

# Méthode des éléments finis mixtes multi-échelles pour la simulation d'écoulements en milieux poreux

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Notations et définitions</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>5.2</b>	<b>Application au problème monophasique</b> . . . . .	<b>75</b>
5.2.1	Calcul des fonctions de base . . . . .	75
5.2.2	Passage des variables grossières aux variables fines . . . . .	77
5.2.3	Construction du système grossier . . . . .	77
5.2.4	Estimation <i>a priori</i> . . . . .	79
<b>5.3</b>	<b>Extension au cas diphasique</b> . . . . .	<b>79</b>
5.3.1	Mise à jour des fonctions de base . . . . .	79
5.3.2	Utilisation d'une information globale . . . . .	80
<b>5.4</b>	<b>Présentation des résultats</b> . . . . .	<b>81</b>
5.4.1	Couche 85 du cas SPE10 . . . . .	81
5.4.2	Cas fracturé . . . . .	83

---

Ce chapitre introduit la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles proposée dans [CH02]. Cette méthode est utilisée pour calculer les champs de pression et de vitesse que nous associons à une des méthodes de résolution du problème de transport présentées au chapitre 2. Nous détaillons le principe de cette méthode multi-échelle en deux temps. Nous présentons, tout d'abord, la méthode lorsqu'elle est appliquée à un modèle monophasique. Nous expliquons ensuite son extension au cas diphasique. Finalement, nous présentons les résultats obtenus en les comparant notamment avec les résultats de référence du chapitre 2. Des résultats de performance sont également présentés au chapitre 6.

## 5.1 Notations et définitions

Considérons un maillage donné  $\mathcal{K}_h$  du domaine  $\Omega$ . En appliquant des techniques d'agglomération de mailles  $k \in \mathcal{K}_h$ , il est toujours possible de construire un maillage  $\mathcal{K}_H$  où  $H \gg h$  et tel que  $\mathcal{K}_H$  forme une partition du domaine  $\Omega$  plus grossière que  $\mathcal{K}_h$ . Ainsi, dans notre description géométrique multi-échelle, tout élément  $K \in \mathcal{K}_H$  (respectivement  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$ ) est composé d'éléments  $k \in \mathcal{K}_h$  (respectivement  $\sigma \in \mathcal{F}_h$ ). De plus, on a  $\mathcal{N}_H \subset \mathcal{N}_h$ .

Dans le cadre des méthodes multi-échelles, nous qualifions de *grossiers* les éléments de  $\mathcal{K}_H$  et  $\mathcal{F}_H$  et de *fin* les éléments de  $\mathcal{K}_h$  et  $\mathcal{F}_h$ . Par exemple,  $\mathcal{K}_H$  est appelé maillage *grossier* et  $\mathcal{K}_h$  est le maillage *fin*.

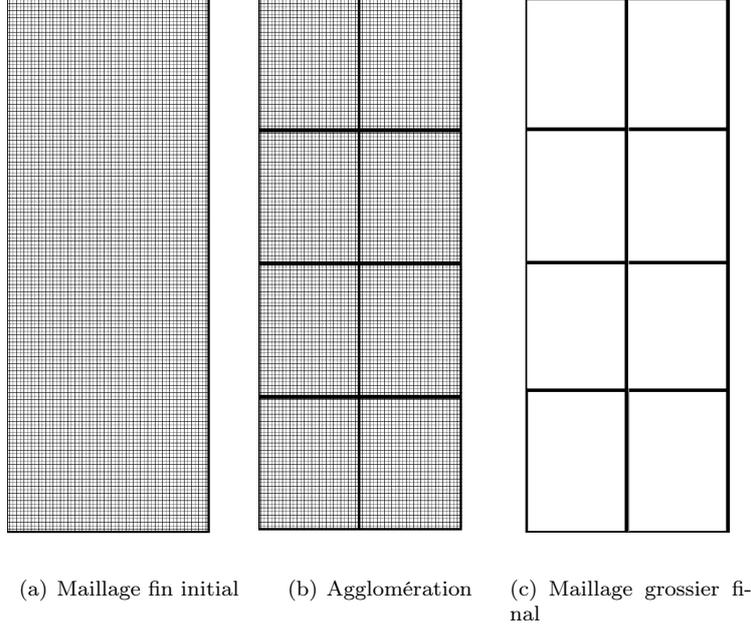


FIGURE 5.1 – Principe de l'agglomération

Dès lors, on note  $\mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}$  l'ensemble des mailles fines  $k \in \mathcal{K}_h$  incluses dans la maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  :

$$\mathcal{K}_{H \rightarrow h, K} = \{k \in \mathcal{K}_h \mid k \subset K\}$$

et  $\mathcal{K}_{h \rightarrow H, k}$  la maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  incluant la maille fine  $k \in \mathcal{K}_h$  :

$$\mathcal{K}_{h \rightarrow H, k} = \{K \in \mathcal{K}_H \mid k \subset K\}.$$

De même, on note  $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}$  l'ensemble des faces fines composant la face grossière  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$  :

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma} = \{\sigma \in \mathcal{F}_h \mid \sigma \subset \Sigma\}$$

et  $\mathcal{F}_{h \rightarrow H, \sigma}$  la face grossière incluant la face fine  $\sigma \in \mathcal{F}_h$  :

$$\mathcal{F}_{h \rightarrow H, \sigma} = \{\Sigma \in \mathcal{F}_H \mid \sigma \subset \Sigma\}.$$

De plus, on note  $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}$  l'ensemble des faces fines composant les mailles fines incluses dans la maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  :

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K} = \{\sigma \in \mathcal{F}_{h, k}, \forall k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}\}.$$

L'ensemble des faces fines composant les faces de bord de la maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  est noté  $\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b$  :

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b = \{\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}, \forall \Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^b\}$$

et l'ensemble des faces internes incluses dans la maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  est :

$$\mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^i = \mathcal{F}_{H \rightarrow h, K} \setminus \mathcal{F}_{H \rightarrow h, K}^b.$$

**Remarque 5.1 :** On se restreint ici aux cas de maillages agglomérés  $\mathcal{K}_H$  cartésiens. Cependant, nos travaux s'appliquent également à des agglomérations non structurées.

Par souci de simplicité, nous introduisons la méthode multi-échelle en considérant un problème d'écoulement monophasique. L'extension au cas diphasique est présentée dans la partie suivante.

## 5.2 Application au problème monophasique

Le système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} v + \lambda \nabla P = 0 \\ \operatorname{div}(v) = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \quad (5.1)$$

où  $v$  est la vitesse et  $\lambda$  s'écrit en fonction de la perméabilité  $k$  et la viscosité  $\mu$  :

$$\lambda = \frac{k}{\mu}.$$

On suppose ici que la viscosité  $\mu$  est constante. On ferme le problème (5.1) en imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P = P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ v \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.2)$$

où la pression  $P_b(x)$  est donnée.

On suppose que l'on dispose d'un maillage fin  $\mathcal{K}_h$  sur lequel la perméabilité  $k$  est donnée, typiquement issue d'un modèle géologique. Comme expliqué précédemment, un maillage grossier  $\mathcal{K}_H$  est construit en agglomérant les mailles de  $\mathcal{K}_h$ .

Dans la suite, on résout le problème (5.1) par une méthode de type éléments finis mixtes multi-échelles. Le but est d'effectuer une résolution sur l'échelle grossière tout en tenant compte des variations des paramètres à l'échelle fine. De manière classique, une méthode aux éléments finis consiste à approcher la solution du problème (5.1) en la décomposant suivant un nombre fini de fonctions de base à partir du maillage grossier  $\mathcal{K}_H$ . Les éléments finis considérés ici sont mixtes, c'est-à-dire que l'on définit des fonctions de base pour la pression sur les mailles  $K \in \mathcal{K}_H$  et des fonctions de base pour la vitesse sur les faces  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$ . Toutefois, la différence fondamentale avec les méthodes éléments finis classiques réside dans le fait que les fonctions de base sont construites à partir des paramètres définis à l'échelle fine. Ainsi, ces fonctions sont calculées numériquement et sont solutions de problèmes discrétisés sur le maillage fin. On désigne respectivement par  $\psi_\Sigma$  et  $\phi_\Sigma$  les vitesses et pressions de base associées à une face  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$ . Dans la suite, nous détaillons le calcul des fonctions de base multi-échelles ainsi que l'assemblage du système grossier.

### 5.2.1 Calcul des fonctions de base

#### Fonctions de base pour les faces internes

Soient  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$  et  $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$ . On note  $K_{1,2} = K_1 \cup K_2$ . On rappelle qu'on a défini au paragraphe 2.2, pour chaque couple  $(K, \Sigma) \in \mathcal{K}_H \times \mathcal{F}_{H,K}$ ,

$$\varepsilon_{\Sigma,K} = \mathbf{n}_{\Sigma,K} \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

Les fonctions de base  $\phi_\Sigma$  et  $\psi_\Sigma$  associées à une face grossière interne  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$  sont définies sur  $K_{1,2}$  comme étant les solutions du système :

$$\begin{cases} \psi_\Sigma = -\lambda \nabla \phi_\Sigma & \text{dans } K_{1,2}, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) = \varepsilon_{\Sigma,K_1} w_1 & \text{dans } K_1, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) = \varepsilon_{\Sigma,K_2} w_2 & \text{dans } K_2, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial K_{1,2}, \end{cases} \quad (5.3)$$

où la normale  $\mathbf{n}$  est supposée sortante au domaine  $K_{1,2}$ . Les fonctions  $w$  sont des fonctions poids de la forme suivante :

$$w_i(x) = \frac{\theta(x)}{\int_{K_i} \theta(y) dy}$$

Dans les tests numériques présentés dans la suite on prend

$$\theta = (\lambda \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

Les fonctions de base  $\phi_\Sigma$  associées à la pression sont définies dans (5.3) à une constante près. En pratique, on impose que ces fonctions de base soient à moyenne nulle et on pondère cette moyenne par  $\lambda$ . La fonction  $\psi_\Sigma$  est telle que son flux à travers  $\Sigma$  est unitaire et orienté suivant  $\mathbf{n}_\Sigma$ .

### Fonctions de base pour les faces de bord

Soient  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$  et  $K \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$ . La fonction de base associée à la face  $\Sigma$  a un support uniquement défini sur la maille  $K$ . Cette fonction vérifie :

$$\begin{cases} \psi_\Sigma &= -\lambda \nabla \phi_\Sigma & \text{dans } K, \\ \operatorname{div}(\psi_\Sigma) &= w & \text{dans } K, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial K \setminus \Sigma, \\ \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} &= w_\Sigma & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ici, la fonction  $w$  est définie par :

$$w(x) = \frac{\theta(x)}{\int_K \theta(y) dy}$$

et

$$w_\Sigma(x) = \frac{\theta(x)}{\int_\Sigma \theta(y) dy}.$$

Nous rappelons que, pour les faces de bord  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^b$ , nous avons défini la normale  $\mathbf{n}_\Sigma$  de façon à ce qu'elle soit orientée vers l'extérieur de  $K$ .

Dans le cas particulier où  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^b \setminus \mathcal{F}_H^D$ , c'est-à-dire pour les faces grossières appartenant au bord du domaine sur lequel une condition de type Neumann homogène a été imposée, la fonction de base  $\psi_\Sigma$  est nulle.

### Bilan

Les systèmes (5.3) et (5.4) sont typiquement résolus en utilisant une discrétisation basée sur le maillage fin  $\mathcal{K}_h$ . Les figures 5.2 et 5.3 montrent comment ces maillages sont définis.

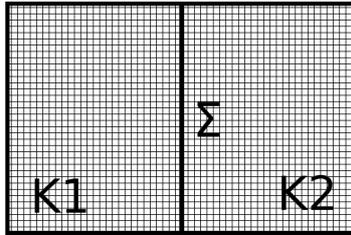


FIGURE 5.2 – Discrétisation locale pour une face interne  $\Sigma$

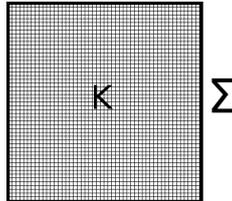


FIGURE 5.3 – Discrétisation locale pour une face de bord  $\Sigma$

Finalement, on construit, par résolution d'un problème (5.3) ou (5.4), une fonction de base par face grossière interne ou incluse sur le bord  $\Gamma_D$ . Ensuite, pour chacune de ces faces  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}$ , les flux  $\psi_{\Sigma,\sigma}$  sont

calculés pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}$  et représentent les valeurs des flux  $\psi_\Sigma$  sur les faces fines. Les flux  $\psi_\Sigma$  vérifient, par construction,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}} \psi_{\Sigma, \sigma} = 1. \quad (5.5)$$

De plus, considérons une maille grossière  $K \in \mathcal{F}_{H, \Sigma}$ . Par construction, les flux sont nuls sur les faces grossières du bord de  $K$  différentes de  $\Sigma$ . Autrement dit, on a :

$$\psi_{\Sigma, \sigma} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma'} \quad \text{où} \quad \Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K} \setminus \{\Sigma\}. \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Passage des variables grossières aux variables fines

La pression  $(p_k)_{k \in \mathcal{K}_h}$  et les flux  $(v_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{F}_h^{iVD}}$  à l'échelle fine sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_\sigma = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}} V_\Sigma \psi_{\Sigma, \sigma}, \\ p_k = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} P_K \mathbb{1}_{\{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}\}} \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $V_\Sigma$  et  $P_K$  sont respectivement les flux et la pression sur le maillage grossier  $\mathcal{K}_H$ .

Nous détaillons au paragraphe suivant comment ces valeurs grossières sont calculées.

### 5.2.3 Construction du système grossier

On considère une maille grossière  $K \in \mathcal{K}_H$  et une face grossière  $\Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^{iVD}$ . On multiplie la première équation du système (5.1) par la restriction à  $K$  de la fonction de base associée à  $\Sigma$  :  $\psi_\Sigma|_K$ . On intègre ensuite cette équation sur la maille  $K$ . Alors

$$\int_K (\lambda^{-1} v) \cdot \psi_\Sigma = - \int_K \nabla P \cdot \psi_\Sigma. \quad (5.8)$$

On utilise alors le fait que la fonction  $\psi_\Sigma$  est nulle sur les faces de la maille  $K$  différentes de  $\Sigma$ . On a donc, par intégration par parties

$$\int_K -\nabla P \cdot \psi_\Sigma = - \int_\Sigma P \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} + \int_K P \operatorname{div}(\psi_\Sigma).$$

Or, par construction des fonctions de base  $\psi_\Sigma$ , on a

$$\int_\Sigma \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} = 1 \quad \text{et} \quad \int_K \operatorname{div}(\psi_\Sigma) = 1.$$

On fait alors les approximations

$$\int_\Sigma P \psi_\Sigma \cdot \mathbf{n} \simeq \Pi_\Sigma \quad \text{et} \quad \int_K P \operatorname{div}(\psi_\Sigma) \simeq P_K$$

où on a noté  $\Pi_\Sigma$  la pression sur la face grossière  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$ . On pose :

$$\begin{aligned} p_k &= P_K & \forall k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K} \\ \text{et} \quad \pi_\sigma &= \Pi_\Sigma & \forall \sigma \in \mathcal{F}_{H \rightarrow h, \Sigma}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

On définit pour une maille  $K \in \mathcal{K}_H$  et une face  $\Sigma \in \mathcal{F}_{H, K}^{iVD}$

$$V_{\Sigma, K} = V_\Sigma \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_{\Sigma, K} = V_\Sigma \varepsilon_{\Sigma, K}.$$

On décompose ensuite  $v$  sur la base des  $(\psi_{\Sigma'})_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}}$ , les flux étant nuls sur les autres faces.

$$v = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} V_{\Sigma'} \psi_{\Sigma'} = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K}^{iVD}} V_{\Sigma', K} \psi_{\Sigma'}|_K.$$

On a donc

$$\int_K (\lambda^{-1}v) \cdot \psi_\Sigma = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} V_{\Sigma',K} \int_K (\lambda^{-1}\psi_{\Sigma'}) \cdot \psi_\Sigma.$$

On note pour toute face  $\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}$

$$\Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}^{-1} = \int_K (\lambda^{-1}\psi_{\Sigma'}) \cdot \psi_\Sigma.$$

L'équation (5.8), s'écrit alors

$$\sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}^{-1} V_{\Sigma',K} = P_K - \Pi_\Sigma. \quad (5.10)$$

On peut ensuite inverser ce système linéaire et on obtient

$$V_{\Sigma,K} = \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} (P_K - \Pi_{\Sigma'}).$$

Pour toute maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , le fluide étant incompressible, nous pouvons écrire la conservation du volume de fluide à l'échelle grossière :

$$\sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}} V_{\Sigma,K} = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} (P_K - \Pi_{\Sigma'}) = 0.$$

Cette équation peut être utilisée pour exprimer les pressions des mailles grossières en fonction des pressions des faces grossières :

$$P_K = \frac{\sum_{\Sigma,\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \Pi_{\Sigma'}}{\sum_{\Sigma,\Sigma' \in \mathcal{F}_{H,K}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'}} = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}} R_{K,\Sigma} \Pi_\Sigma. \quad (5.11)$$

Finalement, pour obtenir les équations du système linéaire, on écrit la continuité des flux sur chaque face interne grossière  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$ , sous la forme :

$$V_{\Sigma,K} = -V_{\Sigma,L}, \quad \text{où } K,L \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}.$$

En utilisant les équations (5.10) et (5.11), cette équation peut se réécrire, pour toute face  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$  avec  $K,L \in \mathcal{K}_{H,\Sigma}$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} R_{K,\Sigma''} \left( \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \right) \Pi_{\Sigma''} - \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{K,\Sigma,\Sigma'} \Pi_{\Sigma'} \\ + \sum_{\Gamma'' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} R_{L,\Gamma''} \left( \sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{L,\Sigma,\Gamma'} \right) \Pi_{\Gamma''} - \sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_H^{iVD}} \Lambda_{L,\Sigma,\Gamma'} \Pi_{\Gamma'} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

De plus, en intégrant le fait que la condition de Dirichlet impose la pression sur les faces  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$ , nous aboutissons, au niveau algébrique, à un système de la forme :

$$A \Pi = B. \quad (5.13)$$

Une fois le système (5.13) résolu, les pressions des mailles grossières se déduisent des pressions sur les faces grossières  $\Pi_\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$  en reprenant l'équation (5.11).

Pour calculer le flux sur une face grossière  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^i$  où  $K, L \in \mathcal{K}_{H, \Sigma}$  deux expressions peuvent être utilisées :

$$\begin{aligned} V_\Sigma &= \varepsilon_{\Sigma, K} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K}^{iVD}} \Lambda_{K, \Sigma, \Sigma'} \left( \sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_{H, K}} R_{K, \Sigma''} \Pi_{\Sigma''} - \Pi_{\Sigma'} \right) \\ &= \varepsilon_{\Sigma, L} \sum_{\Gamma' \in \mathcal{F}_{H, L}^{iVD}} \Lambda_{L, \Sigma, \Gamma'} \left( \sum_{\Gamma'' \in \mathcal{F}_{H, L}} R_{L, \Gamma''} \Pi_{\Gamma''} - \Pi_{\Gamma'} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Pour une face  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^D$  avec  $K \in \mathcal{K}_{H, \Sigma}$ , le flux  $V_\Sigma$  est donné par :

$$V_\Sigma = \varepsilon_{\Sigma, K} \sum_{\Sigma' \in \mathcal{F}_{H, K}^{iVD}} \Lambda_{K, \Sigma, \Sigma'} \left( \sum_{\Sigma'' \in \mathcal{F}_{H, K}} R_{K, \Sigma''} \Pi_{\Sigma''} - \Pi_{\Sigma'} \right). \quad (5.15)$$

Une fois les flux grossiers calculés, les flux fins se déduisent de la formule (5.7).

### 5.2.4 Estimation *a priori*

Z. Chen et T.Y. Hou ont présenté la méthode aux éléments finis mixtes multi-échelles dans [CH02]. Dans cet article, ils détaillent également comment ils peuvent obtenir une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution obtenue avec cette méthode multi-échelle. Pour écrire cette erreur, nous introduisons l'espace

$$H_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^N \mid \operatorname{div}(u) \in L^2(\Omega), u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On lui associe la norme  $\|\cdot\|_{\operatorname{div}, \Omega}$  telle que

$$\forall u \in H_0(\operatorname{div}; \Omega), \quad \|u\|_{\operatorname{div}, \Omega}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|\operatorname{div}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'estimation *a priori* montrée dans l'article [CH02] est la suivante.

**Théorème 5.1.** *On suppose que la mobilité est une fonction localement périodique de période  $\varepsilon > 0$ . On peut alors écrire la mobilité sous la forme  $\lambda(x, \frac{x}{\varepsilon})$ , cette fonction étant  $Y$ -périodique par rapport à sa deuxième variable. On note  $(P_\varepsilon, v_\varepsilon)$  la pression et le flux obtenus en résolvant le problème (5.1) de manière exacte. On suppose que les problèmes (5.3) et (5.4) permettant de définir les fonctions de base multi-échelles sont résolus de manière exacte. Ainsi, au lieu de définir les pressions et les flux par maille ou face fines comme dans (5.7), on construit des fonctions de  $x \in \Omega$*

$$\begin{cases} v_H = \sum_{\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}} V_\Sigma \psi_\Sigma(x), \\ P_H = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} P_K \mathbf{1}_K(x) \end{cases} \quad (5.16)$$

Alors, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$  et  $H$  telle que

$$\|v_\varepsilon - v_H\|_{\operatorname{div}, \Omega} + \|P_\varepsilon - P_H\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( H + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right). \quad (5.17)$$

## 5.3 Extension au cas diphasique

### 5.3.1 Mise à jour des fonctions de base

Afin de résoudre le problème diphasique (2.6) sur le maillage fin  $\mathcal{K}_h$ , on a présenté dans le chapitre 2 des schémas de discrétisation en temps dont le principe est de découpler le calcul de la pression (2.8) de celui des saturations (voir équations (2.9) ou (2.14)). Dans ce chapitre, nous avons vu comment la solution du problème (2.8) pouvait être obtenue par application d'un schéma volumes finis classique.

Dès lors, l'extension au cas diphasique de la méthode présentée dans la partie précédente consiste à appliquer l'un de ces schémas de résolution IMPES ou IMPIMS en substituant le schéma de résolution du problème en pression (2.8) par la méthode multi-échelle. En effet, la différence entre le problème (5.1) et les deux premières équations du problème (2.6) est simplement la dépendance de la mobilité totale à la saturation du fluide. Ainsi, il convient de considérer  $\lambda \equiv k \lambda_T$  pour appliquer strictement la même stratégie de résolution multi-échelle au problème en pression du cas diphasique. Les flux sont calculés sur le maillage grossier  $\mathcal{K}_H$  puis mis à l'échelle sur le maillage  $\mathcal{K}_h$ . L'évolution de la saturation au cours du temps est obtenue en utilisant les flux fins issus du calcul multi-échelle. Ce calcul peut être fait de manière explicite par l'application de (2.11) ou de manière implicite en résolvant l'équation (2.15)

Toutefois, la dépendance en saturation de la mobilité implique également une dépendance en saturation des fonctions de base. Ainsi, les fonctions de base doivent être recalculées dès que la saturation varie, c'est-à-dire à chaque pas de temps. Ce calcul de mise à jour peut s'avérer très coûteux. Or, les variations de la saturation sont souvent localisées dans une partie du domaine. Ainsi, pour éviter de mettre à jour toutes les fonctions de base à chaque itération en temps, on propose d'introduire la variable :

$$(D_{\lambda_T}^n)_k = \frac{\lambda_T (S_k^n)}{\lambda_T (S_k^{last})},$$

où pour une maille  $k \in \mathcal{K}_h$ , on note  $S_k^{last}$  les saturations fines calculées lors de la dernière mise à jour des fonctions de base. On se fixe un seuil  $\varepsilon_{tol}$  et pour chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , on recalcule toutes les fonctions de bases  $\psi_\Sigma, \phi_\Sigma$  pour  $\Sigma \in \mathcal{F}_{H,K}^{iVD}$  si

$$\max_{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}} (D_{\lambda_T}^n)_k > 1 + \varepsilon_{tol} \quad \text{ou} \quad \min_{k \in \mathcal{K}_{H \rightarrow h, K}} (D_{\lambda_T}^n)_k < \frac{1}{1 + \varepsilon_{tol}}.$$

Dans ce cas, on remet à jour les saturations dans le calcul des fonctions de base  $\phi_\Sigma$  et  $\psi_\Sigma$  uniquement dans les mailles vérifiant une de ces conditions. En pratique, on constate un réel gain de temps de calcul à bénéficier de cette mise à jour localisée des fonctions de base par rapport aux variations de saturation.

### 5.3.2 Utilisation d'une information globale

La méthode multi-échelle présentée jusqu'à présent fait intervenir uniquement des informations locales pour le calcul des fonctions de base. Cependant, cela peut ne pas être suffisant pour bien décrire l'écoulement. En particulier, si les propriétés varient également à une échelle de l'ordre de la résolution du maillage grossier une erreur de résonance va affecter la solution obtenue avec notre méthode (voir inégalité (5.17) et remarques 4.3). On cherche donc à incorporer une information fine globale au calcul des fonctions de base multi-échelles. La méthode que l'on va appliquer est présentée au paragraphe 4.2.1 de l'ouvrage [EH09].

Cette méthode consiste en fait à résoudre sur le maillage fin le problème monophasique (5.1). La résolution numérique de ce problème nous permet d'obtenir la vitesse de Darcy dans le cas monophasique :  $v^{mono}$ . On définit alors les fonctions de base sur des couples face/maille en utilisant cette vitesse pour pondérer la vitesse de base sur la face grossière à laquelle elle est associée. Ainsi, pour une face  $\Sigma \in \mathcal{F}_H^{iVD}$  et une maille  $K$  ayant  $\Sigma$  pour face, on définit la fonction de base  $\psi_{K,\Sigma}$  par

$$\begin{cases} \psi_{K,\Sigma} &= -k \lambda_T \nabla \phi_{K,\Sigma} & \text{dans } K, \\ \text{div}(\psi_{K,\Sigma}) &= \varepsilon_{\Sigma,K} w & \text{dans } K, \\ \psi_{K,\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial K \setminus \Sigma, \\ \psi_{K,\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \frac{v^{mono}(x) \cdot \mathbf{n}}{\int_\Sigma v^{mono} \cdot \mathbf{n}} & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (5.18)$$

On rappelle que  $\varepsilon_{\Sigma,K} = \mathbf{n}_{\Sigma,K} \cdot \mathbf{n}_\Sigma$ . Comme pour le système (5.3),  $w$  est la fonction poids :

$$w(x) = \frac{\theta(x)}{\int_K \theta(y) dy},$$

comme pour le cas monophasique, on choisit

$$\theta = (\lambda_T \mathbf{n}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_\Sigma.$$

La fonction  $\psi_{K,\Sigma}$  est telle que son flux à travers  $\Sigma$  est unitaire et orienté suivant  $\mathbf{n}_\Sigma$ . Pour une face interne, la fonction  $\psi_{K,\Sigma}$  peut être assimilée à la restriction de la fonction de base  $\psi_\Sigma$  définie par (5.3) à la maille  $K$ . La différence importante entre les systèmes (5.3) et (5.18) vient de la condition imposée sur  $\Sigma$ . Le flux total à travers  $\Sigma$  est unitaire dans les deux cas mais la répartition de ce flux sur chaque face fine dépend dans (5.18) de l'écoulement monophasique global dans le milieu poreux.

## 5.4 Présentation des résultats

On présente dans cette partie les résultats obtenus avec le schéma *IMPIMS* intégrant la méthode multi-échelle présentée dans ce chapitre. Ces résultats sont présentés pour différentes tailles de maillage grossier et comparés à ceux obtenus au paragraphe 2.5.2.

### 5.4.1 Couche 85 du cas SPE10

Dans ce paragraphe, on observe la solution obtenue lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 25% du volume poreux total.

La figure 5.4 montre le champ de pression obtenu dans le cas fin ainsi que celui obtenu avec une simulation multi-échelle comprenant 12 mailles grossières en  $x$  et 44 mailles grossières en  $y$ .

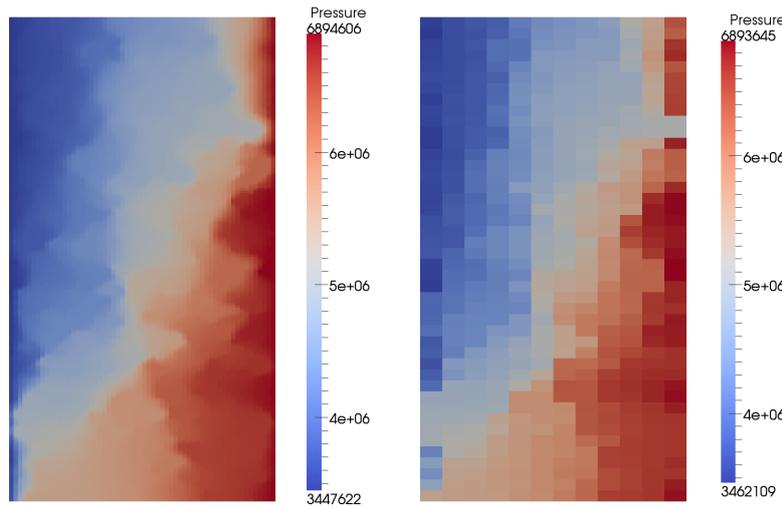


FIGURE 5.4 – Comparaison des pressions obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle en utilisant un maillage grossier  $12 \times 44$

Sur la figure 5.5 les champs de saturation obtenus avec deux maillages grossiers sont comparés avec le champ de saturation obtenu avec un solveur fin et présenté dans le paragraphe 2.5.2. Les différents champs de saturation obtenus avec la méthode multi-échelle sont également comparées numériquement à la solution fine en utilisant la norme  $L^2$  dans le tableau 5.1. Dans ce tableau, nous désignons par *LocalAlways* la solution calculée en mettant à jour toutes les fonctions de base après chaque pas de temps. *Local70* représente la solution obtenue si on choisit comme critère de mise à jour des fonctions de base  $\varepsilon_{tol} = 0,7$  (voir paragraphe 5.3.1). *GlobalAlways* et *Global70* sont les solutions obtenues en utilisant une information globale pour calculer les fonctions de base multi-échelles (voir paragraphe 5.3.2). Les résultats obtenus avec la méthode multi-échelle sont assez proches de ceux obtenus avec une résolution fine. On remarque également que l'augmentation du nombre de mailles grossières améliore la précision de la solution multi-échelle par rapport à la solution fine. Ce résultat logique traduit l'augmentation de la précision de la méthode considérant un maillage grossier  $\mathcal{K}_H$  lorsque  $H$  décroît. La figure 5.6 présente les saturations obtenues avec les différentes méthodes pour un maillage grossier  $4 \times 4$ .

On vérifie également que la prise en compte d'une information globale améliore la qualité de la solution. De plus, on constate que la mise à jour partielle des fonctions de base n'augmente que faiblement l'erreur.

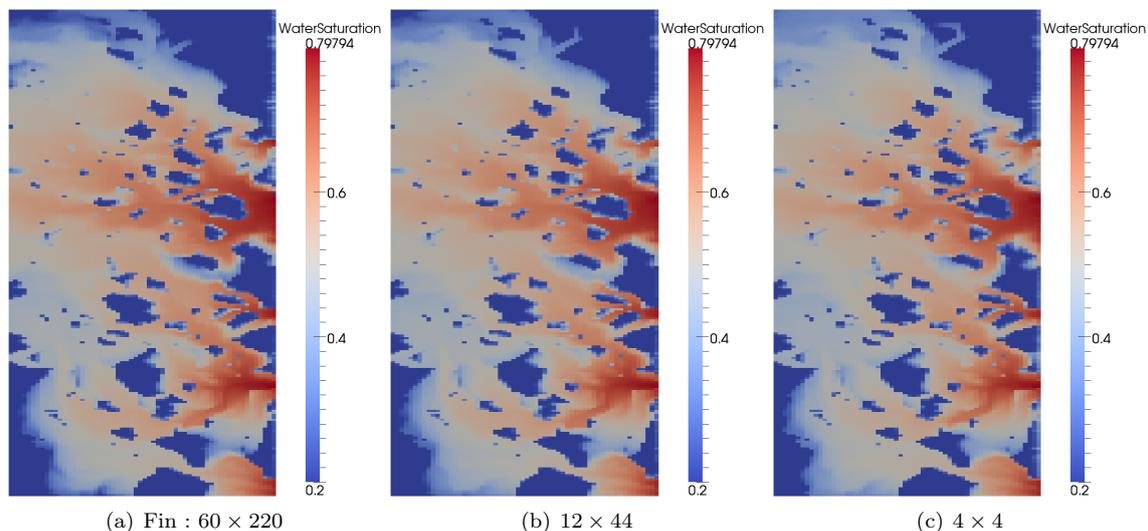


FIGURE 5.5 – Comparaison des saturations obtenues avec les solveurs fin et multi-échelle *Global70* pour plusieurs maillages grossiers

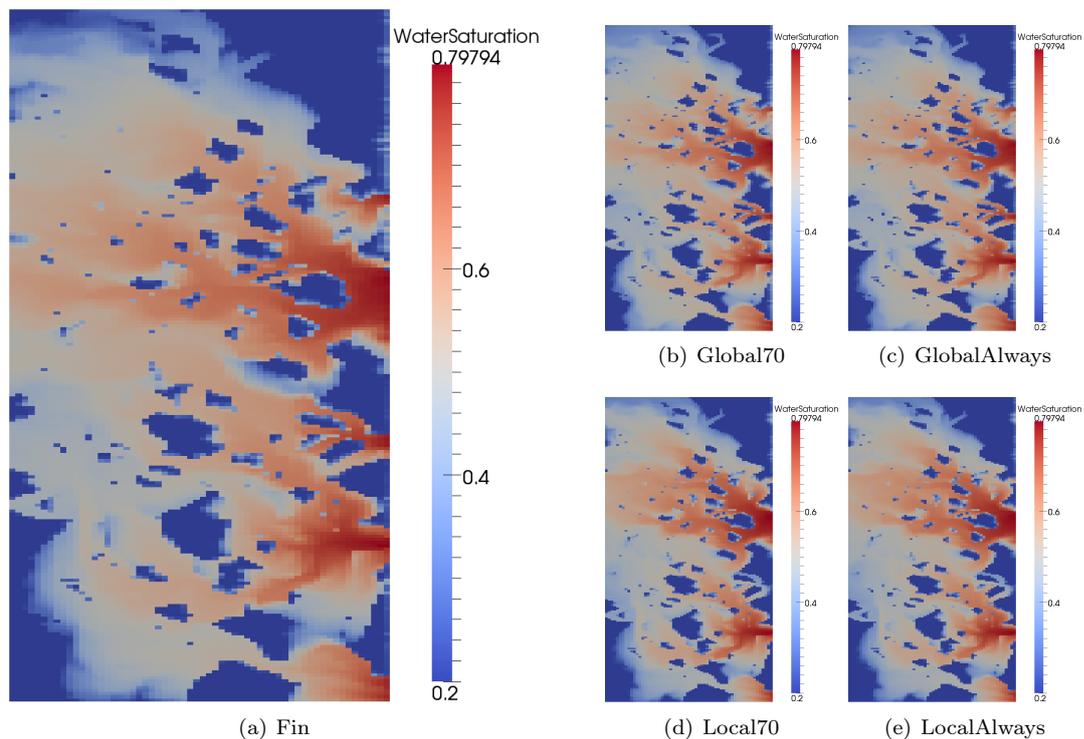


FIGURE 5.6 – Comparaison des saturations obtenues avec les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier  $4 \times 4$

Ces résultats permettent de vérifier que la méthode mise en place dans ce chapitre permet d'obtenir une bonne approximation de la solution de notre problème d'écoulement.

Résolution	$4 \times 4$	$12 \times 20$	$12 \times 44$	$6 \times 20$	$6 \times 10$
LocalAlways	10,47%	8,05%	7,52%	7,02%	8,79%
Local70	10,66%	8,13%	7,37%	7,08%	8,68%
GlobalAlways	6,07%	4,14%	3,16%	4,53%	5,09%
Global70	6,21%	4,39%	3,71%	4,77%	5,24%

TABLE 5.1 – Ecarts relatifs en norme  $L^2$  entre le champ de saturation obtenu avec une résolution fine et celui obtenu pour différents cas multi-échelles

### 5.4.2 Cas fracturé

Le cas fracturé présenté au paragraphe 2.5.2 est beaucoup plus hétérogène que la couche 85 du cas SPE 10. Les hétérogénéités présentes dans le champ de perméabilité sont de tailles très variées. La prise en compte d'une information globale lors du calcul des fonctions de base a une influence très importante dans ce cas comme nous pouvons le constater sur la figure 5.7.

Le tableau 5.2 confirme cette observation.

Résolution	$10 \times 10$	$20 \times 10$	$10 \times 5$	$10 \times 20$	$20 \times 20$
LocalAlways	18,70%	8,05%	7,52%	7,02%	8,79%
Local70	18,08%	8,13%	7,37%	7,08%	8,68%
GlobalAlways	5,13%	4,14%	3,16%	4,53%	5,09%
Global70	5,69%	4,39%	3,71%	4,77%	5,24%

TABLE 5.2 – Ecarts relatifs en norme  $L^2$  entre le champ de saturation obtenu avec une résolution fine et celui obtenu pour différents cas multi-échelles

D'autres résultats s'intéressant plus particulièrement à la performance de cette méthode en temps de calcul sont présentés au chapitre 6.

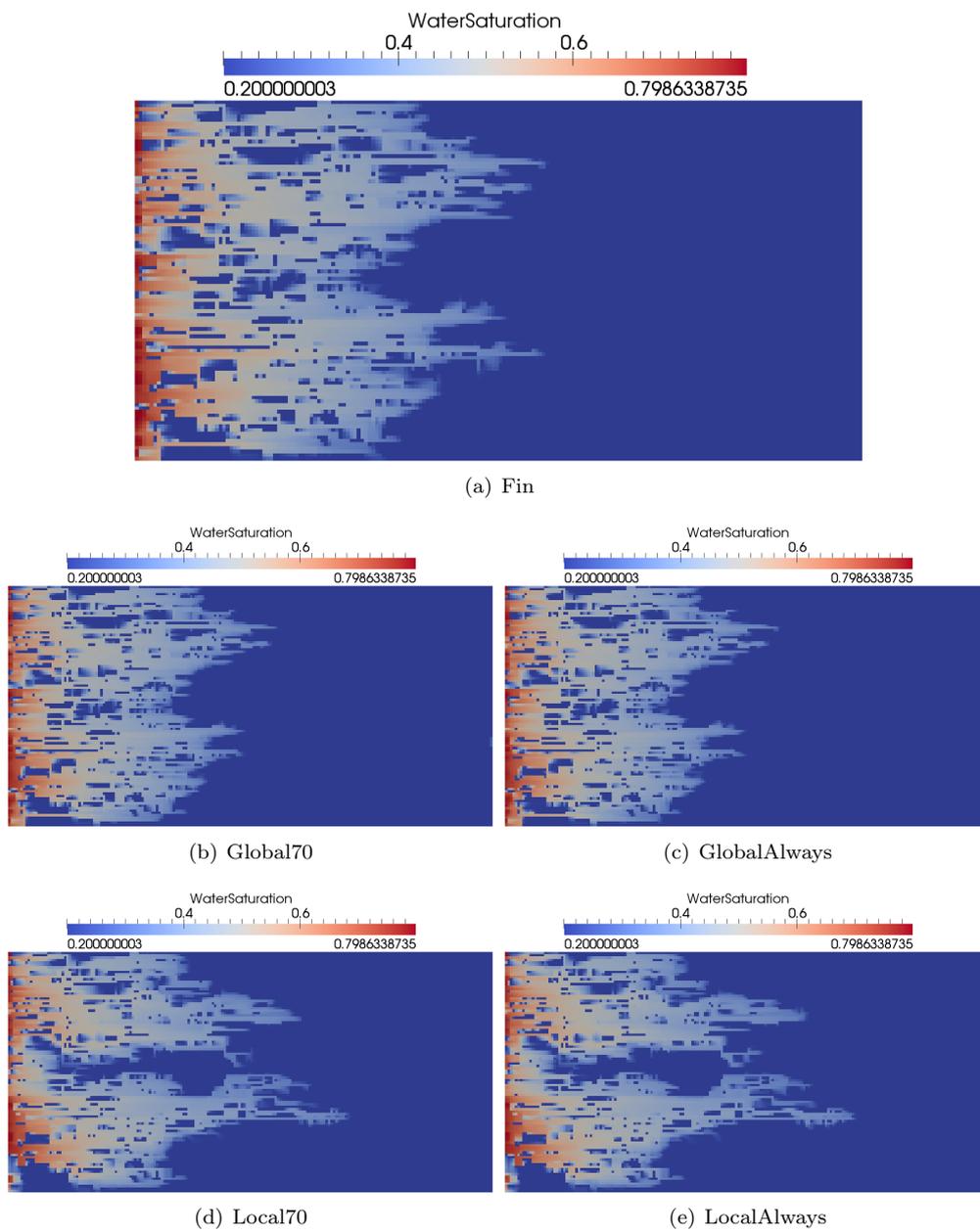


FIGURE 5.7 – Comparaison des saturations obtenues les différents solveurs multi-échelles pour un maillage grossier  $10 \times 10$