Aspects épistémologiques des figures et du raisonnement pour l'entrée dans la géométrie théorique

Ce chapitre vise à dégager les aspects épistémologiques en jeu dans la visualisation des figures, le raisonnement géométrique et les tâches de construction des figures planes, en particulier des triangles et des quadrilatères, à partir de travaux en didactique des mathématiques mais aussi d'autres recherches avec un point de vue plus cognitif. Ces aspects fondent un MPR relatif aux figures planes de la géométrie « à la Euclide » à la transition cycle 3 / cycle 4 que nous présentons dans le chapitre 4. Nous parlerons de géométrie « à la Euclide » en référence au travail de Robert :

> Au collège on reprend ainsi une partie de l'arsenal de la géométrie grecque, introduit dans un autre ordre, des figures de base, des transformations initiales introduites explicitement (symétries orthogonales notamment), des éléments admis remplaçant les axiomes. Les théorèmes qu'on peut démontrer sont presque les mêmes, les théorèmes de Pythagore et de Thalès occupant une bonne place. Les démonstrations sont éventuellement actualisées par rapport à celles d'Euclide notamment grâce à une utilisation implicite des réels et de formules d'aires (établies à partir de figures de mesures entières et étendues grâce aux propriétés des réels) (Robert, 2003, p. 19).

Cette désignation de la géométrie se situe au-delà des questions de géométries physique et théorique, elle nous permet de délimiter le type de géométrie qui nous intéresse en excluant en particulier les géométries dites non euclidiennes. Nous limitons encore la géométrie étudiée en n'abordant pas la question des transformations géométriques dans cette thèse.

Selon Duval (1998), la géométrie met en jeu trois processus cognitifs : le processus de visualisation, le processus de construction avec des outils géométriques et le processus de raisonnement. Ceux-ci peuvent et doivent être étudiés séparément puis ensemble car ils interviennent en coordination dans l'activité géométrique. De plus, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.3, nous faisons l'hypothèse qu'il existe une double rupture épistémologique entre la géométrie physique et la géométrie théorique concernant le statut et le mode d'appréhension des objets géométriques et concernant les raisonnements géométriques en jeu.

Dans ce chapitre, nous essayons de caractériser cette rupture en étudiant les trois processus cognitifs évoqués par Duval en commençant par celui de visualisation des figures géométriques.

3.1 Figures géométriques

3.1.1 Figure géométrique et visualisation non iconique

Dans le programme scolaire du cycle 1, on parle de manipuler, reproduire, dessiner, identifier et décrire des « formes planes » (*Programme du cycle 1*, 2020). La notion de figure géométrique n'apparaît qu'à partir du cycle 2. Les programmes scolaires des cycles 2 à 4 ne définissent cependant jamais cette notion qu'ils semblent considérer comme allant de soi. En revanche, ils évoquent ses propriétés et ce qu'on peut en faire : les reconnaître, nommer, décrire, reproduire ou construire (*Programme du cycle 2*, 2020, p. 64).

Il faut donc chercher ailleurs une définition de la figure géométrique étudiée dans les programmes scolaires. Le dictionnaire Larousse [1] nous donne :

> 1. Dessin servant à la visualisation de certains êtres mathématiques et permettant d'éclairer une démonstration.
> 2. Objet idéal de la géométrie (droite, plan, etc.).

Ces deux définitions sont au cœur des difficultés des élèves en lien avec la notion de figure géométrique. Elles renvoient à ce que disait Platon dans le livre VI de *La République* : « tu sais aussi qu'ils [les géomètres et les arithméticiens] se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles

1. Lien vers la définition en ligne : `https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/figure/33657?q=figure#33602`.

qu'ils pensent, mais à d'autres figures représentées par celles-là. Par exemple, leurs raisonnements ne portent pas sur le quarré ni sur la diagonale tels qu'ils les tracent, mais sur le quarré tel qu'il est en lui-même avec sa diagonale » (Cousin, 1834). La figure est donc l'objet mathématique sur lequel on raisonne et le tracé visible de cet objet n'en est qu'un des représentants possibles.

Si nous revenons à des travaux de didactique des mathématiques, selon Laborde, « diagrams in two dimensional geometry play an ambiguous role : on the one hand, they refer to theoretical geometrical properties, while on the other, they offer spatio-graphical properties that can give rise to a student's perceptual activity » [2] (Laborde, 2005, p. 25). Les termes « dessin » et « figure géométrique » étant employés comme des synonymes la plupart du temps, l'élève a donc tendance à raisonner sur le dessin tracé sur sa feuille sans distinguer les **propriétés géométriques** des **propriétés spatio-graphiques** liées uniquement au tracé particulier de son dessin.

C'est pourquoi, Laborde et Capponi reprennent et adaptent ici le travail de Parzysz (1988) pour faire la différence entre les termes « dessin » et « figure géométrique ».

> La figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation. [...] Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles (Laborde & Capponi, 1994, p. 168).

Dans cette thèse, nous reprenons cette distinction entre dessin et figure géométrique et nous précisons la définition de la figure géométrique que nous considérons comme **un ensemble de relations entre des objets élémentaires qui la composent**.

En effet, Duval distingue deux manières opposées de voir les figures géométriques :

— la **visualisation iconique** qui « repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier » (Duval, 2005, p. 9). La figure géométrique est donc identifiée par son contour, sa forme. On ne peut pas « opérer dessus sous peine de [la] dénaturer » (Mithalal, 2011, p. 114) ;

— la **visualisation non iconique** qui fait voir la figure comme « un assemblage d'objets de dimensions inférieures (droites, points...) que l'on peut isoler » (Mithalal, 2011, p. 114). Cette fois, on peut opérer sur la figure sans changer

2. Traduction personnelle : « les figures géométriques en deux dimensions jouent un rôle ambigu : d'une part, elles font référence à des propriétés géométriques théoriques, d'autre part, elles offrent des propriétés spatio-graphiques qui peuvent donner lieu à une activité perceptive de l'élève ».

sa nature. Duval ajoute même que « la manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme [...] en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme » (Duval, 2005, p. 14).

Pour « voir » une figure en géométrie, il faut donc d'abord savoir distinguer ce qui relève des propriétés de la figure géométrique, au cœur des raisonnements du cycle 4 (cf. section 3.3), et ce qui relève uniquement du dessin. Or, selon le paradigme géométrique dans lequel on se place, le statut de la figure varie. Dans le cadre de la géométrie physique pour laquelle la source de validation est le sensible, c'est le dessin de la figure géométrique (y compris les propriétés spatio-graphiques du dessin particulier donc) qui est l'objet d'étude. Alors que dans le cadre de la géométrie théorique pour laquelle la source de validation est un raisonnement hypothético-déductif (même s'il s'appuie en partie sur le sensible), le dessin n'est considéré que comme un représentant de la figure géométrique étudiée. Il peut éventuellement être porteur d'heuristiques comme nous le verrons dans la section 3.1.4, mais il n'est pas l'objet d'étude.

3.1.2 Déconstruction instrumentale et dimensionnelle

Nous avons vu dans la section précédente qu'une figure géométrique pouvait être abordée selon un aspect iconique ou non iconique et que la visualisation non iconique doit être développée pour entrer dans la géométrie théorique. Pour utiliser une figure géométrique dans un raisonnement, Duval distingue également trois types de décompositions, ou déconstructions, en unités figurales :

— la déconstruction méréologique décompose la figure « en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ » (Duval, 2005, p. 14). Par exemple, un carré peut être décomposé en quatre carrés plus petits, en huit triangles rectangles (en imaginant que chacun des carrés précédents est découpé selon une diagonale) ou encore en un rectangle et deux carrés ;

— la **déconstruction instrumentale** « conduit [...] à voir l'objet comme le résultat d'un procédé constructif et, si elle ne s'appuie pas nécessairement sur des propriétés géométriques, elle suppose déjà d'isoler les unités figurales de plus petite dimension » (Mithalal, 2011, p. 115). Par exemple, un carré $ABCD$ peut être vu comme le résultat de la construction d'un segment $[AB]$ et d'un point C (resp. D) obtenu par l'intersection de la perpendiculaire à $[AB]$ passant par B (resp. A) et d'un cercle de centre B (resp. A) de rayon $[AB]$;

— la **déconstruction dimensionnelle** « consiste à regarder l'objet comme assemblage d'unités figurales par des propriétés géométriques. Ce dernier point est fondamental car il désigne le rôle de ces propriétés dans ce processus : il ne suffit pas d'isoler les unités figurales, il faut aussi les organiser géométriquement » (Mithalal, 2011, p. 115). Par exemple, un carré $ABCD$ peut être considéré comme formé de quatre points A, B, C et D (dimension 0) tels que $AB = BC = CD = DA$ et tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle droit ou encore, par quatre segments (dimension 1) de même longueur perpendiculaires entre eux. La déconstruction dimensionnelle se fait en articulation avec une activité discursive.

Dans sa thèse que nous avons déjà évoquée dans la section 1.3.1, Mithalal cherche à « caractériser un milieu favorisant l'émergence de la déconstruction dimensionnelle dans l'activité géométrique de l'élève » (Mithalal, 2010, p. 28). Il montre alors que le milieu de la géométrie dans l'espace limite l'information visuelle immédiatement perceptible, ce qui rend la visualisation iconique inopérante et conduit GI à ne plus être le référentiel légitime pour l'activité géométrique. Mithalal construit ensuite une ingénierie didactique pour montrer qu'un environnement de géométrie dynamique dans l'espace permet d'élaborer des situations dans lesquelles la visualisation iconique peut s'exercer mais où seule la déconstruction dimensionnelle permet à l'élève de résoudre la tâche de construction, facilitant son émergence. Dans la suite de cette recherche, Mithalal et Balacheff constatent que : « instrumental deconstruction turns to be the operational side of the dimensional deconstruction, which itself provides the needed geometrical grounds required to justify the construction process » [3] (Mithalal & Balacheff, 2019, p. 170). À la fin de son étude, Mithalal distingue alors deux types de déconstructions instrumentales (qui restent « liées à la géométrie dynamique, et aux primitives de construction disponibles » (Mithalal, 2010, p. 262)). L'une est « à visée iconique » puisque son enjeu est toujours de reconstruire une forme avec un contrôle visuel. L'autre est « à visée non iconique » et se base sur des contrôles géométriques, « les unités figurales sont identifiées pour elles mêmes, et non plus en référence à une forme. En particulier, il est possible d'ajouter de nouvelles unités figurales, ce qui n'était pas possible dans le cas précédent » (Mithalal, 2010, p. 262). Mithalal montre également que la déconstruction instrumentale, la déconstruction dimensionnelle et le paradigme GII (et donc la géométrie théorique, dans le cadre de

3. Traduction personnelle : « la déconstruction instrumentale devient le versant opérationnel de la déconstruction dimensionnelle, qui fournit elle-même les raisons géométriques nécessaires pour justifier le processus de construction ».

cette thèse) sont fortement liés :

> Les déconstructions instrumentales permettent de traiter les représentations dans Cabri 3D [4] : construction, production de propriétés invariantes par déplacement, recherche d'observables... La déconstruction dimensionnelle permet de juger de leur validité, en spécifiant les relations entre les différentes unités figurales et en constituant une interface entre ce traitement de représentations et une géométrie GII source de validité (Mithalal, 2010, p. 263).

Dans ce travail de thèse, en nous appuyant sur la définition des figures géométriques comme ensemble de relations entre des objets élémentaires qui la composent (cf. section 3.1.1), nous faisons l'hypothèse que la déconstruction instrumentale, la déconstruction dimensionnelle et le paradigme GII sont également liés en géométrie plane. Dans la section 3.5, nous verrons que nous élaborons le milieu des tâches de construction des parcours d'apprentissage que nous proposons pour rendre inopérantes certaines propriétés de la figure géométrique et pour pousser l'élève à mobiliser, en actes, une déconstruction instrumentale et dimensionnelle des objets à construire, et ainsi entrer dans la démarche de la géométrie théorique.

3.1.3 Sens et dénotation des énoncés décrivant les figures géométriques

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.1, une figure géométrique exprime des relations entre les objets élémentaires qui la composent. Or, une figure géométrique peut être décrite par différentes propriétés qui permettent de l'appréhender différemment. Nous rapprochons ceci des notions de sens et de dénotation des expressions langagières telles que Frege (1948) les décrit.

La **dénotation** (on lit aussi parfois « la référence ») d'un mot ou d'une expression correspond à la « portion de réalité » que ce mot ou cette expression désigne, en ce qui nous concerne, il s'agit d'un objet mathématique, par exemple un triangle isocèle, un carré, etc.

Le **sens** d'une expression correspond à son mode de présentation. Il est objectif, conventionnel et « grasped by everybody who is sufficiently familiar with the language or totality of designations to which it belongs » [5] (Frege, 1948, p. 210). Il ne faut

4. Logiciel de géométrie dynamique dans l'espace développé par la société Cabrilog.
5. Traduction personnelle : « partagé par n'importe qui de suffisamment familier avec le langage ou tous les usages de cette expression ».

donc pas le confondre avec les conceptions qui, elles, sont propres à chaque individu. Drouhard, qui reprend ces notions dans le domaine algébrique, définit le sens comme « le “programme de calcul” permettant de déterminer la dénotation » (Drouhard, 2008, p. 3).

Frege (1948) donne un exemple de la différence entre sens et dénotation en géométrie : soit un triangle dont les trois médianes sont appelées a, b et c. Les expressions « le point d'intersection des droites a et b » et « le point d'intersection des droites b et c » ont la même dénotation puisqu'elles renvoient au même objet mathématique (le point d'intersection des médianes) mais pas le même sens. Ces sens différents peuvent amener à des appréhensions différentes d'un même type de tâches, par exemple de construction, et donc à des résolutions différentes.

Cependant, Frege (1948) ne parle ici que de *singular terms*, à savoir de termes qui concernent intrinsèquement l'objet auquel ils se réfèrent. La notion de dénotation n'est donc pas forcément bien définie pour les objets géométriques qui nous intéressent. En effet, deux triangles correspondent-ils toujours à la même portion de la réalité ? Ou doivent-ils être égaux au sens mathématique pour considérer que les énoncés [6] les décrivant ont la même dénotation ?

Nous nous appuyons sur ce que nous avons dit précédemment pour répondre à cette question : « la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit » et « une figure exprime des relations entre les objets élémentaires qui la composent ». Nous considérons alors que **deux énoncés qui décrivent une figure ont la même dénotation** et renvoient donc à « la même portion de réalité » s'ils décrivent des figures géométriques équivalentes au sens de la définition des figures géométriques de Laborde et Capponi (1994). Par exemple, « un triangle isocèle avec un angle à la base de 60° » et « un triangle isocèle avec un angle au sommet de 60° » sont des énoncés ayant la même dénotation puisqu'ils décrivent des figures géométriques équivalentes par la relation « être un triangle équilatéral ». De même, « un parallélogramme avec un angle droit » et « un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur » sont des énoncés ayant la même dénotation puisqu'ils réfèrent à des figures équivalentes par la relation « être un rectangle ».

Ces exemples montrent que l'énoncé définissant ces figures géométriques peut être plus ou moins précis selon les propriétés géométriques qu'il met en jeu, directement ou implicitement. Il peut notamment définir des figures géométriques à une isométrie ou une similitude près. Il faut donc préciser la notion de « même dénotation » selon

6. Même s'ils peuvent parfois se confondre, nous ne parlons pas ici d'un énoncé au sens de l'énoncé d'un exercice mais au sens d'une expression langagière.

les contextes dans lesquels on se place. Nous verrons dans la section 3.2.2, quels types de tâches de construction nous considérons et donc à quoi correspondent des énoncés de même dénotation dans le contexte de l'EIAH MindMath.

Dans la suite de cette thèse, par abus de langage et parce que dans la pratique on confond souvent la figure géométrique avec le texte qui la décrit, nous parlerons parfois de figures géométriques ayant la même dénotation. Il est pourtant à noter que ce sont bien les textes (discours, textes écrits et schémas codés inclus), décrivant ces figures géométriques, qui ont la même dénotation. Cette dénotation (la portion de réalité qu'ils décrivent) correspond à la figure géométrique elle-même.

Les figures géométriques de même dénotation mais de sens différents mettent en jeu des relations différentes entre les unités figurales qui les composent. Ainsi, on pourra dire qu'un triangle équilatéral et un triangle isocèle avec un angle de 60° ont la même dénotation au sens où nous l'avons défini précédemment. Cependant ils n'ont pas le même sens et on voit bien ici que les élèves n'aborderont pas leur construction de la même façon. Dans le premier cas, l'élève peut mobiliser, par exemple, la définition « les trois côtés d'un triangle équilatéral sont égaux » alors qu'il mobilise plutôt la propriété « dans un triangle isocèle, il y a deux côtés égaux » et la construction d'un angle de 60° dans le deuxième cas.

3.1.4 Fonction heuristique des figures géométriques

Comme nous venons de le voir et comme nous l'avons vu dans la section 3.1.1, les énoncés et/ou schémas qui décrivent une figure géométrique sont porteurs d'heuristiques. C'est aussi le cas de la figure géométrique elle-même, en particulier représentée par un ou plusieurs de ses dessins. Ainsi, Brousseau (2000) pense que « l'enseignement de la géométrie entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est-à-dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par la manipulation familière des images » (Brousseau, 2000, p. 2). C'est ce qu'il appelle le raisonnement visio-déductif. En effet, la figure fait « apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal » (D. Bessot, 1983, p. 35). Les figures permettent aussi « d'apercevoir l'idée centrale d'une démonstration déductivement complexe » (Duval, 1994, p. 121).

Cependant, cette fonction heuristique va au-delà d'une « lecture du dessin » (Arsac, 1998) ou même d'une « manipulation familière des images » (Brousseau, 2000). Pour servir à l'élaboration d'un raisonnement, elle met en jeu une visualisation non iconique des figures géométriques ainsi que les notions de déconstructions instrumentales et/ou dimensionnelles que nous avons vues dans la section 3.1.2.

Si la figure géométrique peut être représentée par un dessin tracé avec les instruments géométriques, elle l'est aussi souvent par un schéma (éventuellement codé) tracé à main levée. Dans la phase d'analyse ou d'heuristique d'une tâche de construction (cf. section 3.3.3), le schéma codé de la figure à construire tient une place très importante.

Dans un premier temps, le schéma peut aider à comprendre le problème. Pour le mathématicien Pólya (1965 [1957]), par exemple, « dessiner une figure » fait partie de la phase de compréhension du problème. De même pour Chevallard et Jullien :

> Tout de même, en géométrie, on pourra utiliser des schémas, grossièrement tracés, pour représenter des expériences graphiques : à l'énoncé du théorème de Morley [7], je pourrai tracer à main levée un triangle (suffisamment) quelconque ; puis, toujours approximativement, les trisectrices (qui, de toute façon, ne sont pas constructibles à l'aide de la règle et du compas), afin de reconnaître déjà de quel phénomène géométrique me parle l'énoncé (Chevallard & Jullien, 1991, pp. 61-62).

Mais surtout, le schéma codé a lui aussi une forte fonction heuristique. Vezin le définit comme « une représentation figurée d'une connaissance utilisant formes, dimensions et positions pour ne reproduire que les caractéristiques valables pour une catégorie d'objets ou de phénomènes » (Vezin, 1986, p. 71). Ainsi, le schéma, en ne prenant en compte que certains éléments de l'énoncé et en se plaçant dans le registre visuel « donne une vue simultanée et synthétique d'objets et de relations entre ces objets favorisant [...] la manipulation, l'organisation, le traitement, la mémorisation de nombreux objets et relations [...] la suggestion d'hypothèses de recherche, la prévision de résultats... » (A. Bessot & Richard, 1980, p. 389). Le schéma peut favoriser le choix des propriétés des figures géométriques en jeu à utiliser pour élaborer leur programme de construction. En lien avec la notion de preuve, Matos et Rodrigues montrent ainsi que le schéma joue « an important role in the process of sharing and increasing the ownership of meaning of proof by highlighting the relevant properties » [8] (Matos & Rodrigues, 2011, p. 183).

Ainsi, comme nous le verrons dans le chapitre 8, lorsqu'un élève ne parvient pas

7. « Le théorème de Morley dit que, étant donné un triangle quelconque, les points d'intersection des trisectrices adjacentes des angles du triangle forment un triangle équilatéral » (Chevallard & Jullien, 1991, p. 59).

8. Traduction personnelle : « un rôle important dans le processus de partage et d'appropriation du sens de la preuve en mettant en évidence les propriétés pertinentes ».

à résoudre une tâche de construction, on lui proposera dans un premier temps de tracer un schéma codé de la figure à construire à partir des données de l'énoncé. La forte fonction heuristique du schéma suffit parfois à donner une idée du raisonnement à élaborer pour construire la figure.

Dans la section suivante, nous étudions donc la question des problèmes de construction avant de développer plus longuement celle du raisonnement sur les propriétés géométriques que nous avons commencé à évoquer ici.

3.2 Problèmes de construction

La construction avec les outils de construction géométriques est un des trois processus que met en jeu la géométrie selon Duval (1998). C'est aussi notre point d'appui pour amener les élèves à passer d'une géométrie physique à une géométrie théorique comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 (cf. hypothèse 2). Dans cette section, nous définissons plus précisément la notion de problème de construction que nous considérerons par la suite. Dans la section suivante, nous aborderons le raisonnement qui y est mis en œuvre.

3.2.1 Tracé et construction de figures

D'une manière générale, construire une figure, c'est produire une figure avec des outils de construction à partir d'un énoncé (et/ou schéma) décrivant cette figure. La résolution d'un problème de construction passe par la mise en œuvre d'un programme de construction (qu'il soit ou non explicité). Cependant, la correction du dessin de la figure n'est pas l'enjeu principal d'un problème de construction, la validation porte plus sur la démarche et sur la constructibilité des objets en jeu. C'est ce qui différencie en particulier les tâches de construction des tracés. Ainsi, un algorithme de construction n'est pas un procédé de tracé car il s'agit de travailler sur les figures géométriques comme « des idéalités, des entités immatérielles, et la "règle" et le "compas" sont, de même, des instruments idéels » (Chevallard & Jullien, 1991, p. 74).

Chaachoua définit donc :

> - Preuve de constructibilité : elle justifie la faisabilité de la construction suivant les moyens permis par une théorie donnée. Cette justification peut être géométrique ou relever d'un autre cadre, algébrique par exemple.
>
> - Algorithme de construction : il donne les moyens de réaliser les constructions selon des règles bien définies. Notons qu'un algorithme de construc-

tion peut utiliser des constructions déjà établies précédemment. Lorsqu'un algorithme de construction est justifié, il fournit par la même occasion une preuve de constructibilité.

- Procédé de tracé : il donne les moyens de la réalisation de la construction sur une feuille de papier (Chaachoua, 1997, p. 127).

Nous reprenons ainsi la distinction faite dans le document d'accompagnement « Géométrie au collège » associé aux programmes scolaires de 2008 qui caractérise ces deux types de tâches.

> « Construire », c'est résoudre un problème du même type que la résolution d'une équation : un objet inconnu doit obéir à un certain nombre de contraintes ; la traduction de ces contraintes en propriétés de l'objet et leur exploitation (en utilisant ici des propriétés géométriques) vont permettre d'arriver à isoler une (ou plusieurs) procédures d'obtention de l'objet visé. La résolution d'un problème de construction sous-entend que l'élève doit être capable de décrire ou justifier la procédure élaborée.
>
> « Tracer », c'est exécuter une tâche bien délimitée sans obligation de justification (la procédure ne doit pas poser problème). De fait, il y a souvent confusion entre les deux : « Tracer un triangle rectangle d'hypoténuse 7 cm et dont un côté de l'angle droit mesure 4 cm » sous-entend un problème de construction mais l'existence de l'objet à réaliser n'est pas mise en doute. Le contrat doit alors être clarifié.
>
> Tracer est une tâche essentiellement matérielle. Elle peut consister en :
>
> — la production d'un dessin à main levée ou avec les instruments en procédant par essais et ajustements ;
>
> — l'exécution d'une procédure de construction automatisée au niveau d'apprentissage considéré.
>
> (*Géométrie au collège*, 2007, p. 10)

La distinction entre problèmes de construction et de tracé dépend donc du niveau scolaire auquel on se place. Comme nous l'avons vu, nous nous situons au début du cycle 4. Des types de tâches comme « tracer / construire un carré de $7cm$ de côté avec une règle graduée et une équerre » ne sont donc plus considérés comme des constructions. En effet, la technique pour les résoudre est déjà étudiée en CM1 comme on peut le lire dans les repères annuels de progression du cycle 3 : « ils tracent un carré ou un rectangle de dimensions données » (*Mathématiques : repères annuels* *de progression pour le cycle 3*, 2019, p. 8). En revanche, certaines techniques de construction étudiées plus tardivement au cycle 3 pourront parfois être considérées comme automatisées à l'entrée au cycle 4 et parfois encore problématiques pour les élèves. De plus, nous nous situons dans le cadre particulier de la géométrie dynamique. Or, comme nous le verrons plus précisément dans le chapitre 5, les programmes scolaires du cycle 3 sont particulièrement elliptiques sur cette question. Des procédures de construction automatisées au cycle 3 dans l'environnement papier - crayon pourront donc poser problème au passage sur un logiciel de géométrie dynamique. Nous étudierons ces phénomènes dans le chapitre 6.

3.2.2 Restauration, reproduction et construction de figures

Godin et Perrin-Glorian dont nous avons présenté les travaux dans la section 1.3.2 distinguent également la construction de la restauration et de la reproduction de figures qu'ils définissent ainsi :

> La restauration de figures planes consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments. Il s'agit donc de travailler, non pas sur une figure, mais sur la différence entre deux figures : le modèle et l'amorce (éventuellement en plusieurs morceaux). La reproduction de figure correspond au cas où l'amorce est vide et où les instruments autorisés sont la règle et le compas. Nous parlons de restauration si l'amorce n'est pas vide ou réduite à un point et plus particulièrement si elle est 2D (donc comprend plus qu'un segment) ou si un instrument est 2D (gabarit, morceau de surface voire équerre) (Godin & Perrin-Glorian, 2008, p. 3).

Dans les deux cas, la restauration ou la reproduction de figures peut se faire à l'identique ou non (on fera alors un agrandissement ou une réduction de la figure modèle).

> Contrairement à la restauration ou à la reproduction, les propriétés de la figure à construire ne sont pas à identifier dans un modèle mais sont données sous forme de texte ou de figure à main levée codée.
>
> Si les connaissances de celui qui construit la figure ne lui permettent pas de répondre directement au problème, il est amené à rechercher les propriétés sur lesquelles peut s'appuyer la construction en faisant l'analyse d'un schéma codé (souvent à main levée) portant les propriétés à obtenir

> pour les relier éventuellement à celles qu'il sera possible d'utiliser pour la construction (phase d'analyse).
>
> Au cours de cette analyse, il est amené à enrichir la figure pour en rechercher d'autres propriétés à partir desquelles on peut mener la construction (Godin & Perrin-Glorian, 2014, p. 35).

Après cette phase d'analyse, l'élève construit la figure (et la valide éventuellement) dans une phase de synthèse. Nous étudions cette démarche en la mettant en perspective du raisonnement par analyse-synthèse dans la section 3.2.3.

Comme nous l'avons déjà abordé dans la section 3.1.3, l'énoncé d'une exercice de construction peut plus ou moins limiter les degrés de liberté de la figure à construire. Ainsi, on peut par exemple vouloir construire :

— un triangle isocèle ;

— un triangle isocèle d'angle au sommet donné (tous les triangles construits seront semblables) ;

— un triangle isocèle d'angle au sommet et de côté base donnés (tous les triangles construits seront égaux).

Dans l'environnement papier-crayon, comme nous le verrons dans l'étude des manuels du chapitre 5, les constructions sont majoritairement réalisées à une isométrie près. Dans les parcours que nous proposons, les constructions sont réalisées à une similitude près afin de favoriser un travail sur la notion de figure comme classe d'équivalence de dessins plutôt que sur un dessin en particulier. Les énoncés de même dénotation décriront donc des figures semblables. Pour cela, nous nous appuyons notamment sur le déplacement et la notion de robustesse des figures que nous étudierons dans le chapitre 6.

Nous verrons également dans la section 3.5 quelles sont les conditions didactiques qui nous intéressent en particulier pour définir des types de tâches de construction que nous jugeons pertinents pour une introduction du raisonnement déductif au début du cycle 4.

3.2.3 Raisonnement par analyse-synthèse

Pour résoudre un problème de mathématiques, le mathématicien Pólya (1965 [1957]) propose une méthode en quatre grandes étapes : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et examiner la solution obtenue (Pólya, 1965 [1957], p. 11). On peut rapprocher cette méthode d'une technique souvent évoquée pour la résolution de problèmes de construction : le **raisonnement par analyse-synthèse**.

Le raisonnement par analyse-synthèse est une « (macro)technique d'étude d'un champ de problèmes » (Gascón, 1994, p. 49). Il peut mettre en jeu différents types de raisonnements et d'activités dans ses deux phases comme nous le verrons dans la section 3.3.3. En 2021, ce type de raisonnement n'est pas un attendu des programmes des cycles 3 et 4 (ni de ceux du lycée). Pourtant, selon Matheron et Noirfalise, « les activités de construction proposées en fin de cycle 3 sont propices à la rencontre, par les élèves, de raisonnements du type "analyse – synthèse" » (Matheron & Noirfalise, 2011, p. 12).

Glaeser (1990) met cependant en avant l'ambiguïté des termes composant l'expression « raisonnement par analyse-synthèse ». Il propose d'étudier la signification des mots « analyse » et « synthèse » et exhibe plus d'une cinquantaine de sens différents. En particulier dans le cadre des problèmes de construction, la construction en elle-même est parfois présentée dans la phase d'analyse et parfois dans la phase de synthèse. Nous décidons donc de choisir une définition assez générale en reprenant celle utilisée par Gascón qui la reprend lui-même de Pappus :

> Tel que le décrit Pappus, le schéma général du patron d'Analyse-Synthèse comporte deux étapes : un *raisonnement régressif* ou *analyse* qui part de l'objet inconnu d'un problème et aboutit aux données du problème ; et un *raisonnement progressif* ou *synthèse* qui fait le chemin inverse, en partant des données du problème et en aboutissant à la construction de l'objet inconnu (Gascón, 1994, p. 49).

Notre but, dans cette thèse, n'est pas de faire travailler explicitement le raisonnement par analyse-synthèse, ni de l'imposer aux élèves au début du cycle 4, mais c'est une structure pratique pour décrire les différentes phases du raisonnement mis en œuvre notamment pour résoudre une tâche de construction comme nous le présentons dans l'exemple de la section 3.2.5.

Dans la section 3.3, nous préciserons le raisonnement mis en œuvre dans la phase d'analyse et dans la phase de synthèse.

3.2.4 Programmes de construction

Un programme de construction est « un ensemble d'instructions permettant de construire une figure déterminée » (Millon-Faure, Roubaud, & Assude, 2019, p. 10). La résolution d'une tâche de construction nécessite donc l'élaboration (même implicite) d'un programme de construction. Ainsi, comme nous le verrons dans la section 3.3.3, le raisonnement mené dans la phase d'analyse aboutit à un programme de construction, exécuté dans la phase de synthèse pour construire la figure en jeu.

Dans notre travail, nous ne cherchons pas à faire expliciter le problème de construction à l'élève et nous ne travaillons donc pas sur sa dimension textuelle. Néanmoins, c'est un élément important de la technique de résolution d'une tâche de construction (comme nous le verrons dans la section 4.2.2).

En lien avec les notions de sens et dénotations des énoncés décrivant les figures géométriques (cf. section 3.1.3), deux énoncés de sens différents se référant à la même figure géométrique (c'est-à-dire de même dénotation) peuvent impliquer l'élaboration de deux programmes de construction différents. Ces programmes de construction mettent en jeu des propriétés et des relations différentes entre les objets composant la figure à construire. Par exemple, les énoncés « construire un triangle ABC isocèle rectangle en A à partir d'un côté $[AC]$ donné » et « construire un triangle ABC rectangle en A à partir d'un côté AC donné et tel que $\widehat{ABC} = 45°$ » ont la même dénotation car ils se réfèrent tous les deux à un triangle isocèle rectangle. Tous les outils de construction étant à disposition, ces deux énoncés peuvent pourtant impliquer l'élaboration de deux programmes de construction différents.

Pour « construire un triangle ABC isocèle rectangle en A à partir d'un côté $[AC]$ donné » :

— construire la perpendiculaire à $[AC]$ passant par A ;

— construire le cercle de centre A passant par C ;

— placer le point B à une intersection de la perpendiculaire et du cercle puis tracer le triangle ABC.

Pour « construire un triangle ABC rectangle en A à partir d'un côté AC donné et tel que $\widehat{ABC} = 45°$ » :

— construire la perpendiculaire à $[AC]$ passant par$A$;

— sur le côté $[AC]$, construire un angle de 45° en C ;

— placer le point B à l'intersection de la perpendiculaire et de la demi-droite issue de l'angle en C puis tracer le triangle ABC.

Au contraire, deux énoncés de sens différents mais de même dénotation peuvent impliquer l'élaboration d'un même programme de construction. C'est le raisonnement mené à partir des données de l'énoncé, des outils de construction dans le milieu (cf. section 3.5.2) et des propriétés de la figure en jeu qui permet d'élaborer le programme de construction qui diffère selon le sens de l'énoncé. Par exemple, nous considérons la construction d'un triangle ABC équilatéral à partir d'un côté $[AC]$ donné, uniquement avec un outil de construction d'angles et la construction d'un triangle ABC isocèle en A à partir d'un côté $[AC]$ donné et tel que $\widehat{BAC} = 60°$, uniquement avec un outil de construction d'angles. La résolution de ces deux tâches de construction se fait à partir du programme de construction suivant :

— sur le côté $[AC]$, construire un angle de 60° en A ;

— sur le côté $[AC]$, du même côté que l'angle en A, construire un angle de 60° en C ;

— placer le point B à l'intersection des deux demi-droites issues des angles en A et C puis tracer le triangle ABC.

Ce même programme de construction est obtenu, dans le cas du triangle équilatéral, par la mobilisation de la propriété « un triangle équilatéral a trois angles égaux de mesure 60° » et, dans le cas du triangle isocèle, par la mobilisation des propriétés « les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux » et « la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° ».

Dans la suite de ce chapitre, nous étudions le raisonnement mis en œuvre pour l'élaboration de ces programmes de construction. Pour cela, dans la section qui suit, nous commençons par donner des exemples de résolution d'une tâche de construction.

3.2.5 Exemples de résolution d'une tâche de construction

Dans cette section, nous donnons un exemple d'exercice de construction pour lequel plusieurs raisonnements et niveaux de validation sont envisageables selon les niveaux scolaires. Cet exemple nous sert non seulement à mettre en avant les différentes approches d'un tel type de tâches et les validations possibles mais aussi à donner un premier aperçu des activités qui peuvent intervenir dans la résolution d'un type de tâches de construction. Nous étudierons les raisonnements mis en œuvre ici dans la section 3.3.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, différentes géométries sont enseignées aux différents niveaux scolaires. Ainsi, pour un même type de tâches de construction, des élèves se plaçant dans des géométries distinctes (que ces géométries soient conformes ou non à ce qui est attendu à leur niveau scolaire) proposent des résolutions distinctes.

Soit l'exercice de construction : construire un losange dans un rectangle donné, tel que les sommets du losange se trouvent sur les côtés du rectangle. Un rectangle est déjà construit sur la feuille ou le logiciel utilisé par l'élève. Selon le niveau scolaire, l'orientation du rectangle par rapport à la feuille ou à l'écran peut changer (plutôt en position prototypique au début du cycle 3 et dans une position non-prototypique au cycle 4).

a. Construction d'un cas particulier

Une première construction que l'on peut attendre au cycle 3 consiste (éventuellement après plusieurs tentatives) à construire un losange en positionnant chacun de ses sommets au milieu des côtés du rectangle (cf. figure 3.1).

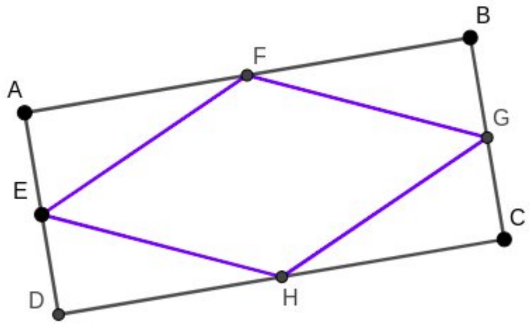

Image 3.1 – Une construction au milieu des côtés du rectangle

Une fois la construction réalisée, il est assez rare que les élèves cherchent à la valider d'eux-mêmes car beaucoup des situations auxquelles ils sont confrontés n'appellent pas un travail sur la validation, comme le souligne Balacheff (1987, pp. 6-7). Cependant, l'enseignant ou l'énoncé peut exiger une validation, nous en proposons donc de plusieurs sortes par la suite.

Une première validation possible (en particulier au cycle 2, voire au début du cycle 3 mais qui sera sûrement rejetée en fin de cycle 3) consiste à constater visuellement que la figure ressemble à l'idée que l'on se fait d'un losange. En allant un peu plus loin, il est possible d'invoquer les propriétés du losange en constatant, toujours visuellement, que les quatre côtés du quadrilatère semblent égaux. Ces deux validations s'appuient sur des données visuelles, la première s'y arrête tandis que la deuxième s'appuie également sur une ou des propriété(s) géométrique(s). L'élève de cycle 3 peut aussi passer par la mesure des côtés du losange avec une règle graduée. Si tous les côtés sont de même longueur, la figure construite est bien un losange. Il peut aussi s'intéresser aux diagonales de la figure. Il peut alors les mesurer avec une règle graduée pour vérifier qu'elles se coupent bien en leur milieu et utiliser une équerre pour vérifier qu'elles sont bien perpendiculaires. Enfin, il est possible d'invoquer des raisons de symétrie en passant par le pliage du dessin de la figure. Ces trois validations mettent en jeu les propriétés du losange mais s'appuient sur des données issues de la mesure ou du pliage sur une figure matérielle, restant très focalisées sur le dessin qui représente une figure géométrique particulière.

Toujours en partant de la même construction, au cycle 4, il est possible de proposer une validation qui ne s'appuie que sur les propriétés géométriques des rectangles et des losanges ainsi que sur les données de l'énoncé. En effet, les diagonales de la figure construite se coupent perpendiculairement en leur milieu parce que les médiatrices des côtés du rectangle sont aussi des axes de symétrie et que les côtés consécutifs du rectangle sont perpendiculaires deux à deux. Sans passer par les transformations géométriques, il est possible de valider la construction à l'aide du théorème de la droite des milieux [9]. En effet, par construction, le segment $[EF]$ joint les milieux des segments $[AD]$ et $[AB]$. D'après le théorème de la droite des milieux, les droites (EF) et (DB) sont donc parallèles et $EF = DB/2$. On applique de nouveau ce théorème avec le segment $[GH]$ qui joint les milieux des segments $[DC]$ et $[BC]$ pour obtenir $GH = DB/2$. De même avec le segment $[FG]$ qui joint les milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$, et le segment $[EH]$ qui joint les milieux des segments $[AD]$ et $[DC]$. On obtient alors : $FG = EH = AC/2$. Or, les diagonales d'un rectangle sont de même longueur, d'où : $BD = AC$. On en déduit que : $EF = GH = BD/2 = AC/2 = FG = EH$ et que le quadrilatère $EFGH$, possédant quatre côtés de même longueur, est bien un losange.

b. Une construction plus générale

Au cycle 4, on attendra plutôt des élèves qu'ils puissent construire le losange à partir de n'importe quel point E placé sur un côté du rectangle donné. On peut alors les amener à élaborer un raisonnement par analyse-synthèse comme nous l'avons vu dans la section 3.2.3 :

— Analyse : dans un premier temps, nous réalisons un schéma codé d'un losange dont les sommets sont sur les côtés du rectangle. Nous pouvons alors faire l'hypothèse que les centres du losange et du rectangle sont confondus. Il semble donc pertinent de s'intéresser aux diagonales de ces deux quadrilatères. Supposons donc maintenant que le losange $EFGH$ soit construit à l'intérieur

9. Au programme de la classe de 4^e dans les programmes scolaires de 2008, ce théorème n'apparaît plus dans les programmes à partir de 2015. Cependant, sa version plus générale, le théorème de Thalès dans la configuration des triangles emboîtés, est enseignée en 4^e selon les repères de progression actuels du cycle 4 (*Mathématiques : repères annuels de progression pour le cycle 4*, 2019, p. 11).

du rectangle $ABCD$ (tel que $E \in [AD]$, $F \in [AB]$, $G \in [BC]$ et $H \in [DC]$) et analysons la figure alors obtenue. $EFGH$ étant un losange, nous savons que ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu. Soit O, l'intersection des diagonales, nous pouvons écrire : $EO = OG$ et $FO = OH$. Or $E \in [AD]$ et $G \in [BC]$, (AD) et (BC) étant deux droites parallèles entre elles et perpendiculaires à (AB) et (DC). On en déduit que O appartient à la médiatrice de $[AB]$ (ou $[DC]$)[10] De même, $F \in [AB]$ et $H \in [DC]$ donc O appartient à la médiatrice de $[AD]$ (ou $[BC]$). Le point O appartient donc à la fois à la médiatrice de $[AB]$ et à la médiatrice de $[AD]$, il est donc au centre du rectangle $ABCD$ qui correspond également à l'intersection des diagonales du rectangle. Le programme de construction ainsi élaboré est le suivant :

- construire l'intersection O des diagonales du rectangle ;
- construire la droite passant par O et E, cette droite coupe le côté opposé du rectangle en G ;
- construire la perpendiculaire à (EG) passant par O qui coupe les deux autres côtés opposés du rectangle en F et H pour former le quadrilatère $EFGH$.

— Synthèse : nous exécutons le programme de construction élaboré dans la phase d'analyse (cf. figure 3.2). Par construction, les diagonales se coupent bien perpendiculairement et nous avons montré dans la phase d'analyse qu'elles se coupent bien en leur milieu et que les sommets de $EFGH$ sont bien sur les côtés de $ABCD$. La figure ainsi construite est donc un losange qui répond au problème posé.

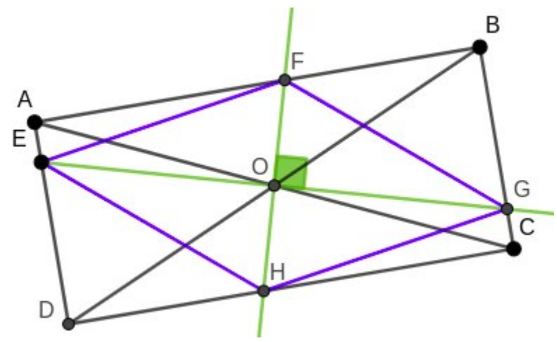

Image 3.2 – Une construction à partir d'un point E placé sur $[AD]$

10. C'est un résultat plutôt intuitif qu'on ne demandera pas forcément aux élèves de cycle 4 de démontrer proprement. Ils peuvent le faire en considérant la perpendiculaire à $[AB]$ passant par O qui coupent $[AB]$ en I et $[CD]$ en J et utilisant les cas d'égalité des triangles dans les triangles OIF et OJH pour montrer $OI = OJ$. De même avec la perpendiculaire à $[BC]$ passant par O.

Dans cet exemple, nous retrouvons la technique assez générale de résolution d'un type de tâches de construction telle que nous la verrons dans le chapitre 4. Il nous permet également de mettre en avant plusieurs types de raisonnements au sein d'une même résolution de tâche de construction : un raisonnement heuristique au début, une argumentation déductive et une démonstration. Nous définissons et étudions ces raisonnements dans la section suivante.

3.3 Raisonnements

Dans les sections précédentes, nous avons défini les notions de figure et de problème de construction. Nous avons également relevé certains des aspects épistémologiques qu'il est nécessaire de maîtriser pour entrer dans la géométrie théorique. Ainsi, nous avons vu que la question du raisonnement est toujours présente : les différentes visualisations des figures permettent des raisonnements différents, des figures de même dénotation mais de sens différents impliquent des raisonnements différents, les types de tâches de reproduction, de restauration ou de construction de figures exigent des raisonnements différents, etc. Dans cette section, nous étudions donc ce que nous entendons par raisonnement et en particulier les raisonnements en jeu dans la géométrie théorique. Comme nous avons commencé à le voir dans l'exemple de la section 3.2.5, ceux-ci prennent plusieurs formes pour une tâche de construction selon qu'on les mobilise dans une phase d'analyse, de construction ou de validation.

Au cycle 4, les propriétés des figures géométriques sont au cœur des raisonnements en jeu. Gousseau-Coutat parle d'une « matière première pour les activités de démonstration » (Gousseau-Coutat, 2006, p. 25). De même selon Duval pour qui « la simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de cette pratique » (Duval, 1991, p. 233). Nous verrons donc également comment sont mobilisées les propriétés géométriques dans les différents types de raisonnements.

3.3.1 Première définition du raisonnement

Définir le raisonnement n'est pas forcément chose aisée puisque ce mot couvre un grand nombre d'activités quelles que soient les disciplines scolaires considérées. Nous nous intéressons ici à la définition du raisonnement tel qu'il peut être attendu en géométrie au cycle 4.

Du point de vue institutionnel d'abord, le programme du cycle 4 précise que « toutes les disciplines visent à étayer et élargir les modes de raisonnement et les démonstrations » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 8). En mathématiques, on lit que le raisonnement est « au cœur de l'activité ». Par ailleurs, l'une des cinq compétences mathématiques est la compétence « Raisonner » [11] décrite comme suit dans les programmes du cycle 4 :

— « résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;
— mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
— démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;
— fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation » (*Programme du cycle 4*, 2020, p. 130).

Cette acception du mot « raisonner » est très large : elle va de la résolution de problèmes à la prise en compte du point de vue de l'autre. Nous nous appuyons donc sur des travaux de didactique des mathématiques pour la définir.

Comme Cabassut (2005), nous décidons de reprendre la conception du **raisonnement** de Blanché qui apparaît dans la version de 1995 de l'*Encyclopædia Universalis* :

> Un raisonnement, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive [12] par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières [...]. Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses (Cabassut, 2005, p. 24).

Selon les contextes, il faut donc définir la théorie à laquelle se réfère le raisonnement ainsi que le type de langage, de savoirs et de logique que l'on utilise. Par la suite, nous emploierons souvent l'expression **raisonnement géométrique** pour préciser que nous travaillons dans le domaine de la géométrie (plane).

À partir de cette définition, Cabassut distingue deux types de raisonnements : ceux qui visent à établir la connaissance de la vérité d'une proposition (qu'il appelle « raisonnements de validation » ou simplement « validations ») et ceux qui visent plutôt la connaissance d'une proposition suivant « certains critères de bien, beau,

11. On ne retrouve explicitement cette compétence qu'en histoire-géographie, il ne semble pourtant pas que ce soit les deux seules disciplines scolaires qui demandent de « raisonner ».
12. Nous reviendrons sur le sens de l'expression « opération discursive » dans la section 3.3.4.

souhaitable ou autres, mais qui ne sont pas des critères de vérité » (Cabassut, 2005, p. 26). Comme lui, nous ne nous intéresserons qu'aux premiers qui peuvent prendre la forme d'argumentations, de preuves ou de démonstrations (Cabassut, 2005, p. 28).

3.3.2 Argumentation, preuve, démonstration, raisonnement déductif

Une **argumentation** peut être définie comme un « texte ou discours dont le but est de convaincre un partenaire. Le texte contient des arguments, c'est-à-dire des affirmations destinées à convaincre et ces arguments sont liés par des mots qui structurent le texte en vue de convaincre. L'argumentation dépend du partenaire auquel elle s'adresse. Elle n'a vraiment de sens que s'il y a quelqu'un à convaincre » (Houdebine, 1990, p. 26). Dans la pratique, on considère souvent que ce partenaire peut également être soi-même.

Balacheff définit d'abord l'**explication** comme « un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées » (Balacheff, 1987, pp. 147-148). On peut alors rapprocher cette définition de celle de l'argumentation que nous venons d'évoquer.

Balacheff définit ensuite une **preuve** comme « une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné » (Balacheff, 1987, p. 148). Enfin, les **démonstrations** sont définies comme des preuves, les seules acceptées par la communauté mathématique, qui adoptent une forme particulière : « elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini » (Balacheff, 1987, p. 148). Lorsqu'on écrit une démonstration, on met donc en jeu le **raisonnement déductif**.

D'après Duval (1993a), le raisonnement déductif présente des **pas de raisonnement** organisés selon une structure ternaire : d'abord une ou des prémisses puis un énoncé-tiers sous la forme d'une règle d'inférence (une définition, un théorème ou un axiome) et une conclusion. La règle d'inférence s'applique si le contenu de ses prémisses correspond au contenu des prémisses du pas de raisonnement. De la même façon, la conclusion du pas de raisonnement correspond à la partie « conséquences » de la règle d'inférence. De plus, dans un raisonnement déductif, les pas s'enchaînent par **substitution** : la ou les conclusions des pas précédents devenant une ou des prémisses des pas suivants.

À partir de la figure 3.3, nous présentons un exemple de pas de raisonnement pour expliciter sa structure ternaire.

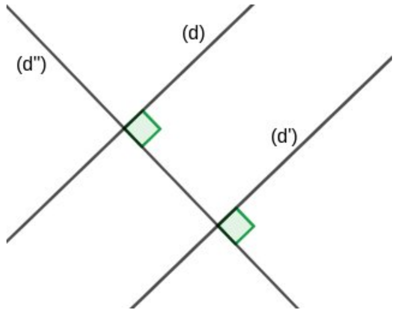

Image 3.3 – Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires à la droite (d'')

Un pas de déduction possible est donc : les droites (d) et (d') sont perpendiculaires à la droite (d'') or deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entre elles. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles entre elles. Les différents éléments de ce pas de raisonnement sont :

— la prémisse : les droites (d) et (d') sont perpendiculaires à (d'') ;

— la règle d'inférence : le théorème « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles » ;

— la conclusion : les droites (d) et (d') sont parallèles entre elles.

La prémisse du théorème utilisé correspond bien aux données de l'énoncé et la conclusion du pas de déduction correspond à la conclusion du théorème.

À noter que même si c'est la forme qui est principalement travaillée au cycle 4 et que nous privilégions dans cette thèse, le raisonnement déductif peut prendre d'autres formes que l'implication directe (on parle souvent de *modus ponens*) comme le raisonnement par contraposition ou le raisonnement par l'absurde, ce que l'on retrouve, par exemple, dans les démonstrations des *Éléments* d'Euclide (Vitrac, 1990).

Ainsi, selon Duval (1993a), les fonctionnements cognitifs impliqués dans le raisonnement déductif et dans l'argumentation sont fondamentalement différents. Dans le cas du raisonnement déductif, la conclusion d'un pas est nécessaire car les règles d'inférences utilisées ont un statut théorique clair (théorème, axiome, etc.) et ne sont donc pas soumises à interprétation. De plus, la structure d'un pas ne permet pas d'affirmer autre chose que ce que cette règle dit. Au contraire, dans le cas de l'argumentation, les énoncés-tiers n'ont pas un statut théorique précis, leur interprétation est liée à leur contenu et peut varier d'une personne à l'autre ou au fur et à mesure du discours, l'interlocuteur peut d'ailleurs s'opposer à un énoncé-tiers. Ainsi, pour vérifier qu'ils s'appliquent bien dans un pas d'argumentation, il faut interpréter les relations (d'opposition, d'inclusion, de synonymie, etc.) entre leur contenu et celui des prémisses. De même, la conclusion d'un pas peut affirmer autre chose que ce qu'il y a dans l'énoncé-tiers sans forcément que l'on s'en rende compte. Les pas d'une argumentation ne s'enchaînent donc pas non plus forcément par substitution mais par juxtaposition des arguments les uns à la suite des autres.

Cependant, dans le champ des mathématiques, la distinction entre raisonnement déductif et argumentation n'est pas aussi claire. C'est ce que nous étudions dans la section suivante avec la notion d'argumentation heuristique.

3.3.3 Argumentation heuristique

Nous venons de le voir, selon Balacheff (1987) ou Duval (1993a), seule la mise en œuvre du raisonnement déductif (en particulier sous la forme d'une démonstration) constitue un raisonnement valide mathématiquement.

Or, l'activité de résolution de problèmes au cycle 4 ne peut pas se réduire à l'élaboration de démonstrations.

> L'usage de la logique permet de fabriquer des énoncés vrais en partant d'autres énoncés vrais, de sorte qu'une démonstration mathématique est censée progresser en combinant logiquement des énoncés connus comme vrais soit comme axiomes, soit comme énoncés antérieurement démontrés. Cette vision idéale est démentie par la pratique : en fait le raisonnement mathématique est bien fabrication à l'aide de la logique de vérités nouvelles à partir de vérités supposées connues, mais la fabrication de ces vérités supposées connues ne se résume pas à une collecte dans les axiomes et les théorèmes, dans les faits, elle implique presque toujours d'autres origines, en géométrie par exemple, l'appel à la lecture du dessin (Arsac, 1998, p. 30).

Ce dont parle Arsac dans cette citation, c'est la partie du raisonnement mathématique que nous nommons heuristique. Or, comme le dit Arsac (1998), la notion d'heuristique n'est pas très bien définie. Koichu, Berman, et Moore (2007) proposent ainsi une sélection de définitions du mot « heuristique » selon huit chercheurs différents : « ensemble de stratégies qui rendent la résolution de problèmes plus efficace que de procéder aléatoirement », « règles empiriques qui aident souvent à résoudre une certaine catégorie de problèmes, mais ne donnent aucune garantie », « aspects de la pensée qui ne peuvent pas être intégrés dans les formulations mathématiques », etc. (Koichu et al., 2007, p. 102).

Dans cette thèse, nous ne cherchons pas à proposer une définition précise du terme « heuristique ». En revanche, nous parlons de la phase heuristique comme d'une phase de recherche dans laquelle l'élève peut mettre en œuvre certaines stratégies de résolution pour résoudre une tâche donnée (faire un schéma codé de la situation, « remonter » le problème, etc.) et dans laquelle il élabore un raisonnement. Ce raisonnement, pas encore forcément formalisé ne peut pas être qualifié de raisonnement déductif complet. Dans certaines situations, il semblerait pourtant réducteur de parler d'argumentations au sens défini dans la section 3.3.2. En effet, l'argumentation peut présenter « différents niveaux d'organisation depuis la simple juxtaposition de(s) raison(s), avec ou sans emploi de connecteurs argumentatifs, jusqu'à une élaboration qui reproduise les formes d'organisation de certains raisonnements logiquement codifiés » (Duval, 1993a, p. 59). C'est pourquoi Duval distingue les **argumentations heuristiques** des argumentations rhétoriques.

Les argumentations rhétoriques correspondent à ce que nous avons décrit dans la section 3.3.2. Les argumentations heuristiques sont, elles, « développées dans les phases de recherche à l'intérieur d'un champ de connaissances particulier [...]. L'argumentation mise en œuvre en mathématique est une argumentation heuristique conduite pour progresser dans un problème » (Duval, 1993a, p. 51). Une argumentation heuristique comprend donc des « sous-programmes » valides mathématiquement quand bien même ils ne sont pas encore assemblés sous la forme d'un raisonnement déductif complet.

Ainsi, l'argumentation heuristique est une forme de raisonnement qui comporte des éléments de raisonnement déductif et qui nous semble intéressante à développer au début du cycle 4 dans la perspective de l'entrée dans la géométrie théorique. En particulier, cette forme de raisonnement nous paraît pertinente dans le cadre de situations de décision. En effet, les sous-programmes valides mathématiquement ou **îlots déductifs** permettent de s'assurer de la validité mathématique des principaux résultats directement utiles à la prise de décision mais la forme argumentative, plus flexible que la forme déductive complète, ne bloque pas le déroulé du raisonnement dans son entier aux passages les plus délicats à démontrer.

Si nous reprenons le raisonnement par analyse-synthèse présenté dans la section 3.2.3, nous pouvons dire que dans la phase d'analyse, le raisonnement est une argumentation heuristique qui mène à l'élaboration d'un programme de construction. Dans la phase de synthèse, l'énoncé ou l'enseignant peut demander une démonstration pour valider théoriquement la solution élaborée. Cependant, dans le cadre d'un type de tâches de construction comme ceux qui nous intéressent ici, la plupart du temps c'est la construction effective de la figure à partir du programme de construction qui sert de phase de synthèse.

3.3.4 Une typologie plus fine des preuves

Ainsi, nous considérons les argumentations heuristiques et les démonstrations qui mettent en œuvre un raisonnement déductif complet (sans s'intéresser ici aux questions de rédaction). Plusieurs chercheurs proposent des typologies beaucoup plus fines que nous passons en revue dans cette section. Celles-ci sont particulièrement intéressantes lorsqu'on a accès à des productions d'élèves dans lesquelles apparaissent leur raisonnement et leurs sources de validation. Dans le cadre de tâches de construction pour lesquelles aucune production écrite n'est exigée, qui plus est dans un environnement de géométrie dynamique qui prête habituellement assez peu à l'explicitation de son raisonnement (cf. section 6.2), nous n'avons que très rarement accès au raisonnement de l'élève. Dans le chapitre 9 nous verrons comment nous avons parfois réussi à dépasser cette difficulté et comment nous pouvons alors nous appuyer sur les typologies que nous présentons dans cette section pour inférer le processus cognitif développé par l'élève.

Que ce soit dans le cadre d'une construction géométrique pour laquelle une preuve de la validité de la réponse n'est pas explicitement demandée ou dans le cadre d'une tâche de preuve pour laquelle l'élève doit produire un discours (oral ou écrit) qui justifie sa réponse, la question des sources de validation est centrale. Celle-ci caractérise en effet le type de preuve que l'élève élabore.

Ainsi, Balacheff (1987) distingue deux types de preuves : les preuves pragmatiques et les preuves intellectuelles. Les preuves pragmatiques passent par une validation qui s'appuie sur l'observation soit d'un petit nombre de cas (empirisme naïf), soit d'un cas jugé le moins particulier possible (expérience cruciale), soit d'un cas non présent pour lui-même mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus (exemple générique). Au contraire, la validation mise en oeuvre dans les preuves intellectuelles est détachée de sa réalisation sur un représentant particulier (expérience mentale) et peut prendre la forme d'une démonstration.

Balacheff (1987) choisit un point de vue épistémologique et les illustrations qu'il propose sont toutes issues d'un travail écrit pour lequel on a vraisemblablement demandé à l'élève de justifier sa réponse. La distinction entre preuves pragmatiques et preuves intellectuelles ne permet alors pas de faire une séparation entre l'élaboration mentale de la preuve et sa rédaction. Rien n'empêche deux élèves ayant les mêmes conceptions des diagonales d'un polygone (c'est le sujet des preuves dans son article) de rédiger ensuite deux preuves différentes, par exemple, en ayant la volonté de plus ou moins expliciter la démarche ou encore en pensant qu'un exemple sera plus parlant même si, à l'origine, l'élève n'a pas développé mentalement sa preuve à partir d'un exemple.

Rouche (1989) s'intéresse justement plus à l'élaboration mentale de la preuve qu'à sa rédaction. Il classe ainsi les preuves selon le sentiment d'immédiateté du résultat et selon le niveau d'abstraction des concepts mis en jeu, c'est-à-dire de leur distance au « réel » ou au « familier » (Tanguay, 2002). Rouche distingue donc quatre types de preuves qui correspondent à une combinaison de ces deux critères.

Le premier type est celui des « jugements d'une seule venue ». Il s'agit d'inductions qui paraissent évidentes au regard d'un cas à partir duquel « l'imagination embrasse d'un seul mouvement [tous les autres cas] que l'on pourrait faire » (Rouche, 1989, p. 14). Le sentiment d'évidence peut être trompeur, par exemple lorsqu'un élève dit que « pour construire un carré d'aire double d'un carré donné, il suffit de doubler la longueur du côté de celui-ci » (Rouche, 1989, p. 15).

Le deuxième et le troisième types de preuves relèvent de « la pensée discursive » que Rouche définit en citant Lalande (1951) : « une opération de pensée est *discursive* quand elle atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires ». Dans ce cas, le résultat ne suscite pas « une évidence globale immédiate » (Tanguay, 2002, p. 377), il faut « recourir à des évidences partielles, et par conséquent [...] les enchaîner dans un ordre propre à amener l'évidence de la proposition annoncée » (Rouche, 1989, p. 21). La pensée discursive peut néanmoins s'appliquer à des objets mentaux proches des notions familières (deuxième type de preuves) ou à des objets mentaux plus éloignés des notions familières (troisième type de preuves).

Le quatrième type de preuves est celui des preuves des « mathématiques constituées » qui correspondent aux démonstrations telles que nous les avons définies dans la section 3.3.2.

Tanguay (2002) part des ces deux typologies issues de points de vue épistémologique et cognitif pour proposer sa propre typologie de preuves qu'il utilise pour analyser une collection de manuels de secondaire. Cette typologie fait le lien entre l'élaboration mentale de la preuve du point de vue de l'élève et l'énoncé auquel il fait face.

1. Le jugement d'une seule venue : énoncé jugé « évident » par les élèves. Rouche donne deux conditions pour qu'une « proposition soit vécue comme évidente » : « qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier » et « que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles » (Rouche, 1989, p. 14). Ce sentiment d'évidence varie d'une personne à l'autre et évolue au fur et à mesure des apprentissages de l'élève. Tanguay donne l'exemple représenté sur la figure 3.4 : pour l'élève, il est probablement « évident » que la proposition « une droite qui coupe deux droites parallèles forme des angles correspondants égaux » est vraie.

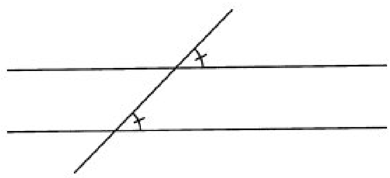

Image 3.4 – Angles correspondants

2. L'induction empirique : le résultat ne paraît pas immédiatement évident pour l'élève qui le valide par une expérimentation. L'élève s'appuie donc essentiellement sur ses sens. Tanguay donne l'exemple de la preuve de la somme des mesures des angles dans un triangle en mesurant au rapporteur les angles de plusieurs triangles.
3. L'expérience mentale : le résultat est « d'un accès relativement aisé à l'intuition », la démarche de preuve est plus intellectuelle que pragmatique car elle se fait sur une expérience mentale qui n'a pas vocation à être réalisée. Le raisonnement cherche à donner des bases solides à l'intuition initiale. La source de validation est donc une argumentation raisonnée mais elle reste fortement ancrée dans le sensible. C'est le cas dans la quatrième proposition du Livre I des *Éléments* d'Euclide. Il s'agit de ce qui correspond pour nous aujourd'hui au cas d'égalité des triangles qu'on peut appeler cas d'égalité « côté - angle - côté ».

   > Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent (Vitrac, 1990, p. 200) (cf. image 3.5).

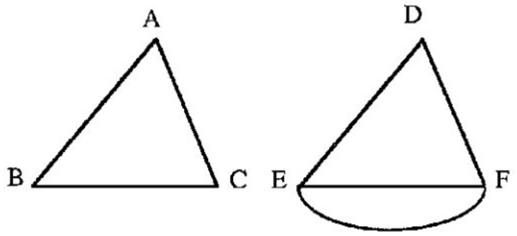

Image 3.5 – Les triangles ABC et DEF sont égaux

C'est le premier théorème du Livre I (les trois premières propositions étant des constructions). Euclide le justifie en passant par une validation explicitement ancrée dans le sensible [13], il invoque la superposabilité de ces deux triangles pour démontrer qu'ils sont égaux :

> En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors, AB étant ajustée sur DE, la droite AC aussi s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF [...] et lui sera égale (N.C. 7) [14]. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal (N.C. 7), et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux (N.C. 7), d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE (Vitrac, 1990, pp. 201-202).

4. L'argument empirico-déductif : le raisonnement n'a plus pour point de départ la première intuition puisque le résultat semble beaucoup moins intuitif à l'élève. Le raisonnement passe par une série d'évidences partielles et « met en oeuvre des éléments de pensée logico-déductive, mais un ou plusieurs résultats intermédiaires font l'objet d'une validation qui n'est que perceptive » (Tanguay, 2002, p. 380). L'auteur donne l'exemple de la preuve par pavage du plan, de la

13. Euclide ne pouvait de toute façon pas écrire de démonstration complètement déductive puisqu'à partir des axiomes qu'il définit, il est possible de construire des géométries dans lesquelles ce cas d'égalité n'est pas vérifié. Cela conduira Hilbert à introduire l'égalité de segments et d'angles parmi ses axiomes ainsi que le cas d'égalité « côté - angle - côté » qui n'est donc plus un théorème (Hilbert, 1971 [1903]).

14. Référence à la « notion commune » 7 : « et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles » (Vitrac, 1990, p. 178).

somme des mesures des angles dans un triangle. Ici, on accepte perceptivement que les triangles pavent bien le plan avant de raisonner sur les angles en chaque point de jonction du pavage. On trouve aussi des exemples d'arguments empirico-déductifs dans les *Éléments* d'Euclide. Par exemple, Euclide ne prend pas la peine de démontrer que les deux cercles se coupent effectivement lorsqu'il valide sa construction d'un triangle équilatéral à partir d'un côté donné dans la première proposition du Livre I des *Éléments*.

5. La déduction locale : le raisonnement s'appuie sur des résultats établis selon les règles de la déduction logique qui sont combinés mentalement « d'une seule venue » (souvent une implication directe) sans nécessiter d'organisation temporelle particulière. Tanguay donne l'exemple de la démonstration de la mesure des angles d'un triangle équilatéral. Puisque les angles d'un triangle équilatéral sont égaux (résultat précédemment établi) et que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° (résultat précédemment établi), chacun des angles d'un triangle équilatéral mesure bien 60°. Nous verrons dans le chapitre 5 que les raisonnements demandés pour résoudre les tâches de construction proposées dans les manuels étudiés, lorsqu'ils mobilisent des propriétés, relèvent pour la plupart de la déduction locale.
6. L'enchaînement déductif : cette fois, le raisonnement doit être organisé et hiérarchisé temporellement. La difficulté varie selon le nombre de pas nécessaires pour arriver au résultat et selon le(s) type(s) de raisonnement(s) impliqués dans la preuve (par contraposition, par l'absurde...).

Plusieurs de ces types de preuves que nous ne sommes pas toujours en mesure de distinguer dans la pratique peuvent correspondre à ce que nous appelons des argumentations heuristiques selon l'importance des sous-programmes déductifs élaborés.

3.3.5 Milieu, validation et contrôles

Comme nous l'avons vu et comme l'explicite Margolinas qui cite Balacheff : les processus de validation « sont constitutifs de la résolution de problèmes : ils en assurent la validité du déroulement et permettent en fin de décider que le problème est résolu » (Margolinas, 1993, p. 79). La question de la validation est donc très importante quand on aborde celle du raisonnement.

C'est le milieu au sens de la TSD (Brousseau & Balacheff, 1998) qui engage l'élève dans un processus de validation approprié aux enjeux d'apprentissage visés dans une institution donnée. Le niveau de validation varie donc selon les exigences et le contexte de la situation. Par exemple, l'accès possible ou non à l'expérience est une caractéristique de la situation qui influence la forme de validation que l'on va choisir. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.3, Houdement et Kuzniak (2006) définissent ainsi des paradigmes géométriques à partir de « l'analyse de la pratique de l'expérience, la déduction et l'intuition à différents niveaux scolaires » (Gousseau-Coutat, 2006, p. 23).

Au cycle 3, la validation se fait principalement à partir du dessin de la figure (perceptivement ou à l'aide des instruments géométriques). Au cycle 4, ce sont les propriétés géométriques des figures qui se retrouvent au cœur des raisonnements comme nous l'avons vu dans les sections 3.1.1 et 3.3.2. Un exemple de gestion de cette rupture (cf. section 1.2.3) est proposé dans le manuel de mathématiques de 4e de la collection Lebossé-Hémery [15]. Au début de la leçon sur les triangles isocèles, le cours s'appuie clairement sur la superposition de dessins de figures pour montrer que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux :

> Théorème. — Dans tout triangle isocèle les angles adjacents à la base sont égaux.
>
> Soit $A'B'C'$ le calque du triangle isocèle ABC. Retournons ce calque et faisons coïncider l'angle $y'A'x'$ avec son égal xAy. Comme $A'C' = AC = AB = A'B'$, le point C' vient en B et de même le point B' vient en C. L'angle C', calque de l'angle C du triangle ABC coïncide avec l'angle B. On a donc $\widehat{B} = \widehat{C}$ (*Arithmétique, Algèbre et géométrie, classe de quatrième*, 1965, p. 125) (cf. image 3.6).

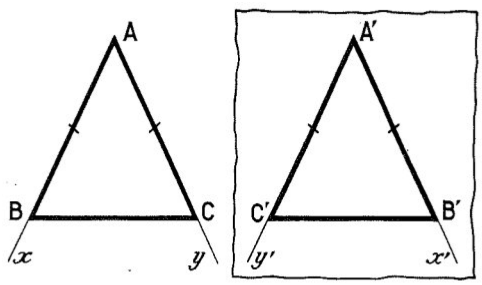

Image 3.6 – Le triangle $A'B'C'$ est le calque du triangle ABC

De la même façon, dans la troisième leçon intitulée « cas d'égalité des triangles », les auteurs présentent les triangles égaux comme des triangles superposables : « la

15. La collection de manuels Lebossé-Hémery est très répandue dans les classes avant la réforme des mathématiques modernes des années 70.

superposition de deux triangles égaux peut s'effectuer par simple glissement du calque de l'un des triangles, ou après retournement préalable de ce calque. [...] Il existe des théorèmes permettant d'éviter la superposition de deux triangles pour en établir l'égalité » (*Arithmétique, Algèbre et géométrie, classe de quatrième*, 1965, p. 130). C'est l'usage de ces théorèmes qui permet de passer d'un appui sur le sensible à un appui plus théorique sur un système d'axiomes et de théorèmes. Par la suite, le manuel propose l'exercice suivant : « comparer deux triangles isocèles [...] : les bases sont égales et les angles au sommet égaux » (*Arithmétique, Algèbre et géométrie, classe de quatrième*, 1965, p. 135). L'exercice n'est accompagné d'aucune figure et ne donne aucune mesure particulière des angles ou des longueurs de côté. Il invite donc à un raisonnement général sur les triangles isocèles vérifiant certaines conditions. Or, connaissant l'angle au sommet d'un triangle isocèle, il est possible de connaître les angles à la base grâce aux propriété « les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux » et « la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° ». Nous obtenons ainsi trois éléments du triangle (la longueur de la base, donnée dans l'énoncé, et les deux angles à la base) et nous pouvons donc appliquer ce qui est appelé le 1er cas d'égalité des triangles dans le manuel : « lorsque que deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux, ils sont égaux » (*Arithmétique, Algèbre et géométrie, classe de quatrième*, 1965, p. 130). Les deux triangles isocèles ayant les mêmes bases et les mêmes angles au sommet sont donc égaux.

Cependant, le processus de validation n'intervient pas forcément uniquement à la fin du problème de mathématiques (ou, plus particulièrement, de la construction pour ce qui nous intéresse). Ainsi, Balacheff et Margolinas (2005) introduisent la notion de contrôle qui englobe celle de validation. Un contrôle n'est pas uniquement « un jugement de validité a posteriori », il permet « à la fois l'élaboration de la procédure et sa validation a posteriori » (Mithalal, 2010, p. 114). Selon les phases de la résolution du problème, les contrôles jouent différents rôles :

— dans une première phase, le rôle d'une « fonction de sélection, permettant de déterminer avant toute action un mode de résolution jugé valide » (Mithalal, 2010, p. 112). Cela se fait en lien avec le sens (au sens de Frege défini dans la section 3.1.3) de l'énoncé décrivant la figure en jeu ;

— dans la phase de résolution, ce sont des « contrôles référents » qui règlent « l'anticipation de l'action et l'adéquation du résultat obtenu au résultat attendu » (Gaudin, 2005, p. 153) ;

— dans une dernière phase, le contrôle joue le rôle d'un « jugement *a posteriori* sur la terminaison des processus, sur leur validité ainsi que celle des conclusions » (Mithalal, 2010, p. 112). La validation est à mettre en perspective de la dénotation de la figure caractérisée par l'énoncé, la figure construite devant être de même dénotation pour être validée.

Mithalal distingue également quatre types principaux de contrôles : la superposition, la comparaison des valeurs numériques, la nécessité interne à l'enchaînement des opérations et l'invariance de la déconstruction dimensionnelle (Mithalal, 2010, p. 114). La superposition et la comparaison de valeurs numériques sont liées à une vision iconique des figures géométriques. La nécessité interne à l'enchaînement des opérations et l'invariance de la déconstruction dimensionnelle sont, elles, liées à une vision non iconique et ce sont ces contrôles que nous voulons favoriser chez les élèves au cycle 4.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.3.3, nous nous plaçons dans le cadre de situations de décision au sens de Balacheff (1987) pour lesquelles une forme de preuve est nécessaire à la résolution de la tâche. Nous voulons également engager l'élève dans un processus de validation de sa construction qui s'appuie en particulier sur la nécessité interne à l'enchaînement des opérations, notamment par la mise en œuvre d'une argumentation heuristique. Nous verrons en quoi l'environnement de géométrie dynamique qui implique de nouvelles façons de valider par rapport à l'environnement papier-crayon (cf. section 6.1.1) et la proposition de rétroactions revenant spécifiquement sur la question de la validation (cf. chapitre 8) peuvent également permettre d'engager l'élève dans un processus de validation théorique.

3.4 Éléments épistémologiques relatifs à la géométrie des figures planes retenus pour la construction du MPR

La relecture des travaux de didactique de la géométrie considérés dans les approches anthropologique et cognitive nous a conduits à dégager les éléments épistémologiques liés à la visualisation des figures planes, aux constructions et au raisonnement géométrique du cycle 4. Ces éléments nous permettent de caractériser les blocs *praxis* et *logos* de la praxéologie régionale de la géométrie plane « à la Euclide ». Pour favoriser l'entrée dans la géométrie théorique, nous concevons donc des tâches prenant en compte ces aspects épistémologiques :

- la distinction entre dessin et figure géométrique et entre les visualisations iconique et non iconique des figures géométriques (cf. section 3.1.1) ;
- la mobilisation de déconstructions instrumentales et dimensionnelles des figures (cf. 3.1.2) ;
- la distinction entre sens et dénotation des énoncés décrivant les figures (cf. section 3.1.3) ;
- l'argumentation heuristique qui met partiellement en jeu le raisonnement déductif sous forme d'îlots déductifs (cf. sections 3.3.2 et 3.3.3) ;
- une validation théorique (cf. section 3.3.5).

Ces éléments sont constitutifs du MPR relatif aux figures planes de la géométrie « à la Euclide » pour construire un rapport idoine à la géométrie théorique. Nous l'explicitons dans le chapitre 4.

Pour élaborer des tâches de construction favorisant effectivement la négociation des ruptures d'ordre épistémologique relatives à la géométrie plane dans la transition cycle 3 / cycle 4, nous devons maintenant déterminer des conditions didactiques qui prennent en compte ces aspects épistémologiques.

3.5 Conditions didactiques à la création d'un milieu riche pour les tâches de construction

Dans cette section, partant de l'hypothèse 2, nous essayons de déterminer plus précisément certaines conditions didactiques que doivent respecter l'énoncé et le milieu des tâches de construction pour mettre en jeu les aspects épistémologiques que nous venons de relever. L'élaboration de ce milieu riche permet de favoriser l'entrée dans la géométrie théorique à la transition cycle 3 / cycle 4.

Dans un premier temps, afin de motiver le recours à une argumentation heuristique et comme nous l'avons vu dans la section 3.2.1, il est nécessaire que la construction ne se réduise pas à un tracé. Pour cela, la construction demandée ne doit pas pouvoir être réalisée immédiatement. C'est-à-dire qu'il faut élaborer un raisonnement, même restreint à la mobilisation d'une seule propriété, pour construire la figure.

Dans la suite de cette section, nous étudions d'autres conditions didactiques permettant de caractériser le raisonnement à mettre en œuvre.

3.5.1 Travail sur les grandeurs géométriques

Selon Bkouche (2009), on peut considérer la géométrie élémentaire comme « l'étude des corps solides du point de vue de la grandeur et de la forme ». La géométrie d'Euclide se construit en effet sur la notion de grandeur. Ainsi les premières définitions du Livre I des *Éléments* concernent la ligne (une longueur sans largeur), l'aire (une surface a une longueur et une largeur) et l'angle (l'inclinaison d'une ligne sur une autre) (Vitrac, 1990). Ces grandeurs servent ensuite à définir les figures géométriques (par exemple un triangle isocèle est un triangle dont deux des longueurs de côté sont égales) ou des relations entre les objets géométriques (par exemple des droites sont perpendiculaires si elles forment deux angles adjacents égaux).

Dans le Livre I des *Éléments*, ces grandeurs ne sont jamais accompagnées de mesures. Le fait de n'utiliser que des grandeurs sans mesure permet de travailler sur les figures géométriques plutôt que sur les dessins particuliers qui les représentent à une certaine échelle. Perrin-Glorian et Godin (2018) font l'hypothèse suivante :

> Les figures planes tracées sur une feuille de papier avec des outils qui permettent de reporter des formes et des grandeurs constituent un milieu riche pour représenter les savoirs de base de la géométrie élémentaire plane sans passer par les nombres : relations entre droites, demi-droites, segments, points, cercles dans leur capacité à représenter des objets plats de l'espace et leurs relations (Perrin-Glorian & Godin, 2018, p. 12).

De la même façon, nous reprenons l'hypothèse que le travail sur les grandeurs sans la mesure motive le recours à un raisonnement plus général qui ne dépend pas de configurations spatiales mais uniquement des propriétés géométriques.

Cependant, comme Clairaut (1853), nous ne sommes pas aussi stricts qu'Euclide concernant les instruments à disposition et la possibilité de mesurer certaines grandeurs. Aussi, comme nous l'avons vu dans la section 3.2.2, nous considérons que certaines tâches de construction mettant en jeu des mesures d'angles permettent toujours de travailler sur un raisonnement général. Cela car des figures ayant les mêmes mesures d'angles (et les mêmes rapports de longueurs entre les côtés) sont semblables. Dans le cas où la mesure de ces angles est fixée, il s'agit donc encore de travailler sur une figure géométrique et non sur un dessin en particulier.

3.5.2 Jeu sur les outils de construction à disposition

Dans leur travail que nous avons déjà abordé dans la section 1.3.2, Perrin-Glorian et Godin (2014, 2018) proposent un jeu sur les outils de construction à disposition des élèves pour résoudre des tâches de restauration de figures. Leur objectif est de travailler « un usage géométrique des instruments » (Mathé et al., 2020, p. 55) pour favoriser par la suite l'entrée dans la géométrie théorique au cycle 4.

Pour cela, ils attribuent des coûts à l'utilisation des outils de construction à disposition, le but pour l'élève étant de restaurer la figure en dépensant le moins de points possible. Par exemple, Perrin-Glorian et Godin proposent l'exercice présenté sur l'image 3.7, le barème est alors : « équerre 1 point ; compas pour tracer un cercle 1 point ; report de longueur du modèle vers la figure 10 points. Les tracés sur le modèle sont gratuits ainsi que le tracé à la règle (non graduée) et le report de longueur interne à une figure » (Perrin-Glorian & Godin, 2014, p. 36).

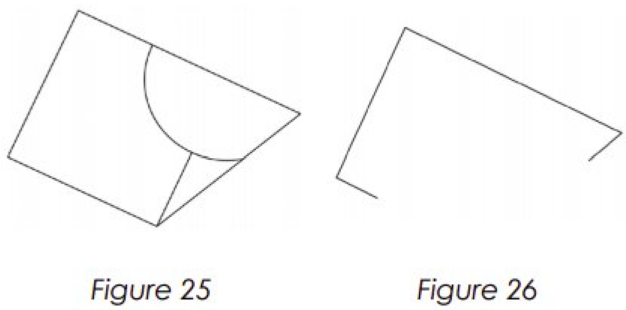

Image 3.7 – Reproduire la Figure 25 à partir de l'amorce donnée par la Figure 26 (Perrin-Glorian & Godin, 2014, p. 35)

Le but est de faire restaurer par l'élève un carré et un arc de cercle. Le coût attribué à l'utilisation des différents outils de construction montre bien que la tâche a pour but de décourager le report de longueur du modèle vers la figure alors qu'il cherche, au contraire, à encourager la comparaison et le report des longueurs internes à la figure. De la même façon, on rappelle également à l'élève qu'il peut faire des tracés sur le modèle en indiquant en plus que cela ne coûte pas de point.

Le coût minimal de cette construction est de 1 point : on remarque d'abord en analysant la Figure 25 que la figure à restaurer est composée d'un trapèze contenant un carré (par comparaison interne des longueurs), un triangle rectangle juxtaposé et un arc de cercle « par-dessus » dont le rayon est égal à la moitié d'un côté du carré et au plus petit des côtés du triangle rectangle (toujours par comparaison interne des longueurs). En revenant à la Figure 26, on peut construire le trapèze en prolongeant les amorces de côtés déjà tracés à la règle non graduée (0 point). On peut ensuite reporter la longueur de la petite base du trapèze sur l'autre base (report interne à la figure, 0 point) pour tracer le carré à la règle non graduée (0 point). Il ne reste plus qu'à tracer l'arc de cercle, dont on connaît le centre et le rayon, au compas (1 point).

Dans la suite des travaux de Perrin-Glorian et Godin (2018) nous reprenons l'idée d'un jeu sur les outils de construction à disposition avec deux objectifs :

— comme Perrin-Glorian et Godin, travailler sur l'usage géométrique des outils de construction, en particulier le report de longueur [16] et le constructeur d'angle, en précisant cependant, que nous nous situons dans un environnement de géométrie dynamique et que nous ne travaillons donc pas sur les mêmes outils de construction (nous étudierons cet aspect dans le chapitre 6) ;

— faire élaborer des raisonnements plus complexes au sens défini dans la section 2.2.2 nécessitant parfois plusieurs adaptations des connaissances.

Intéressons-nous par exemple au type de tâches de construction « construire un triangle ABC isocèle en A tel que l'angle en A mesure 60° ». Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.3, les énoncés « un triangle équilatéral » et « un triangle isocèle avec un angle de 60° » ont la même dénotation puisqu'ils renvoient à la même figure géométrique (un triangle équilatéral) mais ils n'ont pas le même sens. En laissant tous les outils de construction à disposition de l'élève, on s'attend à le voir construire la première figure avec un outil de report de longueur, tandis qu'on s'attend à ce qu'il utilise en plus un outil de construction d'angle pour construire la deuxième figure.

Supposons maintenant que nous bloquions l'utilisation du constructeur d'angle (par exemple en lui donnant un coût très élevé ou en le supprimant des outils du logiciel à disposition), il devient nécessaire de montrer par un raisonnement que construire « un triangle isocèle avec un angle de 60° » revient à construire « un triangle équilatéral ». Ce raisonnement peut prendre la forme d'une argumentation heuristique en amont de la construction ou d'une preuve, voire d'une démonstration si l'énoncé l'exige, dans une phase de validation *a posteriori*.

Les outils de construction à disposition des élèves, qui font partie du milieu des tâches de construction, sont donc une variable didactique, au sens de la TSD (Brousseau & Balacheff, 1998), sur laquelle nous pouvons nous appuyer. Dans l'environnement informatique, il est par ailleurs particulièrement facile de supprimer la possibilité d'utiliser un certain outil de construction ou d'en créer de nouveaux permettant la mise en œuvre d'autres propriétés comme nous le verrons dans la section 6.1.2.

16. À noter que contrairement à Perrin-Glorian et Godin pour qui le report de longueur se fait sur une droite, le report de longueur que nous considérons dans toute la suite de cette thèse correspond à l'outil compas, il s'agit de reporter une longueur dans le plan.

3.5.3 Résumé des conditions didactiques sur les tâches de construction

Dans ce travail de thèse, nous nous demandons comment amener les élèves à négocier le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique. Pour cela, nous avons avons dégagé des aspects épistémologiques concernant la géométrie plane « à la Euclide », grâce auxquels nous élaborons un MPR dans le chapitre 4. Dans cette section, nous nous sommes interrogés sur les conditions didactiques nous permettant d'élaborer un milieu riche pour des tâches de construction mettant en œuvre ces aspects épistémologiques et favorisant la négociation entre la géométrie physique et la géométrie théorique dans le champ d'action de la transition cycle 3 / cycle 4.

Les variables qui permettent la conception des tâches de construction sont donc :

- la nature de la figure à construire ;
- les données de l'énoncé ;
- les outils de construction ;
- le registre de représentation de l'énoncé ;
- la désignation de la figure ;
- le nombre de propriétés à mobiliser.

Certaines de ces conditions peuvent être des variables didactiques au sens de la TSD (Brousseau & Balacheff, 1998). Nous verrons plus précisément dans le chapitre 7 les valeurs qu'elles peuvent prendre.

Les deux premières variables permettent de structurer les figures sur lesquels portent les problèmes de construction. Elles se situent au niveau du type de tâches comme nous le verrons dans le chapitre 4 en définissant les types de tâches de la praxéologie relative à la construction de figures planes.

Les outils de construction ont une fonction de limitation des portées des techniques. Ils empêchent d'utiliser certaines propriétés et amènent donc à en utiliser d'autres et à élaborer une argumentation heuristique. En supprimant le constructeur d'angle, on empêche par exemple l'utilisation directement pour construire de propriétés sur les angles, il faut alors mobiliser une déconstruction instrumentale pour faire le lien avec d'autres propriétés de la figure comme nous l'avons vu avec la construction d'un triangle isocèle avec un angle de 60° uniquement à partir de l'outil de report de longueur.

Les données de l'énoncé et la désignation de la figure constituent le sens de l'énoncé décrivant la figure en jeu. Il est en lien avec les relations entre les objets élémentaires composant la figure et ses propriétés géométriques. Avec le nombre de propriétés à mobiliser, ces variables concernent la complexité de la tâche de construction et en particulier de l'argumentation heuristique à élaborer. En effet, en proposant des constructions de figure à partir d'énoncés ayant des sens différents mais la même dénotation, l'élève découvre qu'une figure géométrique peut être construite à partir de programmes de construction différents et que l'on peut passer d'une caractérisation à un autre via une argumentation heuristique mobilisant les propriétés des figures en jeu. Les propriétés liées aux outils de construction sont également très utiles dans les techniques de construction comme nous l'avons vu en présentant les travaux de Perrin-Glorian et Godin (2014, 2018). Nous verrons dans le chapitre 6 comment l'environnement de géométrie dynamique permet de rendre encore plus apparentes les propriétés en jeu derrière l'utilisation d'un compas ou d'une règle graduée par exemple. Nous verrons aussi comment la réification de ces propriétés, inhabituelles pour des élèves habitués à l'environnement papier - crayon peut être un obstacle à leur utilisation.

Le jeu sur les variables didactiques que nous avons relevées permet de concevoir des tâches de construction avec différents niveaux de complexité en lien avec les adaptations des connaissances nécessaires (cf. section 2.2.2) :

— les constructions immédiates qui nécessitent simplement la sélection et la mobilisation des outils de construction nécessaires pour la construction, éventuellement après une interprétation d'un schéma codé [17]. Par exemple « construire un triangle dont deux côtés sont égaux » avec un outil de report de longueur. Ici, c'est essentiellement le fait de se placer dans un environnement de géométrie dynamique potentiellement inhabituel pour l'élève qui différencie ces tâches de construction des tâches des tracés (cf. section 3.2.1) ;

— les constructions qui nécessitent une application directe d'une (voire deux) propriété(s) relative(s) à la figure à construire. Par exemple « à partir d'un côté de l'angle au sommet, construire un triangle isocèle avec un angle au sommet de 60° », le constructeur d'angle et le report de longueur faisant partie des outils de construction à disposition. En plus de mobiliser les outils de

17. Concernant les schémas codés, nous partons du principe qu'au cycle 4, l'élève connaît les conventions pour représenter les longueurs égales, les angles égaux et les droites perpendiculaires ou les angles droits. À noter que les droites parallèles peuvent être codées grâce à leur couleur mais le texte accompagnant le schéma le précise systématiquement. Nous considérons que les propriétés liées aux schémas codés et à leur interprétation font partie des connaissances anciennes des élèves et se situent à un niveau disponible. Elles ne sont pas des enjeux didactiques dans la suite de ce travail.

construction adéquats, il faut mobiliser la définition « un triangle isocèle a deux côtés égaux » pour pouvoir construire la figure.

— les constructions qui nécessitent de déterminer la nature de la figure à partir de certaines de ses propriétés données dans l'énoncé avant de pouvoir déterminer d'autres propriétés sur lesquelles s'appuieront la construction. Par exemple « à partir d'un côté de l'angle au sommet, construire un triangle isocèle avec un angle au sommet de 60° », le report de longueur étant le seul outil de construction à disposition. Comme nous l'avons déjà vu, il faut d'abord montrer que le triangle à construire est équilatéral avant de pouvoir utiliser ses propriétés pour construire la figure à partir des outils de construction disponibles dans le milieu.

C'est bien la nature de la figure à construire, le sens de l'énoncé la décrivant ainsi que les outils de construction dans le milieu qui déterminent le nombre de propriétés à mobiliser en jeu et le type de constructions en jeu.

Dans le chapitre 6, nous verrons également comment ces conditions didactiques se transposent dans un environnement de géométrie dynamique et quelles particularités de ces environnements nous pouvons utiliser pour élaborer ces tâches de construction.

Dans le chapitre 7, nous verrons comment ces variables deviennent des variables du modèle de tâche que nous élaborons afin de générer et caractériser les tâches des parcours d'apprentissage.