

---

## Caractérisation d'un réseau résonnant d'ordre zéro

Dans le paragraphe 3.1 du chapitre 3, nous avons démontré que le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant (voir fig. 4.1) en fonction de la fréquence spatiale  $k$  pouvait s'écrire sous la forme :

$$r(k) = r_0 + \frac{a_k}{(k - \beta) - j\alpha} \quad (4.1)$$

où  $r_0$  est assimilable à la réflexion de Fresnel,  $a_k$  une constante complexe représentative du couplage et découplage entre l'onde incidente, le mode et l'onde réfléchi,  $\beta$  la constante de propagation du mode et  $\alpha$  le coefficient de radiation du réseau résonnant.

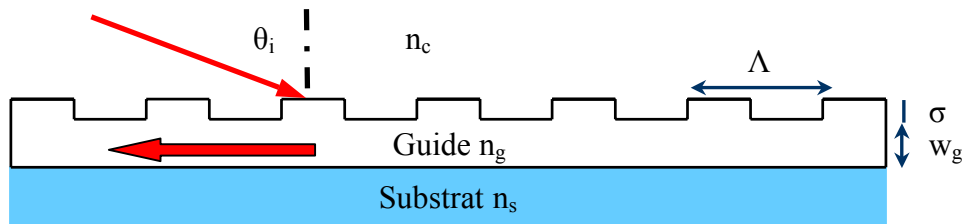


Figure 4.1 : schéma de rappel du réseau résonnant et des notations utilisées.

L'étude mathématique de la fonction (4.1) développée dans le paragraphe 3.2 du chapitre 3 a permis de constater que sa représentation graphique dans le plan complexe est un cercle de rayon

$R = \frac{|a_k|}{2\alpha}$  centré sur le point  $C = r_0 - j\frac{a_k}{\alpha}$ . Cependant, la fréquence spatiale n'est pas le paramètre physique le plus intéressant en vue d'une application. La réponse est le plus souvent souhaitée en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_i$ , du pas du réseau  $\Lambda$  ou encore de la longueur d'onde  $\lambda$ . Il est donc intéressant d'étudier la réponse d'un réseau résonnant suivant ces paramètres. La section suivante vise à exprimer le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant en fonction de ceux-ci afin d'obtenir directement la réponse spectrale ou angulaire d'une telle structure.

## 4.1 Expression du coefficient de réflexion en d'autres paramètres

### *a. Coefficient de réflexion suivant le pas du réseau*

Cette étude est en quelque sorte un exercice de style puisqu'il est expérimentalement difficile de faire varier le pas du réseau. Le principe est simple puisque la configuration équivalente du guide d'onde n'est pas modifiée suivant une variation du pas du réseau. En effet, l'indice effectif  $n_e$  ainsi que l'épaisseur équivalente  $w_{eq}$  restent constantes. L'angle d'incidence  $\theta_0$  est donc considéré fixe dans ce cas là, tout comme la longueur d'onde  $\lambda_0$ . La condition de synchronisme sera donc obtenue pour un pas de réseau défini  $\Lambda_0$ .

Nous considérerons ici que le coefficient de rayonnement  $\alpha$  est constant sur la plage de pas de réseau étudiée. En réalité les conditions d'interférences entre l'onde directement diffractée dans le milieu adjacent au réseau et l'onde diffractée en direction de l'autre milieu semi-infini et réfléchi par l'interface opposée du guide d'onde varieront légèrement avec la direction des ordres diffractés ce qui aura pour effet de faire varier  $\alpha$ . Cependant, cette variation peut être négligée.

Ecrire le coefficient de réflexion en fonction du pas du réseau revient donc tout simplement à remplacer dans l'expression (4.1) du coefficient de réflexion la fréquence spatiale  $k$  par l'expression (3.13) obtenue à partir de la formule des réseaux dans le chapitre 3. On obtient donc :

$$r(\Lambda) = r_0 + \frac{a_k}{\left( \left( \frac{2\pi n_c \sin \theta_0}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\Lambda} \right) - \left( \frac{2\pi n_c \sin \theta_0}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} \right) \right) - j\alpha}$$

Soit en simplifiant :

$$r(\Lambda) = r_0 + \frac{a_k}{-2\pi \left( \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda_0} \right) - j\alpha}$$

Maintenant en considérant que la résonance est localisée, c'est à dire que  $\Lambda \Lambda_0 \sim \Lambda_0^2$ , on peut réécrire cette dernière sous la forme :

$$r(\Lambda) = r_0 + \frac{a_k}{-\frac{2\pi}{\Lambda_0^2}(\Lambda_0 - \Lambda) - j\alpha} = r_0 + \frac{\Lambda_0^2 a_k / 2\pi}{(\Lambda - \Lambda_0) - j \frac{\Lambda_0^2 \alpha}{2\pi}} \quad (4.2)$$

Le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant en fonction du pas du réseau pourra se mettre sous la forme :

$$r(\Lambda) = r_0 + \frac{a_\Lambda}{(\Lambda - \Lambda_0) - j\Delta\Lambda} \quad (4.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_\Lambda &= \frac{\Lambda_0^2 a_k}{2\pi} \\ \Delta\Lambda &= \frac{\Lambda_0^2 \alpha}{2\pi} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ainsi, les paramètres phénoménologiques suivant le pas du réseau  $\Lambda$  sont liés par les expressions (4.4) aux paramètres phénoménologiques suivant la fréquence spatiale  $k$ . Du point de vue de la représentation dans le plan complexe, le coefficient de réflexion sera un cercle identique au cercle en  $k$  puisqu'un simple changement de variable a été effectué. Par analogie à l'étude mathématique de la fonction  $r(k)$ , on vérifie également que le rayon du cercle obtenu est le même ainsi que son centre :

$$R = \frac{|a_\Lambda|}{\Delta\Lambda} = \frac{|a_k|}{\alpha}$$

$$C = r_0 + j \frac{a_\Lambda}{\Delta\Lambda} = r_0 + j \frac{a_k}{\alpha}$$

### *b. Coefficient de réflexion suivant l'angle d'incidence*

Cette étude est expérimentalement justifiée puisque certaines applications des réseaux résonnants sont basées sur leurs réponses angulaires. On étudie la variation du coefficient de réflexion d'un réseau résonnant en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_i$ . Le principe est le même que précédemment puisque la configuration équivalente du guide d'onde n'est pas modifiée suivant une variation de l'angle d'incidence. En effet, l'indice effectif  $n_e$  ainsi que l'épaisseur équivalente  $w_{eq}$  restent les mêmes. Cette fois-ci, le pas du réseau  $\Lambda_0$  est fixe, tout comme la longueur d'onde  $\lambda_0$ . La condition de synchronisme sera donc obtenue pour un angle d'incidence défini  $\theta_0$ .

Nous considérerons ici encore que le coefficient de rayonnement  $\alpha$  est constant sur la plage angulaire étudiée. En réalité les conditions d'interférences varieront légèrement avec la direction des ordres diffractés ce qui aura pour effet de faire varier  $\alpha$ .

Ecrire le coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence revient tout simplement à remplacer la fréquence spatiale  $k$  par l'expression (3.13) dans l'expression (4.1) du coefficient de réflexion. On obtient :

$$r(\theta_i) = r_0 + \frac{a_k}{\left( \left( \frac{2\pi n_c \sin \theta_i}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} \right) - \left( \frac{2\pi n_c \sin \theta_0}{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} \right) \right) - j\alpha}$$

Soit en simplifiant :

$$r(\theta_i) = r_0 + \frac{a_k}{\frac{2\pi n_c}{\lambda_0} (\sin \theta_i - \sin \theta_0) - j\alpha}$$

Maintenant en considérant que la résonance est localisée, on peut exprimer la fonction  $\sin \theta_i$  par son développement en série de Taylor du premier ordre au voisinage de la résonance  $\theta_0$ . La fonction  $\sin \theta_i$  peut alors être remplacée par  $\sin \theta_0 + (\theta_i - \theta_0) \cdot \cos \theta_0$ . L'expression précédente du coefficient de réflexion peut se réécrire sous la forme :

$$r(\theta_i) = r_0 + \frac{a_k}{\frac{2\pi n_c \cos \theta_0}{\lambda_0} (\theta_i - \theta_0) - j\alpha} = r_0 + \frac{\lambda_0 a_k / 2\pi n_c \cos \theta_0}{(\theta_i - \theta_0) - j \frac{\lambda_0 \alpha}{2\pi n_c \cos \theta_0}} \quad (4.5)$$

Finalement, le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_i$  deviendra :

$$r(\theta_i) = r_0 + \frac{a_\theta}{(\theta_i - \theta_0) - j\Delta\theta} \quad (4.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_\theta &= \frac{\lambda_0 a_k}{2\pi n_c \cos \theta_0} \\ \Delta\theta &= \frac{\lambda_0 \alpha}{2\pi n_c \cos \theta_0} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Une attention toute particulière sera faite lors de ces calculs. La largeur angulaire de résonance doit être exprimée en radians afin que ces formules soient vérifiées.

En conséquence, les paramètres phénoménologiques suivant l'angle d'incidence  $\theta_i$  sont liés par les expressions (4.7) aux paramètres phénoménologiques suivant la fréquence spatiale  $k$ . Du point de vue d'une représentation dans le plan complexe, puisqu'un simple changement de variable a été effectué, le coefficient de réflexion sera un cercle identique au cercle en  $k$ . Par analogie à l'étude mathématique de la fonction  $r(k)$ , on vérifie que le rayon et le centre du cercle obtenus sont inchangés :

$$\begin{aligned} R &= \frac{|a_\theta|}{\Delta\theta} = \frac{|a_k|}{\alpha} \\ C &= r_0 + j \frac{a_\theta}{\Delta\theta} = r_0 + j \frac{a_k}{\alpha} \end{aligned}$$

### *c. Coefficient de réflexion suivant la longueur d'onde*

Ici encore cette étude est justifiée : grand nombre d'applications à base de réseaux résonnants utilise la réponse spectrale. Dans notre application à la mise en forme temporelle d'impulsions lasers femtosecondes, il est primordial de connaître cette réponse spectrale, notamment la largeur de résonance  $\Delta\lambda$  comme nous le verrons dans le chapitre 6. Le problème est ici un peu plus complexe que dans les deux cas précédents. En effet, lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  varie, la fréquence spatiale  $k$  varie mais l'indice effectif du guide aussi. Il n'est donc pas physiquement juste d'exprimer uniquement le coefficient de réflexion en remplaçant la fréquence spatiale par l'expression (3.13) en terme de longueur d'onde.

Pour démontrer le lien entre les paramètres phénoménologiques en terme de fréquence spatiale  $k$  et de longueur d'onde  $\lambda$ , l'approche via l'optique guidée est également nécessaire. La largeur de résonance en terme de fréquence spatiale sera la somme de deux contributions : une partie liée à la fréquence spatiale variant avec la longueur d'onde et une partie liée à la variation de la configuration du guide d'onde. L'équation de dispersion d'un guide d'onde plan (2.7) rappelée dans le chapitre 2 est alors employée pour déterminer la largeur spectrale  $\Delta\lambda$ . Nous allons calculer la variation de la constante de propagation  $\beta$  en fonction d'une variation élémentaire de longueur d'onde. Celle-ci dépend de deux quantités, soit :

$$\delta\beta = \left( \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \delta\lambda \quad (4.8)$$

Dans les deux cas, la variation élémentaire est définie comme étant deux fois la largeur de résonance, soit  $\delta\beta = 2\alpha$  et  $\delta\lambda = 2\Delta\lambda$ . L'expression (4.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha = \left( \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \Delta\lambda \quad (4.9)$$

Le paragraphe suivant est dédié aux détails des calculs menant à l'expression de la largeur spectrale de résonance en fonction du coefficient de radiation  $\alpha$ . Le lecteur pourra directement passer à l'équation (4.13) s'il ne souhaite pas s'encombrer des détails du calcul.

Il convient donc de prendre en compte la largeur spectrale induite par la variation de la constante de propagation due à la variation de fréquence spatiale, tout comme dans les deux cas précédents (en fonction de  $\theta_i$  et  $\Lambda$ ). On trouve que :

$$\left( \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{-2\pi n_c \sin \theta_0}{\lambda_0^2} \quad (4.10)$$

La variation de la constante de propagation due à la variation de la configuration du guide d'onde est également prise en compte. Pour ce faire, rappelons que  $k_0 = 2\pi/\lambda$ . On peut en déduire :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \beta}{\partial k_0} \frac{\partial k_0}{\partial \lambda}$$

Etant donnée la relation  $\beta = n_c k_0$  ou  $n_c$  représente l'indice effectif du mode guidé, on peut développer cette dernière expression :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = \frac{\partial (n_e k_0)}{\partial k_0} \frac{\partial k_0}{\partial \lambda} = \frac{-2\pi}{\lambda^2} \left( n_e + k_0 \frac{\partial n_e}{\partial k_0} \right) \quad (4.11)$$

Exprimons maintenant  $k_0$  à partir de l'équation de dispersion généralisée pour toute polarisation :

$$k_0 = \frac{1}{w_{eq} \sqrt{n_g^2 - n_e^2}} \left[ \arctan \left( p_s \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( p_c \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + q\pi \right] \quad (4.12)$$

où  $q$  est le mode considéré et où le paramètre de polarisation  $p_i$  prend les valeurs  $p_i = 1$  pour une polarisation transverse électrique et  $p_i = n_g^2/n_i^2$  pour une polarisation transverse magnétique. En partant du fait que la dérivée des termes en arctangentes par rapport à l'indice effectif  $n_e$  valent :

$$\frac{\partial \arctan_i}{\partial n_e} = \frac{p_i n_e (n_g^2 - n_i^2)}{(n_g^2 - p_i n_i^2) + (p_i - 1) n_e^2} \sqrt{\frac{n_g^2 - n_e^2}{n_e^2 - n_i^2}},$$

la dérivée de  $k_0$  par rapport à l'indice effectif s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_0}{\partial n_e} = & \frac{1}{w_{eq} \sqrt{n_g^2 - n_e^2}} \left[ \frac{p_c n_e (n_g^2 - n_c^2)}{(n_g^2 - p_c n_c^2) + (p_c - 1) n_e^2} \sqrt{\frac{n_g^2 - n_e^2}{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{p_s n_e (n_g^2 - n_s^2)}{(n_g^2 - p_s n_s^2) + (p_s - 1) n_e^2} \sqrt{\frac{n_g^2 - n_e^2}{n_e^2 - n_s^2}} \right] \\ & + \frac{n_e}{w_{eq} \sqrt{n_g^2 - n_e^2}^3} \left[ \arctan \left( p_s \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( p_c \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + m\pi \right] \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière dans l'expression (4.11), on obtient :

$$\left. \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = \frac{-2\pi}{\lambda_0^2} \left[ n_e + \frac{2\pi w_{eq}}{\lambda_0} \left/ \left\{ \frac{p_c n_e (n_g^2 - n_c^2)}{[(n_g^2 - p_c n_c^2) + (p_c - 1) n_e^2] \sqrt{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{p_s n_e (n_g^2 - n_s^2)}{[(n_g^2 - p_s n_s^2) + (p_s - 1) n_e^2] \sqrt{n_e^2 - n_s^2}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{n_e}{\sqrt{n_g^2 - n_e^2}^3} \left[ \arctan \left( p_s \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( p_c \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + m\pi \right] \right\} \right] \right]$$

Lorsque le mode fondamental est excité ( $m=0$ ), la largeur spectrale  $\Delta\lambda$  suivant la polarisation TE ou TM de l'onde s'écrit d'après l'expression (4.9) :

$$\begin{aligned}
 \Delta\lambda_{TE} &= \frac{-\alpha\lambda_0^2}{2\pi \left[ n_c \sin \theta_0 + n_e + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{w_{eq}}{\frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 - n_s^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_g^2 - n_e^2}}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) \right] \right]} \\
 \Delta\lambda_{TM} &= \frac{-\alpha\lambda_0^2}{2\pi \left[ n_c \sin \theta_0 + n_e + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{w_{eq}}{\frac{n_g^2}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{n_g^2}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_s^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_g^2 - n_e^2}}} \left[ \arctan \left( \frac{n_g^2}{n_s^2} \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( \frac{n_g^2}{n_c^2} \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) \right] \right]}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ainsi, il existe un lien de proportionnalité entre la largeur de résonance spectrale  $\Delta\lambda$  et le coefficient de radiation  $\alpha$ . Cependant, ce lien n'est pas suffisant pour donner l'allure de la représentation du coefficient de réflexion suivant une variation de la longueur d'onde dans le plan complexe : des considérations physiques sont alors nécessaires. Tout d'abord, la résonance a lieu pour les mêmes conditions d'excitation que précédemment, c'est à dire pour un angle d'incidence  $\theta_0$ , un pas de réseau  $\Lambda_0$  et une longueur d'onde  $\lambda_0$ . Le coefficient de réflexion à la résonance  $r_\beta$  est donc le même que dans les deux études précédentes. De plus, hors résonance, le coefficient de réflexion sera également le même puisque la réflexion de Fresnel varie peu autour de la résonance.

Le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant suivant une variation de la longueur d'onde est une fonction polaire comme montré dans le chapitre 2. Sa représentation graphique dans le plan complexe est donc un cercle ayant les mêmes propriétés que le cercle  $r(k)$ . De plus, les représentations  $r(k)$  et  $r(\lambda)$  possèdent deux points en commun : la réflexion à la résonance  $r_\beta$  ainsi que la réflexion de Fresnel  $r_0$ . Ces deux points étant diamétralement opposés, les cercles  $r(k)$  et  $r(\lambda)$  sont identiques. Par conséquent ils ont le même centre  $C$  et le même rayon  $R$ . Par analogie à l'étude mathématique de la fonction  $r(k)$ , cette condition impose que :

$$\frac{a_k}{\alpha} = \frac{a_\lambda}{\Delta\lambda}.$$

En combinant cette expression avec l'expression (4.13), on obtient la relation suivante pour la constante de découplage  $a_\lambda$ :



$$\begin{aligned}
 a_{\lambda TE} &= \frac{-a_k \lambda_0^2}{2\pi \left[ n_e + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{w_{eq}}{\frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_e^2 - n_s^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_g^2 - n_e^2}^3} \left[ \arctan \left( p_s \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) \right]} \right]} \\
 a_{\lambda TM} &= \frac{-a_k \lambda_0^2}{2\pi \left[ n_e + \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{w_{eq}}{\frac{n_g^2}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_c^2}} + \frac{n_g^2}{n_e \sqrt{n_e^2 - n_s^2}} + \frac{n_e}{\sqrt{n_g^2 - n_e^2}^3} \left[ \arctan \left( \frac{n_g^2}{n_s^2} \sqrt{\frac{n_e^2 - n_s^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) + \arctan \left( \frac{n_g^2}{n_c^2} \sqrt{\frac{n_e^2 - n_c^2}{n_g^2 - n_e^2}} \right) \right]} \right]}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

En conséquence, les paramètres phénoménologiques suivant la longueur d'onde  $\lambda$  sont liés par les expressions (4.13) et (4.14) aux paramètres phénoménologiques suivant la fréquence spatiale  $k$ . Du point de vue de la représentation dans le plan complexe, le coefficient de réflexion sera un cercle confondu avec le cercle  $r(k)$ . Cependant, d'après l'expression (4.13) on constate que la largeur spectrale de résonance  $\Delta\lambda$  est toujours de signe négatif. Par convention nous considérerons cette valeur comme positive et effectuerons les changements de signes nécessaires. On pourra écrire le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant suivant une variation de la longueur d'onde sous la forme :

$$r(\lambda) = r_0 - \frac{a_\lambda}{(\lambda - \lambda_0) + j\Delta\lambda} \tag{4.15}$$

Dans cette section, nous avons exprimé le coefficient de réflexion d'un réseau résonnant par approche phénoménologique suivant trois paramètres : le pas du réseau  $\Lambda$ , l'angle d'incidence  $\theta_i$  et la longueur d'onde  $\lambda$ . L'étude en pas de réseau n'est développée que dans le but d'apporter une confirmation supplémentaire de la théorie à l'aide de l'exemple numérique de la section 3 de ce chapitre. En revanche, les études en angle d'incidence et longueur d'onde sont utiles car un réseau résonnant est généralement conçu pour obtenir une certaine réponse angulaire ou spectrale suivant l'application visée. Pour notre objectif de mise en forme temporelle d'impulsions laser ultra-brèves, la réponse spectrale sera utilisée. Les largeurs angulaire  $\Delta\theta$  et spectrale  $\Delta\lambda$  de résonance sont donc des paramètres importants pour la détermination de la

réponse utile à l'application d'un réseau résonnant. Il est cependant nécessaire de pouvoir les calculer à partir d'une réponse numérique ou expérimentale. La section suivante développe une telle méthode de caractérisation d'un réseau résonnant.

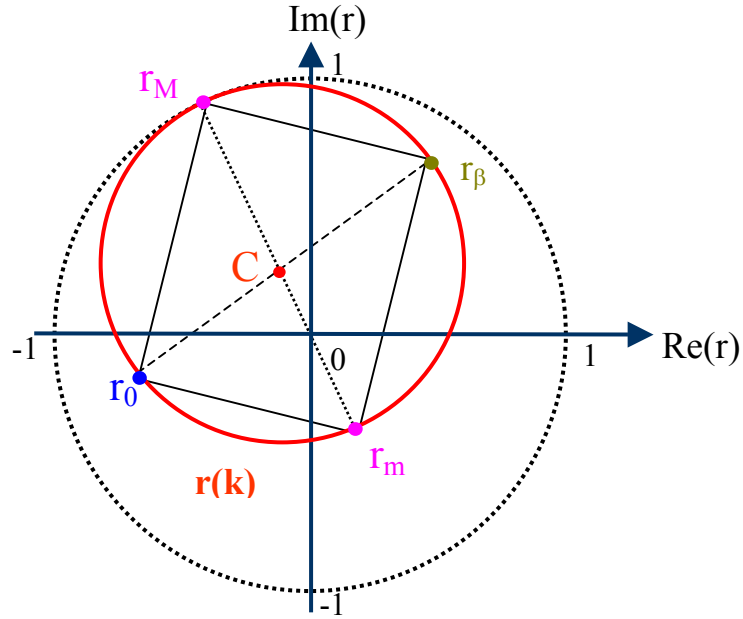
## **4.2 Caractérisation de réseaux résonnants à partir de l'étude phénoménologique**

La connaissance exacte du coefficient de réflexion d'un réseau résonnant passe par la détermination de ces quatre paramètres phénoménologiques : la réflexion de Fresnel  $r_0$ , la constante de découplage  $a_k$ , le coefficient de rayonnement  $\alpha$  et la constante de propagation du mode  $\beta$ . Le but est ici de déterminer ceux-ci par le biais d'une simple caractérisation expérimentale ou numérique spectrale ou angulaire du champ électrique réfléchi par un réseau résonnant. La méthode de caractérisation développée dans cette section pour la fréquence spatiale est extensible par analogie à l'angle d'incidence, au pas du réseau et à la longueur d'onde.

### *a. Détermination des coefficients*

L'ensemble des résultats présentés ci-après a été publié dans la référence [Pietroy 2007]. La première valeur utile découlant de la caractérisation d'un réseau résonnant est la réflexion de Fresnel  $r_0$ . Celle-ci est facilement identifiable puisqu'elle correspond au point de fermeture du cercle de réflexion. Ensuite, cette caractérisation donne la possibilité de déterminer le coefficient complexe de réflexion anormale  $r_M$  correspondant au maximum de réflectivité (module proche de 1), et notamment sa phase. La connaissance de  $r_M$  nous permet également d'identifier la condition d'excitation  $k_M$  permettant d'obtenir la réflexion anormale. De plus, le fait que le cercle de réflectivité soit tangent au cercle unité à la réflexion anormale implique que la droite passant par le point de réflexion anormale et l'origine du plan complexe est à la fois porteuse d'un diamètre du cercle unité et d'un diamètre du cercle de réflexion. En conséquence, le point diamétralement opposé à la réflexion anormale sur le cercle correspondra à un minimum de réflexion. Il est donc possible de déterminer le coefficient complexe du minimum de réflexion  $r_m$

ainsi que sa phase. La connaissance de  $r_m$  nous permet également d'identifier la condition d'excitation  $k_m$  permettant d'obtenir le minimum de réflexion. Par conséquent, la connaissance en module et en phase de la réflexion anormale et du minimum de réflexion permet de retrouver la position du centre du cercle de réflectivité  $C = \frac{r_M + r_m}{2}$  ainsi que son rayon  $R$ .



**Figure 4.2 : représentation du coefficient de réflexion dans le plan complexe et positionnement du rectangle de réflexion.**

Par l'expression (3.17), il a été démontré que le coefficient de réflexion à la condition de synchronisme  $r_\beta$  était le point diamétralement opposé à la réflexion de Fresnel  $r_0$  sur le cercle représentant le coefficient de réflexion dans le plan complexe. Il en va de même pour le coefficient de réflexion anormale  $r_M$  et le minimum de réflexion  $r_m$  comme démontré par l'expression (3.16).  $[r_\beta r_0]$  et  $[r_M r_m]$  sont donc deux diamètres du cercle et par conséquent le quadrilatère  $r_\beta r_0 r_m r_M$  est un rectangle comme le montre la figure 4.2. Cette remarque à elle seule va nous permettre de retrouver les paramètres phénoménologiques d'une structure à partir de la connaissance de ces quatre points. Le paragraphe suivant détaille les calculs menant aux principales expressions. Le lecteur pourra directement passer à l'expression (4.27) s'il ne souhaite pas s'encombrer des détails de calculs.

Puisque le quadrilatère  $r_\beta r_0 r_m r_M$  est un rectangle, le triangle  $r_M r_m r_0$  est rectangle en  $r_0$ . On peut tout simplement appliquer la propriété de Pythagore :

$$|r_M - r_0|^2 + |r_m - r_0|^2 = |r_M - r_m|^2$$

Les phases des réflexions anormale  $\varphi_M$  et minimale  $\varphi_m$  étant les mêmes modulo  $\pi$ ,  $\cos(\varphi_m - \varphi_0)$  peut s'écrire  $\pm \cos(\varphi_M - \varphi_0)$ . A partir de l'expression précédente, on peut alors exprimer cette dernière quantité comme suit :

$$\cos(\varphi_M - \varphi_0) = \frac{|r_0|^2 \pm |r_M||r_m|}{|r_0|(|r_M| \pm |r_m|)} \quad (4.16)$$

Le quadrilatère  $r_\beta r_0 r_m r_M$  étant un rectangle, ses diagonales ont même longueur, soit :

$$|r_M - r_m| = |r_\beta - r_0| \quad (4.17)$$

En élevant au carré les deux membres de l'égalité précédente puis en développant, on trouve :

$$|r_M|^2 + |r_m|^2 - 2|r_M||r_m|\cos(\varphi_M - \varphi_m) = |r_0|^2 + |r_\beta|^2 - 2|r_0||r_\beta|\cos(\varphi_0 - \varphi_\beta) \quad (4.18)$$

De plus ces deux diamètres sont sécants en le centre C du cercle. En combinant les équations (3.20) et (3.21) du chapitre 3 on écrira :

$$r_M + r_m = r_\beta + r_0 \quad (4.19)$$

En élevant au carré les modules de cette égalité complexe puis en développant, on obtient :

$$|r_M|^2 + |r_m|^2 + 2|r_M||r_m|\cos(\varphi_M - \varphi_m) = |r_0|^2 + |r_\beta|^2 + 2|r_0||r_\beta|\cos(\varphi_0 - \varphi_\beta) \quad (4.20)$$

En ajoutant membre à membre les expressions (4.18) et (4.20) puis en simplifiant par 2, la relation suivante est démontrée :

$$|r_M|^2 + |r_m|^2 = |r_0|^2 + |r_\beta|^2 \quad (4.21)$$

Maintenant nous allons nous concentrer sur le rapport complexe des nombres  $r_M - r_0$  et  $r_0 - r_m$ . En développant ce quotient de nombres complexes à partir de l'expression du coefficient de réflexion (4.1) on obtient :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = -\frac{(k_m - \beta) - j\alpha}{(k_M - \beta) - j\alpha}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur puis en regroupant parties réelles et parties imaginaires du quotient, le rapport précédent devient :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = - \frac{[(k_m - \beta)(k_M - \beta) + \alpha^2] + j\alpha(k_m - k_M)}{(k_M - \beta)^2 + \alpha^2} \quad (4.22)$$

Maintenant, toujours en utilisant le rectangle  $r_\beta r_0 r_m r_M$ , les segments  $[r_0 r_m]$  et  $[r_0 r_M]$  sont perpendiculaires. En d'autres termes, le rapport des complexes  $r_0 - r_m$  et  $r_0 - r_M$  est purement imaginaire :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = \pm j \frac{|r_M - r_0|}{|r_0 - r_m|} \quad (4.23)$$

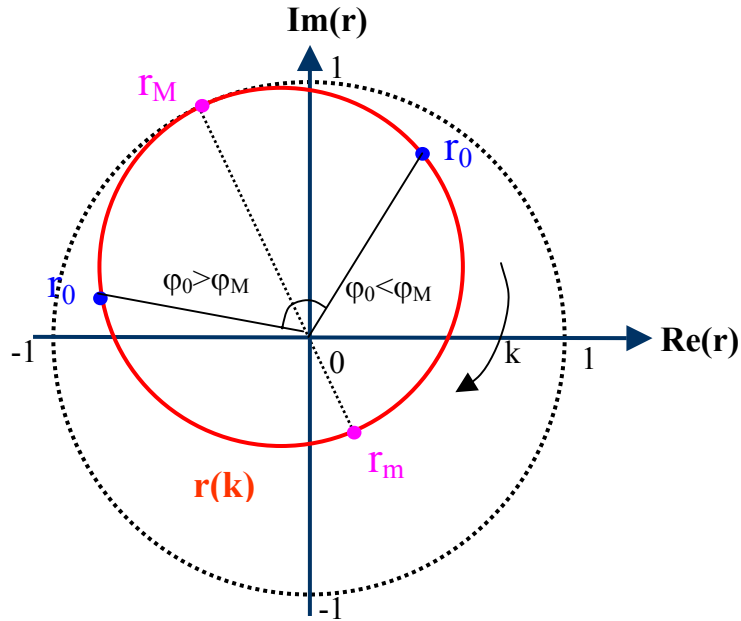


Figure 4.3: configuration du cercle suivant le signe de  $\varphi_0 - \varphi_M$ .

Le facteur  $\pm j$  de l'expression (4.23) provient de la phase de  $\pm \pi/2$  du quotient. D'après le sens trigonométrique de rotation sur le cercle suivant une variation croissante de  $k$ , on remarque que cette phase vaut  $\pi/2$  lorsque le coefficient de réflexion passe par la réflexion anormale avant le minimum. On observera donc un signe positif lorsque  $k_m > k_M$  et négatif lorsque  $k_M > k_m$  comme le montre la figure 4.3.

Le signe de la phase relative de la réflexion de Fresnel  $\varphi_0 - \varphi_M$  peut enfin s'écrire comme étant le signe opposé de  $(k_M - k_m)$ . Le développement de ces deux modules dans l'expression (4.23) donne :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = -\text{sign}(k_M - k_m) j \cdot \sqrt{\frac{|r_M|^2 + |r_0|^2 - 2|r_M||r_0|\cos(\varphi_M - \varphi_0)}{|r_m|^2 + |r_0|^2 - 2|r_m||r_0|\cos(\varphi_m - \varphi_0)}}$$

En substituant les termes cosinus par l'expression (4.16) puis en simplifiant par le facteur  $(|r_M| + |r_m|)$ , on obtient :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = -\text{sign}(k_M - k_m) j \cdot \sqrt{\frac{(|r_M|^2 + |r_0|^2)(|r_M| + |r_m|) - 2|r_M|(|r_M||r_m| + |r_0|^2)}{(|r_m|^2 + |r_0|^2)(|r_M| + |r_m|) - 2|r_m|(|r_M||r_m| + |r_0|^2)}}$$

Après développement puis simplification, on constate qu'il est possible de factoriser au numérateur et au dénominateur par  $(|r_M| - |r_m|)$ . Cette factorisation donne :

$$\frac{r_M - r_0}{r_0 - r_m} = -\text{sign}(k_M - k_m) j \sqrt{\frac{|r_M|^2 - |r_0|^2}{|r_0|^2 - |r_m|^2}}$$

Cette dernière est finalement égale à l'expression (4.22). L'égalité implique que la partie réelle de l'expression (4.22) soit nulle et sa partie imaginaire égale à une constante réelle  $\rho$  définie comme étant :

$$\rho = \sqrt{\frac{|r_M|^2 - |r_0|^2}{|r_0|^2 - |r_m|^2}} \quad (4.24)$$

Ces considérations aboutissent à deux équations :

$$\begin{cases} (k_m - \beta)(k_M - \beta) = -\alpha^2 \\ \frac{\alpha[(k_m - \beta) - (k_M - \beta)]}{(k_M - \beta)^2 + \alpha^2} = -\text{sign}(k_M - k_m) \rho \end{cases}$$

De la première égalité, nous déduisons que le produit  $(k_m - \beta)(k_M - \beta)$  est toujours négatif. La constante de propagation est ainsi comprise entre les conditions de réflexion anormale  $k_M$  et le minimum de réflexion  $k_m$ . Cette première égalité permet de constater que la condition de

résonance ne correspond pas obligatoirement à la condition de maximum de réflexion. De cette expression, on peut également écrire que :

$$k_m - \beta = \frac{-\alpha^2}{k_M - \beta} \quad (4.25)$$

En substituant cette dernière dans la deuxième équation du système, on trouve que:

$$\text{sign}(k_M - k_m)\rho = \frac{\alpha}{k_M - \beta} = -\frac{k_m - \beta}{\alpha} \quad (4.26)$$

Cette double égalité permet d'écrire la somme  $\frac{k_M - \beta}{\alpha} + \frac{-(k_m - \beta)}{\alpha}$  qui vaut :

$$\frac{k_M - \beta}{\alpha} - \frac{k_m - \beta}{\alpha} = \text{sign}(k_M - k_m) \left( \frac{1}{\rho} + \rho \right)$$

Soit après réduction des deux membres :

$$\frac{k_M - k_m}{\alpha} = \text{sign}(k_M - k_m) \frac{\rho^2 + 1}{\rho}$$

ou encore, en écrivant  $k_M - k_m$  sous la forme  $|k_M - k_m| \cdot \text{sign}(k_M - k_m)$  puis en simplifiant par la fonction signe :

$$\frac{|k_M - k_m|}{\alpha} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho}$$

Le coefficient de radiation  $\alpha$  est alors donné par :

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho^2 + 1} |k_M - k_m| \quad (4.27)$$

A partir de la double égalité (4.26) et de l'expression (4.27), il est également possible de déterminer la constante de propagation  $\beta$  en fonction de  $k_m$  ou  $k_M$ . Afin de minimiser l'erreur sur cette valeur, une moyenne peut être calculée :

$$\beta = \frac{k_M + k_m}{2} + \frac{\rho^2 - 1}{2(\rho^2 + 1)} \text{sign}(k_M - k_m) |k_M + k_m|$$

D'où :

$$\beta = \frac{k_M + k_m}{2} + \frac{\rho^2 - 1}{2(\rho^2 + 1)}(k_M - k_m) \quad (4.28)$$

avec  $\rho = \sqrt{\frac{|r_M|^2 - |r_0|^2}{|r_0|^2 - |r_m|^2}}$ .

Enfin, d'après l'expression (4.1) calculée en  $k = \beta$ , le coefficient de découplage  $a_k$  est lié au coefficient de rayonnement  $\alpha$  et au coefficients de réflexion de Fresnel  $r_0$  et de synchronisme  $r_\beta$  par :

$$a_k = -j\alpha(r_\beta - r_0) \quad (4.29)$$

La constante de propagation du mode  $\beta$  étant difficilement mesurable, le coefficient de réflexion à la condition de synchronisme  $r_\beta$  pourra être exprimé en fonction de la réflexion de Fresnel  $r_0$ , de la réflexion anormale  $r_M$  et du minimum de réflexion  $r_m$  plus facilement approchés expérimentalement. On obtient alors d'après les équations (3.19) et (3.20) :

$$r_\beta = r_M + r_m - r_0$$

En injectant cette expression de  $r_\beta$  dans l'expression (4.29), la constante de découplage s'écrit sous la forme:

$$a_k = -j\alpha(r_M + r_m - 2r_0) \quad (4.30)$$

En conclusion, à partir d'une simple caractérisation expérimentale ou numérique d'un réseau résonnant au voisinage de la résonance, il est possible de retrouver tous les paramètres caractéristiques de la structure et l'expression du coefficient de réflexion. Le coefficient de radiation  $\alpha$  et la constante de propagation  $\beta$  dépendent uniquement des modules des coefficients de réflexion anormale, minimale et de Fresnel ainsi que de la différence des fréquences spatiales excitant les réflexions anormale et minimale ( $k_M - k_m$ ) respectivement suivant les expressions (4.27) et (4.28). La constante de découplage  $a_k$  nécessite en plus la phase de ces différentes réflexions comme le montre l'expression (4.30).



*b. Extension de la méthode aux autres paramètres optogéométriques*

Il vient d'être démontré qu'il est possible de remonter aux trois paramètres phénoménologiques d'un réseau résonnant à partir de la caractérisation de son coefficient de réflexion au voisinage de la résonance en terme de fréquence spatiale  $k$ . D'après la paragraphe 3.3 du chapitre 3, le même type de fonction mathématique représente le coefficient de réflexion en terme de longueur d'onde  $\lambda$ , d'angle d'incidence  $\theta_i$  et de pas de réseau  $\Lambda$ . Les résultats du paragraphe 4.2.a sont donc transposables suivant ces différentes variables. Les expressions du paramètre de résonance, de la largeur de résonance et de la constante de découplage deviennent :

- dans le cas d'une caractérisation en pas de réseau  $\Lambda$  :

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \frac{\Lambda_M + \Lambda_m}{2} + \frac{(\Lambda_M - \Lambda_m)(\rho^2 - 1)}{2(\rho^2 + 1)} \\ \Delta\Lambda &= \frac{\rho |\Lambda_M - \Lambda_m|}{\rho^2 + 1} \\ a_\Lambda &= -j\Delta\Lambda(r_\beta - r_0)\end{aligned}\tag{4.31}$$

- dans le cas d'une caractérisation angulaire :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{\theta_M + \theta_m}{2} + \frac{(\theta_M - \theta_m)(\rho^2 - 1)}{2(\rho^2 + 1)} \\ \Delta\theta &= \frac{\rho |\theta_M - \theta_m|}{\rho^2 + 1} \\ a_\theta &= -j\Delta\theta(r_\beta - r_0)\end{aligned}\tag{4.32}$$

- dans le cas d'une caractérisation spectrale :

Il a été vu dans l'expression (4.13) que la largeur de résonance spectrale  $\Delta\lambda$  est de signe opposé au coefficient de radiation  $\alpha$  de la structure. Par convention  $\Delta\lambda$  sera toujours positif. C'est pourquoi dans l'expression (4.33) un changement de signe est opéré pour les variables  $\alpha$  et  $a_\lambda$ .

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} + \frac{(\lambda_M - \lambda_m)(\rho^2 - 1)}{2(\rho^2 + 1)} \\
 \Delta\lambda &= \frac{\rho|\lambda_M - \lambda_m|}{\rho^2 + 1} \\
 a_\lambda &= -j\Delta\lambda(r_\beta - r_0)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\text{avec } \rho = \sqrt{\frac{|r_M|^2 - |r_0|^2}{|r_0|^2 - |r_m|^2}} \tag{4.34}$$

A partir de la caractérisation numérique ou expérimentale d'un réseau résonnant suivant le paramètre considéré, il est possible de remonter aux paramètres phénoménologiques de la structure suivant ce paramètre par le biais du set d'expressions adapté ((4.31) pour le pas de réseau, (4.32) pour l'angle d'incidence, (4.33) pour la longueur d'onde). De plus il sera possible de remonter au coefficient de radiation  $\alpha$  et à la constante de découplage  $a_k$  via les formules correspondantes du paragraphe 3.3.c.

### 4.3 Simulations numériques

Une méthode de caractérisation vient donc d'être développée. Cette section est consacrée à l'illustration de celle-ci par un exemple numérique. La structure de la figure 4.4 est ici considérée : il s'agit d'une couche de haut indice ( $n_g = 2$ ) d'épaisseur  $w_g = 270$  nm déposée sur un substrat de bas indice ( $n_s = 1,5$ ). Un réseau de diffraction binaire de  $\sigma = 120$  nm de profondeur et de  $\Lambda_0 = 258,5$  nm de pas est gravé dans cette couche. Si l'on considère une onde incidente de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632,2$  nm polarisée TE, le mode fondamental du réseau résonnant sera excité pour un angle d'incidence  $\theta_0 = 45^\circ$ . Partant de ces conditions d'excitation du mode, une étude numérique de la structure à l'aide de la méthode modale vraie est effectuée grâce au programme développé par N. Lyndin [Lyndin 2006]. Le coefficient de réflexion est ainsi calculé au voisinage de la résonance en fonction du pas du réseau  $\Lambda$ , de l'angle d'incidence

$\theta_i$  puis de la longueur d'onde  $\lambda$ . Dans chaque cas, les paramètres phénoménologiques correspondant sont calculés puis les courbes du coefficient de réflexion suivant l'approche phénoménologique et les simulations numériques sont comparées. Enfin dans les trois cas, le coefficient de radiation est calculé puis comparé à la valeur donnée par la méthode modale vraie.

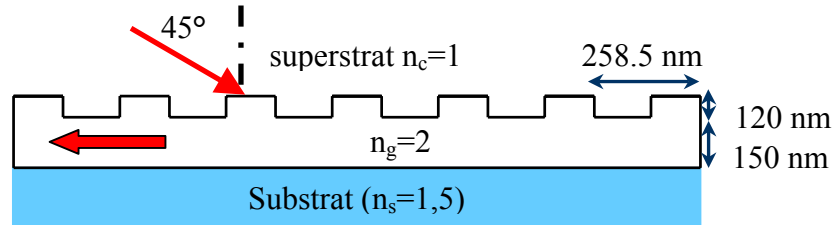
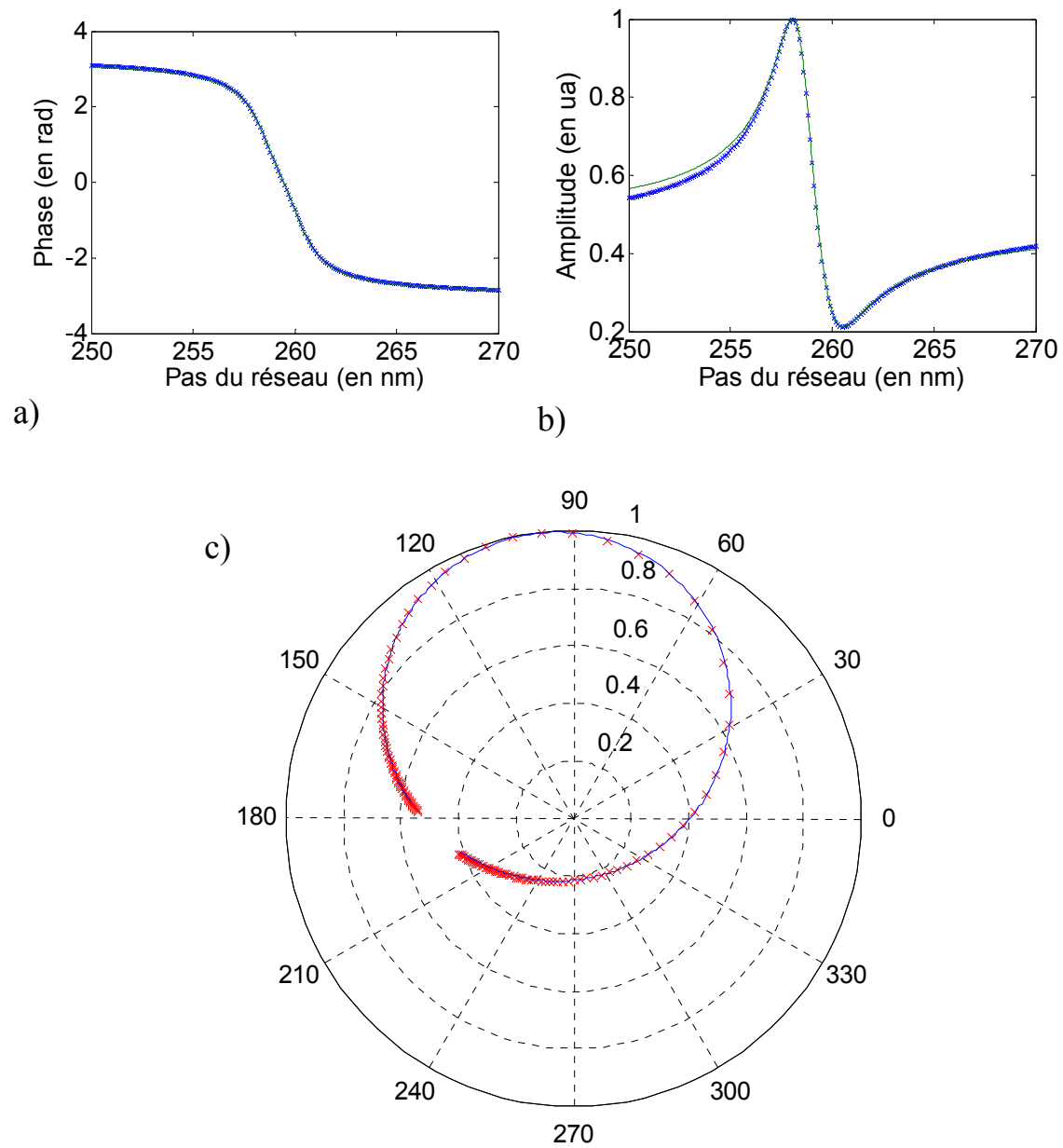


Figure 4.4 : schéma de la structure simulée numériquement.

#### a. Caractérisation en pas de réseau

La longueur d'onde est fixée dans ce paragraphe à  $\lambda_0 = 632,2$  nm et l'angle d'incidence à  $\theta_0 = 45^\circ$ . Le coefficient de réflexion est calculé pour des valeurs de pas comprises entre 250 nm et 270 nm. On trouve que la réflexion anormale est obtenue pour un pas de réseau  $\Lambda_M = 258,06$  nm. Le coefficient de réflexion a une amplitude  $|r_M| = 1$  et une phase  $\varphi_M = 1,73$  rad. Le minimum de réflexion de module  $|r_m| = 0,21$  et de phase  $\varphi_m = -1,41$  rad a lieu pour un pas de réseau de  $\Lambda_m = 260,54$  nm. L'amplitude de la réflexion de Fresnel est trouvée égale à  $|r_0| = 0,48$  et sa phase  $\varphi_0 = -3,03$  rad. D'après l'expression (4.34), le facteur  $\rho$  de la structure vaut  $\rho = 2,06$ .

Les paramètres phénoménologiques peuvent alors être calculés à l'aide des expressions (4.31). On retrouve bien un pas de réseau excitant le mode  $\Lambda_0 = 258,5$  nm, une largeur de résonance  $\Delta\Lambda = 0,98$  nm, et une constante de découplage  $a_\Lambda = 1,18\exp(-0,75j)$ . Une comparaison entre les simulations numériques et l'approche phénoménologique du coefficient de réflexion du réseau résonnant est faite sur la figure 4.5. On constate que les deux représentations sont cohérentes. Une légère différence intervient sur la courbe d'amplitude pour les valeurs les plus éloignées de la résonance. Ceci est dû au fait que la réflexion de Fresnel n'est pas constante sur toute la plage de variation. Par conséquent, elle induit une erreur sur la représentation lorsque l'on s'éloigne de la résonance.



**Figure 4.5 : a) phase et b) amplitude du coefficient du réflexion, puis c) représentation dans le plan complexe par simulations numériques (trait continu) et par caractérisation phénoménologique (croix) en fonction du pas du réseau.**

En calculant le coefficient de radiation à l'aide de l'expression (4.4), on trouve que  $\alpha = 917 \text{ cm}^{-1}$ . La valeur donnée par la méthode modale vraie est de  $913 \text{ cm}^{-1}$ . Les résultats diffèrent donc très légèrement. L'erreur n'est que de 0,4%. Cet écart s'explique physiquement par

l'approximation faite dans notre modèle : la réflexion de Fresnel  $r_0$  n'est pas strictement constante sur la plage de pas de réseau étudiée. Les valeurs des maximum et minimum de réflexion sont par conséquent légèrement modifiées.

### *b. Caractérisation angulaire*

La longueur d'onde est toujours fixée dans cette caractérisation à  $\lambda_0 = 632,2$  nm. Le pas du réseau est également maintenu :  $\Lambda_0 = 258,5$  nm. Le coefficient de réflexion est calculé pour des angles d'incidences compris entre  $35^\circ$  et  $55^\circ$ . On trouve que la réflexion anormale est obtenue pour un angle d'incidence  $\theta_M = 44,66^\circ$ . Le coefficient de réflexion a alors une amplitude  $|r_M| = 1$  et une phase  $\varphi_M = 1,72$  rad. Le minimum de réflexion de module  $|r_m| = 0,21$  et de phase  $\varphi_m = -1,38$  rad a lieu pour un angle d'incidence de  $\theta_m = 46,57^\circ$ . L'amplitude de la réflexion de Fresnel est trouvée égale à  $|r_0| = 0,46$  et sa phase  $\varphi_0 = -3,01$  rad. D'après l'expression (4.34), le facteur  $\rho$  de la structure vaut  $\rho = 2,17$ .

Les paramètres phénoménologiques peuvent être calculés d'après les expressions (4.32). On trouve un angle d'excitation du mode  $\theta_0 = 44,99^\circ$  proche de  $45^\circ$ , une largeur angulaire de résonance  $\Delta\theta = 0,73^\circ$ , et une constante de découplage  $a_0 = 0,88\exp(-0,72j)$ . Une comparaison entre les simulations et l'approche phénoménologique du coefficient de réflexion du réseau résonnant est faite sur la figure 4.6. On constate que les deux représentations sont cohérentes. On observe toujours une légère différence intervenant sur la courbe d'amplitude pour les valeurs les plus éloignées de la résonance.

En calculant le coefficient de radiation à l'aide de l'expression (4.7), on trouve que  $\alpha = 893$  cm<sup>-1</sup>. La valeur donnée par la méthode modale vraie est de 913 cm<sup>-1</sup>. Les résultats diffèrent légèrement : l'erreur est de moins de 3%. Comme précédemment, cet écart s'explique par le fait que la réflexion de Fresnel  $r_0$  varie légèrement sur la plage angulaire étudiée : les valeurs des maximum et minimum de réflexion sont légèrement modifiées.

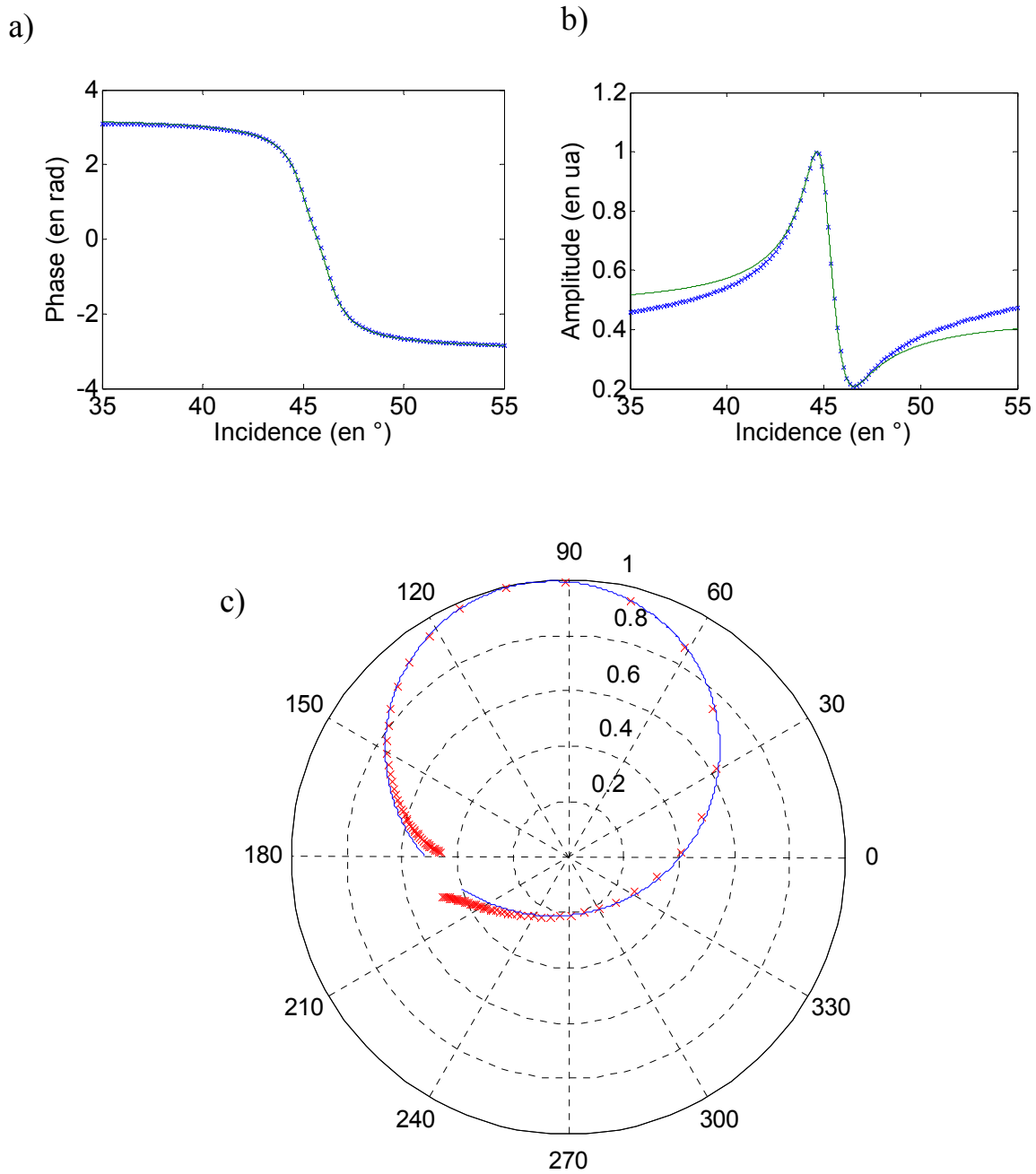


Figure 4.6 : a) phase et b) amplitude du coefficient du réflexion, puis c) représentation dans le plan complexe par simulations numériques (trait continu) et par caractérisation phénoménologique (croix) en fonction de l'angle d'incidence.

*c. Caractérisation spectrale*

Dans ce type de caractérisation numérique, la longueur d'onde  $\lambda$  varie. L'angle d'incidence et le pas du réseau sont fixés à  $\theta_0 = 45^\circ$  et  $\Lambda_0 = 258,5$  nm. Le coefficient de réflexion est calculé pour des longueurs d'ondes comprises entre 600 nm et 660 nm. On trouve que la réflexion anormale est obtenue pour une longueur d'onde  $\lambda_M = 633,2$  nm. Le coefficient de réflexion a alors une amplitude  $|r_M| = 1$  et une phase  $\varphi_M = 1,73$  rad. Le minimum de réflexion de module  $|r_m| = 0,22$  et de phase  $\varphi_m = -1,43$  rad a lieu pour une longueur d'onde  $\lambda_m = 627,8$  nm. L'amplitude de la réflexion de Fresnel est trouvée égale à  $|r_0| = 0,47$  et sa phase  $\varphi_0 = -3,00$  rad. D'après l'expression (4.34), le facteur  $\rho$  de la structure vaut  $\rho = 2,09$ .

Les paramètres phénoménologiques peuvent être calculés d'après les expressions (4.33). On trouve une longueur d'onde d'excitation du mode  $\lambda_0 = 632,2$  nm conformément aux hypothèses de départ, une largeur spectrale de résonance  $\Delta\lambda = 2,1$  nm, et une constante de découplage  $a_\lambda = 2,55\exp(-0,73j)$ . Une comparaison entre les simulations et l'approche phénoménologique du coefficient de réflexion sur le réseau résonnant est faite sur la figure 4.7. On constate que les deux représentations sont cohérentes. On observe toujours une légère différence intervenant sur la courbe d'amplitude pour les valeurs les plus éloignées de la résonance.

Pour calculer le coefficient de rayonnement  $\alpha$  de la structure, il est nécessaire de calculer l'indice effectif  $n_e$  du mode guidé ainsi que l'épaisseur équivalente  $w_{eq}$  du guide. L'indice effectif est donné par l'expression (2.15) présentée au chapitre 2 (p.44), soit dans notre cas  $n_e = -1,7385$ . Le signe négatif indique que le mode est contrapropagatif. Ce signe doit être négligé dans les calculs suivants puisque le sens de propagation du mode n'intervient pas dans l'optique guidée. Connaissant l'indice effectif du mode, il est également possible de calculer l'épaisseur équivalente du guide d'onde par le biais de l'équation de dispersion en polarisation TE (2.6). On obtient alors une épaisseur équivalente du guide d'onde  $w_{eq} = 172$  nm. Le coefficient de rayonnement  $\alpha$  de la structure découle de l'expression (4.7) : on trouve  $\alpha = 898$  cm<sup>-1</sup>. La valeur donnée par la méthode modale vraie est de 913 cm<sup>-1</sup>. Les résultats diffèrent donc légèrement. L'erreur est de l'ordre de 2 % entre résultats numériques directs et analyse de ces mêmes données numériques. Ici encore, cet écart s'explique physiquement par l'approximation faite dans notre modèle : la réflexion de Fresnel  $r_0$  n'est pas strictement constante sur la plage spectrale étudiée. Les valeurs des maximum et minimum de réflexion sont par conséquent légèrement modifiées.

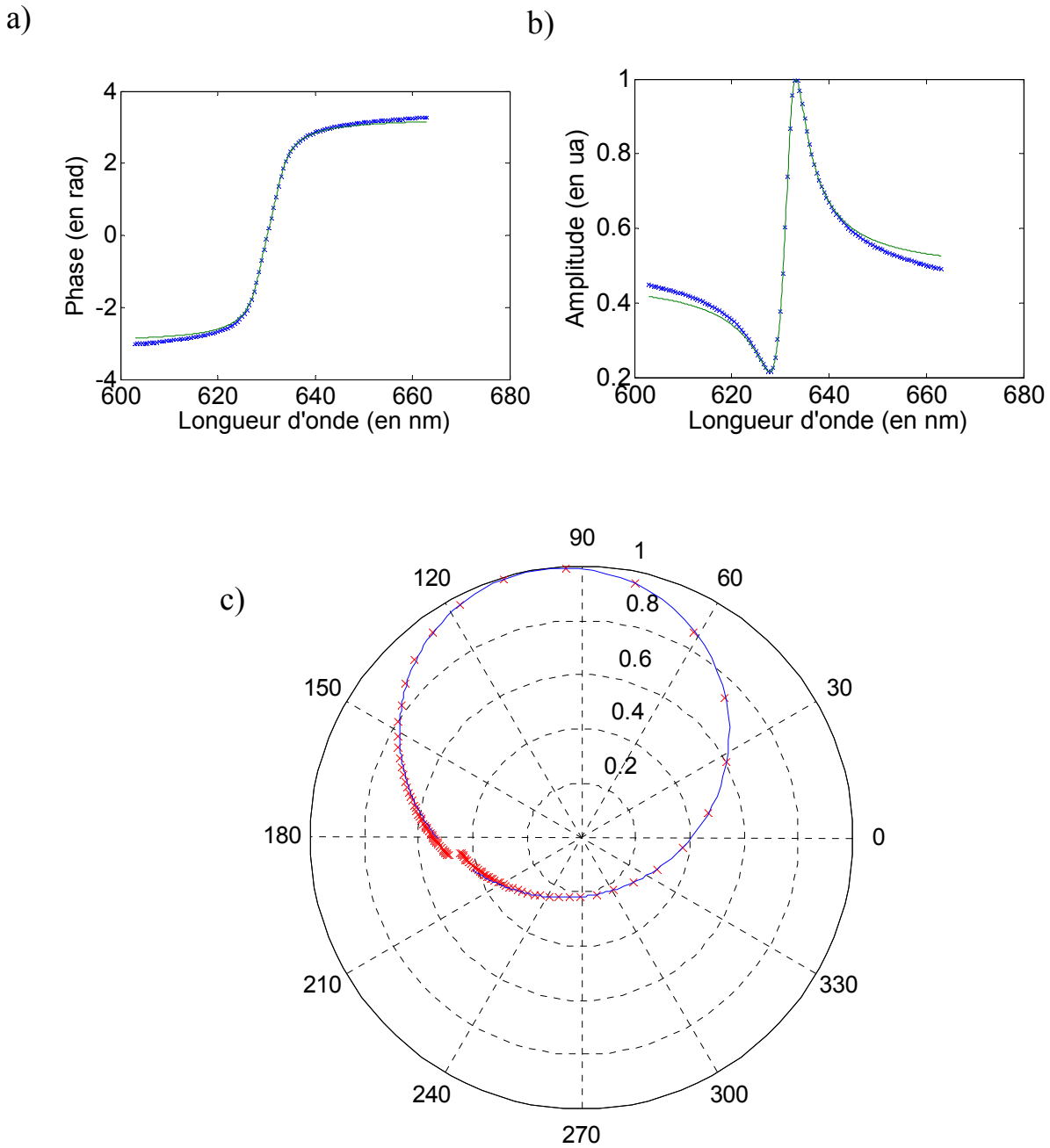


Figure 4.7 : a) phase et b) amplitude du coefficient du réflexion, puis c) représentation dans le plan complexe par simulations numériques (trait continu) et par caractérisation phénoménologique (croix) en fonction de la longueur d'onde.



## 4.4 Caractérisation expérimentale

La dernière section a permis de montrer que la caractérisation complète d'un réseau résonnant ne passe que par la détermination de trois points de réflexion facilement mesurables : la réflexion de Fresnel  $r_0$ , la réflexion anormale  $r_M$  et le minimum de réflexion  $r_m$ . Dans le but de calculer la constante de propagation  $\beta$  grâce à l'expression (4.28) et du coefficient de rayonnement  $\alpha$  grâce à l'expression (4.27), seuls les modules de ces coefficients de réflexion ainsi que les conditions d'excitation  $k_M$  de la réflexion anormale et  $k_m$  du minimum de réflexion sont nécessaires. La caractérisation de ces deux paramètres phénoménologiques est expérimentalement facile à mettre en œuvre. Dans le cas d'une caractérisation angulaire par exemple, une simple platine de rotation ainsi qu'un détecteur de puissance optique seront suffisants. Le problème survient lors de la détermination de la constante de découplage  $a_k$ . En effet, il est nécessaire d'avoir accès à la fois aux modules mais également aux phases des différentes réflexions. L'accès expérimental à celles-ci est plus compliqué. Cependant il est possible de s'en affranchir.

### *a. Méthode par mesures des modules uniquement*

La première quantité à déterminer est le diamètre du cercle de réflexion du réseau résonnant. Un diamètre du cercle de réflexion est limité par la réflexion anormale  $r_M$  et le minimum de réflexion  $r_m$ . La connaissance en module de ces coefficients n'est cependant pas suffisante. Le problème consiste à savoir si le cercle contient ou non l'origine, soit encore à savoir si la phase au minimum de réflexion est égale à la phase de la réflexion anormale ou bien si un déphasage de  $\pi$  intervient. Pour ce faire, un simple dispositif polarimétrique peut être utilisé.

Une fois les modules  $|r_M|$  et  $|r_m|$  mesurés pour la polarisation excitant le réseau résonnant, on mesure le module du coefficient de réflexion  $|r_p|$  pour la polarisation orthogonale. Si aucune résonance n'est excitée par cette polarisation d'onde suivant ces conditions d'incidence, cette réflexion peut être considérée comme constante. Ensuite la structure est éclairée par une onde polarisée linéairement à  $45^\circ$  du plan d'incidence. Un analyseur croisé à cette polarisation incidente est placé après la réflexion. Les deux composantes TE et TM réfléchies sont donc projetées suivant l'axe de l'analyseur et interfèrent. Les mesures dans la condition d'excitation de la réflexion anormale et minimale sont effectuées à nouveau. Dans le cas de la réflexion

anormale  $r_M$ , si le coefficient de réflexion  $r_p$  pointe dans la même direction alors les interférences seront constructives et la puissance optique mesurée sera supérieure à la moyenne quadratique de  $|r_M|$  et  $|r_p|$  correspondant au cas où  $r_p$  est orthogonal à  $r_M$  dans le plan complexe. Si les deux coefficients complexes pointent dans des directions opposées, alors les interférences seront destructives. En ce qui concerne le minimum de réflexion, si sa phase est la même que celle de la réflexion anormale ( $\varphi_m = \varphi_M$ ), alors le type d'interférences sera identique. L'origine du plan complexe est alors hors du cercle et le diamètre du cercle de réflexion vaut  $D = |r_M| - |r_m|$ . Si  $\varphi_m = \varphi_M + \pi$ , les deux types d'interférences ont lieu. L'origine du plan complexe est alors inclus dans le cercle et le diamètre vaut  $D = |r_M| + |r_m|$ .

Maintenant que le diamètre du cercle est connu, on peut constater que la composante continue de la variation de phase n'influe que sur la position angulaire du cercle dans le plan complexe. Il est donc possible de prendre la phase à la réflexion anormale  $\varphi_M$  pour référence des phases. Ainsi, la réflexion anormale se retrouve positive sur l'axe des réels. De plus, la phase de la réflexion de Fresnel  $r_0$  est calculable relativement à cette phase de la réflexion anormale par le biais de l'expression (4.16). Le signe sera choisi en fonction de l'inclusion ou non de l'origine du plan complexe dans le cercle par la méthode qui vient d'être détaillée précédemment.

Connaissant la phase relative ( $\varphi_0 - \varphi_M$ ) de la réflexion de Fresnel  $r_0$  ainsi que son module préalablement mesuré, deux solutions sont possibles pour positionner ce point sur le cercle de réflexion recentré sur l'axe réel. Ces deux solutions correspondent à un angle relatif positif ou négatif. Pour résoudre ce problème, il suffit de constater quel est le premier extremum rencontré lors d'une variation croissante de la fréquence spatiale  $k$ . En effet, le sens de rotation sur le cercle suivant cette variation est connu. Si le premier point est le minimum  $r_m$  ( $k_m < k_M$ ), la réflexion de Fresnel est située avant ce point sur le parcours donc que l'angle relatif  $\varphi_0 - \varphi_M$  est positif. Si le premier point est la réflexion anormale ( $k_m > k_M$ ), alors l'angle relatif est négatif. Le module de la réflexion de Fresnel ainsi que sa phase relative à la réflexion anormale sont connus, le calcul de la constante de découplage peut être effectué via l'expression (4.30) modifiée :

$$|a_k| e^{j(\varphi_k - \varphi_M)} = -j\alpha \left( |r_M| \pm |r_m| - 2|r_0| e^{j(\varphi_0 - \varphi_M)} \right) \quad (4.35)$$

A partir de la simple mesure des modules des coefficients de réflexion anormale, minimale et de Fresnel, il est possible de caractériser tous les paramètres phénoménologiques à une constante de phase  $\varphi_M$  près. Une petite étape de mesure des modules par polarimétrie est également nécessaire

afin de déterminer la position de l'origine du plan complexe relativement au cercle de réflexion du réseau résonnant caractérisé. La courbe de réponse en amplitude du réseau résonnant sera obtenue de manière exacte alors que sa réponse en phase sera donnée à une constante près : la phase de la réflexion anormale. Ce problème n'est pas d'une grande importance dans les applications généralement visées où seule la modulation d'amplitude est utile.

Cette méthode peut ainsi être utilisée à partir d'un matériel classique. Les seules précautions sont à prendre au niveau de la source. En effet, les largeurs de résonance spectrale et angulaire peuvent être très fines suivant les applications. La divergence de la source ainsi que sa largeur spectrale doivent donc être suffisamment faibles devant les largeurs de résonance spectrale et angulaire de la structure de façon à avoir une résolution acceptable. Si tel n'est pas le cas, le coefficient de réflexion mesuré sera moyenné sur une certaine plage d'angle et de longueur d'onde. La conséquence sera une dilatation de la courbe : le minimum mesuré sera plus important et le maximum mesuré sera plus faible que leurs valeurs réelles. Les courbes de phase et d'amplitude seront également élargies. Dans le plan complexe, il en résultera un aplatissement du cercle de réflexion autour dans la zone de résonance. Si le minimum de réflexion  $r_m$  est en module proche de la réflexion de Fresnel  $r_0$ , il se peut qu'expérimentalement la condition de minimum de réflexion ne soit pas identifiable rendant par conséquent la caractérisation impossible.

### *b. Caractérisation ellipsométrique d'une structure*

La méthode générale développée précédemment a été testée sur un réseau résonnant fabriqué pour une application de capteur biologique. De tels capteurs permettent d'estimer la quantité d'espèces biologiques en solution aqueuse présentes à la surface du réseau résonnant. Ces cellules induisent un changement de l'indice de réfraction du substrat "vu" par le champ modal à la surface du guide donc une variation de l'indice effectif du mode guidé qui est mesuré [Bernard 1995]. Il s'agit d'une structure purement diélectrique constituée d'une couche d'épaisseur  $w$  de l'ordre de 180 nm de haut indice  $n_g = 1,9$  jouant le rôle de guide d'onde plan déposée sur un substrat d'indice  $n_s$  dans lequel est gravé un réseau de diffraction à profil rectangulaire de profondeur  $\sigma$  et de pas  $\Lambda = 360$  nm. La structure est corruguée aux deux interfaces substrat et superstrat comme le montre la figure 4.8. Le guide d'onde plan est alors excité via l'ordre  $-1$  diffracté par le réseau dans le guide.

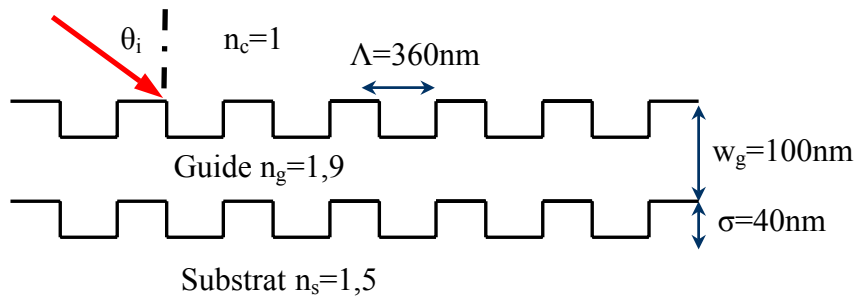
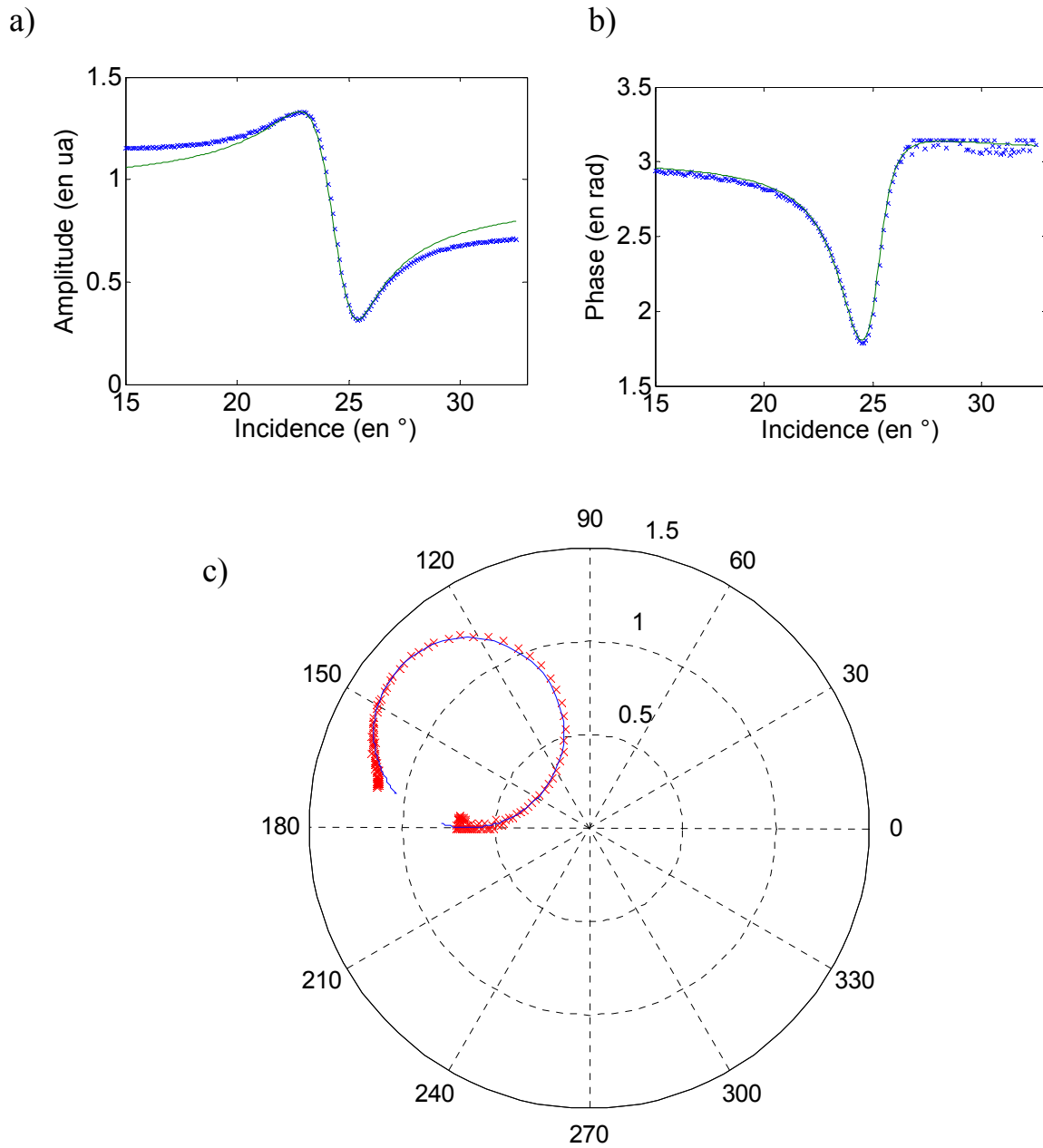


Figure 4.8 : schéma de la structure caractérisée ellipsométriquement.

La caractérisation de cette structure est réalisée de façon complète par ellipsométrie [Azzam 1987]. Le principe de l'ellipsométrie est de mesurer le rapport complexe des coefficients de réflexion TE et TM. Dans notre cas, la résonance a lieu pour une onde polarisée TE. Le coefficient de réflexion reste constant pour une polarisation TM. Les mesures vont donner les réponses angulaires en amplitude pondérée par l'amplitude du coefficient de réflexion TM et en phase relative à la phase de la réflexion TM. Dans le but d'une détermination du coefficient de rayonnement  $\alpha$  et de la constante de propagation  $\beta$ , il n'est pas nécessaire de se ramener aux valeurs exactes. Cependant le coefficient de découplage angulaire  $a_0$  sera calculé dans ces conditions de façon à comparer les résultats obtenus aux résultats expérimentaux.

Nous avons donc réalisé des mesures par ellipsométrie sur des échantillons adaptés. L'instrument utilisé est le modèle GES5E de Sopra. Les détails techniques de l'appareil sont disponibles sur le site du fabricant [Sopra 2007]. La source est une source xénon à arc court. La raie considérée a une longueur d'onde  $\lambda_0 = 764$  nm et une largeur spectrale de l'ordre de 0,2 nm. De plus les différentes raies de la source sont suffisamment espacées spectralement de sorte que la raie considérée est isolée dans le spectromètre de résolution nanométrique. Le dispositif de caractérisation expérimental a donc une largeur spectrale de l'ordre de 0,2 nm. La lumière issue de la source est injectée dans une fibre de 200  $\mu\text{m}$  de cœur. La lumière issue de cette fibre est focalisée par une lentille de 130 mm de focale ce qui implique une divergence du faisceau incident sur le réseau résonnant de l'ordre de 0,1°.

Le module et la phase du rapport complexe des réflexions TE par TM sont donc mesurés suivant la méthode standard avec un polariseur fixe à 45°. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.9.



**Figure 4.9 : a) phase et b) amplitude du coefficient du réflexion, puis c) représentation dans le plan complexe par mesure ellipsométriques (trait continu) et par caractérisation phénoménologique expérimentale (croix) en fonction de l'angle d'incidence.**

Le coefficient de réflexion est mesuré pour des angles d'incidence compris entre 15° et 35°. On trouve que la réflexion anormale est obtenue pour un pas de réseau  $\theta_M = 22,8^\circ$ . Le coefficient de réflexion a alors une amplitude pondérée  $|r_M| = 1,33$  et une phase relative  $\varphi_M = 2,48$  rad. Le

minimum de réflexion de module pondéré  $|r_m| = 0,32$  et de phase relative  $\varphi_m = 2,43$  rad a lieu pour un angle d'incidence de  $\theta_m = 25,4^\circ$ . L'amplitude de la réflexion de Fresnel est trouvée égale à  $|r_0| = 0,94$  et sa phase  $\varphi_0 = 3,04$  rad. D'après l'expression (4.34) le facteur  $\rho$  de la structure vaut  $\rho = 1,06$ .

Les paramètres phénoménologiques peuvent être alors calculés d'après les d'expressions (4.32). On trouve un angle d'excitation du mode  $\theta_0 = 24,03^\circ$  proche de  $25^\circ$ , une largeur de résonance  $\Delta\theta = 1,3^\circ$ , et une constante de découplage  $a_0 = 1,32\exp(-0,61j)$ . Une comparaison entre les simulations et l'approche phénoménologique du coefficient de réflexion sur le réseau résonnant est faite sur la figure 4.8. On constate que les deux représentations sont cohérentes. La légère différence intervenant sur la courbe d'amplitude pour les valeurs les plus éloignées de la résonance est due au fait que la réflexion de Fresnel varie légèrement sur la plage angulaire étudiée. Le coefficient de rayonnement est calculé à l'aide de l'expression (4.7) : on trouve  $\alpha = 1702 \text{ cm}^{-1}$ .

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthodologie de caractérisation phénoménologique des réseaux résonnants a été développée. La détermination des paramètres phénoménologiques d'une structure est ainsi possible par la simple caractérisation numérique ou expérimentale en module des coefficients de réflexion de Fresnel, anormale et le minimum de réflexion. Une petite étape d'observations polarimétriques est également nécessaire afin de déterminer la position de l'origine du repère complexe par rapport au cercle de réflexion.

Le lien entre les paramètres phénoménologiques suivant différentes variables considérées a également été déterminé. Les variables considérées sont tout d'abord la fréquence spatiale, par intérêt physique, puis le pas du réseau par but pédagogique. Cependant, les paramètres étudiés les plus intéressants sont la longueur d'onde et l'angle d'incidence. En effet, ce sont souvent ces caractéristiques qui sont utilisées suivant l'application visée.

Des simulations numériques dans les différents cas ont été menées sur la même structure donnant des résultats voisins et confirmant ainsi la plausibilité de la représentation dans le plan complexe

et de la passerelle échafaudée entre représentations polaire et modale. Une structure a également été étudiée expérimentalement par le biais d'une caractérisation expérimentale ellipsométrique. Ceci a permis de révéler les différents problèmes techniques que l'on peut rencontrer lors de cette caractérisation, de définir les conditions expérimentales adéquates et avant tout que la caractérisation expérimentale de ces paramètres phénoménologiques est possible.

La réponse spectrale d'un réseau résonnant est maintenant déterminée. Cet élément optique joue donc le rôle de modulateur spectral de lumière en amplitude et en phase pouvant moduler la forme temporelle d'une impulsion ultra-brève. Dans le chapitre suivant, nous allons nous appliquer à développer un modulateur de phase quasi-pur basé sur le réseau résonnant.