



# Assemblage de structures une à une invariantes dans une direction

————— oOo —————

**C**e chapitre traite de la modélisation par la méthode des éléments finis d'un assemblage de structures invariantes dans une direction. On applique cette méthode au Bras Elastomérique, pièce développée par la Société EUROCOPTER. Les deux principales difficultés résident dans l'hétérogénéité de la pièce et dans la prise en compte d'une non-linéarité géométrique due à la force centrifuge.

Une combinaison de deux types de sous structuration est utilisée. La première est une sous structuration multi-niveaux [DELORME, 1997] et la seconde, une méthode classique de sous structuration [ESCAIG, 1992]. Cette étude permet d'obtenir la solution complète en déplacements, le champ de contraintes complet ainsi que l'amortissement global (par une méthode énergétique) de la structure.

————— oOo —————

## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1 Introduction</b>	<b>129</b>
<b>IV.2 Méthodes de sous structuration</b>	<b>129</b>
IV.2.1 Méthode classique	130
IV.2.2 Méthode de sous structuration multi-niveaux	132
IV.2.2.a Introduction	132
IV.2.2.b Propriété des structures invariantes dans une direction	132
IV.2.2.c Calcul de la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure composée de $n$ structures identiques	134
IV.2.2.d Détermination de la solution complète sur la structure	135
IV.2.2.e Prise en compte des non linéarités géométriques dues à la force centrifuge	136
<b>IV.3 Assemblage de structures une à une invariantes par translation</b>	<b>137</b>
IV.3.1 Introduction	137
IV.3.2 Organisation des calculs	137
<b>IV.4 Modélisation du bras élastomérique</b>	<b>139</b>
IV.4.1 Présentation de la pièce et des cas de chargement étudiés	139
IV.4.2 Choix des sous structures et des discrétisations spatiales	140
IV.4.3 Résultats sur les différents cas de chargement	141
IV.4.3.a Dispositif expérimental	141
IV.4.3.b Force centrifuge	142
IV.4.3.c Traînée	149
IV.4.3.d Torsion	155
IV.4.4 Facteur de perte de la structure dans le cas d'un chargement de traînée	157
IV.4.4.a Introduction	157
IV.4.4.b Equations de la viscoélasticité (modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT)	157
IV.4.4.c Régime harmonique	157
IV.4.4.d Caractérisation de l'amortissement	158
IV.4.4.e Facteur de perte du bras élastomérique sous chargement de traînée	159
<b>IV.5 Conclusion</b>	<b>161</b>

---

## IV.1 Introduction

Le Bras Elastomérique, ou encore E.F.B. <sup>(1)</sup>, est développé dans l'industrie aéronautique par la société EUROCOPTER. Il est composée d'une centaines de baguettes en composite (carbone unidirectionnel ou verre unidirectionnel) noyées dans différentes matrices et doit assurer la liaison entre le moyeu rotor et la pale d'un hélicoptère. Cette pièce remplace les trois articulations des moyeux classiques dans le but de diminuer les forces aérodynamiques ainsi que les coûts d'entretien.

Les écarts entre les différentes caractéristiques des matériaux constitutifs font qu'il apparaît de nombreux problèmes mécaniques tels que la fissuration, des concentrations de contraintes ou encore des problèmes de fatigue exigeant une connaissance précise de certains résultats mécaniques comme les champs de contraintes et de déplacements [AÉROSPATIALE, 1997]. On s'attache aussi à déterminer l'amortissement global de la pièce .

La détermination de grandeurs à la fois globales telles que l'amortissement, mais aussi locales comme la détermination précise d'une discontinuité ou d'une concentration du champ des contraintes obligent à une modélisation complète et fine de la pièce. Numériquement, le nombre insuffisant de baguettes et la trop grande hétérogénéité entre les différents matériaux rendent difficile et peu fiable un calcul par homogénéisation [DELORME, 1997]. On est donc amené à résoudre le problème 3D complet par la méthode des éléments finis et ce en tenant compte des non-linéarités géométriques imputables à la force centrifuge. Ce problème qui nécessite plusieurs millions de degrés de libertés, est résolu par la combinaison de différentes méthodes de sous structuration.

On présente, dans un premier temps, les deux différentes méthodes de sous structurations utilisées.

Puis est présenté l'algorithme mis en place de façon à combiner ces deux méthodes.

On étudie par la suite, trois cas de chargement rencontrés en condition de vol par le Bras Elastomérique.

Enfin, on détermine l'amortissement de la pièce sous une sollicitation de traînée.

## IV.2 Méthodes de sous structuration

Les techniques de sous structurations sont de plus en plus utilisées. Elles présentent en effet de nombreux avantages comme notamment :

- la préparation et la vérification des modèles de sous-structures indépendamment les uns des autres,
- la modification d'une sous structure indépendamment des autres,

---

(1). Elastomeric Flex Beam

- la possibilité de résoudre un problème présentant un nombre important de degrés de liberté en le ramenant à plusieurs calculs de tailles raisonnables,
- la minimisation de la préparation des données et du temps de calcul dans le cas de structures constituées de sous-ensembles identiques
- la compatibilité avec les résolutions parallèles.

### IV.2.1 Méthode classique<sup>(2)</sup>

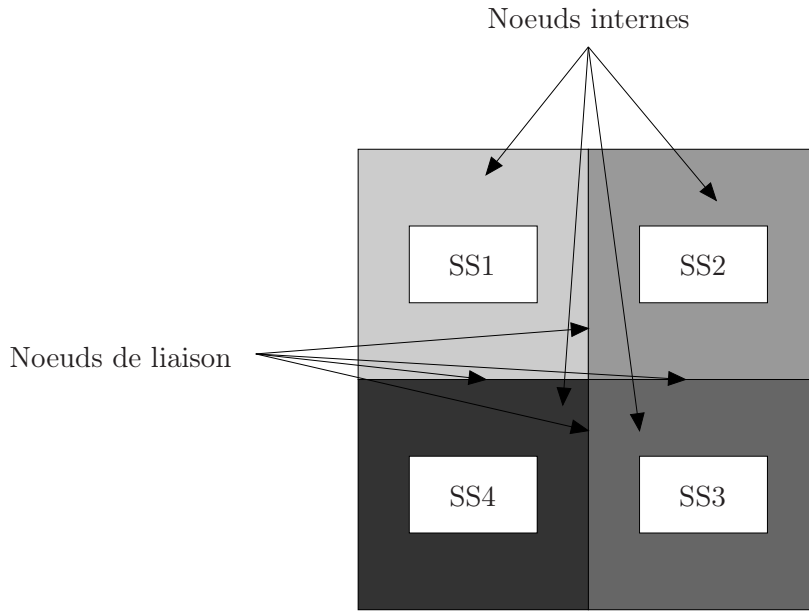


FIGURE IV.1 – Exemple de sous structures de niveau 1.

On se place dans le cas d'une d'une structure divisée en sous structures de niveau 1 (FIG. IV.1).

On distingue, pour chaque sous structure  $s$ , les degrés de liberté internes ( $\mathbf{q}_i^s$ ) et ceux de liaison ( $\mathbf{q}_j^s$ ). Le système classique d'équilibre peut dès lors être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^s & \mathbf{K}_{ij}^s \\ \mathbf{K}_{ji}^s & \mathbf{K}_{jj}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^s \\ \mathbf{q}_j^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^s \\ \mathbf{F}_j^s \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.1})$$

On définit alors la matrice de rigidité condensée et le vecteur second membre condensé, par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{jj}^s = \mathbf{K}_{jj}^s - \mathbf{K}_{ji}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ij}^s, \quad (\text{IV.2})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_j^s = \mathbf{F}_j^s - \mathbf{K}_{ji}^s \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{F}_i^s, \quad (\text{IV.3})$$

(2). Voir [IMBERT, 1979 ; ESCAIG, 1992]

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj}^s \mathbf{q}_j^s = \bar{\mathbf{F}}_j^s}. \quad (\text{IV.4})$$

Si l'on note  $\bar{\mathbf{q}}_j$  les degrés de liberté de liaison de la structure complète, ils peuvent être reliés à  $(\mathbf{q}_j^s)$  par  $\beta^s$  la matrice de localisation de la sous structure  $s$  :

$$\mathbf{q}_j^s = \beta^s \bar{\mathbf{q}}_j. \quad (\text{IV.5})$$

L'assemblage des équations (IV.4) donne la matrice condensée globale et le vecteur second membre condensé global tels que :

$$\boxed{\bar{\mathbf{K}}_{jj} \bar{\mathbf{q}}_j - \bar{\mathbf{F}}_j = \mathbf{o}}. \quad (\text{IV.6})$$

et définis par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{jj} = \sum_{s=1}^{N_s} \beta^{sT} \bar{\mathbf{K}}_{jj}^s \beta^s, \quad (\text{IV.7})$$

$$\bar{\mathbf{F}}_j = \sum_{s=1}^{N_s} \beta^{sT} \bar{\mathbf{F}}_j^s, \quad (\text{IV.8})$$

où  $N_s$  est le nombre de sous structures. On obtient alors la solution complète par :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_j^s = \beta^s \bar{\mathbf{q}}_j \\ \mathbf{q}_i^s = \Phi_{ij}^s \mathbf{q}_j^s + \mathbf{q}_{i0}^s \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

où

$$\begin{cases} \Phi_{ij}^s = -\mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{K}_{ij}^s \\ \mathbf{q}_{i0}^s = \mathbf{K}_{ii}^{s-1} \mathbf{F}_i \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

L'algorithme peut être schématisé de la façon suivante :

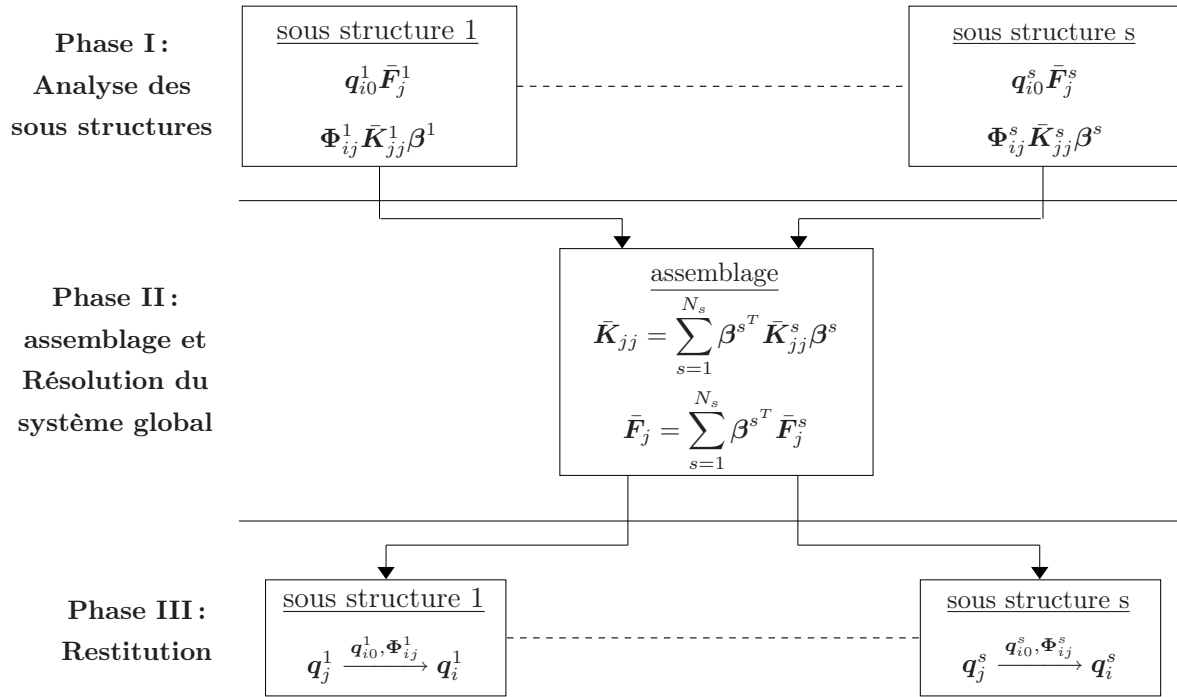


FIGURE IV.2 – Méthode de sous structuration classique.

## IV.2.2 Méthode de sous structuration multi-niveau

### IV.2.2.a Introduction

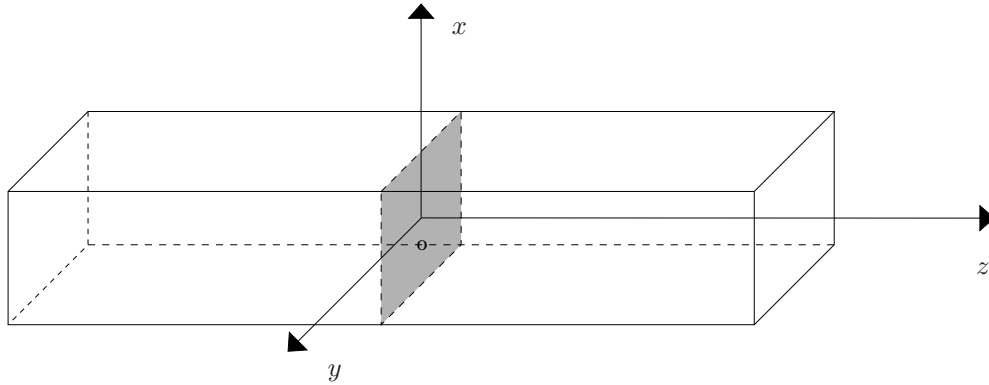
Cette méthode, développée par DELORME [1997], peut être appliquée à toute structure invariante dans une direction. L'idée générale est d'assembler deux couches identiques d'éléments et d'éliminer les noeuds milieux. la première couche ayant un seul élément dans la direction d'invariance et étant de longueur  $L_0$ , après  $n$  pas de cette méthode, on obtient la matrice de rigidité, condensée aux extrémités, d'une structure de longueur  $2^n L_0$  et composée de  $2^n$  éléments dans suivant l'axe d'invariance (voir FIG. IV.4).

### IV.2.2.b Propriété des structures invariantes dans une direction

#### HYPOTHÈSE IV.1

- Seules des structures possédant une propriété d'invariance dans la direction  $z$  sont prises en compte,
- on considère le plan  $(O, x, y)$  comme un plan de symétrie de la structure,
- le comportement est considéré élastique linéaire (cf remarques I.3 et I.5),

Les degrés de libertés d'une telle structure son associés à des points géométriques appelés noeuds et répartis de manière symétrique par rapport au plan  $(O, x, y)$ . Les d.d.l. mesurés suivant la

FIGURE IV.3 – Structure invariante suivant la direction  $z$  et symétrique par rapport à  $(O, x, y)$ .

direction  $z$  sont affectés de l'exposant " $z$ ", ceux associés à  $x$  et  $y$  sont indifféremment affectés de l'exposant " $p$ ". On différencie enfin les degrés de liberté situés à droite ( $z \geq 0$ ) et à gauche ( $z \leq 0$ ) du plan de symétrie par respectivement " $d$ " et " $g$ ". Les mêmes notations sont adoptées pour les forces nodales. Ainsi, si  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur de la structure,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{u}$  respectivement ses vecteurs forces nodales et degrés de liberté, on a :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{gz} \\ \mathbf{F}^{gp} \\ \mathbf{F}^{dz} \\ \mathbf{F}^{dp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{K}^{gzgp} & \mathbf{K}^{gzdz} & \mathbf{K}^{gzdp} \\ \text{sym.} & \mathbf{K}^{gppp} & \mathbf{K}^{gpdz} & \mathbf{K}^{gppd} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \mathbf{K}^{dzdz} & \mathbf{K}^{dzdp} \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \text{sym.} & \mathbf{K}^{dppd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{gz} \\ \mathbf{u}^{gp} \\ \mathbf{u}^{dz} \\ \mathbf{u}^{dp} \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.11})$$

On montre sous les hypothèses  $\mathcal{H}$ . IV.1 que les sous matrices de  $\mathbf{K}$  vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{dzdz} &= \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{K}^{dzdp} &= \mathbf{K}^{gzgp} \\ \mathbf{K}^{gzdz} &= \mathbf{K}^{gzdz}^T & \mathbf{K}^{gzdp} &= -\mathbf{K}^{gpdz}^T \\ \mathbf{K}^{dzdp} &= -\mathbf{K}^{gzdp} & \mathbf{K}^{dppd} &= \mathbf{K}^{gppd} \\ \mathbf{K}^{gpdz} &= -\mathbf{K}^{gzdp}^T & \mathbf{K}^{gppd} &= \mathbf{K}^{gzdp}^T \end{aligned} \quad \text{et} \quad (\text{IV.12})$$

Si bien que  $\mathbf{K}$  se met sous la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^g & \mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{S}^{gd} & \mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^g & \mathbf{Q}^{gd} \\ -\mathbf{Q}^{gd} & -\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^g &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzgz} & \mathbf{0}_{n,2n} \\ \mathbf{0}_{2n,n} & \mathbf{K}^{gppp} \end{bmatrix} & \mathbf{S}^{gd} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{gzdz} & \mathbf{0}_{n,2n} \\ \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gppd} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}^g &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gzgp} \\ \mathbf{K}^{gzgp}^T & \mathbf{0}_{n,2n} \end{bmatrix} & \mathbf{G}^{gd} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n,2n} & \mathbf{K}^{gzdp} \\ -\mathbf{K}^{gzdp}^T & \mathbf{0}_{n,2n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De plus, la symétrie de  $\mathbf{K}$  permet d'obtenir la symétrie de  $\mathbf{S}^g$ ,  $\mathbf{S}^{gd}$  et  $\mathbf{Q}^g$ , ainsi que l'antisymétrie de  $\mathbf{Q}^{gd}$ .

#### IV.2.2.c Calcul de la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure composée de $n$ structures identiques

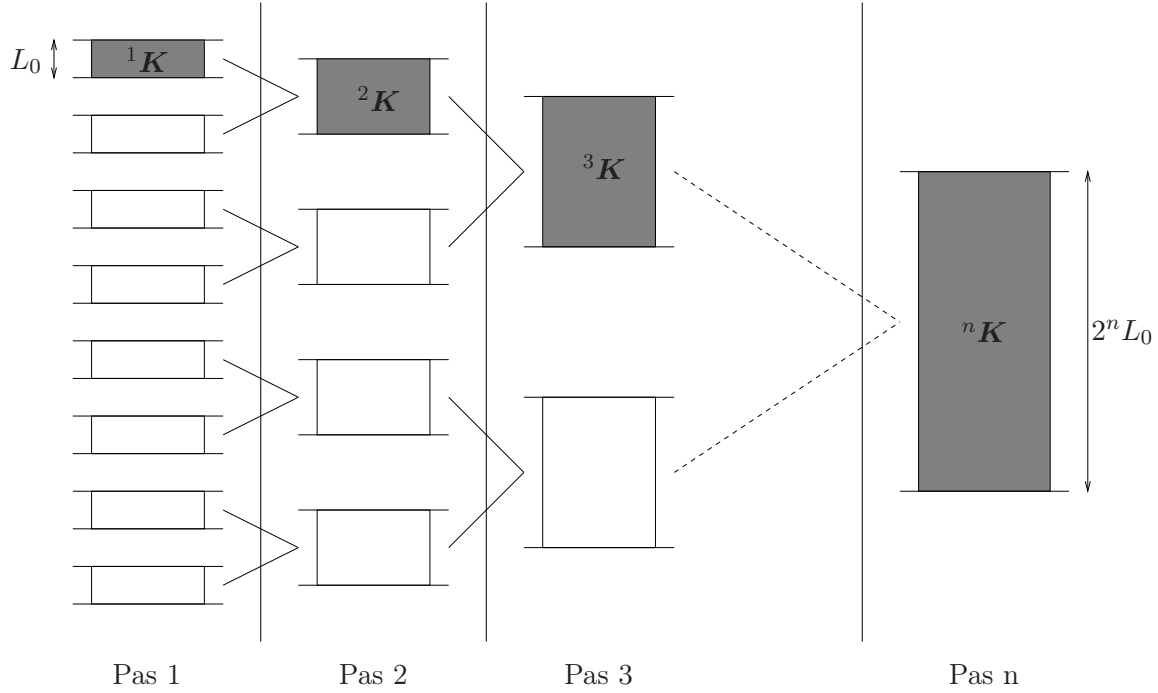


FIGURE IV.4 – Méthode de sous structuration multi-niveaux.

On veut maintenant calculer la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure invariante dans une direction. Comme, il a été dit en introduction, on assemble deux couches identiques, comportant un seul élément suivant l'axe d'invariance, puis on élimine par condensation statique les noeuds milieux. La matrice de rigidité de ces deux couches d'éléments est notée  ${}^0\mathbf{K}$ . Les deux entités vérifiant l'hypothèse  $\mathcal{H}$ . IV.1,  ${}^0\mathbf{K}$  prend la forme :

$${}^0\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{S}^g & {}^0\mathbf{S}^{gd} \\ {}^0\mathbf{S}^{gd} & {}^0\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{Q}^g & {}^0\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^0\mathbf{Q}^{gd} & -{}^0\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.14})$$

La matrice de rigidité  ${}^1\mathbf{H}$  qui résulte de l'assemblage de ces deux couches est définie par :

$${}^1\mathbf{H} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} \\ {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^2\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{o}_{3n,3n} & {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{Q}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} \\ -{}^1\mathbf{S}^{gd} & \mathbf{o}_{3n,3n} & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ \mathbf{o}_{3n,3n} & -{}^1\mathbf{S}^{gd} & -{}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$



On élimine alors les noeuds milieux (FIG. IV.4, pas 1),  ${}^1\mathbf{K}$  la matrice condensée ainsi obtenue se met sous la forme :

$${}^1\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{S}^g & {}^1\mathbf{S}^{gd} \\ {}^1\mathbf{S}^{gd} & {}^1\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{Q}^g & {}^1\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^1\mathbf{Q}^{gd} & -{}^1\mathbf{Q}^g \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.16})$$

avec

$${}^1\mathbf{S}^g = {}^0\mathbf{S}^g - \frac{1}{2} {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17a})$$

$${}^1\mathbf{Q}^g = {}^0\mathbf{Q}^g - \frac{1}{2} {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17b})$$

$${}^1\mathbf{S}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17c})$$

$${}^1\mathbf{Q}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^0\mathbf{Q}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{S}^{gd} - {}^0\mathbf{S}^{gd} {}^0\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^0\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.17d})$$

On montre par récurrence qu'il est possible de mettre  ${}^i\mathbf{K}$ , la matrice de rigidité condensée aux extrémités après  $i$  pas (*i.e.* la matrice de rigidité condensée aux extrémités d'une structure de longueur  $2^i$  fois la longueur de la couche initiale) sous la forme :

$${}^i\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{S}^g & {}^i\mathbf{S}^{gd} \\ {}^i\mathbf{S}^{gd} & {}^i\mathbf{S}^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{Q}^g & {}^i\mathbf{Q}^{gd} \\ -{}^i\mathbf{Q}^{gd} & -{}^i\mathbf{Q}^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

avec

$${}^i\mathbf{S}^g = {}^{i-1}\mathbf{S}^g - \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19a})$$

$${}^i\mathbf{Q}^g = {}^{i-1}\mathbf{Q}^g - \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19b})$$

$${}^i\mathbf{S}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19c})$$

$${}^i\mathbf{Q}^{gd} = -\frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} - {}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} {}^{i-1}\mathbf{S}^{g^{-1}} {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd} \quad (\text{IV.19d})$$

On peut donc considérer qu'après  $n$  pas de sous structuration multi-niveaux, on est en présence d'un "super-élément" au sens de [ZIENKIEWICZ et TAYLOR, 1991] ayant pour longueur  $2^n L_0$  – si  $L_0$  est la longueur de la sous structure génératrice (cf FIG. IV.4) – et dont la matrice de rigidité est  ${}^n\mathbf{K}$  ; ses seuls noeuds se situant aux extrémités.

#### IV.2.2.d Détermination de la solution complète sur la structure

L'obtention de la solution complète s'obtient de manière récursive (FIG. IV.5) à partir de la solution sur le super-élément, c'est à dire aux extrémités de la structure. En effet, on remarque que si l'on connaît  $({}^i\mathbf{u}_g, {}^i\mathbf{u}_d)$ , les déplacements aux extrémités du tronçon de l'étape  $i$  (FIG. IV.5), il est possible par la relation (IV.20) d'accéder aux déplacements des noeuds localisés sur le plan de symétrie de ce même tronçon, ces déplacements devenant à leur tour les déplacements extrêmes des tronçons de l'étape  $i - 1$ .

$$\boxed{{}^i\mathbf{u}_m = \frac{1}{2} {}^{i-1}\mathbf{S}^g \left( (-{}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} + {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd}) {}^i\mathbf{u}_d - ({}^{i-1}\mathbf{S}^{gd} + {}^{i-1}\mathbf{Q}^{gd}) {}^i\mathbf{u}_g \right)} \quad (\text{IV.20})$$

Cette étape de restitution nécessite le stockage des  $n$  matrices  ${}^i\mathbf{K}$ .

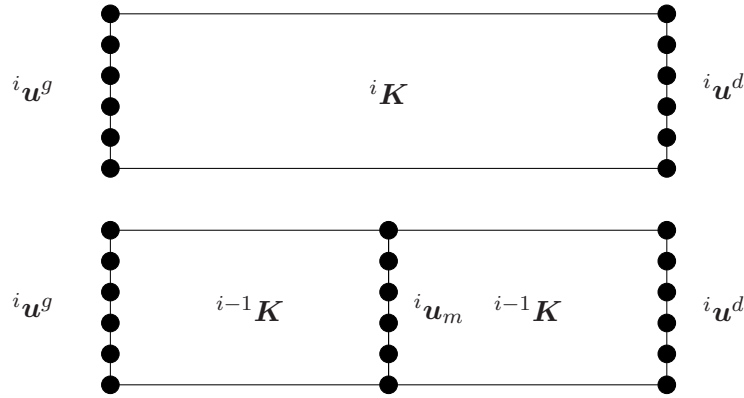


FIGURE IV.5 – Dédution des degrés de liberté milieux.

#### IV.2.2.e Prise en compte des non linéarités géométriques dues à la force centrifuge

En accord avec ZIENKIEWICZ et TAYLOR [1991] on décompose  ${}^i \mathbf{K}$  de la manière suivante :

$${}^i \mathbf{K} = {}^i \mathbf{K}_0 + {}^i \mathbf{K}_\sigma + {}^i \mathbf{K}_L \quad (\text{IV.21})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^i \mathbf{K}_0, \text{ la matrice de rigidité classique en petits déplacements,} \\ {}^i \mathbf{K}_\sigma, \text{ une matrice symétrique dépendant des pré-contraintes,} \\ {}^i \mathbf{K}_L, \text{ la matrice résultant des grandes déformations.} \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

Si les déplacements sont suffisamment petits (hypothèse vérifiée a posteriori),  ${}^i \mathbf{K}_L$  peut être négligée. La force centrifuge considérée comme une pré-contrainte, est prise en compte dans  ${}^i \mathbf{K}_\sigma$ . DELORME [1997] démontre que  ${}^i \mathbf{K}_\sigma$  admet une décomposition analogue à  ${}^i \mathbf{K}_0$ , *i.e.* :

$${}^i \mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} {}^i \mathbf{S}_\sigma^g & {}^i \mathbf{S}_\sigma^{gd} \\ {}^i \mathbf{S}_\sigma^{gd} & {}^i \mathbf{S}_\sigma^g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^i \mathbf{Q}_\sigma^g & {}^i \mathbf{Q}_\sigma^{gd} \\ {}^i -\mathbf{Q}_\sigma^{gd} & {}^i -\mathbf{Q}_\sigma^g \end{bmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

La prise en compte de la non-linéarité géométrique ne modifie donc pas la méthode précédemment exposée.

## IV.3 Assemblage de structures une à une invariante par translation

### IV.3.1 Introduction

On traite maintenant le cas d'une structure pouvant être vue comme un assemblage de  $s$  sous structures, chacune de ces entités étant invariante par une translation de même direction (l'axe  $z$ ).

L'idée est ici de remplacer ces sous structures par leur super-élément équivalent obtenu par la méthode de sous structuration multi-niveau présentée § IV.2.2. La structure complète est alors vue comme un assemblage de super-éléments sur lesquels, il est alors possible d'appliquer la méthode de sous structuration classique décrite § IV.2.1.

### IV.3.2 Organisation des calculs

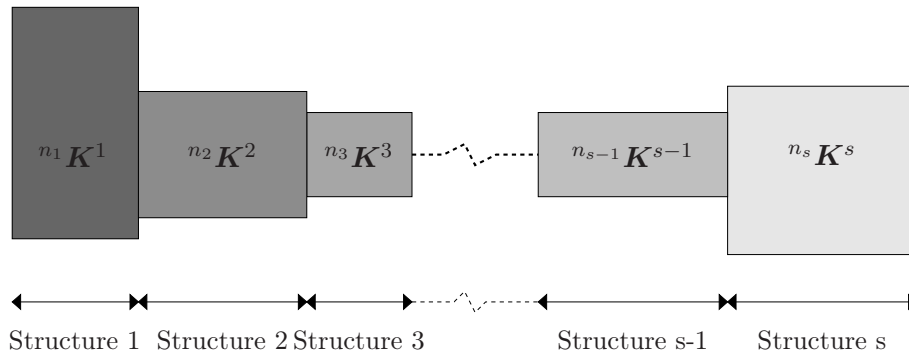


FIGURE IV.6 – Structure composée de  $s$  structures une à une invariante dans une direction.

L'organisation des calculs s'articule autour de cinq étapes. La première et la dernière correspondent aux deux étapes de la sous structuration multi-niveau et les trois autres se rapportent aux 3 étapes d'une sous structuration classique. De manière plus détaillée :

1. On détermine les  $s$  matrices de rigidité  $n_k \mathbf{K}^k$  ( $k \in 1 \dots s$ ) condensées aux extrémités de chacune des  $s$  structures, en accord avec les notations de (IV.18), on a :

$$n_k \mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} n_k \mathbf{S}g^k & n_k \mathbf{S}gd^k \\ n_k \mathbf{S}gd^k & n_k \mathbf{S}g^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \mathbf{Q}g^k & n_k \mathbf{Q}gd^k \\ -n_k \mathbf{Q}gd^k & -n_k \mathbf{Q}g^k \end{bmatrix} \quad k \in \{1 \dots s\}, \quad (\text{IV.24})$$

avec  $n_k$  est le nombre de pas de la méthode multi-niveau utilisé pour la  $k$ -ième sous structure.

2. On détermine les différentes grandeurs condensées à la frontière des super-éléments, que l'on a préalablement déterminée.

$$n_k \bar{\mathbf{K}}_{jj}^s, n_k \bar{\mathbf{F}}_{jj}^s \quad k \in \{1 \dots s\}. \quad (\text{IV.25})$$

3. On assemble les différentes grandeurs condensées après avoir déterminé les matrices de localisation.
4. on résoud afin d'obtenir la solution à la frontière ( ${}^{ns}\bar{\mathbf{u}}_s^j$ ), ce qui permet par le biais des équation (IV.9) et (IV.10) la déduction de la solution sur les  $s$  super-éléments.
5. Enfin, on obtient les déplacements sur l'ensemble des couches de chaque sous structure (c'est-à-dire sur l'intégralité de la structure) grâce à la restitution récursive détaillée par l'équation (IV.20).

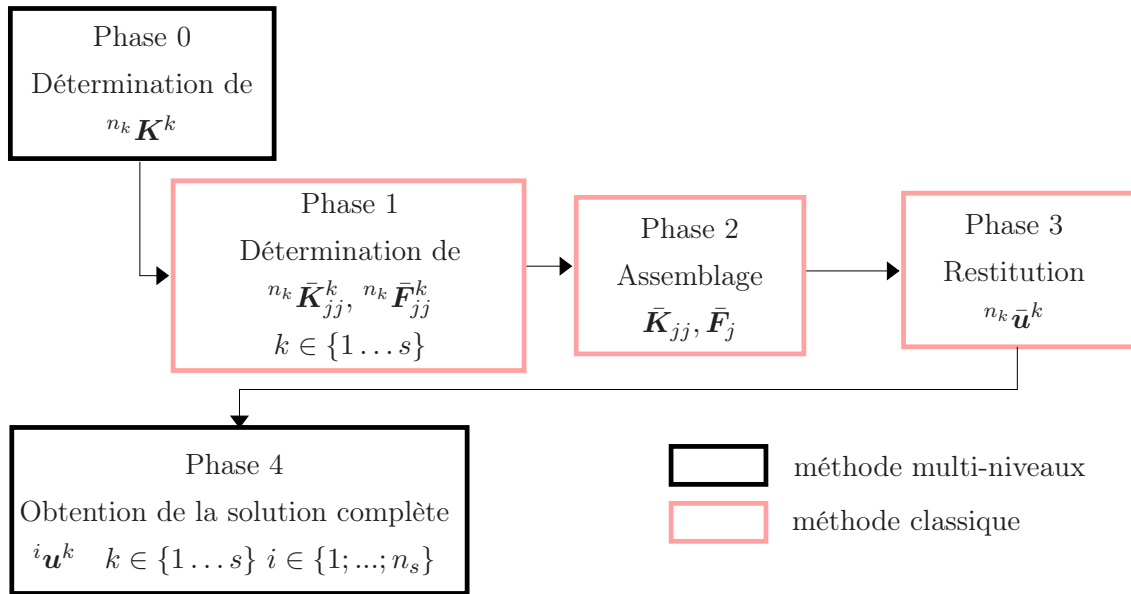


FIGURE IV.7 – Combinaison des méthodes de sous structuration.

## IV.4 Modélisation du bras élastomérique

### IV.4.1 Présentation de la pièce et des cas de chargement étudiés

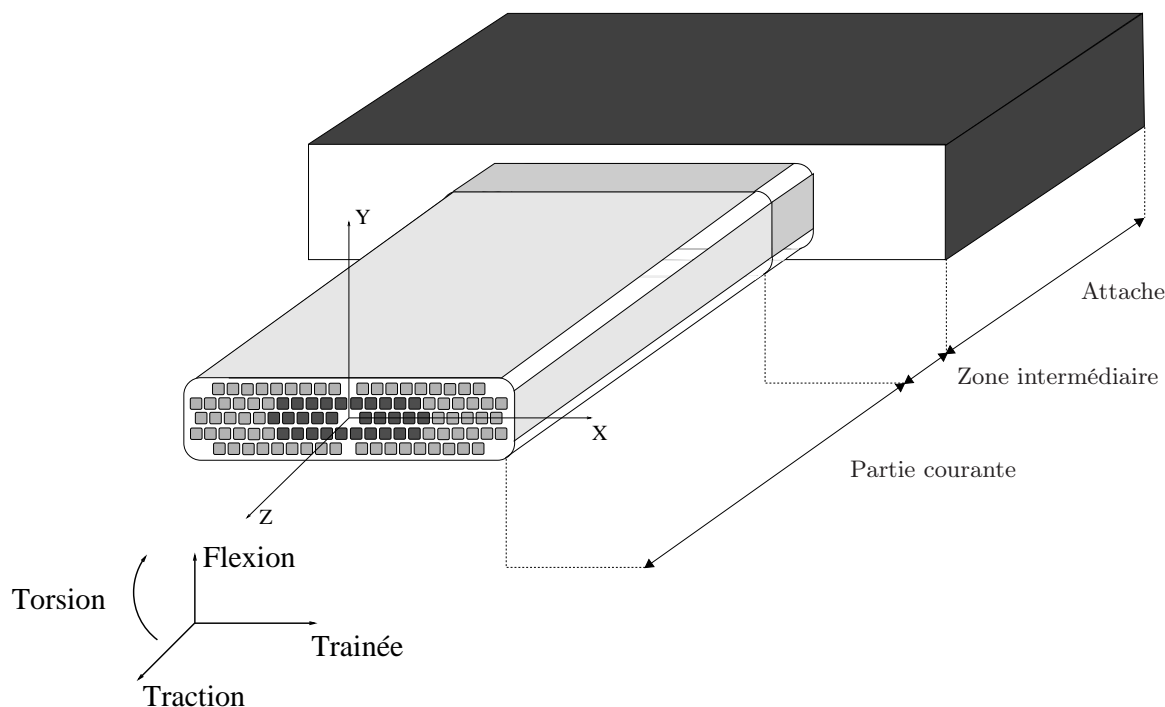


FIGURE IV.8 – *Bras élastomérique et chargements.*

Le bras élastomérique est composé de 70 baguettes en verre unidirectionnel et de 28 baguettes en carbone unidirectionnel. Ces baguettes sont noyées dans trois matrices différentes permettant de distinguer trois entités :

- l'**attache** dont la matrice est un assemblage de couches d'élastomère et de verre unidirectionnel (voir FIG. IV.9),
- la **zone intermédiaire** qui possède une matrice en élastomère,
- et la **partie courante** dont la matrice est aussi en élastomère. Ce dernier est cependant plus souple que celui utilisé dans la zone intermédiaire.

Ces deux dernières zones définissent la partie torsible du bras.

Trois cas de sollicitation sont étudiés dans la suite de ce paragraphe :

- un chargement de **traction**, simulant uniquement les efforts centrifuges,
- un chargement de **trainée** sous force centrifuge,
- et un cas de **torsion** sous force centrifuge

Ces chargements sont illustrés FIG. IV.8.

**Avertissement :** pour des raisons de confidentialité, aucune dimension n'est reportée dans le présent chapitre. Pour les mêmes raisons, les graphiques et courbes présentés sont adimensionnés.

#### IV.4.2 Choix des sous structures et des discrétisations spatiales

On constate FIG. IV.8 que les trois entités définissant le bras, sont une à une invariante (géométriquement et matériellement) dans la direction  $z$ . Il est donc possible d'appliquer l'algorithme présenté § IV.3.

Afin de bien cerner les différents phénomènes, des maillages fins sont adoptés pour les trois différentes parties du bras. La figure FIG. IV.9 décrit les sections de maillages adoptés pour la zone torsible (partie courante et la zone intermédiaire) et pour l'attache.

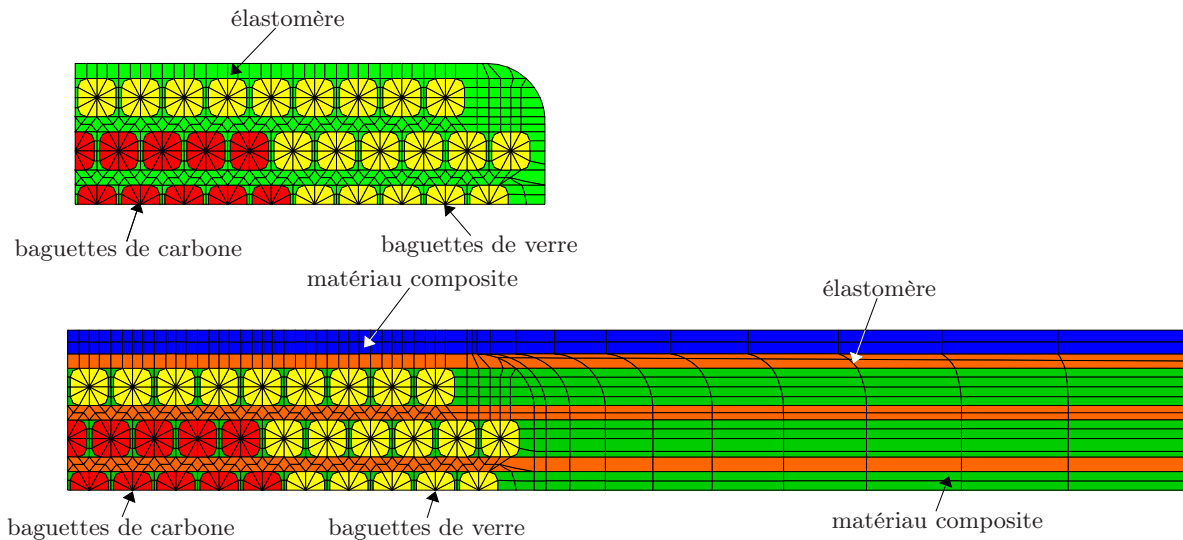


FIGURE IV.9 – Sections des maillages adoptés pour la partie courante et l'attache.

Les chargements précédemment décrits en introduction pouvant être décomposés en parties symétrique et antisymétrique, l'étude est réduite à un quart de structure et ce en utilisant des conditions limites appropriées. On adopte respectivement 64, 16 et 256 couches d'éléments (*i.e.* nombre de pas de l'algorithme de sous structuration multi-niveau) pour l'attache, la zone intermédiaire et la partie courante. Sachant qu'une couche d'éléments (de type 3D iso-paramétrique) représente **10406** degrés de liberté pour les zones intermédiaire et courante et **14754** degrés de liberté pour l'attache, le problème 3D complet équivalent représenterait environ 2 millions de degrés de liberté et ce en tenant compte des symétries et antisymétries (*i.e.* : 4 fois plus sans ces simplifications). La méthode de sous structuration permet de passer outre cette difficulté, car n'est traitée qu'une couche d'éléments à la fois, soit au maximum 14754 équations.

### IV.4.3 Résultats sur les différents cas de chargement

#### IV.4.3.a Dispositif expérimental

Les résultats expérimentaux présentés au cours de ce chapitre ont été obtenus par EURO-COPTER. Le dispositif utilisé est présenté sur la figure FIG. IV.10.

Le bras élastomérique (FIG. IV.10, ③) est fixé au bâti via l'attache rotor (①). L'attache coté pale (pièce non prise en compte dans la modélisation) est, quant à elle, liée aux vérins et aux câbles qui imposent les différentes sollicitations.

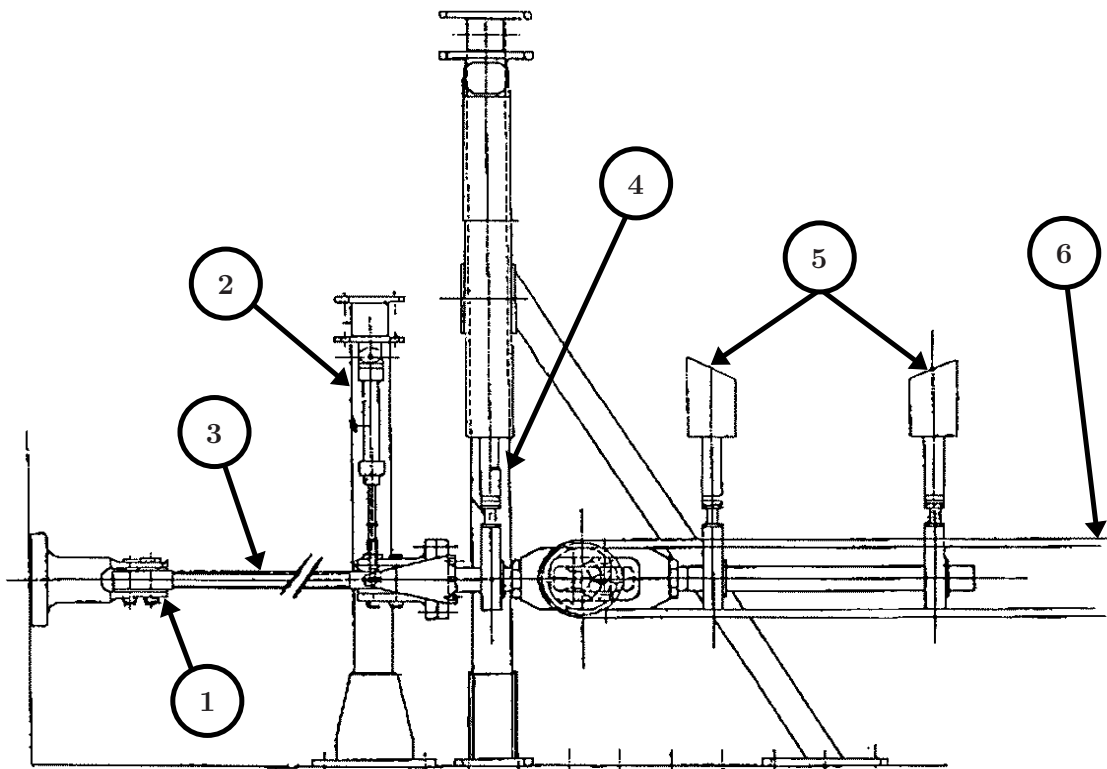


FIGURE IV.10 – Bras élastomérique et dispositif expérimental.

Les efforts centrifuges sont imposés longitudinalement par rapport au bras par l'intermédiaire de deux câbles de précontraintes ⑥.

Le vérin ②, par son excentrage, permet d'imposer un chargement de torsion, tandis que le vérin ④, centré sur l'axe neutre du bras, impose la flexion. Afin de pouvoir imposer des flexion avec différents rapports entre le moment fléchissant et l'effort tranchant, il peut prendre différentes positions (⑤).

Enfin, afin de mesurer les déformations locales (et donc les contraintes locales par le biais d'une loi de comportement élastique), des jauges de déformations locales sont disposées sur quatre

baguettes (FIG. IV.11) à un douzième, un sixième et à la moitié de la partie torsible.

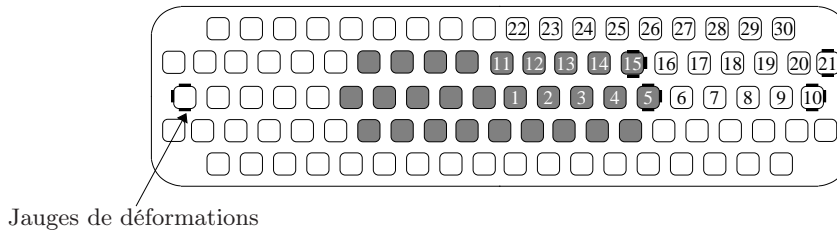


FIGURE IV.11 – Section du bras élastomérique et positions des jauges de déformations.

#### IV.4.3.b Force centrifuge

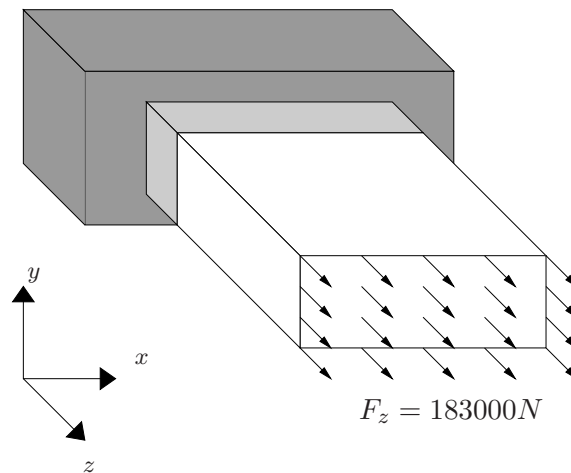


FIGURE IV.12 – Chargement de traction pure – force centrifuge.

On impose un déplacement uniforme (rigide) suivant  $z$  sur la section extrême de la partie courante (FIG. IV.12) dont la réaction est égale à 183000 N.

On s'intéresse dans un premier temps à la répartition de la composante normale ( $\sigma_{zz}$ ) du champ des contraintes et ce, aux deux frontières définies par les trois sous structures. L'hétérogénéité des matériaux dans ces deux zones risquent de créer de fortes singularités de contraintes.

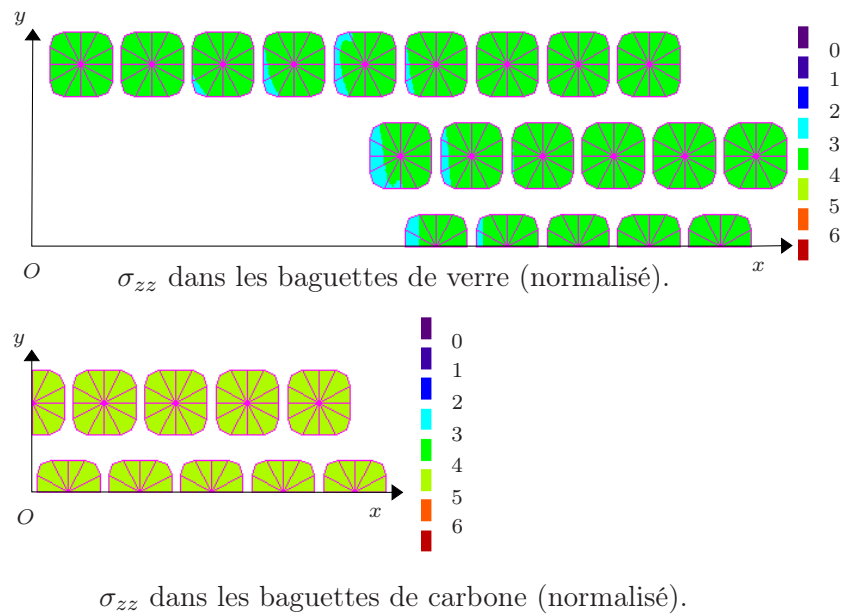
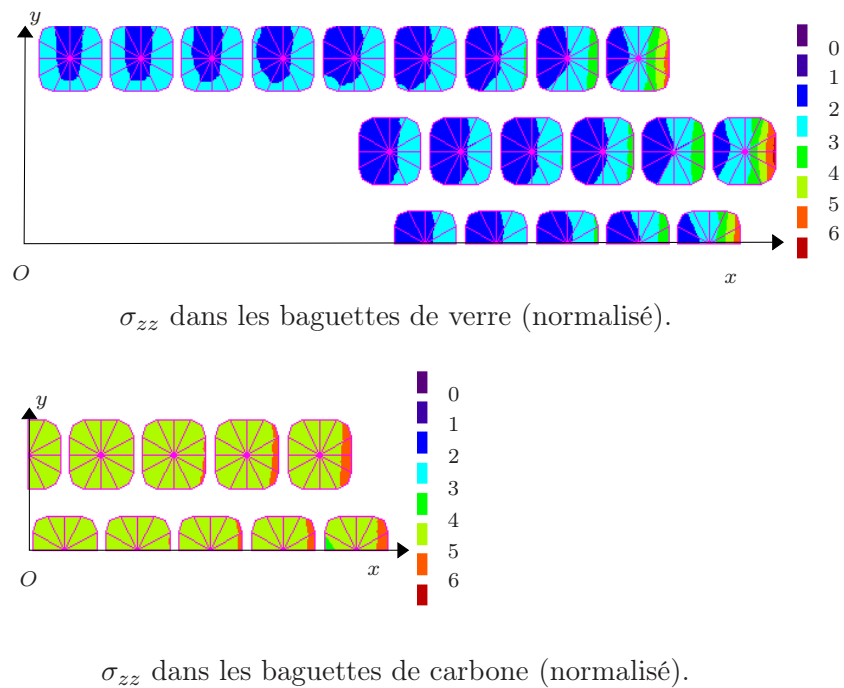
- Répartition des contraintes sur les baguettes aux frontières

#### REMARQUE IV.1

Les échelles des champs de contraintes présentés FIG. IV.14 et FIG. IV.13, sont normées par une même valeur. Cette valeur est adoptée pour tous les résultats en contraintes présentés par la suite.

□



FIGURE IV.13 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté pale sous chargement de traction.FIGURE IV.14 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté rotor sous chargement de traction.

Une approche simple d'une structure telle que le bras élastomérique serait de négliger les effets de l'élastomère et de ne considérer cette pièce que comme un réseau de poutre. Mais, une telle hypothèse donnerait une composante  $\sigma_{zz}$  constante. Or, on constate que si un tel résultat

est vérifié à la frontière entre la zone intermédiaire et la partie courante (cf. FIG. IV.13), il n'en va pas de même lors de la transition entre l'attache et la zone intermédiaire. En effet, la figure FIG. IV.14 montre qu'il n'y a ni uniformité de  $\sigma_{zz}$  d'une baguette à une autre (il semble que la contrainte moyenne d'une baguette augmente avec son éloignement de l'axe  $Oy$ ), ni, d'ailleurs sur une même baguette (la composante  $\sigma_{zz}$  va du simple au double sur la baguette en verre la plus excentrée FIG. IV.14). Une modélisation trop simple du bras ne mettrait pas en évidence les différents phénomènes singuliers décrits précédemment.

- Répartition aux frontières des déformations dans l'élastomère

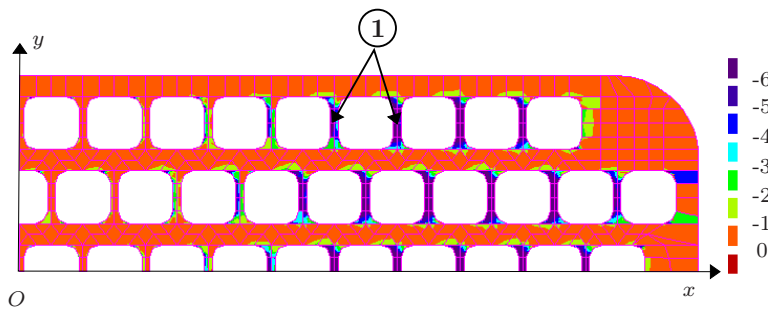


FIGURE IV.15 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traction.

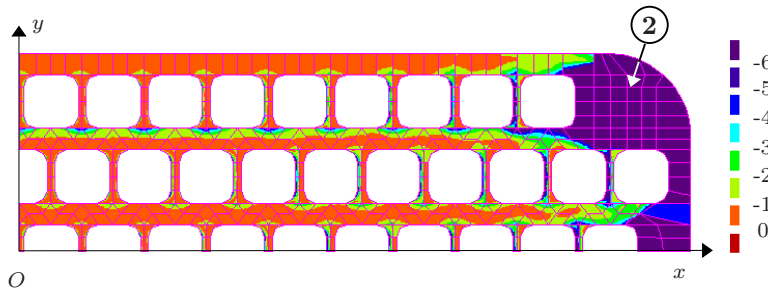


FIGURE IV.16 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traction.

Afin d'essayer d'appréhender l'état de déformation de l'élastomère, on choisit de s'intéresser à la répartition du deuxième invariant des déformations dans les deux sections de frontière (FIG. IV.15, IV.16). Une première constatation visuelle indique que le comportement des deux frontières est complètement différents. En effet, sur la frontière côté pale, les déformations se localisent de manière préférentielle entre les baguettes en verre (①, FIG. IV.15), alors que, côté rotor, le second invariant est plus important à l'extérieur du quart de pièce modélisé (②, FIG. IV.16).

Le premier phénomène est plus endommageant pour le matériau, l'épaisseur de ce dernier étant moindre entre les baguettes. Il peut témoigner d'un écrasement de l'élastomère entre les baguettes. Le second comportement semblerait plutôt traduire un simple effet POISSON de l'élastomère.

Afin de mieux comprendre et de valider le phénomène d'écrasement avancé pour d'expliquer la répartition visualisée sur la figure FIG. IV.15, on s'intéresse maintenant au comportement des baguettes numérotées 15 et 21 (cf. FIG. IV.11) et qui sont particulièrement sollicitées. Ces baguettes étant de plus instrumentées, il est possible de comparer et d'éventuellement valider notre modélisation.

- Comportement des baguettes les plus sollicitées

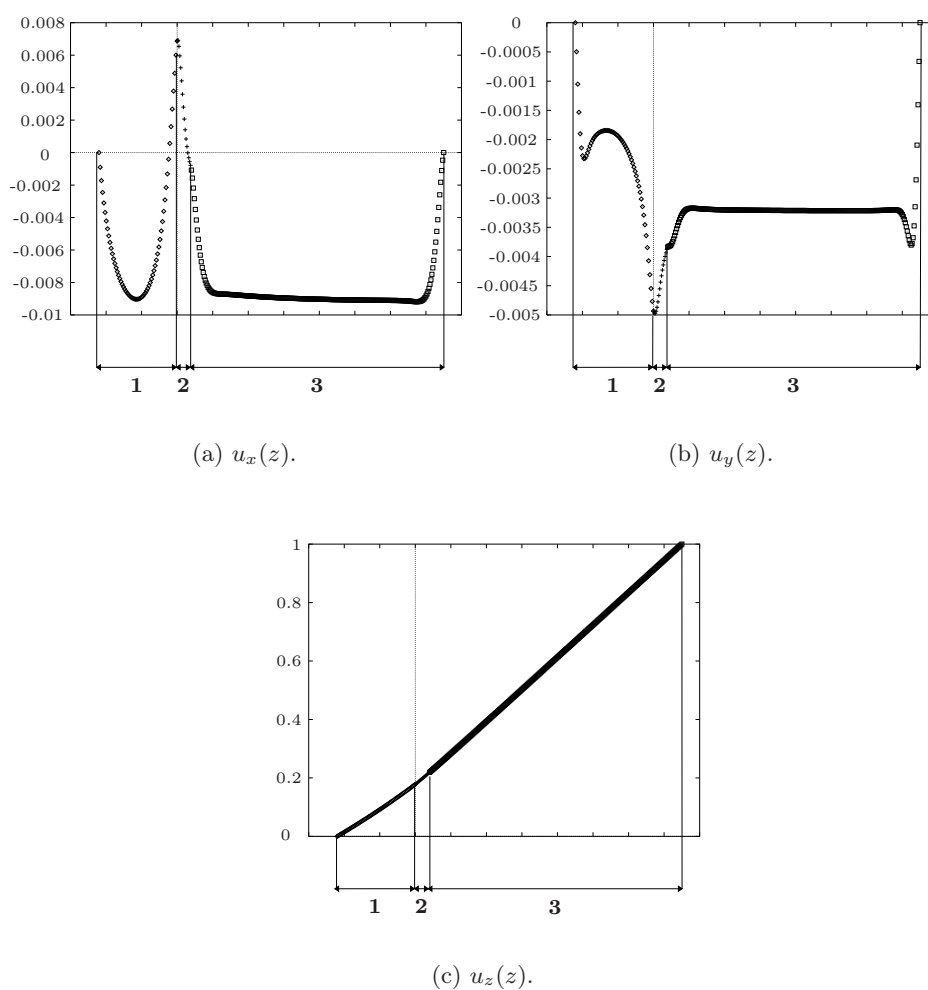


FIGURE IV.17 – Déplacements normalisés moyens de la baguette 15 sous chargement de traction.

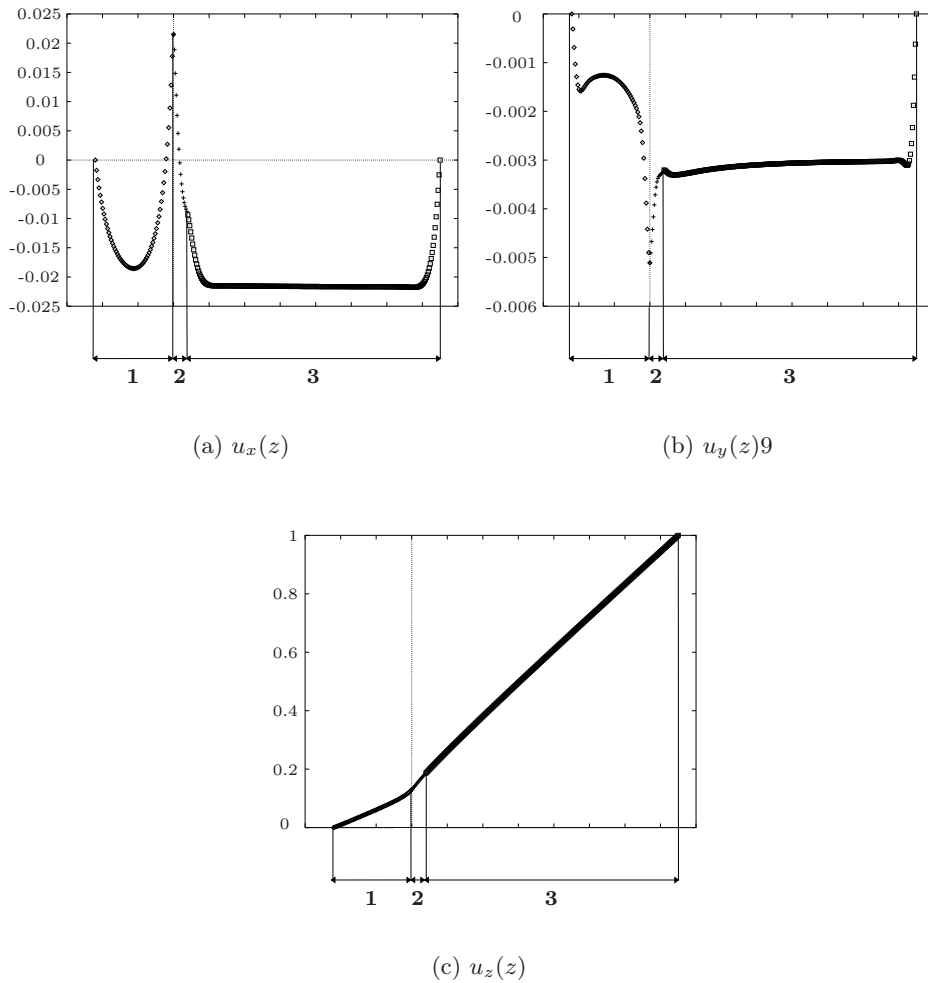


FIGURE IV.18 – Déplacements normalisés moyens de la baguette 21 sous chargement de traction

On s'intéresse dans un premier temps, au champ de déplacements des baguettes 15 et 21 (voir FIG. IV.11).

#### REMARQUE IV.2

Les valeurs de déplacements présentées sont normalisées par le déplacement imposé suivant l'axe  $z$  afin d'obtenir une résultante en force équivalente à celle due aux efforts centrifuges. Les repères **1**, **2** et **3** indiquent respectivement, dans les graphiques à venir, l'attache, la zone intermédiaire et la partie courante. □

Les déplacements moyens des baguettes 15 et 21 (FIG. IV.17 et IV.18) montrent, dans les deux cas, une forte discontinuité des composantes  $u_x$  et  $u_y$  à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire. Ceci est dû à la discontinuité à la fois géométrique et matérielle dans cette partie du bras. Une discontinuité moindre est constatée au niveau de la zone intermédiaire et de la partie courante car cette zone ne présente qu'une faible discontinuité matérielle et une continuité

géométrique (sections identiques). On remarque, pour la composante  $u_z$ , une discontinuité faible à la jonction entre la partie torsible et l'attache (quelque peu plus marquée pour la baguette de verre 21) et pratiquement aucune variation due à l'écart de rigidité entre les matrices élastomériques de la zone intermédiaire et de la partie courante.

La deuxième remarque, se dégageant des graphiques FIG. IV.17(a) et FIG. IV.18(a), concerne la composante  $u_x$  qui prend des valeurs positives dans l'attache et la zone intermédiaire. Un phénomène similaire semble s'initier sur la composante  $u_y$  (FIG. IV.17(b) et IV.18(b)) sans pour autant contraindre celle-ci à prendre des valeurs positives. Ceci ne témoigne pas de coefficients de POISSON négatifs, mais d'une déformation de la structure en tonneau due à l'encastrement de l'attache du côté rotor et au déplacement rigide imposé à l'extrémité de la partie torsible. Les figures FIG. IV.19 et IV.20 illustrent ce phénomène. De telles déformations des baguettes créent, comme avancé lors de l'analyse de la répartition du second invariant, un pincement de l'élastomère amenant ce dernier à des taux de déformations importants entre les baguettes.

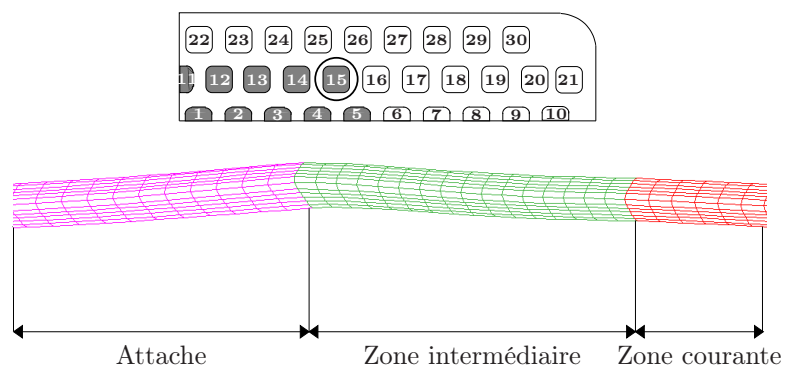


FIGURE IV.19 – *Détail de la déformée de la baguette 15 sous chargement de traction.*

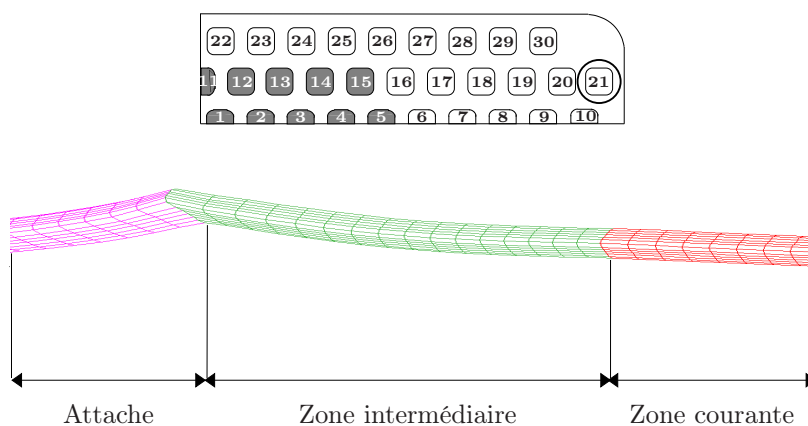


FIGURE IV.20 – *Détail de la déformée de la baguette 21 sous chargement de traction.*

**REMARQUE IV.3**

Dans le but de valider la déformation en tonneau du bras élastomérique, on réalise, à partir d'une structure simplifiée, un calcul complet sous l'hypothèse des contraintes planes. Les résultats obtenus (voir annexe H) montrent, et ce quel que soit le degré d'interpolation des éléments, une déformée présentant les mêmes caractéristiques que celles énoncées précédemment.

□

Enfin, on s'intéresse à l'évolution de la composante normale du tenseur des contraintes ( $\sigma_{zz}$ ) le long des baguettes 15 et 21. Une corrélation correcte existe entre les résultats numériques et expérimentaux.

L'évolution donnée par le calcul numérique (cf. FIG. IV.21) permet de constater que le tenseur des contraintes n'est pas constant le long d'une baguette. Ceci appuie donc l'impossibilité de modéliser le bras par un assemblage de poutres en parallèle sous un chargement de traction.

De plus, il semble que la baguette de verre présente une forte concentration de contraintes localisée entre l'attache et la zone intermédiaire. Cette singularité n'existe pas sur la baguette de carbone.

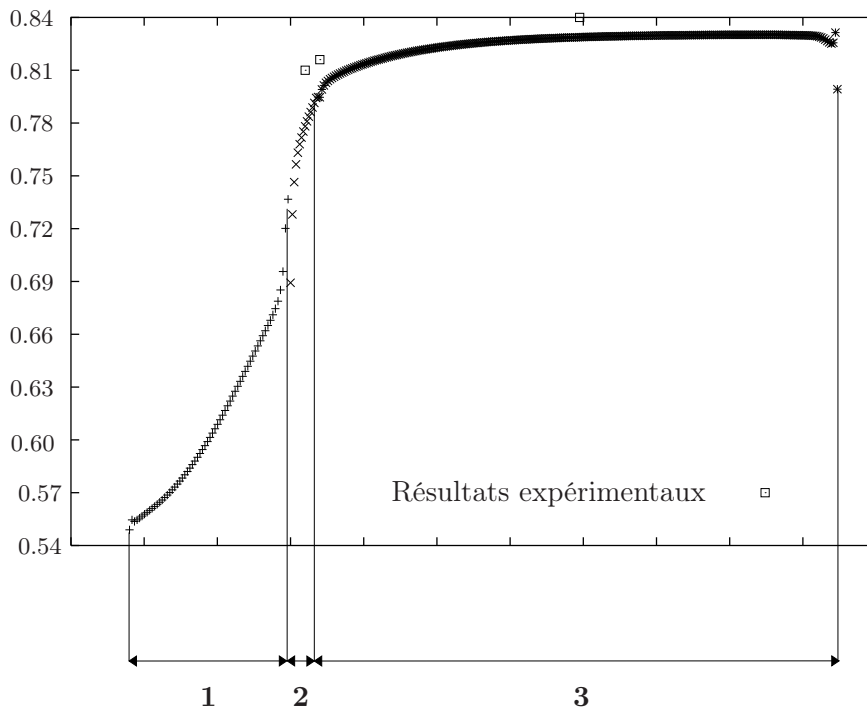


FIGURE IV.21 – Evolution, sous chargement de traction, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 15.

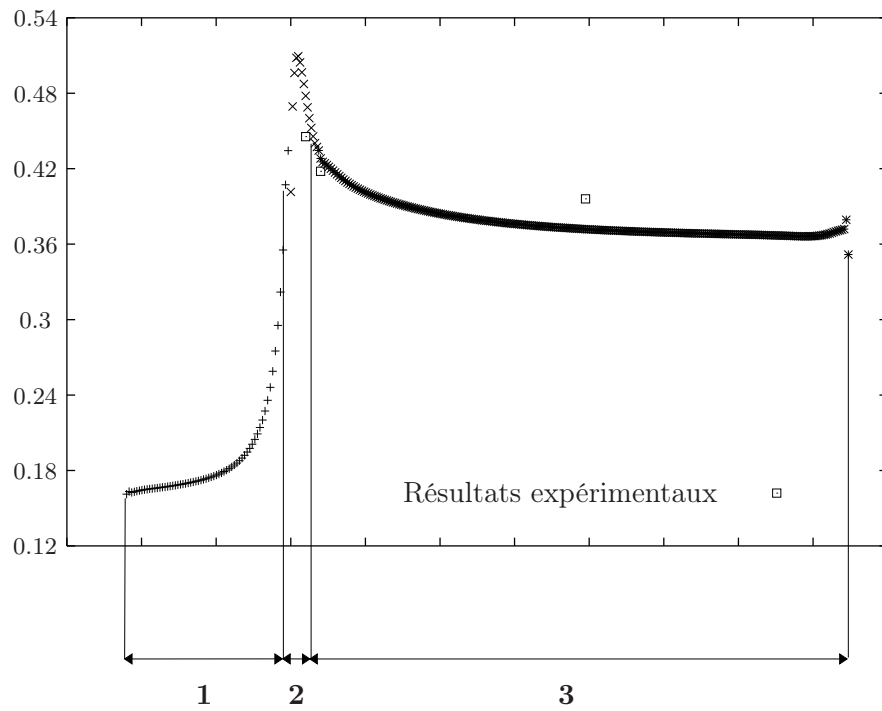


FIGURE IV.22 – Evolution, sous chargement de traction, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 21.

#### IV.4.3.c Traînée

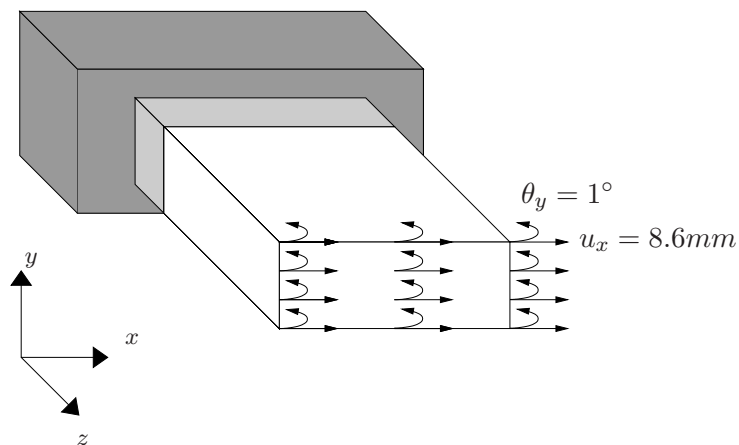
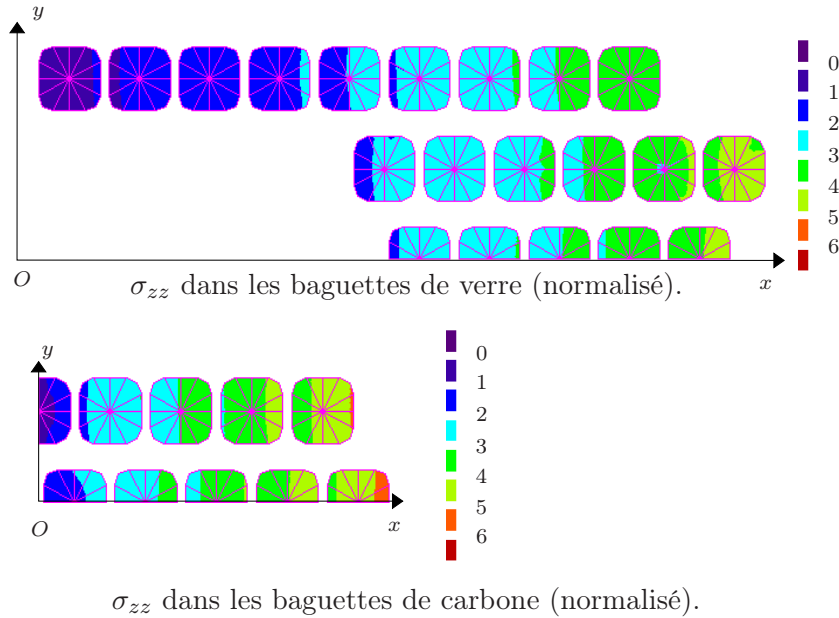
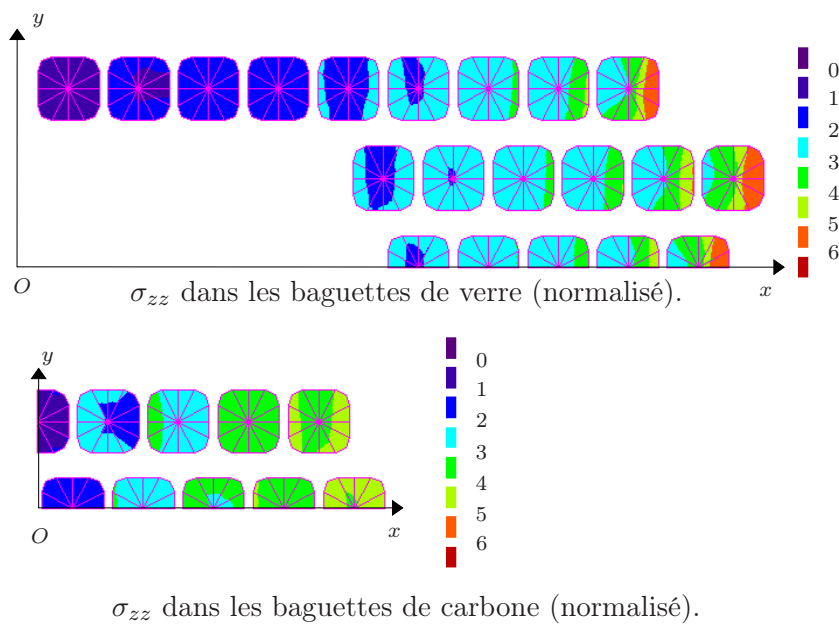


FIGURE IV.23 – Chargement de traînée.

On aborde à présent un cas de sollicitation de traînée sous force centrifuge. Trois composantes peuvent être isolées :

- les efforts centrifuges,

- un mouvement de translation rigide suivant l'axe  $x$  appliqué à l'extrémité de la zone torsible,
- et une rotation rigide autour de  $y$  de cette même section.
- Répartition des contraintes sur les baguettes aux frontières

FIGURE IV.24 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté pale sous chargement de traînée.FIGURE IV.25 – Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée.



Ce cas de chargement donne une répartition de contrainte normale assez différente de celle résultant d'un effort de traction pure. En effet, on constate une répartition assez peu homogène sur une même baguette et une réponse assez disparate d'une baguette à l'autre. Les baguettes excentrées par rapport à l'axe  $Oy$  sont les plus sollicitées. La zone de transition entre l'attache et la zone intermédiaire constitue une fois de plus un site privilégié aux concentrations de contraintes et donc à l'endommagement.

- Répartition aux frontières des déformations dans l'élastomère

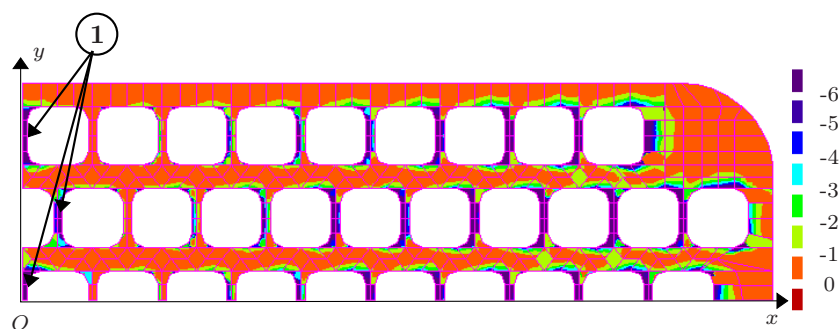


FIGURE IV.26 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de traînée.

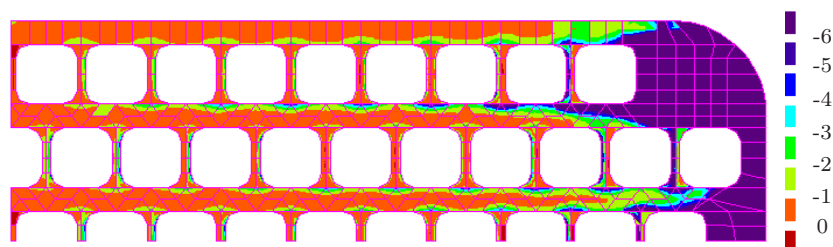


FIGURE IV.27 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de traînée.

La répartition du second invariant des déformations à la frontière côté rotor est sensiblement la même que celle obtenue sous chargement de traction, à savoir une valeur plus importante sur l'extérieur du quart de pièce modélisé (voir FIG. IV.27). A la frontière des zones de même section, on retrouve une localisation des déformations entre les baguettes en verres, à laquelle vient se superposer, par rapport au chargement de traction, un phénomène analogue entre les baguettes de carbone situées près de l'axe  $Oy$  (①, FIG. IV.27).

- comportement des baguettes les plus sollicitées

Les figures FIG. IV.28 et IV.29 donnent les déformations des baguettes 15 et 21 à proximité des

zones de discontinuités géométriques et/ou matérielles.

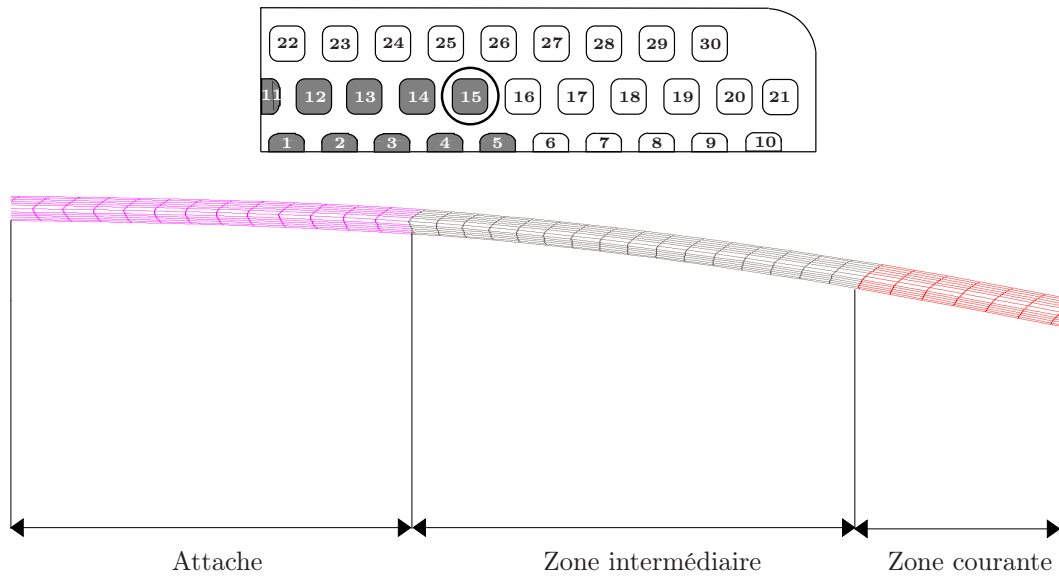


FIGURE IV.28 – *Détail de la déformée de la baguette 15*

On constate sur FIG. IV.28 que l'effet "tonneau" est très atténué sur la baguette 15. Il ne réside plus qu'une très légère discontinuité à la frontière entre l'attache feuilletée et la zone intermédiaire.

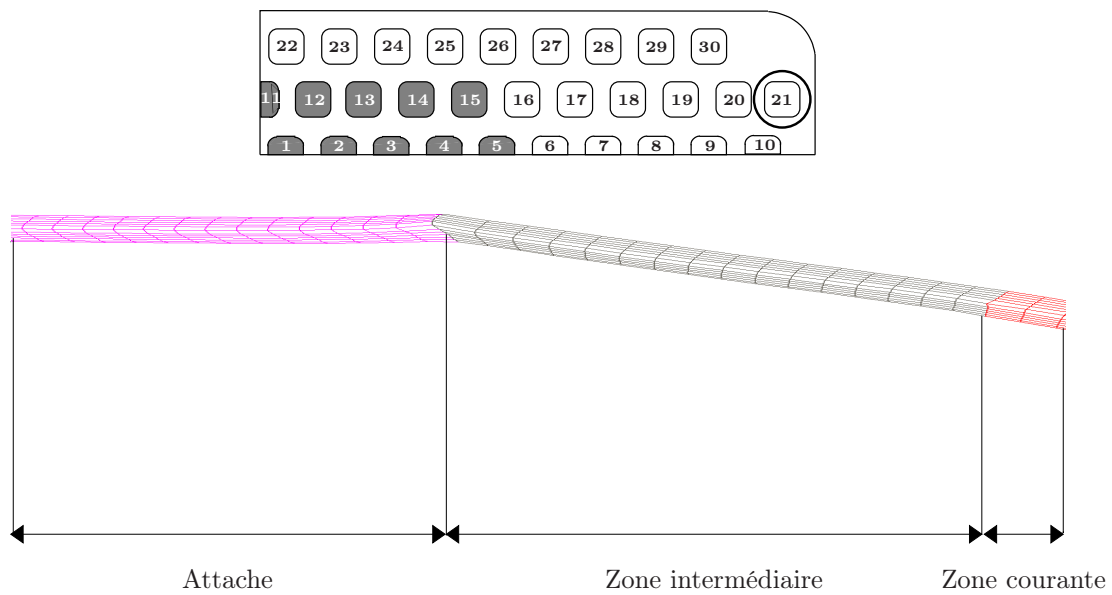


FIGURE IV.29 – *Détail de la déformée de la baguette 21*

La figure FIG. IV.29 montre, sur la baguette 21, la présence toujours marquée de l'effet "tonneau" du au efforts centrifuges, ainsi qu'une forte discontinuité à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire.

L'existence de ces singularités sur la baguette 21 et leur atténuation sur la baguette 15 explique le comportement moins homogène des baguette en verre, dans les sections frontières, constaté sur les figure FIG. IV.24 et IV.25.

On s'intéresse maintenant à la répartition de la composante normale des contraintes le long de ces deux baguettes. Les graphiques FIG. IV.21 et IV.22 présentent la valeur normalisée de la composante  $\sigma_{zz}$  due aux seuls effets de traînée<sup>(3)</sup>.

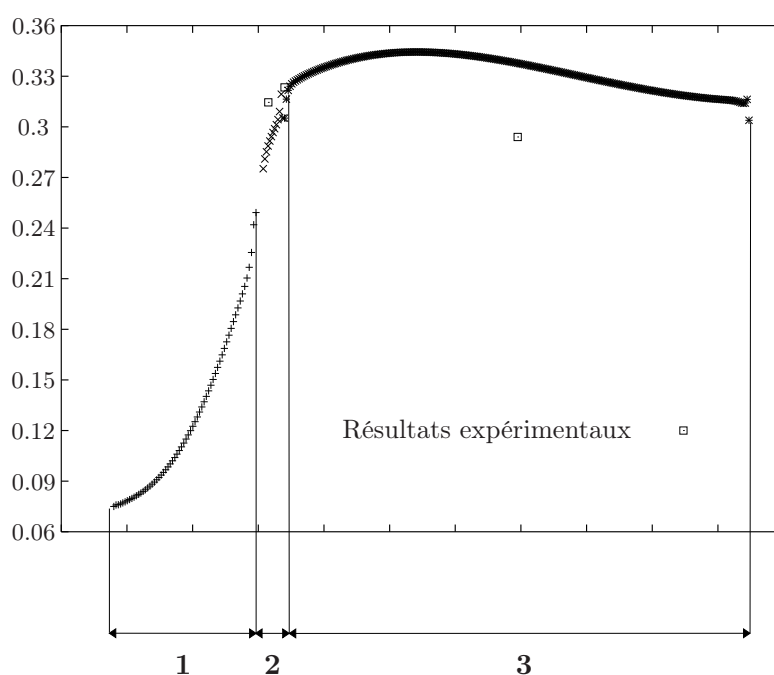


FIGURE IV.30 – Evolution, sous chargement de traînée, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 15.

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux donne une moins bonne cohérence que pour le cas du chargement de traction (cf.FIG. IV.21 et IV.22). En effet, la contrainte est surévaluée dans la partie courante respectivement de 15% et 20% pour les baguettes 15 et 21. Cependant, même si les niveaux de contraintes ne présentent pas la qualité espérée, l'évolution globale le long des baguettes semble assez cohérente. Cette dernière met en évidence une répartition assez régulière de la contrainte normale le long de la baguette de carbone (FIG. IV.30). L'excentrage important de la baguette 21 fait que celle ci est fortement sollicitée en traction suivant l'axe  $z$ . Ceci explique, d'une part le niveau de contrainte normale plus élevé que dans la

(3). Le zéro des jauges de déformations a été fait après application des efforts centrifuges.

baguette de carbone et ce malgré un module de YOUNG du verre deux fois moins important et, d'autre part, la présence de la déformation en tonneau constatée FIG. IV.29 et qui témoigne d'une sollicitation en traction (voir § IV.4.3.b). On met en évidence sur cette même baguette deux singularités, respectivement situées à  $10\text{mm}$  du début de la zone intermédiaire (①, FIG. IV.31) et à  $8.4\text{mm}$  de la partie courante (②, FIG. IV.31). Il est intéressant de voir que ces deux phénomènes bien qu'induits par les discontinuités géométriques et/ou matérielles sont décalés par rapport aux frontières.

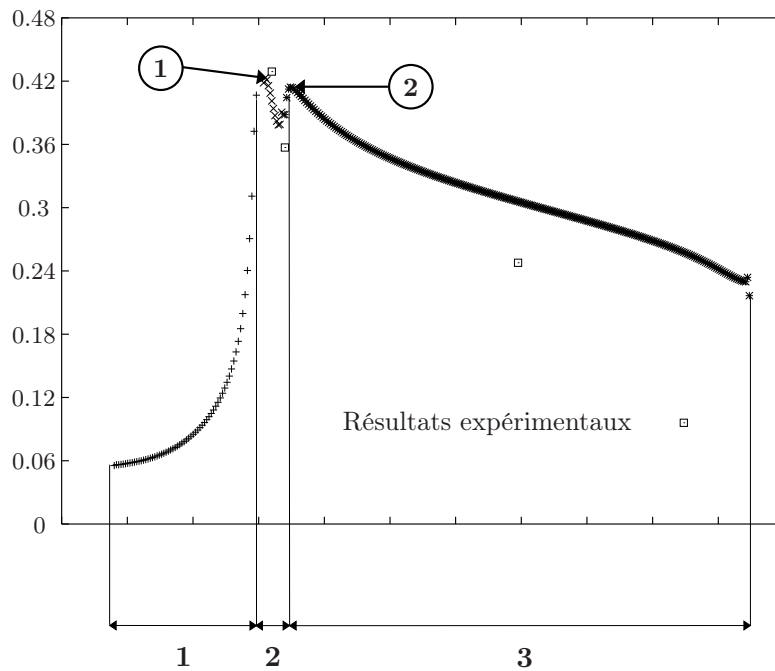


FIGURE IV.31 – Evolution, sous chargement de traînée, de  $\sigma_{zz}$  (normalisé) le long de la baguette 21.

La figure donne la répartition du second invariant sur une section située à  $10\text{mm}$  de l'attache<sup>(4)</sup>.

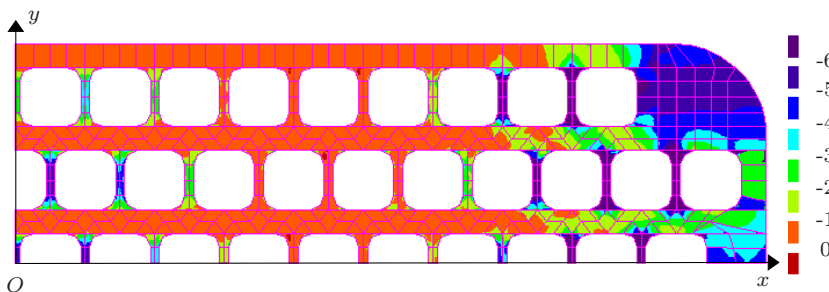


FIGURE IV.32 – Répartition du second invariant à  $10\text{mm}$  de l'attache sous chargement de traînée.

(4). zone présentant la singularité en  $\sigma_{zz}$  dans les baguettes en verre.

La répartition du second invariant des déformations présente un couplage des comportements rencontrés sur les frontières attache / zone intermédiaire (cf. FIG. IV.27) et zone intermédiaire / partie courante (cf. FIG. IV.26, à savoir une forte localisation des déformations entre les baguettes ainsi que sur l'extérieur du quart de pièce modélisé). On en déduit donc une forte sollicitation de l'élastomère dans cette section pouvant amener une détérioration.

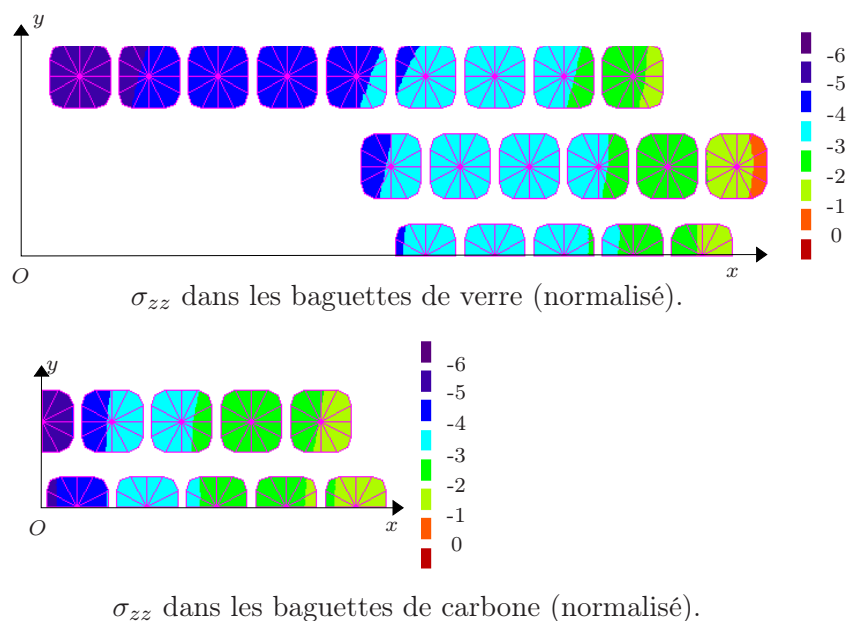


FIGURE IV.33 – Répartition du second invariant à 10mm de l'attache sous chargement de traînée.

#### IV.4.3.d Torsion

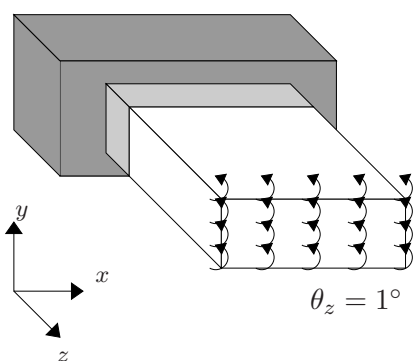


FIGURE IV.34 – Chargement de torsion.

Ce chargement consiste à imposer une rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) de  $1^\circ$  sur la section extrême de l'E.F.B. (cf FIG. IV.34). On tient compte de la non-linéarité due à la force centrifuge.

La part de contrainte normale due au chargement de rotation est faible par rapport à celle induite par les efforts centrifuges. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux.

On s'intéresse aux déformations induites par ce chargement dans l'élastomère.

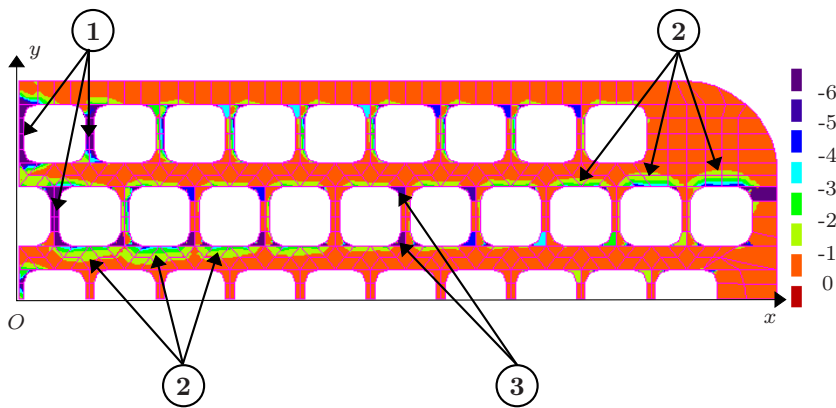


FIGURE IV.35 – Répartition du second invariant sur la frontière côté pale sous chargement de torsion.

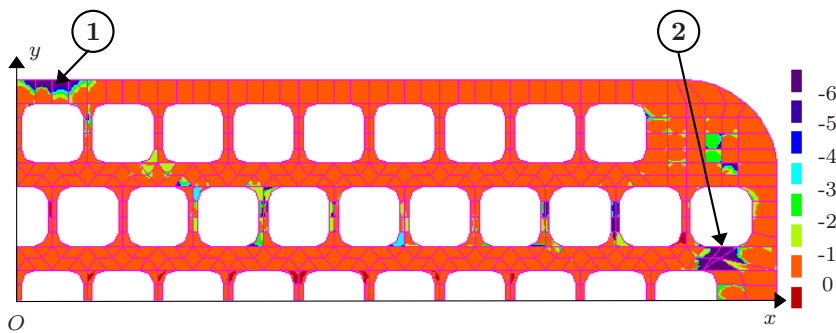


FIGURE IV.36 – Répartition du second invariant sur la frontière côté rotor sous chargement de torsion.

La figure FIG. IV.36 montre une répartition constante (si l'on omet les singularités ① et ②) et pratiquement nulle du second invariant à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire. La répartition du second invariant à la seconde frontière (FIG. IV.35) fait apparaître trois comportements distincts :

- une concentration des déformations sur les faces latérales des baguettes situées à proximité de l'axe ( $Oy$ ) (①),
- un phénomène analogue mais sur les faces supérieures et inférieures des baguettes (②),
- et, enfin, une concentration dans les angles des baguettes (③).

Certaines zones présentent les trois phénomènes simultanément, créant ainsi un risque de décollement des baguettes.

#### IV.4.4 Facteur de perte de la structure dans le cas d'un chargement de traînée<sup>(5)</sup>

##### IV.4.4.a Introduction

On veut déterminer, dans un cas d'un chargement de traînée supposé harmonique, le facteur de perte du bras élastomérique. Cette grandeur est à rapprocher de l'amortissement de la structure, à savoir sa capacité à transformer une partie de son énergie élastique sous forme d'énergie dissipée. Les différents matériaux composites constituant le bras élastomérique sont supposés **élastiques orthotropes linéaires**, les élastomères sont supposés **viscoélastiques linéaires isotropes**.

La démarche présentée ci-dessous se place dans un cadre monodimensionnel, qui se généralise aisément au cas tridimensionnel.

##### IV.4.4.b Equations de la viscoélasticité (modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT)

On choisit d'apoter le modèle rhéologique de KELVIN-VOIGT constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série (voir FIG. IV.4.4.b).

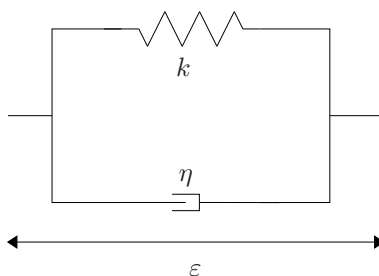


FIGURE IV.37 – *Modèle de KELVIN-VOIGT.*

De manière classique, on définit  $\sigma$  la contrainte dans les deux branches du modèle et  $\varepsilon$  la déformation. On obtient :

$$\boxed{\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}} \quad (\text{IV.26})$$

##### IV.4.4.c Régime harmonique

Dans le cas de la rotation d'un rotor à vitesse constante, on considère le matériau soumis à une sollicitation harmonique. On adopte une notation complexe. L'indice "\*" indique une grandeur complexe. Les déformations peuvent se mettre sous la forme :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec } \varepsilon_0 \in \mathcal{R}^+. \quad (\text{IV.27})$$

(5). [LEMAÎTRE et CHABOCHE, 1985 ; CHRISTENSEN, 1971]

Le tenseur des contraintes se met, par le biais de (IV.26), sous la forme :

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t + \varphi}, \quad (\text{IV.28})$$

avec

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{k^2 + \eta^2 \omega^2} \quad (\text{IV.29a})$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\eta \omega}{k} \right) \quad (\text{IV.29b})$$

$\varphi$  est appelé **angle de perte du matériau** et  $\tan \varphi$  **facteur de perte**.

Le retour en notation réelle donne alors :

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.30})$$

#### IV.4.4.d Caractérisation de l'amortissement

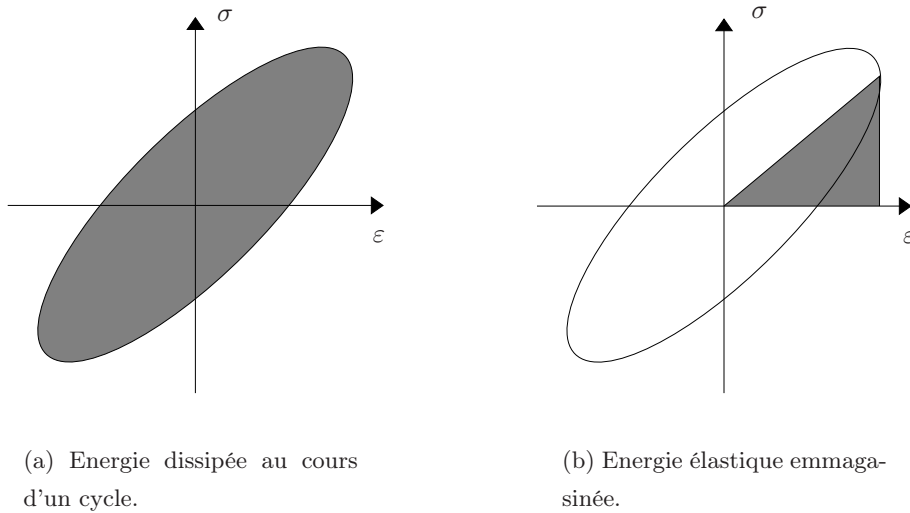


FIGURE IV.38 – *Caractérisation de l'amortissement.*

L'**amortissement** d'un matériau est la part d'énergie élastique dissipée. Si les grandeurs  $\Delta W$  et  $W$  représentent respectivement l'**énergie locale dissipée** par le matériau et l'**énergie locale élastique**, on a, pour une déformation d'amplitude  $\varepsilon_0$ , de pulsation  $\omega$  et de déphasage nul [MAHERI et ADAMS, 1995] :

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \sin \varphi, \quad (\text{IV.31a})$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \cos \varphi, \quad (\text{IV.31b})$$

si bien que le facteur de perte se met sous la forme :

$$\frac{\Delta W}{W} = \pi \tan \varphi = \pi \eta \quad (\text{IV.32})$$



Dans le cas d'une structure constituée de  $n$  matériaux, d'après MAHERI et ADAMS [1995], l'énergie locale dissipée est vue comme la somme des énergies dissipées par chacun des matériaux :

$$\Delta W = \sum_{i=1}^n \Delta W_i, \quad (\text{IV.32})$$

avec  $\Delta W_i$  l'énergie dissipée par le  $i$ -ème matériau.

En notant  $\eta_i$  et  $W_i (= \frac{\Delta W_i}{\pi \eta_i})$  le facteur perte et l'énergie emmagasinée par ce  $i$ -ème matériau, l'équation (IV.32) devient :

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{W_i}{W}. \quad (\text{IV.33})$$

Dans le cas où  $\eta_i \ll 1$ , on montre que l'énergie de déformation du problème viscoélastique est équivalente à celle du problème élastique associé [VANTOMME, 1995 ; DELORME, 1997]. Ceci permet de définir le facteur de perte de la structure complète à partir d'une unique modélisation élastique et d'aboutir à l'expression du facteur de perte suivante :

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{W_i^{el}}{W^{el}}. \quad (\text{IV.34})$$

Dans l'expression (IV.34),  $W_i^{el}$  et  $W^{el}$  représentent les énergies de déformation associées au  $i$ -ème matériau et à la structure complète.

#### IV.4.4.e Facteur de perte du bras élastomérique sous chargement de traînée

On s'intéresse au facteur de perte du bras élastomérique à deux fréquences différentes correspondant, d'une part, au régime nominal du rotor ( $6Hz$ ) et, d'autre part, à la première fréquence propre du rotor ( $3.5Hz$ ) qui sollicite le bras en traînée. L'utilisation d'élastomère permet en théorie d'apporter de l'amortissement à la structure et ce afin d'éviter tout problème d'instabilité.

Les matériaux élastiques qui constituent le bras élastomérique sont, par définition, affectés d'un facteur de perte nul. Les différents élastomères utilisés sont peu amortissants, si bien que leurs facteurs de perte sont suffisamment faibles ( $\eta \approx 0.1$ ) pour permettre l'application de l'équation (IV.34). Le tableau TAB. IV.1 donne les facteurs de pertes du bras pour les deux fréquences précitées.

fréquence	Facteur de perte
$6Hz$	3.2%
$3.5Hz$	3.45%

TABLEAU IV.1 – Facteur de perte de la structure.

On constate TAB. IV.1 que les valeurs de l'amortissement diminuent avec l'augmentation de la fréquence, c'est à dire avec les efforts centrifuges. Ceci est du à l'apport de rigidification amené par les efforts centrifuges qui augmentent l'énergie élastique totale sans pour autant engendrer de dissipation d'énergie supplémentaire.

## IV.5 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la modélisation d'assemblage de structures une à une invariantes dans une direction. Pour ce faire, on met en place une méthode de sous structuration pouvant être vue comme le couplage d'une méthode classique et d'une méthode multi-niveau de sous structuration. La première consiste à résoudre un problème à la frontière et la seconde est dédiée à la modélisation d'une unique structure invariante dans une direction.

Cette technique permet la résolution d'un problème industriel, à savoir la modélisation par la méthode des éléments finis du Bras Elastomérique, pièce développée par la Société EUROCOPTER et, remplaçant sur un hélicoptère, le mécanisme classique de liaison entre le mat rotor et la pale. La difficulté d'un tel problème réside dans la grande hétérogénéité des caractéristiques des différents matériaux et dans la trop faible répétition des motifs, rendant impossible un calcul par homogénéisation. De plus, étant intéressé par des phénomènes locaux dans les zones de discontinuité géométrique et/ou matérielle, un maillage précis doit être adopté. La résolution du problème 3D, en adoptant un maillage d'une telle précision, conduirait à un problème à plusieurs millions de degrés de liberté alors que l'application de la technique de sous structuration développée ne demande la prise en compte d'au plus une dizaine de milliers d'équations à la fois.

L'analyse des différents résultats obtenus sur le Bras Elastomérique met en avant les points principaux suivants :

- la confirmation de la présence de singularités dans les zones de transition entre les différentes parties constitutives, singularités d'autant plus marquées à la frontière entre l'attache et la zone intermédiaire,
- la mise en évidence d'une déformation en tonneau des baguettes, quand celles-ci sont sollicitées en traction. Ce phénomène est naturellement présent pour le chargement simulant les uniques efforts centrifuges, mais aussi sur les baguettes les plus excentrées pour le chargement de traînée,
- enfin, la zone d'élastomère située entre les parois latérales des baguettes semblent être un site privilégié de localisation des déformation et donc d'endommagement du matériau.

On calcule, pour finir, à partir d'une méthode énergétique développée par DELORME [1997], l'amortissement de la structure pour la fréquence nominale de rotation du rotor, ainsi que pour la première fréquence propre du rotor. Une diminution de l'amortissement est constatée avec l'augmentation de la fréquence.