
Approches séquentielles

3.1 Extension des contrastes MISO

3.1.1 Présentation des approches séquentielles

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la séparation de sources par des méthodes séquentielles. Les méthodes conjointes cherchent à déterminer *simultanément* l'ensemble des paramètres d'un filtre qui sépare *toutes* les sources, c'est-à-dire un filtre MIMO $\mathbf{W}[z]$ tel que le filtre $\mathbf{G}[z] := \mathbf{W}[z]\mathbf{M}[z]$ soit le produit d'une permutation et d'un filtre diagonal (voir notations du paragraphe 1.4.1-a)). Dans le chapitre précédent, ceci était réalisé par la maximisation d'un critère de contraste, précédée d'un préblanchiment.

Les approches séquentielles procèdent au contraire par étape et les sources sont extraites les unes après les autres. Le fondement de ces approches réside en la possibilité d'extraire l'une des N sources du mélange à partir du vecteur des observations. Les autres sources peuvent alors être extraites en itérant le processus d'extraction précédent sous certaines précautions : une approche classique, appelée déflation, consiste à retrancher la contribution de la source extraite au vecteur des observations et à recommencer à l'identique le processus d'extraction jusqu'à la dernière source. D'autres méthodes existent également, parmi lesquelles nous pouvons évoquer la possibilité d'ajouter d'un terme de pénalisation au critère utilisé [92]. Dans ce chapitre nous expliquerons comment il est également envisageable d'introduire des contraintes sur l'ensemble dans lequel s'effectue l'optimisation.

Par construction, les méthodes séquentielles reviennent à chercher et à construire le filtre séparant $\mathbf{W}[z]$ ligne par ligne : cette étape constitue le point central qui fonde ces méthodes. Nous serons donc amenés à étudier l'une quelconque de ces étapes et, dans ce but, nous noterons $\mathbf{w}[z]$ une des lignes du filtre $\mathbf{W}[z]$ ($\mathbf{w}[z]$ est un filtre MISO donc de taille $1 \times Q$). La ligne correspondante du filtre global $\mathbf{G}[z]$ est de taille $1 \times N$ et notée $\mathbf{g}[z] := \mathbf{w}[z]\mathbf{M}[z]$. Ainsi $\mathbf{g}[z]$ constitue un filtre MISO dont la sortie $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ s'écrit :

$$y(n) = \mathbf{w}[z]\mathbf{x}(n) = \mathbf{g}[z]\mathbf{s}(n) \quad (3.1)$$

et dans le cas d'un bruit additif $\mathbf{b}(n)$ sur les capteurs :

$$y(n) = \mathbf{w}[z]\mathbf{x}(n) = \mathbf{w}[z]\left(\mathbf{M}[z]\mathbf{s}(n) + \mathbf{b}(n)\right) = \mathbf{g}[z]\mathbf{s}(n) + \tilde{\mathbf{b}}(n). \quad (3.2)$$

où $\tilde{\mathbf{b}}(n) = \mathbf{w}[z]\mathbf{b}(n)$ est le résultat du filtrage du bruit par le filtre ligne extracteur. Nous allons considérer l'extraction d'une source et étudier en fonction du filtre global $\mathbf{g}[z]$ les

critères dont la maximisation permet d'atteindre ce but. De tels critères sont appelés critère de contraste. Afin de les distinguer des critères de contraste «conjoints» définis au chapitre précédent, nous nous autoriserons à parler, si toutefois il pouvait y avoir ambiguïté, de critère de contraste MISO. Dans le paragraphe suivant, des résultats existant ayant trait aux contrastes MISO sont présentés puis étendus.

3.1.2 Généralisation des contrastes existants

Dans le cas MISO, la propriété essentielle qui permet de définir une fonction de contraste est que sa maximisation permet l'extraction d'une source. Cependant, il convient de faire certaines distinctions selon la nature des sources. Dans le cas le plus simple de sources i.i.d., la définition suivante d'un contraste peut-être proposée :

Définition 5 (contraste MISO, cas i.i.d.) Une fonction de contraste MISO (ou contraste MISO) est une fonction réelle de la sortie $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ du filtre ligne global $\mathbf{g}[z]$ qui vérifie :

- (i) $\mathcal{C}((y(n))_{n \in \mathbb{Z}}) \leq \max_{i=1}^N \mathcal{C}((s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}})$
- (ii) Si $\mathcal{C}((y(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \max_{i=1}^N \mathcal{C}((s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}})$, alors le filtre MISO global est du type $\mathbf{g}[z] = (0, \dots, 0, \alpha z^{-d}, 0, \dots, 0)$, où α est un scalaire non nul, $d \in \mathbb{Z}$ et la position de l'élément non nul z^{-d} correspond à un indice i de l'une des sources pour lesquelles $\mathcal{C}((s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}})$ est maximal.

Remarque 4: Dans la définition ci-dessus, il a implicitement été supposé qu'une fonction de contraste dépendait des statistiques du signal de sortie et d'elles seules. En raison de la stationnarité toujours supposée (hypothèse H.1), ceci entraîne une invariance par translation temporelle, c'est-à-dire $\mathcal{C}((y(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \mathcal{C}((y(n-l))_{n \in \mathbb{Z}})$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Dans le chapitre 5, nous nous intéresserons à des familles de contrastes paramétrées par un autre signal fixé (signal de référence). Dans ce cas, l'invariance du contraste par translation temporelle ne sera pas nécessairement vérifiée et nous devons adapter la définition correspondante.

Dans le cas i.i.d., il a été démontré [62, 93] que le critère

$$\frac{|\kappa_y(0, 0, 0)|}{(\mathbb{E}\{|y(n)|^2\})^2}, \quad (3.3)$$

est un contraste au sens de la définition ci-dessus.

Le cas de sources non i.i.d. requiert un peu plus de technicité et une définition plus souple de la notion de contraste. Nous ferons l'hypothèse suivante sur les sources :

H.10 Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, la $j^{\text{ème}}$ source est centrée, stationnaire et sa fonction d'autocorrélation, notée $(\gamma_j(k))_{k \in \mathbb{Z}} := (\mathbb{E}\{s_j(n)s_j^*(n-k)\})_{k \in \mathbb{Z}}$, est définie positive. De plus, chaque source est de puissance unité ($\gamma_j(0) := \mathbb{E}\{|s_j(n)|^2\} = 1$).

Alors, pour tout indice $j \in \{1, \dots, N\}$ et tout filtre SISO $h[z]$, nous posons :

$$\|h\|_j := \left(\sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} h(k)h(l)^* \gamma_j(l-k) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Compte tenu de H.10, $\|\cdot\|_j$ définit bien une norme. Il est alors possible de définir la norme ℓ^2 pondérée du filtre global $\mathbf{g}[z] := (g_1[z], \dots, g_N[z])$:

$$\|\mathbf{g}\| := \left(\sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Enfin, nous introduisons les ensembles suivants :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \mathcal{G}_i := \{\mathbf{g}[z] = (g_1[z], \dots, g_N[z]) \mid \|g_j\|_j = \delta_{i-j}, \forall j\} \quad (3.6)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, \mathcal{G}_i est le sous-ensemble des filtres globaux de norme unité dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$ dont la norme- i vaut 1. Ainsi, un filtre global MISO appartenant à \mathcal{G}_i donne en sortie une filtrée scalaire de la $i^{\text{ème}}$ source. A partir de ces éléments, il est maintenant possible de donner la définition d'un contraste dans le cas de sources non i.i.d. et non linéaires :

Définition 6 (contraste MISO, cas non i.i.d.) \mathcal{C} est un contraste lorsque :

- (i) $\mathcal{C}((\mathbf{g}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) \leq \max_{i=1}^N \sup_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_i} \mathcal{C}((\tilde{\mathbf{g}}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) < +\infty$
- (ii) $\mathcal{C}((\mathbf{g}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \max_{i=1}^N \sup_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_i} \mathcal{C}((\tilde{\mathbf{g}}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$ si et seulement si il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ et $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_{i_0}$ permettant d'écrire $\mathbf{g} = \alpha \tilde{\mathbf{g}}$, où i_0 est tel que $\sup_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_{i_0}} \mathcal{C}((\tilde{\mathbf{g}}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \max_{i=1}^N \sup_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_i} \mathcal{C}((\tilde{\mathbf{g}}[z]\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$.

Remarque 5: Dans les définitions 5 et 6, le contraste \mathcal{C} a été noté comme dépendant de la sortie globale. Cependant, pour des sources et un mélange donnés, la sortie s'exprime en réalité en fonction des observations selon l'équation (3.1) et le contraste dépend ainsi des paramètres du filtre séparant.

En revanche, il est plus commode pour l'étude théorique de considérer la dépendance du contraste en fonction du filtre MISO global $\mathbf{g}[z]$. C'est ce dernier point de vue qui prévaut dans les développements qui suivent : le critère considéré sera noté $J(\mathbf{g})$ et étudié en fonction de sa dépendance vis-à-vis du filtre global.

Remarque 6: Dans les définitions 5 et 6 a été introduit un scalaire non nul α : il correspond à l'indétermination de multiplication des sources par un facteur multiplicatif. En général, les fonctions de contraste ne sont considérées que sur l'ensemble des filtres globaux de norme unité, ce qui équivaut à une normalisation en puissance ($E\{|y(n)|^2\} = 1$) de la sortie globale. Dans ce cas, nous pouvons imposer $|\alpha| = 1$ dans les deux définitions.

Il a été démontré dans [88] que le critère défini par (3.3) est un contraste pour des sources non i.i.d. au sens de la définition ci-dessus. Comme le critère (3.3) est inchangé par multiplication des coefficients du filtre global par un scalaire non nul, il est possible de considérer ce critère uniquement sur l'ensemble des filtres $\mathbf{g}[z]$ de norme unité. Dans ce cas, puisque $\|\mathbf{g}\|^2 = E\{|y(n)|^2\}$ et que ces deux quantités valent 1, il est possible d'affirmer que la fonction

$$\mathbf{g}[z] \mapsto |\kappa_y(0, 0, 0)| \quad (3.7)$$

est un contraste sur l'ensemble des filtres tels que $\|\mathbf{g}\| = 1$; c'est-à-dire que cette fonction est un contraste sous une contrainte de puissance unité en sortie. En nous basant sur ce résultat, nous introduisons le critère J défini par :

$$J(\mathbf{g}) := \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{S}} f(\kappa_y(k_1, k_2, k_3)) \quad (3.8)$$

où $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que $f(0) = 0$, et \mathcal{S} est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 . Définissons également :

$$\mathcal{M}_i := \sup_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}_i} J(\mathbf{g}). \quad (3.9)$$

\mathcal{M}_i est la borne supérieure du critère J lorsque seule la $i^{\text{ème}}$ source est présente en sortie du filtre global. Nous supposons également par la suite que la condition technique suivante est vérifiée (sa validité en pratique sera vérifiée dans le paragraphe 3.4.2) :

H.11 La borne supérieure définie à l'équation (3.9) est atteinte pour un filtre noté $\mathbf{g}_i^\sharp \in \mathcal{G}_i$.

Nous pouvons alors affirmer :

Proposition 9 *Si f et \mathcal{S} ont été choisis de sorte à satisfaire :*

$$\forall j \in \{1, \dots, N\} \quad 0 < \mathcal{M}_j < +\infty, \quad (3.10)$$

alors J est un contraste sur l'ensemble des filtres \mathbf{g} de norme unité ($\|\mathbf{g}\| = 1$).

Preuve: Cette proposition se démontre par une méthode très proche de celle que l'on trouve dans [88]. Nous présentons ici cette démonstration, que l'on généralisera ensuite dans la proposition 11.

D'après l'équation (3.2) la sortie globale $y(n)$ peut s'écrire :

$$y(n) = \sum_{j=1}^N g_j[z] s_j(n) + \tilde{b}(n) = \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j \tilde{g}_j[z] s_j(n) + \tilde{b}(n) \quad (3.11)$$

où l'on a posé :

$$\tilde{g}_j[z] := \begin{cases} \frac{g_j[z]}{\|g_j\|_j} & \text{si } \|g_j\|_j \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Ainsi, chacun des filtres scalaires $\tilde{g}_j[z]$ est de norme- j unité. En utilisant la multilinéarité des cumulants, la gaussianité du bruit et son indépendance, il vient :

$$\kappa_y(k_1, k_2, k_3) = \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4 \kappa_{\tilde{g}_j[z] s_j}(k_1, k_2, k_3) + \left(1 - \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4\right) \cdot 0. \quad (3.13)$$

Par convexité de f , puisque $\sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4 \leq 1$ et $f(0) = 0$, l'inégalité de Jensen permet d'écrire :

$$f(\kappa_y(k_1, k_2, k_3)) \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4 f(\kappa_{\tilde{g}_j[z] s_j}(k_1, k_2, k_3)) \quad (3.14)$$

et ainsi :

$$J(\mathbf{g}) \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4 \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{S}} f(\kappa_{\tilde{g}_j[z] s_j}(k_1, k_2, k_3)) \quad (3.15)$$

Comme $\tilde{g}_i \in \mathcal{G}_i$, en utilisant (3.9) - (3.10), il vient :

$$J(\mathbf{g}) \leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^4 \mathcal{M}_j \quad (3.16)$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^2 \mathcal{M}_j \quad (3.17)$$

$$\leq \left(\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{M}_j \right) \sum_{j=1}^N \|g_j\|_j^2 = \left(\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{M}_j \right) \|\mathbf{g}\|^2 = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{M}_j. \quad (3.18)$$

Si $J(\mathbf{g}) = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \mathcal{M}_j$, les inégalités ci-dessus deviennent des égalités. En particulier, l'égalité entre (3.16) et (3.17) entraîne que $\|g_j\|_j$ ne peut valoir que 0 ou 1. De plus, en considérant l'égalité

entre (3.17) et (3.18), il vient que $\|g_{i_0}\|_{i_0} = 1$ et $\|g_j\|_j = 0$ pour tout $j \neq i_0$, où i_0 est tel que $\mathcal{M}_{i_0} = \max_j \mathcal{M}_j$.

Réciproquement, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{i_0}^\#$ atteint la borne supérieure définie par (3.9) car dans ce cas, on a $J(\mathbf{g}) = \mathcal{M}_{i_0}$. \blacksquare

Plusieurs remarques s'imposent au sujet du résultat précédent :

- Contrairement à des résultats existants dans le cas i.i.d. [93] ou non i.i.d. [88], nous ne supposons pas que J est une fonction convexe du *module* des cumulants, mais une fonction convexe des cumulants eux-mêmes.
- Pour des sources dont les cumulants d'ordre quatre sont non nuls en $(0, 0, 0)$ (c'est-à-dire $\forall i, \kappa_{s_i}(0, 0, 0) \neq 0$), nous obtenons le contraste (3.7) comme cas particulier de (3.8) avec les choix $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$ et $f(\cdot) = |\cdot|$.
- Dans le cas de sources de cumulants négatifs en $(0, 0, 0)$, il est possible d'obtenir un contraste en choisissant moins l'identité pour f . Ce choix n'est pas équivalent au choix $f(\cdot) = |\cdot|$ qui vient d'être évoqué.

En effet, considérons des sources qui, pour tout j , vérifient $\kappa_{s_j}(0, 0, 0) < 0$. Dans le cas de sources i.i.d. nous pouvons garantir que la sortie globale vérifie $\kappa_y(0, 0, 0) < 0$ et donc $|\kappa_y(0, 0, 0)| = -\kappa_y(0, 0, 0)$. Ainsi, les deux critères sont égaux dans ce cas. Dans le cas de sources non linéaires en revanche, rien ne permet d'affirmer que $\kappa_y(0, 0, 0) < 0$ en sortie globale et les deux critères ne sont donc pas identiques.

- La condition (3.10) est (en général) satisfaite pour des choix simples de \mathcal{S} et f . Pour tout support \mathcal{S} fini, il est possible de trouver une condition suffisante pour que \mathcal{M}_i soit fini. Cette condition est satisfaite pour les signaux que nous considérerons (i.i.d. ou CPM) et s'énonce :

Proposition 10 *Pour tout i fixé dans $\{1, \dots, N\}$, la borne supérieure \mathcal{M}_i est finie dès que les trois conditions suivantes sont réunies :*

1. \mathcal{S} est de cardinal fini.
2. La famille des autocumulants de la source $(s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
3. Il existe $\rho > 0$ tel que la densité spectrale de la source $(s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie $\Gamma_i[e^{i\omega}] \geq \rho > 0, \forall \omega$.

Preuve: Comme dans (3.8) la somme est effectuée sur \mathcal{S} dont le cardinal est supposé fini, il suffit de prouver que $f(\kappa_y(k_1, k_2, k_3))$ est fini, c'est-à-dire encore que $|\kappa_y(k_1, k_2, k_3)|$ est bornée car f est convexe sur \mathbb{C} et donc continue. Soit $\mathbf{g}[z] = (0, \dots, 0, g_i[z], 0, \dots, 0)$ un élément de \mathcal{G}_i . On peut écrire :

$$\begin{aligned} \kappa_y(k_1, k_2, k_3) &= \sum_{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{Z}^4} g_i(l_1)g_i^*(l_2)g_i(l_3)g_i^*(l_4) \text{Cum}\{s_i(k-l_1), \\ &\quad s_i^*(k-k_1-l_2), s_i(k-k_2-l_3), s_i^*(k-k_3-l_4)\} \\ &= \sum_{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{Z}^4} g_i(l_1)g_i^*(l_2)g_i(l_3)g_i^*(l_4) \kappa_{s_i}(l_1-k_1-l_2, l_1-k_2-l_3, l_1-k_3-l_4) \\ &= \sum_{(l, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^4} g_i(l)g_i^*(l-p_1)g_i(l-p_2)g_i^*(l-p_3) \kappa_{s_i}(p_1-k_1, p_2-k_2, p_3-k_3) \\ &= \sum_{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3} \kappa_{s_i}(p_1-k_1, p_2-k_2, p_3-k_3) \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_i(l)g_i^*(l-p_1)g_i(l-p_2)g_i^*(l-p_3). \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder généralisée permet alors d'obtenir :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |g_i(l)| |g_i^*(l-p_1)| |g_i(l-p_2)| |g_i^*(l-p_3)| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |g_i(l)|^4 \leq \|g_i\|_{\mathcal{L}^2}^4 \quad (3.19)$$

où $\|g_i\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |g_i(l)|^2}$. Ainsi, nous avons la majoration :

$$|\kappa_y(k_1, k_2, k_3)| \leq \|g_i\|_{\mathcal{L}^2}^4 \sum_{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Z}^3} |\kappa_{s_i}(p_1 - k_1, p_2 - k_2, p_3 - k_3)| \quad (3.20)$$

Par ailleurs, l'hypothèse sur la densité spectrale de la source $(s_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ permet d'écrire :

$$\|g_i\|_i^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_i[e^{i\omega}]|^2 \Gamma_i[e^{i\omega}] d\omega \geq \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_i[e^{i\omega}]|^2 d\omega \geq \frac{\rho}{2\pi} \|g_i\|_{\mathcal{L}^2}^2 \quad (3.21)$$

Puisque $\mathbf{g} \in \mathcal{G}_i$, il vient donc $\|g_i\|_{\mathcal{L}^2} \leq \sqrt{2\pi\rho^{-1/2}} \|g_i\|_i = \sqrt{2\pi\rho^{-1/2}}$. Cette inégalité, combinée avec la sommabilité des cumulants permet d'affirmer que le majorant de l'équation (3.20) est fini et donc que \mathcal{M}_i est fini. ■

- D'après la définition (3.9), une condition suffisante pour assurer $\mathcal{M}_j > 0$ est qu'il existe $\mathbf{g} \in \mathcal{G}_j$ tel que $J(\mathbf{g}) > 0$. Dès lors, on constate aisément que, dans le cas particulier où $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$ et où f est moins l'identité, le contraste donné par (3.8) est valable si les sources sont de kurtosis négatif. En effet, si l'on considère $\mathbf{g} \in \mathcal{G}_j$ défini par un filtre identité sur la $j^{\text{ème}}$ composante et des zéros ailleurs ($\mathbf{g}[z] = (0, \dots, 0, z^0, 0, \dots, 0)$), alors $J(\mathbf{g}) = -\kappa_{s_j}(0, 0, 0) > 0$, ce qui implique que (3.10) est vérifiée et que $\mathbf{g} \mapsto -\kappa_y(0, 0, 0)$ est un contraste.

3.2 De l'extraction d'une source à l'extraction MIMO

Le paragraphe précédent a mis en avant une famille de critères dont l'optimisation permet d'obtenir l'extraction d'une source. Ainsi la maximisation d'un critère semblable à (3.8) permet d'après la proposition 9 d'obtenir un filtre MISO séparant. Afin d'obtenir un filtre séparant MIMO, cette même étape doit être répétée N fois. Naturellement, afin de ne pas retrouver plusieurs fois la même source, les maximisations successives doivent être réalisées sous certaines conditions ou contraintes.

Dans l'approche par déflation, la contribution sur les capteurs de la source précédemment extraite est soustraite par une méthode de moindres carrés. Cette contribution étant supprimée, la source en question ne peut être obtenue une seconde fois. Nous rappelons le principe de la déflation dans le paragraphe suivant. Cette approche présente l'inconvénient d'accumuler les erreurs d'estimation au cours des itérations du procédé de déflation. En conséquence, la qualité des résultats tend à se détériorer au fur et à mesure que les sources sont extraites. Nous allons proposer une autre méthode, qui consiste en l'introduction de contraintes supplémentaires à chaque maximisation successive du ou des critère(s) considéré(s). Ceci est expliqué dans le paragraphe 3.2.2.

3.2.1 Procédé de déflation

Parmi les procédés d'extraction séquentielle des sources, une méthode classique, appelée déflation, consiste à supprimer la contribution de la source précédemment extraite sur les capteurs. Le procédé a été introduit dans [62] pour le cas convolutif et développé dans [32] pour le cas instantané. On le retrouve également dans [88, 93, 87] et nous en rappelons ici brièvement le fonctionnement.

Le principe de base consiste à exploiter la possibilité d'extraire une source afin d'en déduire une procédure séquentielle, dont les étapes sont les suivantes :

- recherche d'un filtre $\mathbf{w}[z]$ de taille $1 \times Q$ tel que $y(n) = \mathbf{w}[z]\mathbf{x}(n)$ soit une version filtrée de l'une des sources, par exemple la première. On note dans ce cas $y(n) = g_1[z]s_1(n)$.
- à partir de $y(n)$, détermination et soustraction de la contribution de $s_1(n)$ sur les capteurs. Plus précisément, on recherche un filtre $\mathbf{t}[z] = (t_1[z], \dots, t_Q[z])^T$ de taille $Q \times 1$ qui pour tout $j \in \{1, \dots, Q\}$ minimise le critère :

$$\mathbf{E}\{|x_j(n) - t_j[z]y(n)|^2\} = \mathbf{E}\{|(M_{j1}[z] - t_j[z]g_1[z])s_1(n) + \sum_{i=2}^N M_{ji}[z]s_i(n)|^2\}$$

ce qui s'écrit par indépendance des sources :

$$= \mathbf{E}\{|(M_{j1}[z] - t_j[z]g_1[z])s_1(n)|^2\} + \mathbf{E}\{|\sum_{i=2}^N M_{ji}[z]s_i(n)|^2\}$$

Le critère ci-dessus est minimal quand $M_{j1}[z] = t_j[z]g_1[z]$. Par suite, les critères ci-dessus pour $j \in \{1, \dots, Q\}$ sont minimaux si $\mathbf{t}[z]y(n)$ correspond à la contribution de $s_1(n)$ sur le réseau de capteurs. Il est donc possible de créer l'erreur de prédiction $\tilde{\mathbf{x}}(n) := \mathbf{x}(n) - \mathbf{t}[z]y(n)$, qui est le signal résultant du mélange des $N - 1$ sources $s_2(n), \dots, s_N(n)$ par un filtre composé des $N - 1$ dernières colonnes de $\mathbf{M}[z]$.

- itération des deux étapes précédentes après avoir remplacé $\mathbf{x}(n)$ par un nouveau vecteur d'observations $\tilde{\mathbf{x}}(n)$. Le processus s'arrête lorsque toutes les sources ont été extraites.

Malgré quelques abus de langage, nous réservons le nom de déflation au processus qui consiste à retrancher par moindres carrés la contribution d'une source, dans le but d'en déduire une méthode de séparation séquentielle (ce terme provient originellement de techniques de calcul numérique sur les matrices).

Remarque 7: Notons que le choix de l'ordre des filtres $\mathbf{t}[z]$ n'est pas évident dans le cas non i.i.d. : en effet, la source extraite n'est reconstruite qu'à un filtrage près, de type MA. Afin de soustraire sa contribution sur les capteurs, il convient alors d'utiliser un filtre $\mathbf{t}[z]$ de type AR et donc de réponse impulsionnelle infinie en théorie. Cette difficulté de choix de l'ordre du filtre n'apparaîtra pas dans l'approche proposée aux paragraphes 3.2.2 et 3.4.

Une autre procédure séquentielle est présentée dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Maximisation stricte des contrastes sur un sous-ensemble

Nous proposons ici une approche différente de la déflation : au lieu de soustraire les contributions des sources précédemment extraites, ces dernières nous servent à introduire des contraintes supplémentaires sur l'ensemble des filtres MISO sur lequel l'optimisation est menée à l'étape suivante. Définissons les sous-ensembles suivants de l'ensemble des filtres $1 \times N$:

$$\forall P \in \{1, \dots, N\} \quad \mathcal{F}_P := \{\mathbf{g}[z] \mid g_1 = \dots = g_{P-1} = 0 \text{ et } \|\mathbf{g}\| = 1\} \quad (3.22)$$

En particulier, \mathcal{F}_1 correspond à la sphère unité, tandis que les $\mathcal{F}_P, P > 1$ sont les projections de \mathcal{F}_1 sur les sous-espaces des filtres MISO dont les $P - 1$ premières composantes sont identiquement nulles. Nous allons considérer (pour tout $P \in \{1, \dots, N\}$) les restrictions $J|_{\mathcal{F}_P}$ de J sur \mathcal{F}_P .

La proposition 9 affirme d'ores et déjà que que $J_{|\mathcal{F}_1}$ est un contraste : supposons que par sa maximisation on puisse extraire la première source. Il est clair que la maximisation de $J_{|\mathcal{F}_2}$ ne peut mener une seconde fois à l'extraction de la première source. Cependant, puisque l'on considère le critère J sur un sous-ensemble de l'ensemble des filtres de norme unité, $J_{|\mathcal{F}_2}$ présente des maxima autres que ceux de $J_{|\mathcal{F}_1}$ et donc, parmi les critères $J_{|\mathcal{F}_P}, P \geq 1$, seul $J_{|\mathcal{F}_1}$ constitue un contraste *a priori*. La proposition suivante permet de surmonter cette difficulté et de généraliser le résultat de la proposition 9 :

Proposition 11 *Si (3.10) est vérifiée, alors, pour tout $P \in \{1, \dots, N\}$, $J_{|\mathcal{F}_P}$ est un contraste au sens où sa maximisation globale¹ mène à l'extraction d'une source. De plus, l'indice de la source extraite par la maximisation de $J_{|\mathcal{F}_P}$ est supérieur ou égal à P .*

Preuve: Fixons P quelconque dans $\{1, \dots, N\}$ et considérons $\mathbf{g} \in \mathcal{F}_P$. Alors, $g_1 = \dots = g_{P-1} = 0$ et l'équation (3.11) s'écrit :

$$y(n) = \sum_{j=P}^N \|g_j\|_j \tilde{g}_j[z] s_j(k) + \tilde{b}(n), \quad (3.23)$$

où $\tilde{g}_j[z]$ est défini dans (3.12). La preuve de la proposition 11 se déroule alors de manière identique à celle de la proposition 9, dans laquelle on aura limité la sommation à des indices $j \in \{P, \dots, N\}$. ■

Nous pouvons maintenant remarquer que la proposition précédente permet d'extraire les sources les unes après les autres. La validité de la méthode correspondante, appelée hiérarchique, est affirmée dans la proposition qui suit. Dans la mesure où l'ordre d'extraction des sources est purement conventionnel, nous supposons toujours que la $P^{\text{ème}}$ source est extraite à l'étape P de la méthode.

Proposition 12 (procédure de séparation hiérarchique) *La procédure qui consiste à maximiser successivement $J_{|\mathcal{F}_1}, \dots, J_{|\mathcal{F}_N}$ mène à l'obtention d'un filtre MIMO global séparant.*

Preuve: Puisque \mathcal{F}_1 est l'ensemble des filtre globaux de norme unité, d'après la proposition 9, la maximisation de $J_{|\mathcal{F}_1}$ mène à un filtre MISO séparant. La source extraite correspond à l'une des sources pour lesquelles le paramètre $\mathcal{M}_i, i \in \{1, \dots, N\}$ est maximal. D'après l'ordre choisi pour les sources, nous supposons en toute généralité que la première source a été extraite.

Supposons maintenant nous trouver à l'étape $P \in \{1, \dots, N\}$ où, par maximisation successive de $J_{|\mathcal{F}_1}, \dots, J_{|\mathcal{F}_{P-1}}$, nous avons extrait les $P - 1$ premières sources. La proposition 11 assure que la maximisation de $J_{|\mathcal{F}_P}$ mène à la séparation d'une source distincte des $P - 1$ déjà extraites. Par convention sur l'ordre des sources, il s'agit de la $P^{\text{ème}}$ et la proposition se déduit donc par récurrence. ■

Dans le paragraphe 3.4.1 nous traiterons de la faisabilité de l'optimisation contrainte introduite dans les propositions 11 et 12. Auparavant, nous étudions les propriétés locales des critères introduits.

3.3 Etude locale des contrastes

Comme il sera expliqué dans les paragraphes 3.4.2 et 3.4.4, l'optimisation est en général réalisée par une méthode d'optimisation itérative locale. Ainsi, une étude locale donnera-t-elle une meilleure compréhension du comportement des algorithmes. De plus, l'analyse du

¹Maximisation globale est à comprendre au sens de maximisation stricte, *i.e.* relative à la recherche du maximum absolu, par opposition à la maximisation locale.

paragraphe 3.3.2 permettra de justifier une méthode de post-optimisation qui permet de compenser l'accumulation d'erreurs inhérente aux approches séquentielles de la séparation de source : nous constaterons par la suite que ceci permet une nette amélioration de la qualité des résultats.

3.3.1 Utilisation des maxima locaux pour la séparation

L'approche précédente se fonde sur des maximisations globales de $J_{|\mathcal{F}_1}, \dots, J_{|\mathcal{F}_N}$. Il serait intéressant d'avoir en plus des informations sur de possibles maxima locaux parasites de ces critères. Il a été démontré dans [88, 93] que tout maximum local du critère (3.3) est un filtre séparant (ce résultat s'applique naturellement au critère (3.7)). Comme nous considérons ici ces mêmes critères sous contrainte, ces résultats ne sont pas applicables en l'état et nous proposons maintenant de les généraliser.

Inspiré des idées de [88], nous nous concentrons dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.2 sur le choix particulier $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$. Ce choix apparaît justifié aussi par le fait supplémentaire que l'estimation du contraste se trouve d'autant plus facilitée qu'il y a moins de termes à estimer dans J . D'après notre expérience —notamment les résultats du chapitre précédent— ceci devrait mener à de meilleures performances statistiques.

Enfin, une hypothèse technique supplémentaire est nécessaire dans le paragraphe 3.3.1 (mais pas dans 3.3.2) : en plus de la convexité de f , nous supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone (croissante ou décroissante) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. En particulier, si f est moins l'identité (choix que l'on considérera dans le chapitre suivant, paragraphe 4.1), la condition est remplie. De même, les fonctions habituellement utilisées telles que la valeur absolue ou le module au carré satisfont la condition requise.

Les résultats de [88] sur les maxima locaux du critère (3.3) proviennent indirectement du lemme suivant :

Lemme 2 Soient $m \in \mathbb{N}^*$, des réels c_1, \dots, c_m et la fonction :

$$\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^m c_k a_k^4 \quad (3.24)$$

Notons $\mathcal{S} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{R}^m et $\mathbf{e}_k, k \in \{1, \dots, m\}$ les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^m . On peut affirmer que :

1. si $\forall k, c_k > 0$:
 - (i) les maxima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont les vecteurs \mathbf{a}^{\max} tels que $\mathbf{a}^{\max} = \pm \mathbf{e}_k$.
 - (ii) les minima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont à chercher parmi les vecteurs \mathbf{a}^{\min} dont les composantes vérifient : $\forall k, (a_k^{\min})^2 = \frac{\lambda}{4c_k}$ où $\lambda = \frac{4}{\sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}}$.
2. si $\forall k, c_k < 0$:
 - (i) les minima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont les vecteurs \mathbf{a}^{\min} tels que $\mathbf{a}^{\min} = \pm \mathbf{e}_k$.
 - (ii) les maxima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont à chercher parmi les vecteurs \mathbf{a}^{\max} dont les composantes vérifient : $\forall k, (a_k^{\max})^2 = \frac{\lambda}{4c_k}$ où $\lambda = \frac{4}{\sum_{l=1}^m \frac{1}{c_l}}$.
3. si les c_k ne sont pas tous strictement de même signe (i.e. certains sont > 0 , d'autres ≤ 0 ou inversement) :
 - (i) les maxima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont les vecteurs $\mathbf{a}^{\max} = \pm \mathbf{e}_{k_0}$ où k_0 est tel que $c_{k_0} > 0$.
 - (ii) les minima locaux de ψ sur \mathcal{S} sont les vecteurs $\mathbf{a}^{\min} = \pm \mathbf{e}_{k_0}$ où k_0 est tel que $c_{k_0} < 0$.

Ce lemme peut se démontrer par une étude de tous les cas où le Lagrangien du problème s'annule. La démonstration complète se trouve dans [32]. Au moyen d'une preuve semblable à celle dans [88], nous pouvons alors prouver le résultat suivant :

Proposition 13 *Supposons que $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$. Alors, pour tout $P \in \{1, \dots, N\}$, tout maximum local positif de $J_{|\mathcal{F}_P}$ correspond à un filtre séparant. De plus l'indice de la source extraite par tout maximum local de $J_{|\mathcal{F}_P}$ est supérieur ou égal à P .*

Preuve: Soit P fixé dans $\{1, \dots, N\}$ et soit $\mathbf{g} \in \mathcal{F}_P$; on peut alors écrire (3.23) et il s'ensuit :

$$f(\kappa_{\mathbf{y}}(0, 0, 0)) = f\left(\sum_{j=P}^N \|g_j\|_j^4 \kappa_{\tilde{g}_j[z]s_j(k)}(0, 0, 0)\right). \quad (3.25)$$

Supposons que $\hat{\mathbf{g}}$ soit un maximum local appartenant à \mathcal{F}_P de l'expression ci-dessus. Deux cas doivent être distingués :

- si l'argument de la fonction f est non nul en $\hat{\mathbf{g}}$, l'hypothèse technique précédente sur f , associée avec sa continuité assure que $\hat{\mathbf{g}}$ est soit un maximum local, soit un minimum local sur \mathcal{F}_P de :

$$\mathbf{g} \mapsto \sum_{j=P}^N \|g_j\|_j^4 \kappa_{\tilde{g}_j[z]s_j(k)}(0, 0, 0). \quad (3.26)$$

(où l'expression ci-dessus est l'argument de f dans (3.25)).

- si l'argument de la fonction f dans (3.25) s'annule en $\hat{\mathbf{g}}$, le même résultat demeure lorsque f est monotone sur \mathbb{R} . Si en revanche un changement du sens de variation de f intervient en 0, en raison de sa convexité, f est nécessairement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi, 0 est un minimum global de f sur \mathbb{R} et $\hat{\mathbf{g}}$ serait aussi un minimum global de l'expression dans (3.25). Ceci entre manifestement en contradiction avec le fait que $\hat{\mathbf{g}}$ est un maximum local de cette même expression, démontrant ainsi que ce cas ne peut se produire.

Nous déduisons en particulier de cette discussion que le vecteur $(\|\hat{g}_P\|_P, \dots, \|\hat{g}_N\|_N)$ est un extremum sur la sphère unité $(\sum_{j=P}^N \|g_j\|_j^2 = 1)$ de la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{N-P+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\|g_P\|_P, \dots, \|g_N\|_N) &\mapsto \sum_{j=P}^N \|g_j\|_j^4 \tilde{C}_j \end{aligned} \quad (3.27)$$

où les $\tilde{C}_j := \kappa_{\tilde{g}_j[z]s_j(k)}(0, 0, 0)$ sont des constantes dépendant de $\hat{\mathbf{g}}$. Cette fonction correspond à celle du lemme 2. De plus, puisque le maximum local de $J_{|\mathcal{F}_P}$ est supposé positif, il ne peut s'agir d'un minimum local de (3.27) dans le cas 1 du lemme. En effet, si nous étions dans ce dernier cas, les \tilde{C}_j seraient positifs et donc aussi la fonction (3.27). Dans le cas où f est croissante sur \mathbb{R}^+ ceci correspond à un minimum local de (3.25) ce qui contredit l'hypothèse de maximum local. Dans le cas où f est décroissante sur \mathbb{R}^+ , on obtient un maximum local négatif de (3.25) puisque $f(0) = 0$. Notons que ce maximum serait strictement négatif compte tenu de la forme des solutions de 1-(ii), ce qui est contraire à l'hypothèse de maximum positif. Ces deux possibilités mènent donc bien à une contradiction.

Pour des raisons similaires, nous ne pouvons être dans le cas 2-(ii) du lemme. Ainsi le lemme permet de conclure que toutes les composantes $\|\hat{g}_j\|_j, j = P, \dots, N$ sont nulles sauf une. Comme de plus $\hat{\mathbf{g}} \in \mathcal{F}_P$, ceci prouve que $\hat{\mathbf{g}}$ est séparant. ■

La proposition ci-dessus démontre qu'il est possible d'extraire une source par une méthode de maximisation locale. Par une preuve identique à celle de la proposition 12, nous pouvons en déduire une méthode de séparation de l'ensemble des sources. De même que dans le paragraphe 3.2.2 nous supposons par souci de simplicité (et sans perte de généralité) que les sources sont ordonnées selon leur ordre d'extraction.

Proposition 14 *La procédure qui consiste en la recherche successive des maxima locaux positifs des critères $J_{|\mathcal{F}_1}, J_{|\mathcal{F}_2}, \dots, J_{|\mathcal{F}_N}$ mène à l'obtention d'un filtre MIMO global séparant.*

Les résultats obtenus dans le cadre de ce paragraphe ont fait apparaître que certains contrastes peuvent présenter des caractéristiques plus intéressantes que celles imposées par les définitions 5 ou 6. Le fait qu'un contraste soit séparant pour tout maximum local est en effet d'un intérêt bien plus important pour la mise en œuvre de la méthode que de savoir la propriété vérifiée pour le maximum global. Ce résultat local permet de s'affranchir d'une recherche de maximum global et nous pouvons remarquer à ce propos que de façon générale, il serait souhaitable dans l'étude des critères de séparation, de ne pas se concentrer uniquement sur leurs maxima globaux. L'intérêt des propriétés *locales* sera encore souligné dans la suite de nos investigations, qui concerne principalement une réciproque de la proposition 13.

3.3.2 Analyse au voisinage d'un filtre MISO séparant

Les résultats précédents affirment que tout maximum local positif des critères considérés (et en particulier tout maximum local positif de $J_{|\mathcal{F}_1}$) correspond à un filtre séparant. Cependant, rien n'interdit *a priori* qu'un point séparant obtenu par l'une des maximisations de $J_{|\mathcal{F}_P}$ pour $P > 1$ ne soit pas un maximum local de $J_{|\mathcal{F}_1}$: c'est précisément cette question qui nous préoccupe dans ce paragraphe et nous montrons que cette situation ne peut pas se produire. En particulier nous caractérisons, autour de tout maximum local de $J_{|\mathcal{F}_P}$, $P \geq 1$, une boule dans laquelle ce maximum local est maximum local de $J_{|\mathcal{F}_1}$ également. Le résultat est valable à la fois dans le cas i.i.d. et non i.i.d. et permettra de proposer dans le chapitre 3.4.5 une amélioration de la méthode de séparation dans le but de compenser les accumulations d'erreurs.

Soit $\hat{\mathbf{g}}[z]$ un filtre MISO de taille $1 \times N$ qui maximise le critère $J_{|\mathcal{F}_P}$ où P est fixé quelconque dans $\{1, \dots, N\}$. La proposition 13 (ou 11) assure que $\hat{\mathbf{g}}[z]$ permet l'extraction d'une source, la $P^{\text{ème}}$. De plus, $\hat{\mathbf{g}}[z]$ étant un maximum local de $J_{|\mathcal{F}_P}$, il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathcal{F}_P, \quad \|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < \rho \Rightarrow J(\mathbf{g}) \leq J(\hat{\mathbf{g}}). \quad (3.28)$$

Proposition 15 *Si l'on pose :*

$$\widehat{\mathcal{M}}_P := J(\hat{\mathbf{g}}) \quad \text{et} \quad \epsilon_P := \frac{2\widehat{\mathcal{M}}_P}{\max_{j \neq P} \mathcal{M}_j + \widehat{\mathcal{M}}_P}, \quad (3.29)$$

alors on a :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathcal{F}_1, \quad \|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < \min(\sqrt{\epsilon_P}, \rho) \Rightarrow J(\mathbf{g}) \leq J(\hat{\mathbf{g}}) \quad (3.30)$$

et pour tout \mathbf{g} appartenant à

$$\mathcal{F}_1 \cap \{\mathbf{g} \mid \|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < \min(\sqrt{\epsilon_P}, \frac{\rho}{2})\} \quad (3.31)$$

l'égalité $J(\mathbf{g}) = J(\hat{\mathbf{g}})$ ne peut être vraie que si \mathbf{g} extrait la même source que $\hat{\mathbf{g}}$ (c'est-à-dire $\|g_j\|_j = \delta_{j-P}$).

Preuve:

D'après (3.14), nous avons :

$$f(\kappa_{y(k)}(0, 0, 0)) \leq \sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^4 f(\kappa_{\tilde{g}_j[z]s_j(n)}(0, 0, 0)) + \|g_P\|_P^4 f(\kappa_{\tilde{g}_P[z]s_P(n)}(0, 0, 0)) \quad (3.32)$$

et, en utilisant la définition (3.9) :

$$f(\kappa_{y(k)}(0, 0, 0)) \leq \max_{j \neq P} \mathcal{M}_j \sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^4 + \|g_P\|_P^4 f(\kappa_{\tilde{g}_P[z]s_P(n)}(0, 0, 0)). \quad (3.33)$$

Soit $\tilde{\mathbf{g}} := (0, \dots, 0, \tilde{g}_P, 0, \dots, 0)$. Comme seule la $P^{\text{ème}}$ composante de $\hat{\mathbf{g}}$ et $\tilde{\mathbf{g}}$ est non nulle, nous avons $\|\tilde{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\| = \|\tilde{g}_P - \hat{g}_P\|_P$ et cette quantité est majorée par $2\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\|$ comme le montre la suite d'inégalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\| &\leq \|\tilde{g}_P - g_P\|_P + \|g_P - \hat{g}_P\|_P \\ &\leq \|g_P\|_P \left(\frac{1}{\|g_P\|_P} - 1 \right) + \|g_P - \hat{g}_P\|_P \\ &\leq \left| 1 - \|g_P\|_P \right| + \|g_P - \hat{g}_P\|_P = \left| \|\hat{g}_P\|_P - \|g_P\|_P \right| + \|g_P - \hat{g}_P\|_P \\ &\leq 2\|g_P - \hat{g}_P\|_P \leq 2\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\|. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Si \mathbf{g} appartient à l'ensemble décrit par (3.31), alors $\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < \rho/2$ et ainsi $\|\tilde{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}\| < \rho$, ce qui entraîne

$$f(\kappa_{\tilde{g}_P[z]s_P(n)}(0, 0, 0)) = J(\tilde{\mathbf{g}}) \leq J(\hat{\mathbf{g}}) = \widehat{\mathcal{M}}_P \quad (3.35)$$

et donc, d'après (3.33) :

$$J(\mathbf{g}) = f(\kappa_{y(k)}(0, 0, 0)) \leq \max_{j \neq P} \mathcal{M}_j \sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^4 + \|g_P\|_P^4 \widehat{\mathcal{M}}_P. \quad (3.36)$$

Introduisons $\epsilon := \sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^2 \in [0, 1]$. Nous avons :

$$\sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^4 \leq \left(\sum_{j \neq P} \|g_j\|_j^2 \right)^2 = \epsilon^2 \quad (3.37)$$

et ainsi :

$$J(\mathbf{g}) \leq \epsilon^2 \max_{j \neq P} \mathcal{M}_j + (1 - \epsilon)^2 \widehat{\mathcal{M}}_P =: \phi(\epsilon). \quad (3.38)$$

On constate alors immédiatement que $\phi(\epsilon) < \phi(0)$ lorsque $0 < \epsilon < \epsilon_P$ (où ϵ_P est défini par (3.29)) et $\phi(\epsilon)$ admet en zéro le maximum local $\phi(0) = \widehat{\mathcal{M}}_P$.

Maintenant, pour tout \mathbf{g} appartenant à l'ensemble décrit par (3.31), $\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\|^2 = \sum_{j=1}^N \|g_j - \hat{g}_j\|_j^2 < \epsilon_P$. Comme $\hat{g}_j[z] = 0$ pour tout $j \neq P$, ceci implique évidemment $\epsilon < \epsilon_P$. Ainsi, si $\mathbf{g}[z]$ appartient à l'ensemble (3.31) et $\epsilon > 0$, en se rappelant (3.38), nous obtenons $J(\mathbf{g}) < \widehat{\mathcal{M}}_P = J(\hat{\mathbf{g}})$. Si $\epsilon = 0$, \mathbf{g} vérifie $\|g_j\|_j = \delta_{j-P}$ et $J(\mathbf{g}) \leq J(\hat{\mathbf{g}})$. En particulier, si $J(\mathbf{g}) = J(\hat{\mathbf{g}})$, nous sommes nécessairement dans ce dernier cas et la proposition 15 est donc établie. ■

Selon la proposition 14, maximiser $J_{|\mathcal{F}_P}$ mène théoriquement à une solution séparante. En pratique cependant, les ensembles \mathcal{F}_P sont estimés et seule une approximation de la solution réelle cherchée peut être obtenue (voir le paragraphe 3.4.5 pour une discussion plus approfondie). D'après le résultat précédent, et à condition que l'approximation obtenue soit suffisamment proche de la vraie solution (c'est-à-dire à condition qu'elle soit dans l'ensemble (3.31)) une maximisation locale de $J_{|\mathcal{F}_1}$ devrait améliorer la solution.

Remarque 8: Un filtre $\hat{\mathbf{g}}$ qui maximise l'une des fonctions $J_{|\mathcal{F}_P}$ est nécessairement séparable et, d'après les notations choisies, $\hat{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}_P$. Un cas plus particulièrement intéressant est celui où $\hat{\mathbf{g}}$ est un maximum global de $J_{\mathcal{F}_P}$. Dans ce cas en effet, nous avons $\widehat{\mathcal{M}}_P = \mathcal{M}_P$ et $\rho = \infty$ et l'ensemble (3.31) devient l'intersection de \mathcal{F}_1 avec la boule de centre $\hat{\mathbf{g}}$ et de rayon $\sqrt{\epsilon_P}$.

Remarque 9: L'introduction du paramètre ρ dans la proposition 15 et dans la définition de l'ensemble (3.31) peut sembler une limitation importante de l'intérêt de ces résultats. Il est cependant possible de proposer une version légèrement différente de la dernière partie de cette proposition :

Proposition 16 *Soit $\hat{\mathbf{g}}[z]$ un filtre MISO de taille $1 \times N$ qui soit maximum global ou local de l'une des fonctions $J_{|\mathcal{F}_1}, \dots, J_{|\mathcal{F}_N}$, et qui permette d'extraire la $j_0^{\text{ème}}$ source. Alors, tout autre maximum local de $J : \mathbf{g}[z] \mapsto J(\mathbf{g})$ sur l'ensemble*

$$\{\mathbf{g} \mid \|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < 1 \text{ et } \|\mathbf{g}\| = 1\} \quad (3.39)$$

extraît également la $j_0^{\text{ème}}$ source.

Preuve: Soit $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)$ un maximum local de J appartenant à l'ensemble (3.39). \mathbf{g} étant un maximum local de $J_{|\mathcal{F}_1}$, ses composantes sont toutes nulles sauf une, par exemple la $j_1^{\text{ème}}$, ce qui s'écrit $\|g_j\|_j = \delta_{j-j_1}$. De plus, $\hat{\mathbf{g}}$ est tel que $\|\hat{g}_j\|_j = \delta_{j-j_0}$ et donc :

$$\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\|^2 = \sum_{j=1}^N \|g_j - \hat{g}_j\|_j^2 = \sum_{j \neq j_0} \|g_j\|_j^2 + \|g_{j_0} - \hat{g}_{j_0}\|_{j_0}^2 \quad (3.40)$$

De $\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| < 1$ et de l'égalité ci-dessus, il s'ensuit une contradiction puisque dans le cas où $j_1 \neq j_0$, (3.40) conduit à $\|\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}\| \geq 1$. Par conséquent, on a nécessairement $j_1 = j_0$, ce qui démontre la proposition 16. ■

Remarque 10: Dans le cas où $\mathcal{S} \neq \{(0, 0, 0)\}$, la proposition 13 n'est plus valable et $J_{|\mathcal{F}_P}(\mathbf{g})$ peut présenter des maxima locaux parasites non séparants. En revanche, lorsque le maximum global a été trouvé, le filtre correspondant est nécessairement séparable. Pour affiner le résultat, il est alors justifié de procéder à une post-optimisation locale autour de ce point uniquement lorsque toutes les sources ont des statistiques identiques : en effet, le maximum global atteint par $J_{|\mathcal{F}_P}(\mathbf{g})$ est alors égal au maximum global (et donc aussi local) de $J_{|\mathcal{F}_1}(\mathbf{g})$.

3.4 Vers une méthode effective de séparation MIMO

3.4.1 Caractérisation des ensembles \mathcal{F}_i

Afin de mettre en œuvre les procédures de séparation données par les propositions précédentes, nous montrons que les ensembles $\mathcal{F}_i, i \in \{1, \dots, N\}$ peuvent être caractérisés à partir des seules données observées. La proposition qui suit montre que $\mathbf{g}[z]$ appartient à l'ensemble souhaité \mathcal{F}_i si et seulement si le signal de sortie correspondant est de variance unité et vérifie des contraintes de décorrélation.

Considérons la $P^{\text{ème}}$ étape ($P \in \{1, \dots, N\}$) de la procédure de séparation de la proposition 12 ou 14 et supposons que les $P - 1$ étapes précédentes ont été réalisées avec succès. Nous disposons alors de $P - 1$ sorties globales $y_1(n), \dots, y_{P-1}(n)$ qui sont des filtrées SISO des sources $s_1(n), \dots, s_{P-1}(n)$ respectivement. Ceci sera noté de la façon suivante : $y_i(n) = g_i^\# [z] s_i(n), \forall i \in \{1, \dots, P - 1\}$. Soit $\mathbf{g}[z] = (g_1[z], \dots, g_N[z])$ un filtre de taille $1 \times N$ et $y(n) := \mathbf{g}[z] \mathbf{s}(n)$.

Proposition 17 *Il y a équivalence entre les deux propositions :*

1. $\mathbf{g} \in \mathcal{F}_P$

$$2. \begin{cases} \text{C.1 } E\{|y(n)|^2\} = 1 \\ \text{C.2 } \forall i \in \{1, \dots, P-1\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad E\{y_i(n)y^*(n-k)\} = 0 \end{cases}$$

Preuve: Il est aisé de constater d'abord que C.1 est équivalent à $\|\mathbf{g}\| = 1$. De plus, soit i fixé quelconque dans $\{1, \dots, P-1\}$. C.2 est équivalent à l'annulation de l'interspectre $S_i[e^{z\omega}]$ entre $y_i(n)$ et $y(n)$, ce qui peut s'écrire :

$$S_i[e^{z\omega}] = g_i^\sharp[e^{z\omega}](g_i[e^{z\omega}])^* \Gamma_i[e^{z\omega}] = 0 \quad (3.41)$$

Ainsi, sous hypothèse d'analyticité de $g_i^\sharp[z]$ et de $\Gamma_i[z]$ dans un anneau contenant le cercle unité, nous obtenons que $E\{y_i(n)y^*(n-k)\}$ est identiquement nul si et seulement si $g_i = 0$. Par conséquent, les deux conditions données par 2 sont équivalentes à $\|\mathbf{g}\| = 1$ et $\forall i \in \{1, \dots, P-1\}, g_i = 0$, ce qui prouve l'équivalence des deux propositions. ■

D'après la proposition 17, la procédure de séparation de la proposition 12 (resp. proposition 14) consiste en N maximisations globales (resp. locales) successives de J sous les contraintes C.1 et C.2, où P prend successivement les valeurs $1, 2, \dots, N$. Remarquons au passage que la contrainte C.2 est linéaire, ce qui facilite sa prise en compte.

Un algorithme similaire a été proposé dans [46] uniquement dans le cas de sources i.i.d. Nous avons ici démontré sa validité dans le cas non i.i.d. et, contrairement à [46], nous n'avons aucunement besoin d'une opération de préblanchiment. Ceci est d'une grande importance si l'on veut en pratique obtenir une méthode de séparation efficace : il est connu en effet, qu'une opération de préblanchiment peut altérer les performances de la séparation.

3.4.2 Optimisation pour des filtres RIF

L'optimisation des contrastes que nous avons étudiés peut s'effectuer à l'aide d'un algorithme d'optimisation itératif classique. Dès lors, la contrainte C.1 peut facilement être obtenue en effectuant une renormalisation du filtre séparant après chaque itération de la méthode d'optimisation. Nous nous intéressons donc maintenant plus particulièrement à la contrainte C.2 et la réécrivons comme suit :

$$\text{C.3 } \forall i, 1 \leq i < P \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad E\{y_i(n+k)(\mathbf{w}[z]\mathbf{x}(n))^*\} = 0$$

Nous pouvons constater que C.3 donne un nombre infini de contraintes car l'égalité ci-dessus doit être assurée pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En effet, pour des sources temporellement corrélées, dont l'autocorrélation ne s'annule jamais, il n'y a aucune raison pour que l'égalité ci-dessus soit automatiquement vérifiée lorsque $|k|$ est plus grand qu'une certaine valeur finie. Afin d'obtenir une meilleure compréhension du problème, nous allons considérer par la suite des filtres RIF.

Supposons à compter de maintenant (et jusqu'à la fin du chapitre) que le filtre de mélange $\mathbf{M}[z]$ est de longueur finie L (c'est-à-dire $\deg \mathbf{M}[z] = L-1$, où \deg est le degré maximal des polynômes en z^{-1} dans la matrice $\mathbf{M}[z]$). Plus précisément, $\mathbf{M}[z]$ se compose de N colonnes $\mathbf{M}[z] := (\mathbf{m}_1[z] \quad \dots \quad \mathbf{m}_N[z])$ de degré respectif $\deg \mathbf{m}_i[z] =: L_i - 1$ (et nous avons donc $L = \max_i L_i$). Cette hypothèse assure que le filtre $\mathbf{M}[z]$ est stable. Précisons des conditions sous lesquelles le filtre peut être inversé :

H.12 $\mathbf{M}[z]$ est irréductible *i.e.* $\text{Rang}(\mathbf{M}[z]) = N, \forall z \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$.

H.13 $\mathbf{M}[z]$ est à colonnes réduites *i.e.* $\text{Rang}(\mathbf{m}_1(L_1 - 1) \ \dots \ \mathbf{m}_N(L_N - 1)) = N$.

Sous H.12, l'existence d'un filtre inverse RIF est assurée. Si H.13 est satisfaite, une indication supplémentaire sur le degré d'un filtre séparant est apportée : pour tout D tel que $D \geq \sum_{i=1}^N (L_i - 1)$, il existe un filtre séparant $\mathbf{W}[z]$ de longueur D (voir [39] et ses références). Même si nous supposons les deux hypothèses vérifiées, H.13 n'est faite que par commodité afin de connaître le degré de l'inverse du filtre de mélange, tandis que H.12 est une hypothèse tout à fait raisonnable puisque, sous certaines conditions techniques, elle est presque toujours vraie dès qu'il y a plus de capteurs que de sources ($Q > N$).

En conséquence des hypothèses ci-dessus, l'optimisation de J est réalisée sur l'ensemble des filtre $\mathbf{w}[z]$ de longueur finie $D \in \mathbb{N}^*$, et qui satisfont C.1 et C.3. Si l'on note :

$$\underline{\mathbf{w}} := (\mathbf{w}(0) \ \mathbf{w}(1) \ \dots \ \mathbf{w}(D - 1)) \quad (3.42)$$

on constate aisément que C.3 peut donner, comme déjà expliqué, un nombre infini de contraintes sur $\underline{\mathbf{w}}$. Toutefois, en raisons des hypothèses ci-dessus, nous sommes assurés de l'existence d'un $\underline{\mathbf{w}} \neq 0$ séparateur. Les contraintes d'orthogonalité données par C.3 doivent donc nécessairement être redondantes, car sinon, elles impliqueraient $\underline{\mathbf{w}} = 0$.

Un problème analogue a été rencontré dans [46], quand bien même, dans ces travaux, les sources étaient supposées décorréelées et que C.3 pouvait par conséquent se réduire à un nombre fini de contraintes. Afin d'obtenir un vecteur $\underline{\mathbf{w}}$ non nul, il avait été proposé d'ajuster la longueur du filtre séparant à chaque étape de la procédure hiérarchique (*i.e.* D dépendait de P et différait pour chaque ligne du filtre $\mathbf{W}[z]$). L'étude du cas non i.i.d. nous laisse penser que cette approche n'est pas la meilleure, car dans ce dernier cas, une réduction du nombre de contraintes est dans tous les cas nécessaire afin d'obtenir un filtre $\mathbf{w}[z]$ de réponse impulsionnelle finie.

En pratique, nous considérons plus d'équations de contraintes d'orthogonalité que strictement nécessaire et nous sélectionnons à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières les contraintes numériquement les plus significatives. Afin de réaliser cette projection, nous déterminons dans le paragraphe suivant la dimension du sous-espace des vecteurs $\underline{\mathbf{w}}$ telles que C.3 est vérifiée.

3.4.3 Dimension des ensembles \mathcal{F}_i

Dans ce paragraphe, nous discutons de la dimension minimale de l'ensemble des filtres séparants $\mathbf{w}[z]$ de longueur donnée D et tels que le filtre global $\mathbf{g}[z] = \mathbf{w}[z]\mathbf{M}[z]$ appartienne à \mathcal{F}_P (et ainsi la sortie globale satisfasse C.1 et C.2). Si l'on se rappelle que le $i^{\text{ème}}$ élément de $\mathbf{g}[z]$ s'écrit $g_i[z] = \mathbf{w}[z]\mathbf{m}_i[z]$, où $\mathbf{m}_i[z]$ représente la $i^{\text{ème}}$ colonne du filtre de mélange, C.2 peut se réécrire :

$$\text{C.4 } \forall i \in \{1, \dots, P - 1\} \quad \mathbf{w}[z]\mathbf{m}_i[z] = 0 .$$

Définissons $\mathcal{T}_D(\mathbf{m}_i)$ comme la matrice suivante de taille $QD \times (L_i + D - 1)$:

$$\mathcal{T}_D(\mathbf{m}_i) := \begin{pmatrix} \mathbf{m}_i(0) & \mathbf{m}_i(1) & \dots & \mathbf{m}_i(L_i - 1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_i(0) & \mathbf{m}_i(1) & \dots & \mathbf{m}_i(L_i - 1) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{m}_i(0) & \mathbf{m}_i(1) & \dots & \mathbf{m}_i(L_i - 1) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

C.4 est équivalente à :

$$\underline{\mathbf{w}} (\mathcal{T}_D(\mathbf{m}_1) \ \dots \ \mathcal{T}_D(\mathbf{m}_{P-1})) = 0 \quad (3.44)$$

Puisque $\mathbf{M}[z]$ est irréductible et à colonnes réduites, $(\mathcal{T}_D(\mathbf{m}_1) \dots \mathcal{T}_D(\mathbf{m}_{P-1}))$ est de rang maximal, c'est-à-dire $((P-1)(D-1) + \sum_{i=1}^{P-1} L_i)$. Le nombre de conditions d'orthogonalité qu'impose l'équation (3.44) est donc $((P-1)(D-1) + \sum_{i=1}^{P-1} L_i)$. C'est le nombre de contraintes linéaires données par C.2 en théorie. Comme en fait $L = \max_i L_i$, nous obtenons que C.2 correspond au plus à $(P-1)(D+L-1)$ équations de contrainte linéairement indépendantes.

3.4.4 Implantation de la méthode de séparation

Nous donnons maintenant des détails concernant l'implantation pratique de la séparation par la méthode hiérarchique². Le problème se ramène à l'optimisation de $J_{|\mathcal{F}_P}$ pour $P = 1, \dots, N$ et donc à des optimisations sous les contraintes C.1 et C.2. Un algorithme de gradient a été utilisé pour ces maximisations successives. Pour l'étape $P = 1$, la contrainte C.2 disparaît et l'optimisation est identique à ce qui a été présenté dans [93] : la contrainte C.1 est imposée grâce à une renormalisation du vecteur $\underline{\mathbf{w}}$ effectuée à chaque itération du gradient.

Considérons à présent la gestion de la contrainte C.2 supplémentaire qui apparaît dès que $P > 1$. En définissant :

$$\underline{\mathbf{x}}(n) := (\mathbf{x}(n)^T, \mathbf{x}(n-1)^T, \dots, \mathbf{x}(n-D+1)^T)^T \quad (3.45)$$

on peut écrire :

$$y(n) = \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{x}}(n) \quad (3.46)$$

Dans le cas $P = 2$, C.2 (ou C.3) exprime la décorrélation entre la première source reconstituée $y_1(n)$ et celle que l'on cherche. Avec les notations ci-dessus, ceci s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \underline{\mathbf{w}}^* \mathbf{E}\{y_1(n+k) \underline{\mathbf{x}}^*(n)\} = 0 \quad (3.47)$$

Sachant que les conditions ci-dessus sont redondantes, nous ne les considérons que pour $k \in \{-k_{\max}, \dots, k_{\max}\}$. Nous définissons ainsi la matrice \mathbf{A}_1 , composée des intercorrélations entre $y_1(n)$ et les composantes de $\underline{\mathbf{x}}(n)$, et telle que la condition ci-dessus, prise pour $k \in \{-k_{\max}, \dots, k_{\max}\}$ s'écrit alors

$$\underline{\mathbf{w}}^* \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

En pratique, nous avons choisi $k_{\max} = L+D-1$, qui correspond à l'ensemble des valeurs de k à considérer de sorte que (3.47) soit vérifié pour tout k dans l'hypothèse de sources i.i.d. Ainsi, l'équation (3.48) traduit $2k_{\max} + 1$ conditions d'orthogonalité, ce qui est plus que le nombre $D+L-1$ de conditions à imposer d'après le paragraphe précédent. La matrice \mathbf{A}_1 n'est donc pas de rang plein et nous réduisons par conséquent le nombre de conditions d'orthogonalité en sélectionnant dans une matrice $\tilde{\mathbf{A}}_1$ l'espace colonne correspondant aux plus grandes valeurs singulières de \mathbf{A}_1 . La recherche du second filtre séparateur s'effectue ainsi dans l'espace défini par $\underline{\mathbf{w}}^* \tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{0}$ et il est aisé d'en déduire un algorithme de gradient projeté. Dans le cas où $P > 2$, nous construisons de même des matrices $\tilde{\mathbf{A}}_i, i \in \{1, \dots, P\}$ et le vecteur $\underline{\mathbf{w}}$ est recherché dans l'espace défini par $\underline{\mathbf{w}}^* \tilde{\mathbf{A}}_1 = \dots = \underline{\mathbf{w}}^* \tilde{\mathbf{A}}_P = \mathbf{0}$.

²Une séparation hiérarchique a déjà été introduite dans le cas de sources i.i.d. [92]. La différence consiste en l'introduction de termes de pénalisation du critère, qui permettent de prendre en compte de manière pondérée les contraintes de décorrélation, au lieu de les imposer comme il est fait ici.

3.4.5 Amélioration des performances par une post-optimisation locale

On peut reprocher aux méthodes de séparation hiérarchiques (propositions 12 et 14), de ne pas traiter les sources de façon symétrique : la première est reconstruite après une maximisation dans l'ensemble \mathcal{F}_1 des filtres $1 \times N$ de norme unité, tandis que les filtres MISO séparateurs suivants sont cherchés dans des sous-ensembles $\mathcal{F}_P, P \in \{2, \dots, N\}$, qui satisfont les inclusions successives : $\mathcal{F}_N \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_2 \subsetneq \mathcal{F}_1$. Comme les ensembles $\mathcal{F}_i, i \in \{2, \dots, N\}$ dépendent des estimations précédentes, et comme les erreurs d'estimation s'accumulent, il faut s'attendre à ce que l'extraction des sources soit de moindre qualité pour celles extraites en dernier. Cette même critique peut être adressée aux approches par déflation qui soustraient la contribution des sources précédemment extraites sur les capteurs.

Pour limiter ces effets, il a été proposé dans [94, 66] et [87], de réaliser après chaque extraction de la procédure une maximisation locale *non contrainte* de $J_{|\mathcal{F}_1}$ mais avec une *initialisation appropriée* de l'algorithme d'optimisation afin d'éviter d'extraire deux fois la même source. Lorsque $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$, la proposition 15 fournit une justification théorique à cette pratique.

L'initialisation adéquate peut être donnée par l'algorithme décrit dans la proposition 12 (ou 14). Une autre solution consiste à identifier le filtre ligne séparateur correspondant après l'extraction d'une source par déflation. Ceci peut se faire par moindres carrés.

3.5 Simulations

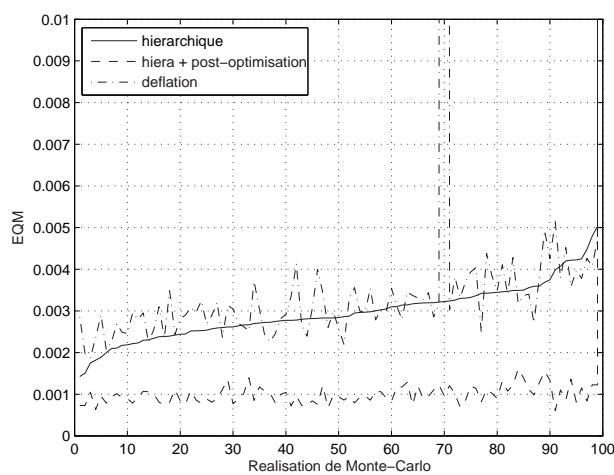
Les simulations présentées dans ce paragraphe se concentrent principalement sur le cas de sources i.i.d. réelles dont la distribution est soit uniforme, soit de type PAM4. Le cas non i.i.d. est présenté également mais a été étudié plus attentivement dans le cadre des applications exposées au chapitre 4. Nous renvoyons en particulier le lecteur aux simulations du paragraphe 4.1.3. Enfin, le choix de se placer dans le cas où le nombre de capteurs est strictement supérieur au nombre de sources se justifie par le souhait d'assurer l'existence d'un filtre MIMO et RIF qui permette d'inverser le mélange.

3.5.1 Sources i.i.d.

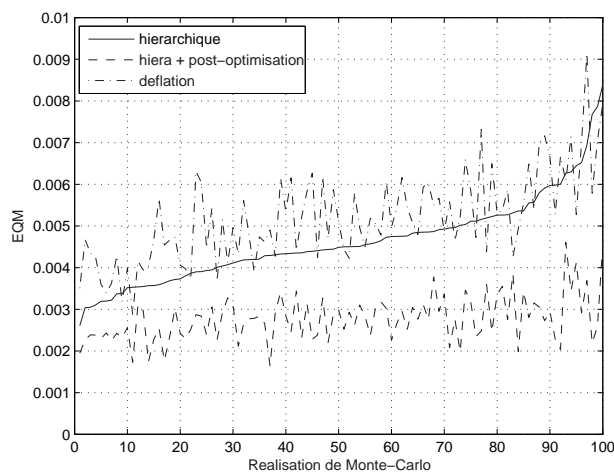
La méthode de séparation déduite des propositions 12 et 14, et dont des éléments de mise en œuvre ont été donnés au paragraphe 3.4 a été considérée sur des signaux i.i.d. Le contraste MISO classique $J(\mathbf{g}) = |\kappa_y(0, 0, 0)|$ correspondant à $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$ et $f(\cdot) = |\cdot|$ a été choisi dans ce cadre. Une comparaison a été menée entre la méthode dite hiérarchique, cette même méthode à laquelle a été ajoutée une étape de post-optimisation sans contrainte de décorrélation et la méthode par déflation.

Méthode séparation	Source 1	Source 2	Source 3
hiérarchique	0.0027	0.0046	0.0066
hiéra. + post-opt.	0.0027	0.0027	0.0029
déflation	0.0027	0.0052	0.0077

TAB. 3.1 – Comparaison des EQM moyennes sur 1000 réalisations données par différentes méthodes de séparation séquentielles. Cas de 3 sources i.i.d. à distribution uniforme, 6 capteurs, et d'un filtre de mélange de longueur 3.



(a) Sources i.i.d. PAM4.



(b) Sources i.i.d. uniformes.

FIG. 3.1 – EQM moyenne sur les sources reconstituées. Comparaison sur 100 réalisations de Monte-Carlo (3 sources, 6 capteurs, filtre de longueur 3, 4096 échantillons). Les réalisations ont été classées par ordre croissant de l'EQM pour la méthode hiérarchique.

La figure 3.1 trace pour 100 réalisations de Monte-Carlo la moyenne des EQM sur les trois sources reconstituées par chacune des méthodes. Ces réalisations ont été classées de sorte à donner aux graphiques une meilleure lisibilité. Il apparaît que les performances de la méthode hiérarchique sont légèrement meilleures que celles de la déflation. L'ajout de l'étape de post-optimisation permet d'améliorer encore la qualité du résultat.

Les valeurs des erreurs quadratiques moyennes (moyennées sur les 1000 réalisations) sont données au niveau du tableau 3.1. Nous constatons alors que l'amélioration des performances est plus particulièrement observable sur la deuxième et surtout troisième source extraite. La méthode par déflation entraîne en effet une accumulation sensible des erreurs au fur et à mesure que les sources sont extraites. Cet inconvénient demeure dans la méthode hiérarchique, mais de façon atténuée. En revanche, le fait de procéder à une post-optimisation permet de rétablir une symétrie de traitement entre la première source extraite et les suivantes. Ainsi, l'erreur sur la troisième source extraite n'est-elle pas sensiblement plus importante que celle sur la première.

3.5.2 Sources non i.i.d.

Le cas de sources non i.i.d. requiert l'introduction d'un critère de séparation insensible aux ambiguïtés de filtrage SISO. Aussi, pour la $P^{\text{ème}}$ source extraite, nous avons considéré le critère suivant, défini à partir de la $P^{\text{ème}}$ ligne du filtre global, notée $\mathbf{g}[z] = (g_1[z], \dots, g_N[z])$:

$$\tau_P := 1 - \frac{\max_{j \geq P} \|g_j\|_j^2}{\sum_j \|g_j\|_j^2} \quad (3.49)$$

Il est immédiat de constater que, pour P quelconque, $0 \leq \tau_P < 1$. La séparation de la $P^{\text{ème}}$ source est réussie lorsque la $P^{\text{ème}}$ ligne du filtre global ne contient qu'une seule composante non nulle. Cette composante doit être de plus distincte des composantes obtenues aux lignes précédentes, que l'on a supposé être les composantes $1, \dots, P-1$: le contraire signifierait que la même source a été extraite plus d'une fois. Ainsi, nous constatons que des valeurs de τ_P proches de zéro correspondent à des extractions de bonne qualité de la $P^{\text{ème}}$ source.

Les résultats donnés par la méthode hiérarchique ont été examinés. En particulier, les valeurs moyennes des critères τ_1 à τ_4 ont été tracées à la figure 3.2 en fonction du nombre d'échantillons disponibles pour des sources ARCH(1) présentées au paragraphe 2.3.3. Nous constatons la validité de la méthode. D'autres résultats dans le cas non i.i.d. accompagnés d'une étude plus approfondie seront donnés à l'occasion de l'étude de l'application à des signaux CPM.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a concerné l'étude des méthodes séquentielles basées sur des contrastes MISO. Après avoir rappelé les notions nécessaires, nous avons obtenu des formes généralisées de fonctions de contraste. Le passage à la séparation MIMO a été obtenu au travers de contraintes supplémentaires ajoutées à l'issue de chaque extraction. Ces contraintes imposent et traduisent une décorrélation entre la source en cours d'extraction et celles précédemment extraites. Les difficultés pratiques de mise en œuvre de la méthode ont également été exposées. Par ailleurs, ce chapitre a été l'occasion d'élargir et de clarifier des résultats relatifs à une étude locale des critères considérés. Outre l'assurance de ne

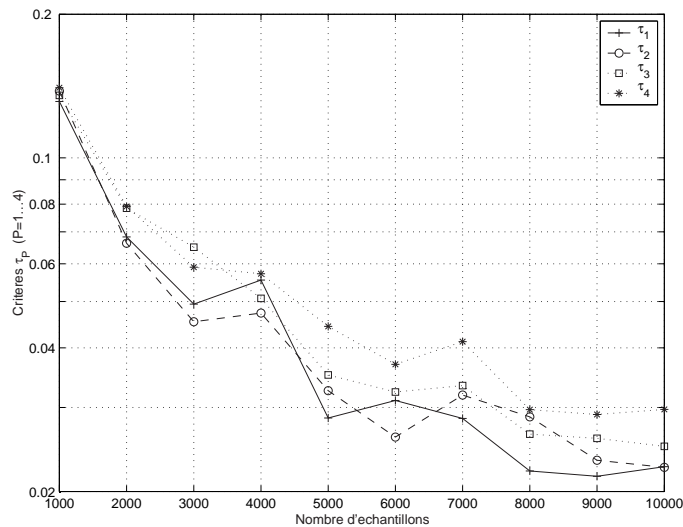


FIG. 3.2 – Séparation de 4 sources de types ARCH(1) : valeur moyenne sur 100 réalisations des critères $\tau_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ en fonction du nombre d'échantillons. Le filtre de mélange comportait 8 capteurs, était de longueur 2 et a été tiré aléatoirement selon une loi gaussienne normalisée à chaque réalisation.

pas obtenir de maxima locaux non séparant, qui était déjà connue dans le cas MISO, nous avons justifié la possibilité d'utiliser une optimisation locale non contrainte pour affiner les résultats et limiter le problème d'accumulation des erreurs.