta(\rho) \geq 0$ pour $\rho \in]0, \bar{\rho}]$. On écrit alors la fraction massique de gaz sous la forme

$$Y = \frac{\theta(\rho)p}{\bar{p} - p}. \quad (\text{B.7})$$

On voit alors facilement que la pression est solution de l'équation linéaire

$$\alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\theta(\rho) - Y, \\ \alpha_0 &= Y\bar{p}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

dont la solution est

$$p(\rho, Y) = \frac{Y}{\theta(\rho) + Y} \bar{p}, \quad \rho \in]0, \bar{\rho}], Y \in]0, 1]. \quad (\text{B.10})$$

On vérifie facilement que la pression est physiquement admissible c'est à dire à la fois positive et bien définie (dénominateur non nul) si $\rho \in]0, \bar{\rho}]$ et $Y \in]0, 1]$. Notons que le nombre $\frac{Y}{\theta(\rho) + Y}$ est sans dimension. Pour $Y = 0$ (monophasique liquide), la pression est indéterminée et il est nécessaire d'utiliser un modèle de liquide compressible.

B.2.1.2 Cas du liquide compressible

Dans ce paragraphe, nous considérons un mélange diphasique isotherme non-compositionnel et nous calculons la pression dans le cas général où $\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p-p^0}{a_L^2}$. Rappelons que les égalités (B.4) définissent les pression et densités maximales \bar{p} et $\bar{\rho}$ à l'aide du nombre sans dimension q défini par (B.3). On note désormais

$$\theta(\rho) = \frac{\rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2}}{\rho} - 1, \quad \rho \in]0, \bar{\rho}]. \quad (\text{B.11})$$

Il est facile de vérifier que $\theta(\rho) \geq q - 1$ pour $\rho \in]0, \bar{\rho}].$ On écrit alors la fraction massique de gaz sous la forme

$$Y = \frac{\theta(\rho)p + \frac{p^2}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)}. \quad (\text{B.12})$$

Quelques manipulations algébriques permettent de constater que la pression est solution d'un polynôme de degré 2. Plus précisément, p est solution de

$$\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - qY, \\ \alpha_0 &= qY\bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Il est facile de constater que, comme il a déjà été vu dans [4], le discriminant $\Delta(\rho, Y) = (\theta(\rho) + qY)^2 + 4\frac{\bar{p}}{\rho a_L^2}qY$ est positif. Le polynôme possède donc 2 racines réelles. Comme par ailleurs le produit des racines, qui vaut $-\frac{\bar{p}}{\rho a_L^2}qY$ est négatif, il y a une racine négative et une positive : c'est la dernière qui nous intéresse. La pression vaut

$$p(\rho, Y) = \frac{\rho a_L^2}{2} \left[\theta(\rho) + qY + \sqrt{\Delta} \right] \quad \rho \in]0, \bar{\rho}], \quad \text{si } Y \in [0, 1]. \quad (\text{B.15})$$

B.2.2 Mélange à 2 constituants

Ce paragraphe est un complément du chapitre 9 qui traite du modèle diphasique isotherme à 2 constituants. Dans ce modèle, la fraction massique du premier constituant de gaz est calculée en fonction de la pression est la densité par

$$c_1(\rho, p) = Y(\rho, p)Y_1(p) + X(\rho, p)X_1(p), \quad (\text{B.16})$$

avec Y_1 et X_1 des fonctions données de la pression et X et Y les fractions massiques de chaque phase définies par

$$Y(\rho, p) = \frac{\rho_G(p)}{\rho} \frac{\rho_L(p) - \rho}{\rho_L(p) - \rho_G(p)}, \quad X(\rho, p) = 1 - Y(\rho, p). \quad (\text{B.17})$$

Nous notons

$$\omega = 1 - \frac{p_2^0}{p_1^0}, \quad (\text{B.18})$$

avec p_1^0 et p_2^0 des pressions constantes. Sous l'hypothèse $p_2^0 < p_1^0$, on constate que pour toute température positive, on a $\omega \in]0, 1[$. Il est alors facile d'écrire les fractions massiques du premier constituant sous la forme

$$X_1(p, T) = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0}, \quad Y_1(p, T) = \frac{p - p_2^0}{\omega p}. \quad (\text{B.19})$$

Nous allons voir que, dans le cas d'un liquide incompressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 2 et que dans le cas d'un liquide compressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 3. Dans les deux cas, nous ne saurons conclure à l'existence de la pression.

B.2.2.1 Cas du liquide incompressible

Dans ce paragraphe, nous calculons la pression dans le cas particulier où $\rho_L(p) = \rho_L^0$. On considère ici la définition de $\theta(\rho)$ (B.6) et on écrit la fraction massique de gaz sous la forme (B.7). Il vient alors aisément, par la définition de la fraction massique du premier constituant (9.25), que

$$c_1 = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0} \frac{\bar{p} - (\theta(\rho) + 1)p}{\bar{p} - p} + \frac{p - p_2^0}{\omega} \frac{\theta(\rho)}{\bar{p} - p}. \quad (\text{B.20})$$

Quelques simples manipulations algébriques sur l'égalité précédentes permettent de voir que la pression est racine d'un polynôme de degré 2. Plus précisément, p est solution de

$$\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.21})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\theta(\rho) + 1}{p_1^0}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega c_1 - (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega), \\ \alpha_0 &= \omega c_1 \bar{p} + \theta(\rho) p_2^0 + (1 - \omega) \bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Remarque B.2.1 Cette définition de la pression est satisfaisante car elle dégénère bien vers le cas où $p_1^0 \rightarrow \infty$ et $p_2^0 = 0$, qui correspond au modèle gaz-liquide (non compositionnel). Dans ce cas, il est facile de voir que $\omega = 1$ et $c_1 = Y$. Par ailleurs, le polynôme de degré 2 se simplifie en polynôme de degré 1 ($\alpha_2 = 0$) avec $\alpha_1 = -(\theta(\rho) + Y)$ et $\alpha_0 = Y \bar{p}$. On vérifie donc bien que $p = \frac{Y}{\theta(\rho) + Y} \bar{p}$.

Le discriminant est $\Delta(\rho, c_1) = \alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0$ c'est à dire trouve l'expression

$$\begin{aligned} \Delta(\rho, c_1) &= \left[\theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} + \omega c_1 + (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega) \right]^2 \\ &\quad - 4(\theta(\rho) + 1) \left[\omega c_1 \frac{\bar{p}}{p_1^0} + \left(\theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right) (1 - \omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\Delta(\rho, c_1) = \left[\theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega c_1 - (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega) \right]^2 + 4\omega c_1 \theta(\rho) \left(1 - \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right). \quad (\text{B.24})$$

Il est clair que pour $c_1 = 0$, ce discriminant est positif. Dans les autres cas, on ne peut pas conclure car, dans la pratique, $\left(1 - \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right) < 0$.

B.2.2.2 Cas du liquide compressible

Dans ce paragraphe, nous tentons de trouver de quelle équation la fonction pression est solution dans le cas général où $\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p-p^0}{a_L^2}$. Nous allons voir qu'à $(\rho, \rho c_1)$ fixé, la pression est solution d'un polynôme de degré 3. Nous conservons la même notation pour ω . On considère les notations (B.11) et (B.3). On écrit alors les fractions massiques de gaz sous la forme (B.12). Il vient alors, par la définition de la fraction massique du premier constituant (9.25), que

$$c_1 = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0} \frac{q\bar{p} - (\theta(\rho) + q)p - \frac{p^2}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)} + \frac{p - p_2^0}{\omega} \frac{\theta(\rho) + \frac{p}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)}. \quad (\text{B.25})$$

Quelques simples manipulations algébriques sur l'égalité précédentes permettent de voir que la pression est racine d'un polynôme de degré 3. Plus précisément, p est solution de

$$\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.26})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{p_1^0 \rho a_L^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{\theta(\rho) + q}{p_1^0} - \frac{\omega}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - q \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega q c_1 - (\theta(\rho) + q)(1 - \omega) + \frac{p_2^0}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_0 &= \omega c_1 q \bar{p} + \theta(\rho) p_2^0 + (1 - \omega) q \bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Remarque B.2.2 Cette définition de la pression est satisfaisante car elle dégénère bien vers le cas précédent si $a_L \rightarrow \infty$, c'est à dire si on tend vers un liquide incompressible.

Annexe C

Relaxation par Born-Infeld

Les deux chapitres qui suivent sont consacrés à la méthode de relaxation par le système de Born-Infeld. L'idée de base est de considérer des lois d'évolution sur des paramètres représentant les expressions que prennent, en coordonnées Lagrangiennes, les vitesses du liquide et du gaz (notées ici W et Z).

Ces travaux sont nés de l'impossibilité de traiter le système compositionnel par une méthode de splitting chimique. Pour ce système, il apparaît que les enthalpies spécifiques de chaque phase se transportent, en coordonnées Lagrangiennes, aux vitesses $W = -\frac{\Sigma}{Y}$ et $Z = \frac{\Sigma}{1-Y}$ avec Y la fraction massique de gaz et Σ la variable relaxant la fonction non-linéaire σ . Or la solution d'un problème de Riemann dont les états gauches et droits sont donnés peut ne pas permettre de calculer ces grandeurs (si $Y^* = 0$ ou $Y^* = 1$).

L'idée est alors d'introduire des équations d'évolution supplémentaires sur W et Z de telle sorte qu'ils soient désormais déterminés. Les lois d'évolution ainsi construites font apparaître un système de deux équations aux dérivées partielles, issues des travaux de deux physiciens, M. Born et L. Infeld, parus en 1934 dans [12]. Ce système de lois de conservation est

$$\begin{cases} W_t + ZW_x = 0, \\ Z_t + WZ_x = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Il a été étudié dans [59], pp. 109–113 et dans [64], pp. 617–620. À notre connaissance, c'est la première fois qu'il sert à mettre en évidence une méthode de relaxation. La propriété fondamentale de ce système est qu'il possède des champs linéairement dégénérés. Du point de vue du schéma de relaxation, cette propriété est centrale car elle conduit à un solveur de Godunov de coût réduit. Le système de Born-Infeld est, du point de vue de la relaxation, un système important car il est dit dans [59] que tout système 2×2 dont les champs sont linéairement dégénérés et dont les vitesses de propagation sont sans points critiques peut s'écrire, à un changement de variable près, sous la forme du système de Born-Infeld.

Le plan de l'exposé est le suivant. L'annexe (D) est un article soumis à *Numerische Mathematik* et traite de la méthode dans le cas d'une équation scalaire. Nous verrons dans l'annexe (E) des compléments généralisant des théorèmes de stabilité présentés dans l'article ainsi que des résultats relatifs au système gaz-liquide.

