Cadre théorique, problématique et méthode

Dans ce chapitre, nous explicitons le cadre théorique dans lequel nous nous situons ainsi que son intérêt dans l'étude des différents aspects de notre sujet. Le cadre théorique permet notamment de formaliser les hypothèses déjà abordées dans le chapitre précédent. Nous dégageons ensuite la problématique de la thèse, ainsi qu'une hypothèse de recherche. Enfin, nous présentons la méthode générale que nous mettons en place pour la vérifier et répondre à la problématique.

Dans le cadre de cette thèse, le savoir concerné est la géométrie plane. Nous nous intéressons à la transition entre le cycle 3 et le cycle 4, qui correspond à une transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique, et conduit à l'échec de nombreux élèves dans la construction du raisonnement déductif. Il s'agit donc d'étudier une question qui peut être abordée selon plusieurs points de vue : celui du savoir, celui de l'institution et celui de l'élève. L'élaboration de notre cadre théorique s'appuie sur ces trois points de vue qui nous amènent à mobiliser différentes approches de la didactique des mathématiques et leurs outils. Nous étudierons la question du savoir dans le chapitre 3, c'est pourquoi nous ne présentons ici que les points de vue institutionnel et de l'élève.

2.1 Point de vue institutionnel

Le point de vue institutionnel est celui par lequel nous avons abordé cette thèse en commençant par étudier rapidement les programmes scolaires en cours afin de dégager une double rupture d'ordre épistémologique entre les cycles 3 et 4. La négociation de cette rupture peut être source de difficultés chez les élèves comme nous l'avons vu dans la section 1.2.4. Nous cherchons donc à prendre en compte le savoir mathématique et sa transposition didactique dans les différentes institutions (les cycles 3 et 4) pour mettre en lien des décalages entre les programmes scolaires ainsi qu'une faible prise en compte des ruptures d'ordre épistémologique avec les difficultés rencontrées par les élèves

Pour étudier ces questions du point de vue institutionnel, nous nous situons principalement dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), développée par Chevallard (1992, 1999), qui prolonge la théorie de la transposition didactique et aborde la question du passage des savoirs savants des mathématiciens aux savoirs à enseigner et enseignés dans les institutions. Dans la suite de cette section, nous présentons donc les différents outils de la TAD que nous utilisons dans notre travail de recherche.

2.1.1 Objets, rapports, institutions, sujets et système didactique

La TAD repose sur trois termes « primitifs » : les objets, les personnes et les institutions (Chevallard, 1992, p. 86). En réalité, tout est objet, y compris les personnes et les institutions.

On dit qu'un objet existe s'il est un « objet de connaissance », c'est-à-dire qu'il est connu par au moins une personne ou une institution, ce que Chevallard définit comme un rapport, personnel ou institutionnel, à cet objet.

Une institution « peut être à peu près n'importe quoi » (Chevallard, 1992, p. 88) : une école particulière, l'« école », une classe, la « famille », le « cours », etc. À chaque institution, on peut associer un ensemble d'objets qui correspond à l'ensemble des objets avec lesquels l'institution entretient un **rapport institutionnel**. On appelle également ce rapport le **rapport officiel**. Mais dans toute institution, il existe également un temps institutionnel. L'ensemble des objets de l'institution dépend aussi de ce temps institutionnel : certains objets apparaissent et disparaissent au cours du temps.

Chevallard reprend également des notions introduites par Brousseau dans la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau & Balacheff, 1998). Ainsi, le contrat didactique de la TSD devient ici le contrat institutionnel relatif à une institution à un temps donné. Il correspond à l'ensemble des objets et des rapports institutionnels à ces objets au temps donné. Le milieu de la TSD devient le milieu institutionnel relatif à une institution à un temps donné. Il s'agit d'un sous-ensemble du contrat institutionnel composé des objets et des rapports institutionnels à ces objets qui apparaissent comme « allant de soi, transparents, non problématiques » aux sujets de l'institution à un temps donné (Chevallard, 1992, p. 89).

Les sujets d'une institution sont des personnes dites « assujetties » à cette institution, nous nous intéresserons typiquement aux enseignants ou aux élèves pour l'institution collège. Pour le sujet entrant dans l'institution, les objets de l'institution vont « se mettre à vivre » sous « la contrainte du rapport institutionnel » (Chevallard, 1992, p. 89). Le sujet construit alors un **rapport personnel** à ces objets (ou le modifie s'il existait déjà), c'est ce qu'on peut appeler un apprentissage. Cette notion de rapport personnel aux objets de l'institution est très importante dans notre étude. En effet, à partir de celle-ci, Chevallard définit les « bons » et « mauvais » sujets d'une institution donnée (Chevallard, 1992, p. 90). Les bons sujets sont ceux qui entretiennent un rapport personnel aux objets de l'institution conforme au rapport institutionnel que l'institution entretient avec ces objets. Ainsi, globalement, les « bons sujets » du cycle 4 entretiennent un rapport personnel à la géométrie conforme à ce qui est attendu d'eux au collège, c'est-à-dire qu'ils travaillent dans la géométrie théorique.

Cependant, il n'existe pas un unique rapport institutionnel entre une institution et un objet. En effet, ce rapport institutionnel dépend de la position du sujet dans l'institution [1]. Dans le système scolaire français actuel, les rapports institutionnels aux objets des institutions sont définis par les programmes scolaires.

Au sens de la TAD, un système didactique comporte donc un ou des sujets dans la position d'enseignant ainsi qu'un ou des sujets occupant la position d'élève et enfin, au moins un « enjeu didactique » (Chevallard, 1992, pp. 92-93). Les enjeux didactiques sont définis comme faisant partie d'un sous-ensemble des objets de l'institution. Ces objets sont tels que l'institution manifeste l'intention de rendre le rapport personnel d'un sujet avec ces objets conforme au rapport institutionnel lié à la position dans l'institution. Un enjeu didactique est, par exemple, la « somme des mesures des angles d'un triangle ». Les élèves de l'institution collège dans la position « 6^{e} » n'ont, pour la plupart, pas de rapport personnel à cet objet. Or, dans la position « 5^{e} », l'institution collège entreprend de faire construire ce rapport personnel à l'objet « somme des mesures des angles d'un triangle » et surtout de le rendre conforme au rapport officiel en 5^{e}.

1. Pour les sujets élèves de l'institution, nous pouvons parler de position dans l'institution ou de niveau scolaire.

2.1.2 La transposition didactique

Après avoir présenté la notion de rapport personnel des élèves d'une institution à un objet, nous nous demandons naturellement : comment ce rapport se construit-il et évolue-t-il au cours des positions successives occupées par l'élève au sein de l'institution ? Pour cela, nous nous intéressons d'abord à la question des objets et donc, dans notre cas, à celle du savoir mathématique enseigné.

Le savoir mathématique enseigné aux élèves n'est pas celui des chercheurs en mathématiques. Au contraire, « pour que l'enseignement de tel élément de savoir soit seulement possible, cet élément devra avoir subi certaines déformations, qui le rendront apte à être enseigné » (Chevallard, 1982, p. 3). Ainsi, le savoir mathématique découvert par les chercheurs, qu'on peut appeler le savoir savant, a subi beaucoup de modifications suite aux contraintes imposées par les différentes institutions par lesquelles il passe avant d'arriver dans les classes. Chevallard (1982) propose de les classer en trois catégories : le système d'enseignement (l'établissement qui gère la composition des classes, la répartition des enseignants, les emplois du temps, etc.), l'environnement ou la société (les parents, les mathématiciens, l'Éducation Nationale, etc.) et, entre les deux, la noosphère où se rencontrent représentants du système d'enseignement (présidents d'associations d'enseignants, enseignants militants, etc.) et représentants de la société (parents d'élèves, spécialistes de la discipline, etc.). La transformation du savoir à travers son passage dans ces différentes institutions est ce que Chevallard appelle la transposition didactique : « la transposition didactique a lieu quand des éléments du savoir passent dans le savoir enseigné » (Chevallard & Johsua, 1991, p. 22).

L'objet de cette thèse n'est pas d'étudier le processus de transposition didactique des savoirs géométriques issus des géomètres. Aussi, nous nous contenterons d'une vision générale du phénomène (cf. image 2.1) : le savoir savant est transformé (« transposé didactiquement ») en savoir à enseigner dans les documents officiels du ministère de l'Éducation Nationale (les programmes scolaires, les documents d'accompagnement, etc.) et les manuels scolaires. Le savoir à enseigner est à son tour transformé en savoir enseigné par les enseignants dans les classes. Enfin, le savoir enseigné est transformé en savoir appris par les élèves.

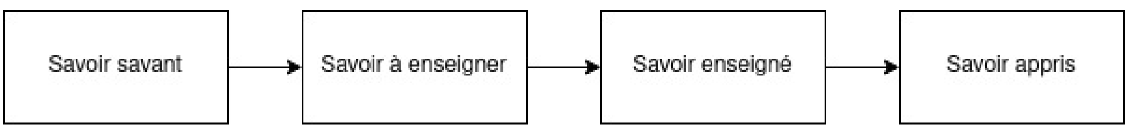

Image 2.1 – Schéma de la transposition didactique

Dans le chapitre 5, nous nous demanderons comment le savoir à enseigner (et donc les enjeux didactiques) apparaît dans les programmes et manuels scolaires et si ceux-ci donnent effectivement des moyens pour faire construire aux élèves un rapport personnel conforme au rapport institutionnel attendu à leur niveau scolaire.

Cependant, comme nous l'avons vu, nous nous plaçons à la transition entre deux institutions : les cycles 3 et 4. Nous pouvons donc nous demander : est-ce que construire un rapport personnel à un objet de savoir d'une institution conforme au rapport officiel de cette institution prépare effectivement les élèves à faire évoluer ce rapport personnel ou à en construire un nouveau dans une autre institution ? À ce sujet, Chevallard précise que rapport officiel d'une institution à un objet et **rapport idoine** à cet objet sont deux notions différentes. Ainsi, « un rapport personnel [...] aussi conforme soit-il au rapport officiel, jouira d'une idonéité limitée dès lors que l'objet de savoir concerné, ayant cessé d'être enjeu didactique pur, ne sera plus qu'outil de l'activité didactique-mathématique de l'élève » (Chevallard, 1989, p. 47). Par exemple, on pourra dire, malgré un rapport personnel conforme au rapport officiel relatif à l'objet « somme des mesures des angles d'un triangle », qu'un élève n'a pas développé un rapport idoine à cet objet s'il ne lui permet pas de l'utiliser comme un outil pour résoudre, notamment, des exercices de construction mettant en jeu les angles d'un triangle.

Ainsi, dans le chapitre 5, il s'agira non seulement d'étudier si les programmes et manuels scolaires permettent à l'élève de construire un rapport personnel conforme au rapport officiel relatifs aux objets de l'institution, mais aussi d'analyser l'idonéité de ce rapport officiel en lien avec les raisons d'être du savoir étudié.

2.1.3 Praxéologies

Nous avons maintenant conscience que les enjeux didactiques visés par l'institution sont les fruits d'une construction qui n'est ni évidente, ni transparente. Nous savons aussi que pour une position donnée au sein d'une institution et pour un objet donné, il existe au moins un rapport officiel, un rapport idoine et un rapport personnel par sujet de l'institution. Ces rapports peuvent être identiques ou non. Mais alors comment les modéliser pour pouvoir les étudier ? Et comment les mettre en relation les uns avec les autres ?

Pour étudier les rapports personnels, institutionnels et idoines, nous utilisons la notion de **praxéologie**.

La TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en

> mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales [...] toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie (Chevallard, 1999, p. 223).

Dans le cadre de la TAD, toute activité humaine peut donc être décrite comme une succession de **tâches t** qui relèvent de **types de tâches T**. Une tâche, relevant d'un type de tâches, est réalisée par une **technique** τ justifiée par un discours rationnel appelé **technologie** θ. Ce discours est lui-même justifié par une **théorie** Θ. Une praxéologie est donc un quadruplet [T,τ,θ,Θ]. Plus particulièrement, une telle praxéologie est appelée **praxéologie ponctuelle** (ou Organisation Mathématique (OM) ponctuelle dans le cadre de l'activité mathématique) car elle est relative à un seul type de tâches.

Nous développons maintenant un peu plus précisément les éléments constitutifs d'une praxéologie. Celle-ci se compose de deux blocs : le premier, [T,τ], est appelé le bloc *praxis* et constitue un « savoir-faire », le deuxième, [θ,Θ], est appelé le bloc *logos* et constitue un « savoir » (Chevallard, 1999, p. 228).

a. Bloc *praxis*

Le bloc *praxis* est composé du type de tâches T et de la technique τ. Pour les définir, il faut d'abord savoir qu'en TAD, la notion de tâche est très large. Chevallard cite par exemple « sourire à quelqu'un » ou « monter un escalier ». Comme nous le voyons dans ces exemples, la tâche, et c'est la même chose pour le type de tâches dont elle est issue, est composée d'un verbe et d'un objet sur lequel celui-ci s'applique. Ainsi, « calculer la valeur d'une expression numérique contenant un radical » est un type de tâches alors que « calculer » n'en est pas un. « Calculer » est ce que Chevallard appelle un **genre de tâches**. À noter que les tâches, types de tâches et genre de tâches « ne sont pas des données de la nature », ce sont des « construits institutionnels » (Chevallard, 1999, p. 224). Ainsi, « la précision avec laquelle on décide de formuler types et genres de tâche relève de choix dépendant de ce que l'on veut étudier et du grain d'analyse souhaité » (Sirejacob, 2017, p. 38).

Dans le cadre de la TAD, une technique est relative à un type de tâches. Or, la plupart du temps, une technique ne réussit que sur une partie des tâches de ce type de tâches. C'est ce que Chevallard appelle la **portée de la technique**. En géométrie, par exemple, considérons le type de tâches « démontrer que deux triangles sont égaux ». Une technique consiste à vérifier que les longueurs de côté des triangles sont égales en comparant leurs mesures deux à deux. Cette technique s'applique effectivement aux triangles dont on connaît la mesure de longueur des côtés mais pas aux autres pour lesquels il faudra employer d'autres techniques.

Lorsque plusieurs techniques sont envisageables, la notion de portée de la technique permet également de parler de techniques « supérieures » à d'autres pour un type de tâches ou une partie du type de tâches (Chevallard, 1999, p. 225). Dans la section 2.3.4, nous verrons comment Chaachoua et Bessot (2019) utilisent la notion de portée de la technique pour organiser et structurer les praxéologies d'un domaine donné.

Dans une institution donnée, on n'enseigne généralement qu'une seule technique (voire un petit nombre de techniques) sans qu'elle soit forcément la meilleure. Les autres techniques ne sont alors généralement pas ou plus acceptées. Les techniques enseignées et refusées changent au cours du temps institutionnel. Des techniques peuvent aussi avoir des portées différentes sans que l'une soit supérieure aux autres, leur application dépend alors du savoir en jeu dans les tâches du type de tâches considéré.

Dans la continuité des travaux en TAD, Chaachoua (2018) propose de décrire une technique par un ensemble de types de tâches. Il distingue alors deux sortes de types de tâches :

— les types de tâches extrinsèques « qui existent en dehors des techniques et peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves » (Chaachoua, 2018, p. 16) ;

— les types de tâches intrinsèques « qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches » (Chaachoua, 2018, p. 16). À noter que ces types de tâches peuvent parfois être prescrits aux élèves dans certains contextes pour travailler explicitement un morceau de la technique.

Par exemple, en géométrie, pour le type de tâches « construire un triangle ABC tel que $AB = 7cm$, $AC = 6cm$ et $BC = 3cm$ », une technique possible consiste à :

— construire un segment $[AB]$ de $7cm$;

— construire le cercle de centre A de rayon $6cm$;

— construire le cercle de centre B de rayon $3cm$;

— placer le point C à une des intersections entre ces deux cercles ;

— construire le triangle ABC.

Le type de tâches « placer le point C à une des intersections entre les deux cercles » est intrinsèque car il ne vit que comme un ingrédient d'une technique de résolution d'un autre type de tâches.

Les autres types de tâches de cette technique sont dits élémentaires (Chaachoua, 2018, p. 17) au cycle 4 : ils ne sont pas prescrits par l'institution en tant que praxéologies (avec une technique, une technologie et une théorie associées) alors que « construire un segment de longueur donnée » est un type de tâches non élémentaire en CE1 et « construire un cercle de centre et de rayon donnés » est un type de tâches non élémentaire en 6e, par exemple.

b. Bloc *logos*

Le bloc *logos* est composé de la technologie θ et de la théorie Θ. Une technologie, comme nous l'avons vu, est un discours rationnel venant justifier la technique employée. À noter que « le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel » (Chevallard, 1999, p. 226). La technologie peut être partielle, voire en partie intégrée dans la technique. Le fait qu'il n'existe souvent qu'une technique reconnue dans l'institution cause aussi parfois une absence de justification puisqu'il n'y a (en apparence) pas d'autres possibilités.

La seule technologie ne suffit pas à justifier la réalisation du type de tâches. Ainsi, la théorie est également un discours rationnel d'un niveau d'abstraction supérieur qui vient justifier la technologie. De la même manière que la distinction entre les types de tâches et les genres de tâches n'est pas universelle, la distinction entre technologie et théorie dépend des institutions dans lesquelles on se place et de la position du sujet à l'intérieur de celle-ci.

Wozniak (2012) définit ainsi des praxéologies muettes, faibles et fortes en fonction de leur composante *logos*. Une praxéologie est dite muette « lorsqu'elle se donne à voir uniquement à travers sa composante praxis » (Wozniak, 2012, p. 66). Cela ne signifie pas qu'il n'y a pas de discours rationnel pour justifier la technique employée mais celui-ci n'est pas montré. Une praxéologie est dite faible lorsque la composante *logos* de la praxéologie est donnée à voir mais que la technologie se limite à la description de la technique. Enfin, la praxéologie est dite forte lorsqu'une technique et un discours technologico-théorique justifiant cette technique sont développés.

Dans la section 2.1.5, nous verrons comment les praxéologies ponctuelles que nous venons de définir s'agrègent entre elles dans l'enseignement. Nous aborderons également leur incomplétude dans la section 2.1.6.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, les parcours d'apprentissage que nous concevons prennent notamment en compte les connaissances des élèves, c'est-à-dire en termes praxéologiques, les praxéologies développées par les élèves dans leurs apprentissages passés. Dans la section suivante, nous présentons donc une première notion pour étudier les praxéologies apprises par les élèves.

2.1.4 Praxéologies personnelles

Nous nous intéressons ici aux travaux de Croset et Chaachoua (2016) qui cherchent également à concevoir un EIAH. Comme dans notre travail et celui de Grugeon (1997), même si l'enjeu est différent, on retrouve une articulation entre le point de vue de l'institution et celui de l'élève. Pour ce faire, Croset et Chaachoua étendent le modèle praxéologique de la TAD avec les « praxéologies personnelles » qui correspondent aux praxéologies développées par les élèves prenant donc également en compte les praxéologies erronées.

Les auteurs partent du constat que « dans certains cas, le décalage entre la technique τ de l'élève et la technique attendue par l'institution peut être modélisé de la manière suivante : l'élève perçoit la tâche t comme relevant d'un type de tâches différent de celui de l'institution » (Croset & Chaachoua, 2016, p. 180). Les praxéologies personnelles sont donc des quadruplets composés d'un type de tâches personnel, d'une technique personnelle (ces deux premiers éléments forment un bloc *praxis* personnel), d'une technologie personnelle et d'une théorie personnelle (bloc *logos* personnel). Un type de tâches personnel ne correspond pas forcément à un type de tâches tel que défini dans l'institution, c'est « l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique » (Croset & Chaachoua, 2016, p. 180). Cette définition signifie que l'application de deux techniques personnelles différentes se fait nécessairement pour résoudre deux types de tâches personnels différents et réciproquement.

Ainsi, une « technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel » (Croset & Chaachoua, 2016, p. 180). Cette technique peut être correcte ou erronée mais il faut qu'elle soit régulièrement utilisée par un élève ou un groupe d'élèves pour être considérée comme une technique personnelle (ceci afin d'écarter les « erreurs d'étourderies »).

La technologie personnelle « gouverne et légitime l'utilisation de *praxis* personnelles » (Croset & Chaachoua, 2016, p. 180). La technologie personnelle peut également être correcte ou erronée. La technologie personnelle peut parfois être correcte pour résoudre certains types de tâches mais être généralisée et utilisée en dehors de sa portée. Par exemple, le théorème de Pythagore est une technologie correcte pour justifier le calcul de mesure de longueur dans un triangle rectangle mais elle ne l'est plus dans un triangle non rectangle. Comme dans le modèle praxéologique, la théorie personnelle justifie la technologie personnelle.

Dans notre travail, nous nous intéressons également aux praxéologies développées par l'élève. Cependant, la caractérisation des types de tâches personnels (re)définis par l'élève produit un grand nombre de praxéologies qui nous semble peu exploitable pour prendre en compte les cohérences dans l'activité d'un élève sur tout un domaine des mathématiques. C'est pourquoi nous ne considérons que les praxéologies personnelles dont les types de tâches correspondent à des types de tâches institutionnels [2] et nous les étudions au niveau du bloc *logos*. De plus, nous cherchons à les hiérarchiser au regard d'une référence épistémologique (cf. section 2.1.6) et de modes de justification (cf. section 2.2.1). Nous nous intéresserons donc dorénavant aux notions de profil d'élèves ou de modes de justification que nous présenterons dans la section 2.2.1.

2.1.5 Échelle de codétermination des savoirs

Dans la section 2.1.3, nous avons vu ce qu'était une praxéologie ponctuelle. Cependant, il est assez rare de rencontrer des praxéologies ponctuelles lorsqu'on étudie l'enseignement d'une notion (Chevallard, 1999, p. 229). Dans la pratique, les praxéologies ponctuelles s'agrègent autour d'une même technologie pour former une **praxéologie locale** que Chevallard (2002) appelle aussi un « thème d'études » (en référence à un ancien découpage des programmes scolaires). À leur tour, les praxéologies locales s'agrègent autour d'une même théorie pour former une **praxéologie régionale** (ou un « secteur d'études »). Enfin, dans une institution, ces praxéologies régionales peuvent encore s'agréger sous la forme d'une **praxéologie globale** (ou un « domaine d'études »). L'ensemble des praxéologies globales forment une discipline, en ce qui nous concerne, il s'agit des mathématiques.

Si on rencontre rarement des praxéologies ponctuelles isolées, c'est parce qu'il y a souvent peu d'intérêt à étudier un type de tâches (associé à une technique, une technologie et une théorie) pour lui-même. Ainsi, le type de tâche « calculer une mesure de longueur dans un triangle rectangle » associé à la technique (faisant aussi office de technologie ici) qui consiste à appliquer le théorème de Pythagore, est une praxéologie ponctuelle pour laquelle on peut se demander s'il est pertinent de l'enseigner pour elle-même. En revanche, si on replace cette praxéologie dans

2. Nous continuerons donc à parler de praxéologies apprises comme dans le modèle de Bosch et Gascón (2005) (cf. section 2.1.6).

le contexte de la construction de triangles, lui-même placé dans le contexte de l'étude des triangles puis des formes géométriques, l'intérêt de ce type de tâches est mieux justifié. Au lycée professionnel, notamment, on pourra aussi le lier à certaines pratiques professionnelles. Il s'agit donc de mettre en relation les différents niveaux de praxéologies et étudier les façons dont elles s'agrègent pour la construction des rapports institutionnels ou personnels. C'est ainsi que Chevallard introduit les niveaux de codétermination des savoirs :

> L'absence de mise en relation du niveau du sujet ou du thème avec les niveaux supérieurs – secteurs et domaines, pour ne pas parler du niveau de la discipline elle-même – rend impossible de penser les relations de motivation entre types de tâches. Du même coup, l'étude d'un sujet ou d'un thème ne saurait mettre en jeu les tâches motivantes que seule la prise en compte des niveaux supérieurs de détermination mathématique permettrait de mobiliser (Chevallard, 2002, p. 6).

Selon Chevallard, il existe huit niveaux de codétermination des praxéologies. Ces niveaux peuvent être propres à la discipline enseignée ou non (cf. image 2.2).

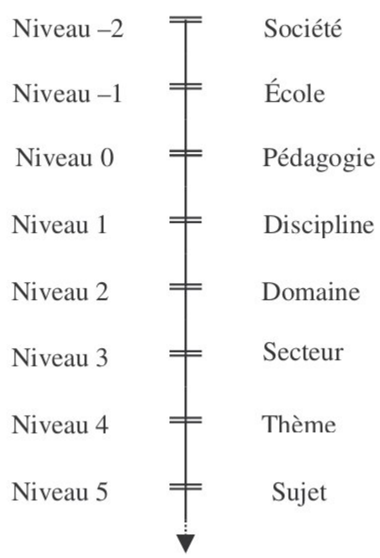

Image 2.2 – Échelle de codétermination des savoirs (Chevallard, 2002, p. 10)

Identifier les organisations praxéologiques mises en jeu dans les programmes et manuels scolaires nous permet de faire des hypothèses sur les rapports officiels dans les différentes positions de l'institution collège. Identifier les organisations praxéologiques mises en jeu par l'élève nous permet de faire des hypothèses sur son rapport personnel aux objets de l'institution. Or, comme nous l'avons vu, le rapport officiel ne permet pas forcément de déterminer le rapport idoine. Il nous faut donc un moyen de déterminer quels rapports et plus précisément quelles praxéologies sont idoines et lesquelles ne le sont pas ou plus à un niveau scolaire donné.

2.1.6 Modèle praxéologique de référence

Bosch, Fonseca, et Gascón (2004) étudient les difficultés des étudiants espagnols à la transition entre le secondaire et l'université. Ils constatent que les organisations praxéologiques mises en jeu dans les programmes et manuels scolaires du secondaire sont « ponctuelles, rigides et peu articulées entre elles, ce qui leur empêche de s'intégrer pour former des organisations mathématiques locales relativement complètes » (Bosch et al., 2004, p. 206). Selon ces chercheurs, cette **incomplétude des organisations praxéologiques** crée des discontinuités didactiques entre l'enseignement secondaire et l'université, elles-mêmes à l'origine des difficultés des étudiants comme nous l'avons vu pour la transition cycle 3 / cycle 4 dans la section 1.2.3.

Des organisations praxéologiques incomplètes se repèrent à l'absence d'un ou plusieurs des éléments qui composent une praxéologie. Par exemple, on peut proposer à des élèves de CM2 le type de tâches « calculer l'aire d'un rectangle » associé à la technique « appliquer la formule $longueur \times largeur$ », et le type de tâches « calculer l'aire d'un carré » associé à la technique « appliquer la formule *côté* × *côté* », sans faire référence à une technologie et en particulier à la technologie commune. Dans ce cas, on ne présente que des praxéologies muettes ou faibles au sens de Wozniak (2012), ce sont des praxéologies ponctuelles isolées qui ne sont pas articulées entre elles via la praxéologie locale liée à la technologie de calcul d'aire du rectangle (à un niveau supérieur, on pourrait même imaginer une praxéologie locale dont la technologie serait celle de calcul d'aire du parallélogramme).

De cette constatation, Bosch et Gascón (2005) déduisent la nécessité de définir une praxéologie de référence pour compléter le schéma de la transposition didactique que nous avons décrit dans la section 2.1.2. Ce nouveau schéma est représenté sur l'image 2.3.

Cette référence issue d'un travail épistémologique prend divers noms selon les chercheurs et les recherches : OM de référence épistémologique, Modèle Épistémologique de Référence (MER), Modèle Praxéologique de Référence (MPR)... Comme Bosch (2019), nous choisissons de conserver le terme « **modèle praxéologique de référence** », notamment parce que nous utilisons la notion de praxéologie pour décrire ce modèle. Dans le chapitre 4, nous présenterons donc un Modèle Praxéologique de Référence (MPR) relatif aux figures planes de la géométrie « à la Euclide », sa

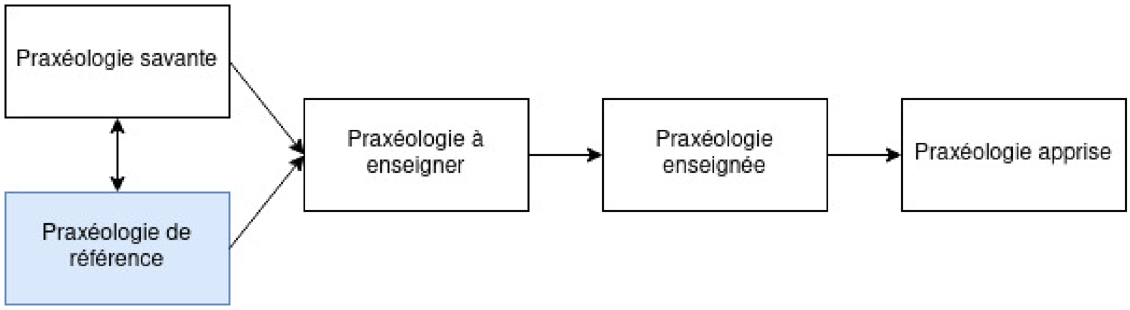

Image 2.3 – Outil d'analyse de la transposition didactique (Bosch & Gascón, 2005)

conception fait l'objet du chapitre 3.

2.2 Point de vue de l'élève

Nous utilisons donc la notion de praxéologie pour étudier comment l'institution prend en charge le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique à la transition cycle 3 / cycle 4. Cependant, notre travail porte aussi sur la conception d'un EIAH qui prend en compte et s'adapte aux raisonnements, erreurs et difficultés mathématiques de élève. Nous nous intéressons donc aux activités cognitives en jeu dans l'apprentissage de la géométrie plane. Dans cette section, nous ne développons que les concepts didactiques que nous utiliserons tandis que les activités cognitives elles-mêmes sont plus largement étudiées dans le chapitre 3.

2.2.1 Besoins d'apprentissage et modes de justification

À l'origine des travaux autour du logiciel Pépite, Grugeon (1997) cherche à comprendre pourquoi des élèves ayant un baccalauréat technologique se retrouvent en difficulté en mathématiques lorsqu'ils entrent en première d'adaptation [3].

Elle met donc en relation le fonctionnement cognitif des élèves, défini à partir de leurs rapports personnels à l'algèbre élémentaire, et les rapports institutionnels à l'algèbre dans les deux institutions auxquelles elle s'intéresse : le BEP tertiaire et la première d'adaptation. Grugeon décrit l'algèbre selon plusieurs dimensions à partir desquelles elle construit une structure d'analyse pour repérer les rapports personnels et institutionnels à l'algèbre. Comme nous l'avons vu avec l'hypothèse 1, au-delà des

3. Dans les années 1990, après l'obtention d'un Brevet d'Études Professionnelles (BEP), il était possible pour les meilleurs élèves de terminale d'obtenir également un baccalauréat technologique en passant par une classe passerelle entre le BEP et la terminale technologique : la première G d'adaptation, qui devient première S.T.T. d'adaptation à partir de 1993.

difficultés d'ordre cognitif, elle explique les difficultés mathématiques des élèves en première G par des décalages entre ces deux institutions.

En s'appuyant sur les travaux de Castela (2008), Grugeon-Allys (2016) fait l'hypothèse que ces décalages peuvent constituer autant de **besoins d'apprentissage** des élèves ignorés par les institutions. Bien que régulièrement utilisée, cette notion de besoins d'apprentissage n'est jamais réellement définie dans les lectures que nous avons faites. Nous proposons donc de définir les besoins d'apprentissage d'un élève comme « ce qu'il est nécessaire de travailler pour faire évoluer son rapport personnel actuel vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution » (Jolivet, Lesnes-Cuisiniez, & Grugeon-Allys, À paraître). Les besoins d'apprentissage correspondent donc à ce qui est à travailler par l'élève pour :

— favoriser la négociation de ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud et al., 1988) ;

— poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques pour résoudre des tâches du domaine nécessitant pour leur résolution la convocation de différents types de tâches (Castela, 2008) comme nous le verrons dans la section 2.2.2.

Dans le cadre du logiciel Pépite, Grugeon construit donc un diagnostic informatisé de dix-neufs tâches pour essayer de repérer ces besoins d'apprentissage. Une analyse très fine des techniques mises en œuvre dans la résolution de chacune de ces tâches, n'étant pas directement exploitable par les enseignants en classe, Grugeon s'intéresse à une étude transversale des tâches pour repérer des cohérences dans les raisonnements mis en œuvre par les élèves et définir ainsi des profils d'élèves. Ce qu'elle exprimera, après l'introduction des praxéologies dans la TAD (Chevallard, 1999) par : « nous cherchons à dégager à travers les techniques correctes ou incorrectes mobilisées par les élèves, le bloc technologico-théorique que les élèves mobilisent de façon **prégnante** » (Grugeon-Allys, 2016, p. 66, c'est nous qui soulignons). Ainsi, comme nous l'avons vu dans la section 2.1.4, Grugeon-Allys s'intéresse au bloc *logos* des praxéologies, correctes ou erronées, développées par les élèves et les hiérarchise pour situer les praxéologies apprises par rapport à celles visées.

Pour chacune des dimensions de l'algèbre relevées (usage de l'algèbre (UA), calcul algébrique (CA), et traduction - génération entre différents registres sémiotiques au sens de Duval (1993b) (T)), Grugeon-Allys identifie des modes qui caractérisent les praxéologies développées par les élèves au niveau du bloc technologico-théorique et permet de les comparer au modèle de référence. Elle définit ainsi un mode technologico-théorique idoine au regard du niveau scolaire considéré, un mode technologico-théorique faible en lien avec une technologie faible développée par l'enseignant au sens de Wozniak (2012), un mode technologico-théorique incorrect relativement à certains aspects épistémologiques de l'algèbre élémentaire et un mode technologico-théorique qui relève d'un *logos* « ancien », ici, appuyé sur l'arithmétique. La définition des modes technologico-théoriques permet l'élaboration d'une typologie des praxéologies apprises par les élèves de façon à repérer leurs besoins d'apprentissages en les comparant aux praxéologies définies dans le MPR.

Pour désigner les modes technologico-théoriques définis par Grugeon-Allys (2016), nous parlons de **modes de justification**. En effet, un mode de justification est en lien avec le processus de conceptualisation d'un élève et rend compte d'un aspect de son fonctionnement cognitif sur un domaine donné des mathématiques. Il s'agit de caractériser un aspect de son activité lié en particulier à la justification des techniques de résolution employées, voire à une justification plus théorique. Ce choix nous permet également d'éviter le terme « technologique » qui peut prêter à confusion, en particulier dans le domaine des EIAH et lorsque nous discutons avec d'autres acteurs du projet *MindMath* qui ne font pas partie de la communauté didactique. Nous nous alignons ici sur le choix de Taranto, Robutti, et Arzarello qui travaillent dans un contexte de MOOCs (*Massive Open Online Courses*), la justification renvoyant ici à la partie technologie des praxéologies mobilisées par l'élève (Taranto et al., 2020, p. 1440).

En complément du MPR qui nous permet d'analyser les praxéologies à enseigner en prenant en compte un point de vue institutionnel, les modes de justification nous permettent d'analyser les praxéologies apprises en prenant en compte le point de vue de l'élève (cf. image 2.4).

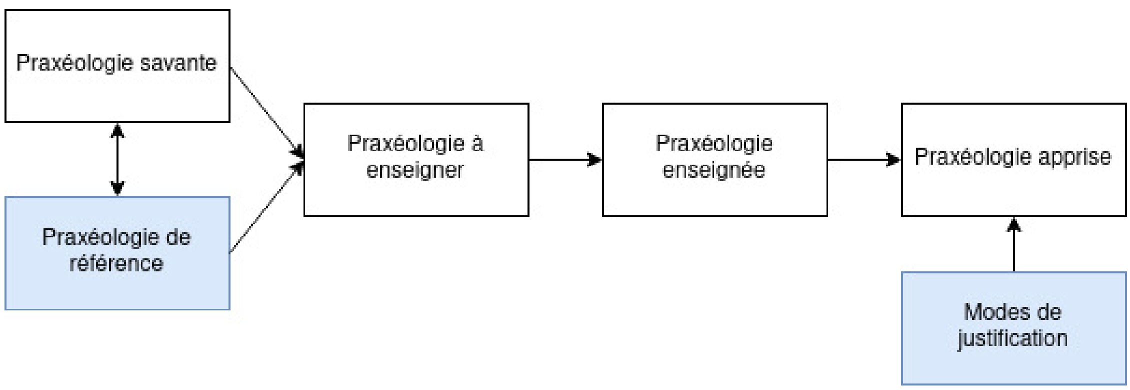

Image 2.4 – Nouvel outil d'analyse des praxéologies

Dans le chapitre 4, nous définirons les modes de justification en géométrie selon les dimensions de l'activité géométrique que nous expliciterons. Dans le chapitre

7, nous verrons comment nous nous appuyons sur la définition de ces modes de justification pour modéliser l'élève dans l'EIAH.

2.2.2 Complexité des tâches mathématiques

Le but de cette thèse est d'amener l'élève à entrer dans la géométrie théorique et donc à faire évoluer son activité géométrique. Pour cela, au-delà du travail sur les différents types de tâches du domaine géométrique, nous jouons, pour un type de tâches donné, sur la portée des techniques et la complexité des tâches proposées.

Ainsi, nous confrontons d'abord l'élève à la limite de la portée des techniques (erronées ou anciennes) qu'il utilise et donc à la nécessité de mobiliser d'autres techniques associées à d'autres technologies idoines pour résoudre un type de tâches donné (Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin, & Delozanne, 2012, p. 14).

Une fois une praxéologie ponctuelle correspondant à une technologie visée introduite, nous jouons sur la **complexité** des tâches proposées afin de faire développer à l'élève un rapport idoine à la géométrie théorique en le rendant capable d'utiliser les objets de l'institution en tant qu'outils pour résoudre des tâches où ils ne sont pas forcément directement évoqués. En effet, l'élève « n'avance pas seulement par introduction d'une OM [4], il progresse en complexifiant les niveaux d'intervention de cette OM » (Castela, 2008, p. 155). Cette notion de complexité a été étudiée par Robert (2008b) dans le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques. En TAD, Castela s'appuie sur ces travaux pour proposer une analyse à un niveau plutôt macrodidactique (Castela, 2008, p. 153).

Nous nous plaçons donc ici du côté du sujet cognitif. Celui-ci développe une activité pour réaliser une **tâche**. Une tâche a toujours un objet à transformer ou à étudier et « peut se décrire au minimum en termes de résultats à atteindre : l'état de l'objet quand la tâche aura été (correctement) réalisée » (Rogalski, 2008, p. 15). L'activité est donc composée d'actions, d'interactions avec d'autres sujets, d'hypothèses, de décisions prises, de manières de gérer le temps, de l'état personnel du sujet, etc. Mais si le sujet, en réalisant la tâche, modifie la situation, il se modifie également lui-même, c'est la dimension constructive de l'activité. Nous verrons comment Rabardel (1995) part également de ce principe pour développer la notion de genèse instrumentale (cf. section 2.3.2).

On distingue en fait plusieurs tâches selon le point de vue auquel on se situe.

4. Castela (2008) parle d'OM quand nous parlons de praxéologies dans le reste de thèse, on peut les employer comme synonymes (cf. section 2.1.3).

Ainsi, du côté du prescripteur de la tâche, on parle de tâche prescrite (les buts et conditions sont explicités dans les textes prescriptifs) ou de tâche attendue (qui correspond au contenu réel des attentes de la personne qui prescrit la tâche). Du côté de celui qui réalise la tâche, on parle de tâche redéfinie (conception de la tâche que se donne le sujet) ou de tâche effective (tâche à laquelle le sujet répond effectivement) (Rogalski, 2003, p. 350). « L'activité est déterminée par la tâche effective, ce que le sujet a effectivement accompli, les buts visés par l'action, les moyens effectivement mis en œuvre, les contraintes effectivement respectées » (Rogalski, 2003, p. 350).

Pour analyser l'activité de l'élève, on peut donc d'abord analyser *a priori* la tâche prescrite (par l'enseignant la plupart du temps). Celle-ci s'analyse, bien sûr, en référence aux savoirs en jeu mais aussi aux connaissances supposées disponibles de l'élève et au contexte (niveau de la classe, programmes scolaires en vigueur, environnement technologique, etc.) (Vandebrouck & Robert, 2017, p. 4). Ainsi, Castela se demande « quels sont les savoirs déjà institutionnalisés ? Quels sont les problèmes déjà résolus ? L'énoncé est-il posé dans le cadre d'un chapitre précis ? Certaines techniques sont-elles usuellement associées à certains éléments, configurations ou autres ostensifs [5] par exemple ? Ceux-ci sont-ils présents dans l'énoncé ? » (Castela, 2008, p. 151). De plus, le traitement de cette tâche « peut susciter l'apparition de tâches cachées dans la prescription initiale » (Castela, 2008, p. 151), ces tâches étant souvent issues de types de tâches différents. La détermination de ces tâches cachées et les réponses aux questions de Castela permettent de déterminer la complexité de la tâche prescrite.

Le premier élément de complexité de la tâche relevé par Castela est l'identification du ou des type(s) de tâches en jeu dans la résolution de la tâche donnée. La tâche peut ainsi faire appel à des connaissances nouvelles (en cours d'apprentissage) ou anciennes pour l'élève. Le deuxième élément est lié à l'identification des connaissances lorsqu'il est à la charge de l'élève. L'activité est alors encore différente, ce que Castela exprime en termes de convocation d'OM. Elle différencie ainsi :

— les « OM r-convoquées » [6] lorsque l'élève a à sa charge de reconnaître le type de tâches et/ou de choisir parmi plusieurs OM relatives au type de tâches celle qu'il va mobiliser ;

5. « Nous parlerons d'objet ostensif – du latin *ostendere*, "montrer, présenter avec insistance" – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 90).

6. Ici, le « r » renvoie au « résolveur de la tâche ».

— les « OM t-convoquées » lorsque la tâche impose l'OM : « l'énoncé mentionne explicitement le type de tâches et certains éléments de la tâche font qu'une seule technique est envisageable » (Castela, 2008, p. 153).

D'un point de vue plus micro, c'est ce que Robert appelle initialement le **niveau de mise en fonctionnement des connaissances**. Lorsque les **adaptations** des connaissances sont au moins partiellement indiquées, on parle de niveau de mise en fonctionnement mobilisable (ce qui correspond aux OM t-convoquées), lorsque c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, il s'agit du niveau de mise en fonctionnement disponible (ce qui correspond aux OM r-convoquées). Ces adaptations dont parlent Robert sont d'autres facteurs de complexité de la tâche.

En effet, les adaptations interviennent dans les tâches qui ne sont pas des applications immédiates, c'est-à-dire des tâches pour lesquelles l'application des connaissances n'est pas simple (sans adaptation) et/ou isolée (sans mélanges des connaissances). Robert distingue sept grands types d'adaptations qui décrivent comment l'élève doit adapter l'application des connaissances en jeu pour résoudre la tâche donnée (Robert, 2008b, p. 37).

A1. Reconnaître les modalités d'application des connaissances. Par exemple, reconnaître une configuration de Thalès pour pouvoir appliquer le théorème du même nom.

A2. Introduire des intermédiaires comme une expression, un point ou une droite.

A3. Mélanger plusieurs notions ou cadres via des changements de points de vue, des mises en relation, des interprétations. Par exemple, utiliser du calcul algébrique dans la résolution d'une tâche de géométrie.

A4. Organiser des calculs ou des raisonnements, introduire des étapes.

A5. Utiliser les questions précédentes dans un exercice.

A6. Faire un choix (qu'il y ait ou non plusieurs possibilités correctes).

A7. Adapter sa procédure en raison d'un manque de connaissances sur les notions en jeu.

Nous voyons ici que l'activité de l'élève n'est pas uniquement composée de sous-activités de traitement. Au contraire, elle se compose également de sous-activités de reconnaissance et d'organisation des connaissances. Il ne suffit donc pas de connaître les propriétés des figures concernées pour résoudre une tâche en géométrie. Il faut pouvoir ordonner son raisonnement pour appliquer les propriétés dans leur domaine de validité et mener à un résultat utilisable dans le cadre de la résolution de la tâche.

Enfin, les parcours d'apprentissage que nous proposons doivent permettre à l'élève de partir de son rapport personnel aux objets en jeu pour développer un rapport idoine à ces objets. C'est pourquoi nous prenons également en compte la notion de Zone de Proche Développement aussi appelée Zone Proximale de Développement (ZPD) (Vygotski, 1985 [1934]). La ZPD « est située entre le niveau présent de développement, attesté par ce que l'enfant est capable de faire / de résoudre, de façon autonome, et ce que l'enfant peut faire / résoudre avec l'aide d'autrui (adulte, enseignant, pair plus développé) » (Vandebrouck, 2008, p. 384). Cela signifie qu'un élève apprend uniquement dans des situations relevant de sa ZPD. En effet, dans le cas contraire, soit la situation relève de ce que l'élève connaît déjà et il n'apprend rien de nouveau, soit elle relève d'une zone au-delà de sa ZPD et les aides apportées à l'élève ne produisent « au mieux qu'un effet de copie immédiate » (Vandebrouck, 2008, p. 384). Le but de cette thèse étant de concevoir des parcours d'apprentissage progressifs, il nous semble important de prendre en compte la notion de ZPD pour que les tâches proposées au sein des parcours puissent effectivement permettre à l'élève d'apprendre. En pratique, les modes de justification que nous définissons (cf. section 2.2.1) nous donnent une information sur la ZPD de l'élève. C'est cette information nous prenons en compte dans la conception des parcours d'apprentissage.

Dans le chapitre 3, nous préciserons la complexité des tâches de construction que nous concevons pour les parcours d'apprentissage. Dans le chapitre 7, nous présenterons la modélisation de ces tâches à partir d'un système de variables caractérisant le type de tâches dont elles sont issues, leur complexité et la portée des techniques. Nous verrons également comment la définition des parcours et la succession des tâches du parcours prennent en compte certains aspects de la ZPD de l'élève en lien avec son mode de justification.

2.2.3 Aides procédurales, aides constructives

À l'analyse de la tâche prescrite, s'ajoute l'analyse de la tâche effective. Ces analyses se fondent sur « la nature du travail organisé dans la classe, la chronologie, les aides que l'enseignant apporte aux élèves et les échanges qui ont lieu » (Robert, 2008b, p. 37). Le rôle de l'enseignant est particulièrement pris en compte puisque, la plupart du temps, il ajoute des éléments pendant le déroulement de la séance. Nous nous intéressons en particulier aux aides qu'il peut apporter. Robert (2008b) en distingue de deux grands types :

— les aides **procédurales** qui jouent sur les tâches prescrites et modifient donc l'activité et les adaptations par rapport à ce qui était prévu à l'origine dans l'énoncé de la tâche initiale (indications, introduction de sous-tâches, nouveau découpage de la tâche, etc.) ;

— les aides **constructives** qui « ajoutent quelque chose entre l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée), dans sa tête, de la connaissance qui pourrait en résulter » (Robert, 2008b, p. 38) (reprise de ce qui a été fait, rappels, bilans, interventions amenant les élèves à prendre du recul par rapport à la résolution de la tâche, etc.).

Or, le chercheur n'a pas accès à la majorité de ce qui se passe dans la tête de l'élève. C'est pourquoi, une partie des analyses dans le cadre de la théorie de l'activité en didactique des mathématiques consiste « à délimiter ce que les élèves réels peuvent avoir eu "à faire", leur activités possibles » (Robert, 2008a, p. 7). L'analyse des aides apportées à l'élève pendant la résolution de la tâche participe de cette délimitation. Elle permet notamment de reconstruire l'activité *a maxima* et l'activité *a minima* de l'élève. La première correspond à l'activité développée par un élève qui commence à résoudre la tâche dès que l'enseignant le demande, la deuxième à l'activité développée par un élève qui attend que toutes les aides aient été données. Dans le chapitre 8, nous exploitons ces notions pour caractériser les rétroactions proposées dans le logiciel MindMath et pour analyser les productions des élèves en conséquence.

2.3 Prise en compte de l'outil informatique

Comme nous l'avons vu, nous travaillons dans le cadre du projet *MindMath* qui vise la conception d'un EIAH. Nous nous demandons donc quelles sont les difficultés liées au fait de travailler sur un logiciel, et en particulier un logiciel de géométrie dynamique, que vont rencontrer les élèves.

Dans cette section, nous présentons donc trois travaux théoriques qui permettent de prendre en compte l'utilisation de l'outil informatique mais c'est dans le chapitre 6 que nous développons plus longuement les spécificités de la géométrie dynamique.

2.3.1 Transposition informatique

L'introduction des logiciels de géométrie dynamique dans l'enseignement ne se réduit pas simplement à l'apport d'un nouvel outil permettant de travailler autrement les savoirs géométriques en jeu dans les programmes scolaires. Les choix de modélisation et de représentation des connaissances lors de la création du logiciel influencent la nature même de la connaissance et donc l'apprentissage. C'est ce que Balacheff (1991) appelle la transposition informatique en référence à la transposition didactique : « nous parlerons de transposition informatique pour parler de ce traitement de la connaissance qui en permet la représentation et l'implémentation dans un dispositif informatique, qu'il s'agisse ensuite de la "montrer" ou de la "manipuler" » (Balacheff, 1991, p. 15).

Les contraintes liées à la transposition informatique interviennent à deux niveaux : « celui de la représentation et du traitement interne des savoirs en machine, et celui de la représentation et du traitement à l'interface » (Artigue, 1997, p. 139). Cela rend d'autant plus intéressante la collaboration entre didacticiens des mathématiques et informaticiens à chaque étape de la conception des logiciels qui seront utilisés à des fins pédagogiques comme c'est le cas dans le projet *MindMath*.

Il y a un décalage entre la mise en œuvre « traditionnelle » des savoirs et celle réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique. Ce décalage peut être transparent pour l'enseignant mais modifier complètement la tâche pour l'élève (Artigue, 1997) qui doit donc apprendre à distinguer les connaissances mathématiques liées au savoir en jeu, des connaissances liées à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. De même, l'élève doit apprendre à identifier parmi les retours du logiciel ceux qui ont une signification mathématique (Soury-Lavergne, 1998, p. 110).

Balacheff (1994a) distingue ainsi deux enjeux principaux dans la conception d'un EIAH relativement à la transposition informatique :

— du côté de la modélisation des savoirs, la question du domaine de validité épistémologique des EIAH est centrale car il détermine les apprentissages de l'élève, « il s'agit de savoir quels apprentissages sont permis – au moins potentiellement » (Balacheff, 1994a, p. 22). Pour étudier ce domaine de validité, selon Balacheff, on peut s'intéresser au « domaine de problèmes auquel l'environnement donne accès, [aux] caractéristiques fonctionnelles et sémiotiques de l'interface, [à] la cohérence interne et [à] la tolérance du dispositif » (Balacheff, 1994a, p. 22) ;

— du côté de la modélisation de l'apprenant, la question de ce qui est observé par le chercheur permettant des inférences sur les conceptions de l'élève est centrale. Balacheff distingue un niveau comportemental auquel on rend compte des comportements de l'élève utilisant l'environnement d'apprentissage, et un niveau épistémique auquel on attribue une interprétation à ces comportements (Balacheff, 1994a, p. 24).

Dans le chapitre 7, nous verrons comment nous représentons le savoir en jeu dans une ontologie à partir du MPR élaboré et présenté dans les chapitres 3 et 4. Nous verrons également comment nous modélisons l'apprenant à partir des modes de justification introduits dans la section 2.2.1 et que nous définirons *a priori* dans le chapitre 4.

Enfin, bien que nous gardions à l'esprit cette question, dans notre travail thèse, nous ne cherchons pas à comparer cette représentation ainsi que les apprentissages des élèves dans les environnements papier-crayon et informatique. C'est une des perspectives que nous pourrions développer dans la suite du projet *MindMath*.

2.3.2 La genèse instrumentale

Le fait de travailler dans le contexte de la géométrie dynamique implique l'utilisation « d'outils » spécifiques. Or, ce n'est pas parce qu'un enseignant propose un outil (informatique ou non) à ses élèves que ceux-ci vont s'en emparer de la façon attendue. Dans cette section, nous étudions donc la dimension instrumentale du travail en géométrie dynamique en nous appuyant sur les travaux de Rabardel (1995).

L'approche instrumentale est un domaine de la psychologie qui vise à étudier les relations entre les Hommes et les systèmes techniques du point de vue du sujet en activité dans un certain contexte (de travail, de formation ou de vie quotidienne). Les systèmes techniques en question sont appelés artefacts, ils peuvent être matériels ou symboliques. Les instruments sont, eux, construits par le sujet au cours de ce que Rabardel (1995) appelle la genèse instrumentale. Ils sont composés de l'artefact et de schèmes d'utilisation associés. Ces schèmes peuvent être personnels au sujet ou sociaux (ou encore un mélange des deux).

La genèse instrumentale résulte d'un processus d'instrumentalisation et d'un processus d'instrumentation.

- Processus d'instrumentalisation : processus dirigé du sujet vers l'artefact. Le sujet adapte l'artefact à ses besoins en fonction de ses connaissances et du contexte de l'activité. Le sujet sélectionne, regroupe, détourne, transforme, enrichit les propriétés de l'artefact. Des fonctions nouvelles qui n'ont pas été prévues par les concepteurs de l'artefact peuvent apparaître.
- Processus d'instrumentation : processus dirigé de l'artefact vers le sujet. Les possibilités et les contraintes de l'artefact modifient l'activité du sujet qui doit adapter ses schèmes d'action et d'utilisation à l'artefact.

Rabardel précise que « ces deux types de processus sont le fait du sujet » (Rabardel, 1995, p. 5), comme nous l'avons vu, ils se distinguent par l'orientation de l'activité (vers le sujet ou vers l'artefact).

Dans les situations d'utilisation d'un artefact, il y a trois pôles importants : le sujet (en ce qui concerne la didactique des mathématiques, il s'agira plus particulièrement de l'enseignant, du formateur ou de l'élève), l'artefact (nous allons étudier ici les logiciels de géométrie dynamique) et « l'objet vers lequel l'action à l'aide de l'instrument est dirigée » (Rabardel, 1995, p. 59) (pour nous, ce sera le savoir mathématique en jeu dans la tâche). L'artefact devenu instrument est donc un « médiateur des relations » entre le sujet et l'objet de l'action. Rabardel distingue deux sens à cette médiation.

— De l'objet de l'action vers le sujet : « médiation épistémique où l'instrument est un moyen qui permet la connaissance de l'objet ».

— Du sujet vers l'objet de l'action : « médiation pragmatique où l'instrument est moyen d'une action transformatrice (en un sens large incluant le contrôle et la régulation) dirigée vers l'objet » (Rabardel, 1995, p. 72).

Les médiations épistémiques et pragmatiques sont en interaction constante au cours de l'activité. L'instrument n'est donc pas uniquement un intermédiaire, il est un « moyen de l'activité ».

Au cours de la genèse instrumentale, le sujet va rencontrer une ou plusieurs situations et un ou plusieurs usages. L'instrument capitalise alors l'expérience accumulée : « tout instrument est connaissance » (Rabardel, 1995, p. 73), il n'est pas neutre.

Ainsi, selon Gomes et Vergnaud (2004), l'utilisation d'instruments géométriques différents (en particulier ceux des environnements papier-crayon et informatiques) au cours de l'activité amène la conception de géométries spécifiques. En effet, les acquisitions faites par l'élève à l'aide du logiciel sont très contextualisées (Artigue, 1991 ; Bellemain, 1992). De nombreuses recherches internationales appuient ce propos. En France, Lagrange (1999) et Trouche (2000) montrent par exemple que les schèmes d'usage de l'instrument influencent les conceptualisations de l'élève. En Grande-Bretagne, Jones (2000) étudie une cohorte d'élèves de douze ans utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Au cours de ses observations, il montre que pour désigner des objets géométriques et leurs propriétés, les élèves passent d'expressions de la vie quotidienne à des expressions directement influencées par ce qui se passe sur le logiciel, et dans un troisième temps seulement, à des explications géométriques purement mathématiques. De la même façon, Hoyles et Healy (1997) étudient la façon dont une élève de douze ans s'approprie le concept de symétrie axiale à partir d'un travail sur un logiciel de géométrie dynamique. Elles montrent que, pour cette élève, « les outils utilisés dans les explorations antérieures sont devenus une partie constitutive de ce qui donnait un sens à son activité. Elle construit une signification mathématique qui n'est ni distincte, ni dépendante de l'outil avec lequel elle a travaillé. Pour elle, l'outil technologique [7] est devenu un outil mental » (Hoyles & Healy, 1997, p. 90).

Gomes et Vergnaud (2004) en concluent que l'enseignement de la géométrie gagnerait à ne pas se restreindre à l'utilisation d'un certain ensemble d'artefacts.

Dans le chapitre 6, nous analysons *a priori* à partir de recherches en didactique des mathématiques, les usages des logiciels de géométrie dynamique et comment ils influencent l'activité mathématique des élèves. Comme nous l'avons dit, cette analyse restera assez générale car ce n'est pas l'objet de cette thèse de se concentrer sur la genèse instrumentale développée par les enseignants et/ou les élèves lors de l'utilisation de l'EIAH MindMath.

2.3.3 Valences pragmatique et épistémique des techniques de résolution

Le fait de travailler avec des artefacts amène d'autres interrogations. Selon Artigue, introduire des artefacts (calculatrices, logiciels divers) dans les classes ouvre un certain nombre de possibilités : expérimenter, explorer, calculer plus rapidement, s'affranchir de certains gestes techniques fastidieux, etc. « Mais nous avons aussi souvent l'impression que l'accès immédiat aux résultats [...] nous prive d'une compréhension qui était portée par l'exécution patiente des gestes du calcul » (Artigue, 2004, p. 37). Ainsi, Artigue distingue la valence pragmatique et la valence épistémique des techniques de résolution employées. La valence pragmatique concerne la capacité à produire des résultats de la technique (efficacité, coût, domaine de validité). La valence épistémique concerne la compréhension des objets sur lesquels la technique s'applique ou qu'elle met en jeu.

Selon la genèse instrumentale réalisée, introduire une technique s'appuyant sur l'utilisation d'un artefact peut augmenter sa valeur pragmatique (elle sera souvent plus efficace et moins coûteuse en temps) mais diminuer sa valeur épistémique (la technologie et la théorie qui justifient cette technique peuvent être moins visibles). C'est pourquoi, il est important de penser des situations qui ne se limitent pas toujours à la simple utilisation de l'artefact « pour aller plus vite ».

Dans l'environnement de géométrie dynamique en particulier, nous verrons que la valence pragmatique des techniques employées n'augmente pas forcément. Au

7. Ici au sens des Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE).

contraire, certains outils des logiciels (ou certains outils que l'enseignant peut ajouter au logiciel) tendront même à se montrer plus coûteux en temps ou auront des domaines de validité plus restreints. De la même façon, la valence épistémique d'une technique peut augmenter car les logiciels de géométrie dynamique permettent de réifier certaines propriétés géométriques, ce qui les rend plus visibles. Nous étudierons ces phénomènes dans le chapitre 6.

2.3.4 Générateurs de types de tâches

Puisque nous travaillons dans le domaine des EIAH, nous devons nous poser la question de l'implémentation de nos travaux (même si nous ne réalisons pas nous-mêmes cette implémentation au sein du projet *MindMath*). Or, comme nous l'avons vu, nous modélisons les savoirs et les rapports personnels ou institutionnels des sujets aux objets de l'institution par des praxéologies. Le cadre T4TEL[8] s'inscrit dans la TAD en proposant une formalisation permettant l'implémentation des praxéologies dans un EIAH (Chaachoua, 2018). Il introduit également la notion de variables (Chaachoua & Bessot, 2019), et celle de praxéologie personnelle (Croset & Chaachoua, 2016) que nous avons abordée dans la section 2.1.4

Dans le cadre T4TEL, Chaachoua s'appuie sur la définition des praxéologies de Chevallard (1999) et définit un type de tâches comme un ensemble de tâches respectant deux conditions :

- ces tâches sont décrites par « un verbe d'action donné et des compléments fixés, pris dans les objets d'une discipline » (Chaachoua, 2018, p. 10) qui précisent sur quoi porte l'action exprimée par le verbe ;
- il existe au moins une technique qui accomplit au moins une tâche de ce type de tâche (la portée de cette technique comprend une partie ou toutes les tâches du type de tâches considéré).

Chaachoua définit également un sous-type de tâches comme un type de tâches lui-même inclus dans un autre type de tâches. Par exemple, « construire un triangle » est bien un type de tâches en tant qu'ensemble de tâches décrites par un verbe d'action (construire) et un complément fixé pris dans les objets de la géométrie (un triangle). De plus, il existe au moins une technique qui accomplit une tâche de ce type de tâches. Par exemple, pour construire un triangle ABC : construire un segment $[AB]$ de mesure donnée, construire un cercle de centre A et de rayon une

8. T4 correspond au quadruplet [Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie] et TEL à Technology Enhanced Learning (T4TEL).

mesure donnée, construire un cercle de centre B et de rayon une mesure donnée (les mesures sont choisies pour respecter l'inégalité triangulaire), placer un point C à une des intersections entre les deux cercles, tracer les segments $[AC]$ et $[BC]$ pour former le triangle ABC. Le type de tâches « construire un triangle isocèle » est lui-même un type de tâches, sous-type de tâches du type de tâches « construire un triangle ».

Comme dans le paragraphe 2.1.3, la définition des types de tâches et sous-types de tâches reste ici peu précise quant au niveau de granularité attendu. C'est pourquoi Chaachoua et Bessot introduisent les notions de **système de variables** et de **générateur de types de tâches** : « nous introduisons la notion de générateur de types de tâches qui à partir d'un système de variables peut générer des types de tâches et des sous-types de tâches selon une certaine structuration rendant compte des relations "plus générique que" et "plus spécifique que" » (Chaachoua, 2018, p. 11). Un générateur de types de tâches est donc défini par : « GT = [Verbe d'action, Complément fixe ; Système de variables] » (Chaachoua, 2018, p. 12). Le couple (verbe d'action, complément fixe) est un type de tâches et le système de variables est composé d'une liste de variables et de valeurs qu'elles peuvent prendre. L'instanciation des variables du système engendre des types de tâches. Par exemple, nous reprenons le type de tâches « construire un triangle » à partir duquel nous définissons le générateur de type de tâches GT1 = [Construire, un triangle ; V1, V2] où V1 est la nature du triangle à construire et V2 les données de l'énoncé pour construire le triangle. La variable V1 peut prendre une valeur dans l'ensemble {scalène non rectangle, isocèle non rectangle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle}. La variable V2 peut être la donnée de trois grandeurs côtés, la donnée de deux grandeurs côtés et d'une grandeur angle, ou encore la donnée d'une grandeur côté et de deux grandeurs angles.

Le niveau de type de tâches le plus générique qu'il est possible de définir à partir de ce générateur de types de tâches est celui pour lequel on n'instancie aucune des variables du système. Ici, il s'agit de « construire un triangle ». Un sous-type de tâches plus spécifique est alors « construire un triangle scalène non rectangle » et un sous-type de tâches encore plus spécifique est « construire un triangle scalène non rectangle tel que ses côtés mesurent $4cm$, $7cm$ et $10cm$ ».

Les variables des générateurs de types de tâches jouent deux rôles : générer des types et sous-types de tâches comme nous venons de le voir, et caractériser les portées des techniques (Chaachoua & Bessot, 2019, pp. 238-239). Des valeurs de variables peuvent donc limiter la portée d'une technique donnée et amener à considérer des techniques différentes. Par exemple, une technique pertinente pour la construction d'un triangle équilatéral à partir de ses côtés ne le sera plus pour un triangle isocèle non équilatéral pour lequel il faudra calculer une donnée supplémentaire.

Ces variables sont institutionnelles ou didactiques. Par exemple, les variables pour GT1 jouent, en effet, sur les procédures employées par l'élève. Mais nous aurions pu également imaginer une variable V3 qui précise si les données numériques de l'énoncé sont des entiers ou des nombres à virgule (décimaux ou réels). Cette variable est institutionnelle. Elle aurait été pertinente à l'école élémentaire où les nombres à virgules sont encore un objet d'apprentissage mais elle ne l'est plus au cycle 4. La définition des variables d'un générateur de types de tâches reste donc un choix du chercheur. Selon Chaachoua (2018), il dépend de trois facteurs principaux : les questions de recherche, l'institution cible et les techniques.

Dans le chapitre 7, nous expliciterons plus précisément comment nous utilisons et adaptons les notions de générateurs de types de tâches et de variables pour modéliser les tâches implémentées dans le logiciel MindMath.

2.4 Problématique et méthode générale de la thèse

2.4.1 Problématique et hypothèse de recherche

Dans le cadre de cette thèse, nous nous plaçons dans la problématique générale du passage de la géométrie physique à la géométrie théorique à la transition cycle 3 / cycle 4.

Dans le chapitre 1, nous avons émis plusieurs hypothèses de travail sur lesquelles nous nous appuyons par la suite :

Hypothèse de travail 1. *La double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique et une prise en compte insuffisante par l'institution de cette transition entraînent des difficultés chez les élèves à l'entrée dans la géométrie théorique au cycle 4.*

Hypothèse de travail 2. *S'appuyer sur des tâches de construction à partir d'énoncés et/ou de schémas codés peut faciliter l'entrée et le développement du raisonnement déductif à la transition cycle 3 / cycle 4.*

Nous avons ensuite étayé ces hypothèses en nous appuyant sur divers travaux en didactique des mathématiques et, en nous limitant à la géométrie plane des triangles et des quadrilatères, nous avons alors déterminé l'objectif principal de cette thèse dans la section 1.4 : construire des parcours d'apprentissage qui prennent en compte les démarches des élèves pour les faire entrer dans la géométrie théorique et en particulier les faire entrer dans une démarche de raisonnement déductif.

Dans ce chapitre, nous avons présenté un ensemble d'outils théoriques et justifié leur utilité pour la réponse à cet objectif principal. À partir du cadre théorique présenté dans ce chapitre, nous pouvons maintenant dégager une problématique de recherche.

Problématique de recherche. *Certains besoins d'apprentissage des élèves relatifs à l'entrée dans la géométrie théorique n'étant pas explicitement pris en charge par les institutions cycle 3 et cycle 4, comment pouvons-nous élaborer des parcours d'apprentissage dans un EIAH favorisant l'évolution des rapports personnels des élèves aux objets de la géométrie vers des rapports idoines ? En particulier, comment élaborer des tâches de construction permettant l'introduction de nouvelles praxéologies et une progression vers des tâches plus complexes favorisant cette évolution vers des rapports idoines ?*

Suite aux travaux et hypothèses de travail que nous avons présentés dans les chapitres 1 et 2 et en nous appuyant sur la méthode générale déjà employée pour l'élaboration du logiciel PÉPITE, notre principale hypothèse de recherche est donc :

Hypothèse de recherche. *La conception d'un MPR relatif aux figures planes à partir d'une approche institutionnelle et la définition des modes de justification des élèves appuyée sur un croisement des points de vue institutionnel et de l'élève permettent de caractériser les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions cycle 3 et cycle 4 expliquant certaines difficultés des élèves à l'entrée dans la géométrie théorique. Le MPR relatif aux figures planes et les modes de justification définis permettent également de mettre en œuvre des conditions didactiques s'appliquant au milieu des tâches de construction de figures planes que nous proposons. Enfin, ils permettent de fonder un modèle didactique des exercices, un modèle didactique de l'élève et un modèle didactique des parcours d'apprentissage implémentables et exploitables dans un EIAH pour favoriser l'entrée dans la géométrie théorique à la transition cycle 3 / cycle 4.*

2.4.2 Méthode générale de la thèse

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.2, nous nous situons dans la continuité du travail de Grugeon-Allys et du logiciel PÉPITE. Ainsi, nous adaptons et faisons évoluer une méthode déjà mise en œuvre pour aborder des problématiques visant à comprendre les difficultés des élèves dans la transition entre deux institutions et à proposer des parcours d'enseignement / d'apprentissage favorables à leur négociation

(Grugeon, 1997 ; Grugeon-Allys et al., 2012 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017). Un des enjeux de cette thèse est donc de montrer la possibilité de transférer une telle méthode pour un autre domaine des mathématiques, en ce qui nous concerne, la géométrie plane.

Dans un premier temps, nous étudions les aspects épistémologiques relatifs aux figures géométriques et au raisonnement à mettre en jeu dans la géométrie théorique à partir d'approches institutionnelle, épistémologique et cognitive (cf. chapitre 3). Dans le chapitre 4, nous définissons ensuite un MPR de référence relatif aux figures planes dans le champ d'action de la transition cycle 3 / cycle 4 qui permet de caractériser les praxéologies idoines au niveau scolaire des cycles 3 et 4 pour favoriser l'entrée dans la géométrie théorique. Nous définissons également les modes de justification des élèves selon les différentes dimensions de l'activité géométrique qui nous intéressent.

Cette méthode est nécessaire à l'analyse, à la compréhension et à la modélisation des praxéologies convoquées par les élèves et à l'étude des besoins d'apprentissage qui demeurent implicites en géométrie dans les programmes scolaires de 2020 et les manuels scolaires de collège de 2016 (cf. chapitre 5). Nous dégageons également des conditions didactiques à l'entrée dans le raisonnement déductif dans le cadre de la construction de figures planes et en particulier de triangles et de quadrilatères.

Dans le chapitre 6, nous étudions les spécificités du travail dans un EIAH et en particulier les apports et inconvénients des logiciels de géométrie dynamique par rapport à notre problématique.

À partir des différents éléments issus de ces analyses, nous sommes donc en mesure de modéliser les tâches, les activités géométriques des élèves ainsi que les parcours d'apprentissage au sein du logiciel MindMath (cf. chapitre 7). De la même façon, nous proposons une modélisation des rétroactions dans l'EIAH dans le chapitre 8.

Enfin, nous testons la pertinence de nos choix didactiques et procédons à des ajustements lors de différentes expérimentations présentées et analysées dans le chapitre 9.