
Approches conjointes

2.1 Préblanchiment

Dans l'ensemble de ce chapitre sur les approches conjointes, les hypothèses suivantes seront faites sur le bruit et les sources :

H.3 Le bruit $(\mathbf{b}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est gaussien, centré, stationnaire, indépendant des sources. Ses caractéristiques à l'ordre deux sont supposées connues.

H.4 Chacune des sources $(s_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (s_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est temporellement décorrélée (mais non nécessairement i.i.d.) et de puissance unité, *i.e.* :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{E}\{\mathbf{s}(n)\mathbf{s}(n-k)^H\} = \delta_k \mathbf{Id}_N \quad (2.1)$$

Notons que cette dernière hypothèse n'est aucunement restrictive : des sources non blanches à l'ordre deux peuvent être considérées comme provenant d'un filtrage SISO de sources blanches. L'indétermination SISO inhérente à la séparation de sources ne permet pas en général de distinguer ces sources réelles non blanches à l'ordre deux du processus blanc à l'ordre deux qui leur est associé. En d'autres termes, il est possible de passer des sources non décorrélées à leur version décorrélée par un simple blanchiment temporel. Par ailleurs, il existe des catégories de signaux satisfaisant l'hypothèse H.4, parmi lesquels on peut évoquer :

- les signaux de communication après codage correcteur d'erreur [80].
- le cas de signaux obtenus par sous-échantillonnage d'un processus à temps continu linéaire, décorrélé et stationnaire strict : soit en effet $\underline{s}(t)$ un tel signal dont le trispectre est défini par

$$\underline{H}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \underline{H}^*(-\omega_1) \underline{H}(\omega_2) \underline{H}^*(-\omega_3)$$

où \underline{H} est la réponse fréquentielle d'un certain filtre linéaire à temps continu. Après échantillonnage à une période $T > 0$, nous obtenons un processus à temps discret dont le trispectre, par la formule de Poisson, s'écrit :

$$\frac{1}{T^3} \sum_{(l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}^3} \underline{H}\left(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - 2\pi \frac{l_1 + l_2 + l_3}{T}\right) \underline{H}^*\left(-\omega_1 - 2\pi \frac{l_1}{T}\right) \underline{H}\left(\omega_2 + 2\pi \frac{l_2}{T}\right) \underline{H}^*\left(-\omega_3 - 2\pi \frac{l_3}{T}\right).$$

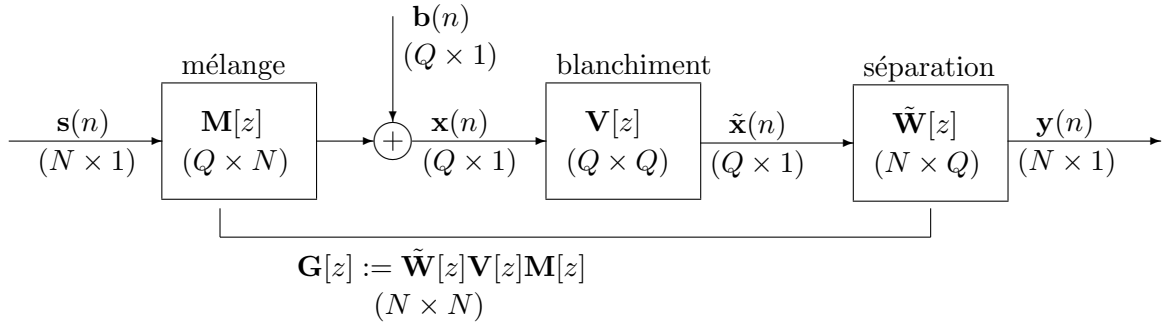
Si H n'est pas à bande limitée (ou à bande limitée de fréquence de coupure supérieure à la fréquence de Nyquist), le processus résultant n'est pas linéaire car l'expression ci dessus ne pourra pas s'écrire sous la forme $H(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)H^*(-\omega_1)H(\omega_2)H^*(-\omega_3)$ où H est une fonction 2π -périodique.

- les signaux CPM (modulation à phase continue) dans le cas particulier d'un indice de modulation $1/2$. Ces signaux serviront plus particulièrement d'exemple d'application dans le chapitre suivant et seront présentés à cette occasion.
- les exemples donnés dans la partie 2.3 (ARCH, volatilité stochastique, ...).

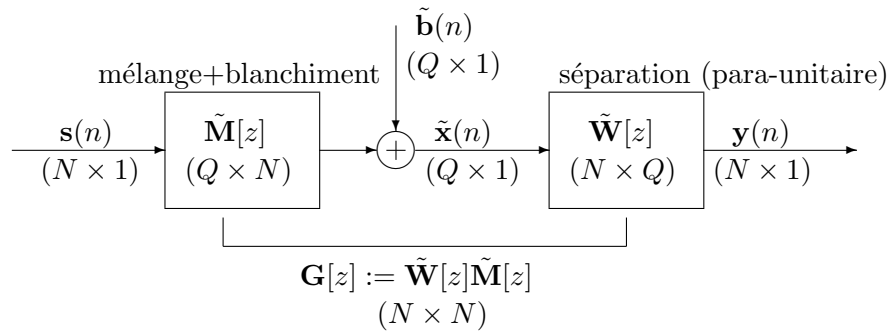
Inspiré par les méthodes d'ICA, les approches conjointes de la séparation de sources procèdent fréquemment en deux étapes : un préblanchiment à l'ordre deux des données précède la recherche d'un filtre séparateur dans un sous-ensemble restreint de filtres. En notant $\mathbf{V}[z]$ un filtre blanchisseur, le filtre séparant se décompose en (voir figure 2.1(a)) :

$$\mathbf{W}[z] = \tilde{\mathbf{W}}[z]\mathbf{V}[z] \quad (2.2)$$

Si l'on note $\tilde{\mathbf{b}}(n) = \mathbf{V}[z]\mathbf{b}(n)$ et $\tilde{\mathbf{M}}[z] = \mathbf{V}[z]\mathbf{M}[z]$, il est alors possible d'étudier de façon équivalente le modèle donné par la figure 2.1(b). L'autocorrélation du bruit étant supposée



(a) Système complet avec préblanchiment



(b) Système équivalent avec mélange para-unitaire

FIG. 2.1 – Blanchiment et filtre para-unitaire.

connue, un filtre blanchisseur est tel que les données blanchies satisfont :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n-k)^H\} - \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{b}}(n)\tilde{\mathbf{b}}(n-k)^H\} = \delta_k \mathbf{Id}_Q \quad (2.3)$$

Or, d'après le calcul élémentaire suivant (où l'on a utilisé H.3 et H.4) :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}(n)\tilde{\mathbf{x}}(n-k)^H\} &= \sum_{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2} \widetilde{\mathbf{M}}(l_1) \mathbb{E}\{\mathbf{s}(n-l_1)\mathbf{s}(n-k-l_2)^H\} \widetilde{\mathbf{M}}(l_2)^H \\
&\quad + \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{M}}(l_1) \mathbb{E}\{\mathbf{s}(n-l_1)\tilde{\mathbf{b}}(n-k)^H\} \\
&\quad + \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{b}}(n)\mathbf{s}(n-k-l_2)^H\} \widetilde{\mathbf{M}}(l_2)^H \\
&\quad + \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{b}}(n)\tilde{\mathbf{b}}(n-k)^H\} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathbf{M}}(l)\widetilde{\mathbf{M}}(l-k)^H + \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{b}}(n)\tilde{\mathbf{b}}(n-k)^H\} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

il apparaît que (2.3) se traduit par une condition sur $\widetilde{\mathbf{M}}[z]$. Rappelons en effet la définition suivante d'un filtre para-unitaire :

Définition 2 *Un filtre $\mathbf{H}[z]$ est dit para-unitaire lorsque l'une des deux conditions équivalentes ci-dessous est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \mathbf{H}[z]\mathbf{H}\left[\frac{1}{z^*}\right]^H &= \mathbf{Id} \\
(ii) \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}(l)\mathbf{H}(l-k)^H &= \delta_k \mathbf{Id} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

D'après cette définition, nous constatons que le blanchiment des données est équivalent à la para-unitarité du filtre $\widetilde{\mathbf{M}}[z]$. Un aspect important est qu'un filtre para-unitaire admet un inverse para-unitaire. Ainsi, il est suffisant de se restreindre à la recherche de $\widetilde{\mathbf{W}}[z]$ dans l'ensemble des filtres para-unitaires.

Il existe des méthodes classiques permettant de réaliser un préblanchiment ; on pourra se reporter à [12] ou [7] pour plus de détails. Nous ne considérerons pas cette étape de la séparation et supposerons qu'elle a été réalisée de façon parfaite. Ainsi, nous nous ramenons au modèle équivalent de la figure 2.1(b) et recherchons le filtre séparant $\widetilde{\mathbf{W}}[z]$ dans l'ensemble des filtres para-unitaires. Afin de ne pas alourdir les notations, nous supprimerons dans la suite de ce chapitre le signe tilde \sim . Nous supposerons de plus que le nombre de capteurs est égal au nombre de sources, c'est-à-dire que $Q = N$. Le modèle supposé correspond alors à celui de départ (figure 1.3) où le filtre de mélange est supposé para-unitaire et ayant autant de sorties que d'entrées. Cette configuration restera valable dans l'ensemble de ce chapitre.

2.2 Généralisation des contrastes

Les approches développées dans cette thèse sont basées sur la notion de fonction de contraste. L'intérêt de ce concept est de ramener le problème de la séparation de sources à un problème d'optimisation : une fonction de contraste —appelée aussi contraste— est un critère qui, par sa maximisation, permet d'obtenir la séparation des sources. La définition d'un contraste peut cependant légèrement différer selon le cadre dans lequel on se place (instantané, convolutif, MIMO, MISO) et les propriétés que l'on souhaite imposer au critère en question (symétrie vis à vis des ambiguïtés de la séparation de sources, ...). La définition que nous adoptons dans ce chapitre sur les approches conjointes est la suivante :

Définition 3 Une fonction de contraste (ou contraste) est une fonction réelle des sorties du système global et qui satisfait les deux conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{C}((\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) \leq \mathcal{C}((\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$,
- (ii) si $\mathcal{C}((\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \mathcal{C}((\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$, alors la séparation des sources est effective, où $(\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est la sortie du système global, résultant d'un mélange par un filtre quelconque d'un tirage du vecteur $(\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de sources indépendantes.

Notons qu'un contraste est une fonction du filtre séparant $\mathbf{W}[z]$, mais que nous pourrions le considérer de façon équivalente comme fonction du filtre global $\mathbf{G}[z]$, ou, par extension, du vecteur des sorties globales $(\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

2.2.1 Une approche fréquentielle

Nous adoptons dans tout ce paragraphe 2.2.1 un point de vue fréquentiel. La matrice de la réponse fréquentielle du filtre de fonction de transfert $\mathbf{M}[z]$ sera notée $\mathbf{M}(\omega)$. Rappelons que nous supposons les observations blanchies et par conséquent $\mathbf{M}[z]$ est para-unitaire, ce qui se traduit sur la réponse fréquentielle par l'unitarité de $\mathbf{M}(\omega)$:

$$\forall \omega \quad \mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}(\omega)^H = \mathbf{Id}_N \quad (2.6)$$

Comme expliqué précédemment, le filtre séparant $\mathbf{W}[z]$ —de réponse fréquentielle $\mathbf{W}(\omega)$ — est recherché dans la classe des filtres para-unitaires. Il en résulte que le filtre global $\mathbf{G}[z]$ —de réponse fréquentielle $\mathbf{G}(\omega)$ — est également para-unitaire. Notons au passage une conséquence du fait que seuls des filtres para-unitaires sont considérés : l'ambiguïté de filtrage scalaire indiquée dans le paragraphe 1.4.1-a) est dans ce cas une ambiguïté de filtrage scalaire *passé-tout* et l'équation (1.8) traduisant le fait que le filtre global est séparant s'écrit :

$$\forall \omega \quad \mathbf{G}(\omega) = \mathbf{P}e^{j\Phi(\omega)} \quad (2.7)$$

où $\Phi(\omega) = \text{Diag}(\phi_1(\omega), \dots, \phi_N(\omega))$ est une matrice diagonale réelle et \mathbf{P} une matrice de permutation. Ce fait apparaîtra dans les preuves et les énoncés établissant la validité des fonctions de contrastes ici introduites.

Nous citons d'abord les idées fondatrices d'une méthode de séparation fréquentielle. Le critère de diagonalisation conjointe introduit à ce propos servira de base à la construction des contrastes ensuite démontrés. Enfin, l'effet d'une discrétisation en fréquences sera considéré.

2.2.1-a) Un critère de diagonalisation conjointe

Ce paragraphe rappelle des idées présentes dans [19] et [20] et qui ont été à l'origine d'un algorithme de séparation de sources dans le cas i.i.d. Le principe est basé sur la diagonalisation conjointe de matrices, ce qui nous amènera à définir le critère (2.12). Cette même expression sera utilisée dans le paragraphe suivant afin de déduire des contrastes fréquentiels valables dans le cas de sources non i.i.d.

Considérons l'inter-trispectre des observations $(x_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ prises sur les capteurs $(i, j, l_1, l_2) \in \{1, \dots, N\}^4$. Ce dernier s'écrit :

$$C_{ijl_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{Z}^3} \text{Cum}\{x_i(n), x_j^*(n + \tau_1), x_{l_1}(n + \tau_2), x_{l_2}^*(n + \tau_3)\} e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \omega_3\tau_3)}. \quad (2.8)$$

L'indépendance et la gaussianité du bruit permet d'éliminer l'influence de ce dernier au cours du calcul. L'inter-trispectre peut alors s'exprimer en fonction du filtre de mélange et du trispectre $\Gamma_p^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ de chacune des sources $(s_p(n))_{n \in \mathbb{Z}, p \in \{1, \dots, N\}}$:

$$C_{ijl_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{p=1}^N \Gamma_p^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) M_{ip}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) M_{jp}^*(-\omega_1) M_{l_1p}(\omega_2) M_{l_2p}^*(-\omega_3). \quad (2.9)$$

Si l'on définit $\mathbf{C}_{l_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la matrice dont le (i, j) -ème élément vaut $C_{ijl_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et la matrice diagonale

$$\mathbf{D}_{l_1l_2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \text{Diag}\left(\{\Gamma_p^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) M_{l_1p}(\omega_2) M_{l_2p}^*(-\omega_3)\}_{p=1, \dots, N}\right), \quad (2.10)$$

l'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$\mathbf{C}_{l_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathbf{M}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \mathbf{D}_{l_1l_2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mathbf{M}(-\omega_1)^H. \quad (2.11)$$

Le problème de la séparation de sources peut alors être abordé de la façon suivante : pour un couple de fréquences (ω_2, ω_3) , on cherche $\mathbf{W}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ et $\mathbf{W}(-\omega_1)^H$, inverses estimées respectives des matrices unitaires $\mathbf{M}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ et $\mathbf{M}(-\omega_1)^H$, qui mènent à une diagonalisation conjointe (ou plus précisément une décomposition conjointe en valeurs singulières) de l'ensemble des matrices $(\mathbf{C}_{l_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3))_{l_1, l_2}$. Ceci est l'idée à la base d'un algorithme de séparation [20], valable uniquement dans le cas de sources i.i.d. Plus précisément, [20] suggère pour tout ω_1 , de rechercher $\mathbf{W}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ et $\mathbf{W}(-\omega_1)^H$ comme étant les matrices unitaires qui maximisent :

$$\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \sum_{l_1, l_2} \text{on}(\mathbf{W}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \mathbf{C}_{l_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mathbf{W}(-\omega_1)^H) \quad (2.12)$$

où $\text{on}(\mathbf{M})$ représente la somme des modules au carré des termes sur la diagonale de la matrice \mathbf{M} et (ω_2, ω_3) est choisi de façon appropriée.

Nous n'irons pas plus loin dans l'approche développée dans [20] mais la fonction \mathcal{I} va jouer un rôle clé dans la déduction des contrastes fréquentiels qui suivent. Notons que $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une fonction de $\mathbf{W}(\omega)$, c'est-à-dire du système séparant. Par souci de concision des notations, nous ne rendrons pas explicite cette dépendance ni pour $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, ni pour les autres critères qui seront déduits de $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

La propriété suivante de $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sera utilisée par la suite dans la démonstration de la validité des contrastes proposés.

Lemme 1 *On a :*

$$\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i,j} |\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 |G_{ij}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)|^2 |G_{ij}(-\omega_1)|^2 \quad (2.13)$$

$$= \sum_{il_1l_2} |\tilde{C}_{il_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 \quad (2.14)$$

où $(\tilde{C}_{il_1l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3))_{i, l_1, l_2}$ correspond à l'inter-trispectre des sorties du système global. De plus, nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \leq \sum_j |\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2. \quad (2.15)$$

Preuve: D'après (2.11), (2.12) et sachant que $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{W}(\omega)\mathbf{M}(\omega)$ pour tout ω , nous avons

$$\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{l_1, l_2} \text{on}(\mathbf{G}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\mathbf{D}_{l_1 l_2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\mathbf{G}(-\omega_1)^H) \quad (2.16)$$

et

$$\begin{aligned} \text{on}(\mathbf{G}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\mathbf{D}_{l_1 l_2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\mathbf{G}(-\omega_1)^H) = \\ \sum_i \left| \sum_j G_{ij}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)M_{l_1 j}(\omega_2)M_{l_2 j}^*(-\omega_3)G_{ij}^*(-\omega_1) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

On obtient par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i, j_1, j_2} \left(\Gamma_{j_1}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\Gamma_{j_2}^{4*}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)G_{ij_1}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)G_{ij_2}^*(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right. \\ \left. G_{ij_1}^*(-\omega_1)G_{ij_2}(-\omega_1) \left(\sum_{l_1} M_{l_1 j_1}(\omega_2)M_{l_1 j_2}^*(\omega_2) \right) \left(\sum_{l_2} M_{l_2 j_1}^*(-\omega_3)M_{l_2 j_2}(-\omega_3) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

En utilisant le fait que les réponses fréquentielles considérées sont unitaires ($\forall \omega, \mathbf{M}(\omega)\mathbf{M}(\omega)^H = \mathbf{Id}$), il vient :

$$\sum_{l_1} M_{l_1 j_1}(\omega_2)M_{l_1 j_2}^*(\omega_2) = \sum_{l_2} M_{l_2 j_1}^*(-\omega_3)M_{l_2 j_2}(-\omega_3) = \delta_{j_1 - j_2} \quad (2.19)$$

ce qui donne immédiatement la première égalité de (2.14). De plus on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i l_1 l_2} |\tilde{C}_{i l_1 l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 = \sum_{i, j_1, j_2} \left(\Gamma_{j_1}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\Gamma_{j_2}^{4*}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)G_{ij_1}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right. \\ \left. G_{ij_2}^*(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)G_{ij_1}^*(-\omega_1)G_{ij_2}(-\omega_1) \right. \\ \left. \left(\sum_{l_1} G_{l_1 j_1}(\omega_2)G_{l_1 j_2}^*(\omega_2) \right) \left(\sum_{l_2} G_{l_2 j_1}^*(-\omega_3)G_{l_2 j_2}(-\omega_3) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette formule étant similaire à (2.18), en procédant comme précédemment, on montre qu'elle est égale à l'expression (2.14) trouvée pour $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Maintenant, il découle de la para-unitarité de $\mathbf{G}(\omega)$ que pour tout ω et j , $\sum_i |G_{ij}(\omega)|^2 = 1$, ce qui entraîne que pour tout i , $|G_{ij}(\omega)| \leq 1$. Ceci mène à :

$$\sum_i |G_{ij}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)|^2 |G_{ij}(-\omega_1)|^2 \leq \sum_i |G_{ij}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)|^2 = 1. \quad (2.21)$$

Cette inégalité, combinée avec (2.14) donne (2.15). ■

Remarque 1: Le critère $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ne réalise pas un contraste. En effet, par des raisonnements similaires à ceux qui seront donnés dans la démonstration de la proposition 1, on obtient que $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est maximum uniquement dans le cas où le système global «sépare», mais pour seulement un couple de fréquences. Ceci n'est pas suffisant pour assurer la propriété de séparation et dans les paragraphes suivants, nous serons donc amenés à intégrer ce critère sur différents ensembles de fréquences.

D'autre part, l'équation (2.14) montre de façon simple que, en général, on ne peut espérer identifier la phase du système à partir de la seule maximisation de $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, car la valeur de ce critère ne dépend que des modules de $G_{ij}(-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$ et $G_{ij}(-\omega_1)$. Le lemme montre aussi que le critère optimisé ne dépend en fait pas des valeurs $M_{l_1 i}(\omega_2)M_{l_2 i}^*(-\omega_3)$ qui apparaissent dans la définition de $\mathbf{D}_{l_1 l_2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Ces valeurs sont cependant importantes dans la méthode décrite dans [20] afin de résoudre l'ambiguïté de permutation.

Remarque 2: Il est intéressant de noter que si les quantités dans (2.14) ne dépendaient pas de la fréquence, ce qui reviendrait à considérer des mélanges instantanés de sources i.i.d., le critère considéré se réduirait à celui utilisé dans l'algorithme de séparation JADE [15]. Cela signifie que notre approche étend le travail de [15] au cas convolutif.

2.2.1-b) Contrastes fréquentiels

Dans ce paragraphe, nous proposons de nouveaux contrastes et démontrons leur validité. Ces derniers sont définis à partir du critère \mathcal{I} défini en (2.12). À ce titre, ils font intervenir les trispectres des sources et des sorties globales (d'après (2.14)) et peuvent donc être qualifiés de contrastes fréquentiels. Une hypothèse technique est nécessaire au préalable :

H.5 Pour presque tout $(\omega, \nu) \in [0, 2\pi]^2$, il existe $\alpha_{\omega, \nu} \in [-2\pi, 2\pi[$ tel que, pour au moins $N - 1$ sources :

$$\Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) \neq 0. \quad (2.22)$$

L'hypothèse adoptée ici est assez faible dans la mesure où elle nous permet de considérer des sources non i.i.d. Pour que cette hypothèse soit vérifiée, au plus une source peut être gaussienne.

Des choix possibles pour $\alpha_{\omega, \nu}$ sont $\alpha_{\omega, \nu} = \nu$, $\alpha_{\omega, \nu} = -\nu$ et $\alpha_{\omega, \nu} = 0$. Pour ces choix, seules des tranches 2D simples du trispectre sont mises en jeu.

Nous allons maintenant prouver que

$$\bar{\mathcal{I}} := \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) d\omega d\nu \quad (2.23)$$

est un contraste, et ainsi, sa maximisation permet de séparer les sources à un filtrage scalaire passe-tout près de chacune d'entre elles.

Proposition 1 *On a la majoration :*

$$\bar{\mathcal{I}} \leq \sum_j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) \right|^2 d\omega d\nu =: \bar{\mathcal{I}}_{\max} \quad (2.24)$$

Sous l'hypothèse H.5, la borne supérieure $\bar{\mathcal{I}}_{\max}$ est atteinte si et seulement si la séparation est réalisée, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{G}(\omega)$ vérifie (2.7).

Preuve: De la formule (2.15) dans le lemme 1 on déduit que :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) d\omega d\nu \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_j \left| \Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) \right|^2 d\omega d\nu \quad (2.25)$$

ce qui établit la majoration (2.24).

De plus, ce majorant est atteint si et seulement si, pour presque tout $(\omega, \nu) \in [0, 2\pi]^2$, il y a égalité entre les expressions intégrées dans chaque membre ci-dessus. D'après la preuve du lemme 1 (équation (2.21) notamment) il est alors clair que ce majorant est atteint si et seulement si, pour tout j et presque tout $(\omega, \nu) \in [0, 2\pi]^2$,

$$\left| \Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) \right|^2 \left(1 - \sum_i |G_{ij}(-\omega - \nu)|^2 |G_{ij}(-\omega)|^2\right) = 0. \quad (2.26)$$

Soit maintenant j un indice quelconque tel que (2.22) soit vérifiée. On a alors pour presque tout $(\omega, \nu) \in [0, 2\pi]^2$,

$$\sum_i |G_{ij}(-\omega - \nu)|^2 |G_{ij}(-\omega)|^2 = 1. \quad (2.27)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{1}{4\pi^2} \sum_i \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{ij}(-\omega - \nu)|^2 |G_{ij}(-\omega)|^2 d\omega d\nu = 1. \quad (2.28)$$

Un simple changement de variable donne par ailleurs :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{ij}(-\omega - \nu)|^2 d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{ij}(-\omega)|^2 d\omega =: \|G_{ij}\|^2 \quad (2.29)$$

et (2.28) est équivalente à

$$\sum_i \|G_{ij}\|^4 = 1. \quad (2.30)$$

De plus, l'hypothèse d'unitarité entraîne que

$$\forall j, \quad \sum_i \|G_{ij}\|^2 = 1 \quad (2.31)$$

où, évidemment, $\|G_{ij}\| \leq 1$. Si pour tout i , $\|G_{ij}\| < 1$, nous aurions $\sum_i \|G_{ij}\|^4 < 1$. Ceci montre que l'égalité ne peut arriver dans (2.24) que s'il existe un indice i_j tel que

$$\|G_{i_j j}\| = 1. \quad (2.32)$$

En raison de (2.31), ceci entraîne que pour tout $i \neq i_j$, $\|G_{ij}\| = 0$, i.e. $G_{ij}(\omega) = 0$, pour presque tout $\omega \in [0, 2\pi[$. En procédant de même pour toutes les (au moins $N - 1$) valeurs de j telles que (2.22) soit vérifiée, on établit que sur la j ème colonne correspondante de $\mathbf{G}(\omega)$, il n'y a qu'un seul élément non nul, sur la ligne i_j . Comme la condition d'unitarité introduit aussi la contrainte

$$\forall i, \quad \sum_j \|G_{ij}\|^2 = 1 \quad (2.33)$$

et que (2.32) est satisfaite, deux de ces éléments non nuls de $\mathbf{G}(\omega)$ ne peuvent être situés sur la même ligne.

Quand (2.22) n'est pas vérifiée pour l'un des indices, disons j_0 , on déduit facilement qu'il n'y a qu'un seul élément non nul sur la j_0 ème colonne de $\mathbf{G}(\omega)$ et qu'il est situé sur la ligne restant vacante.

En d'autres termes, on a prouvé que $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}(\omega)$ où \mathbf{P} est une permutation et $\mathbf{\Lambda}(\omega)$ est une matrice diagonale. Comme $\mathbf{G}(\omega)$ est unitaire, les éléments diagonaux de $\mathbf{\Lambda}(\omega)$ sont nécessairement de module un, ce qui achève de montrer que $\mathbf{G}(\omega)$ satisfait (2.7). ■

Sous une condition légèrement plus restrictive, une autre forme de contraste peut être obtenue :

Proposition 2 *Supposons que :*

H.6 *Pour presque tout $(\omega, \nu) \in [0, 2\pi]^2$, il existe un ensemble $\mathcal{E}(\omega, \nu) \subset [-2\pi, 2\pi[$ tel que, pour au moins $N - 1$ sources :*

$$\int_{\mathcal{E}(\omega, \nu)} \left| \Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right) \right|^2 d\alpha \neq 0. \quad (2.34)$$

Alors, on a la majoration

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{E}} &:= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathcal{E}(\omega, \nu)} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right) d\alpha \right) d\omega d\nu \\ &\leq \sum_j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathcal{E}(\omega, \nu)} |\Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right)|^2 d\alpha \right) d\omega d\nu \end{aligned} \quad (2.35)$$

et, de plus, $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ est un contraste.

La preuve de ce résultat est omise car elle est très similaire à la preuve de la proposition 1.

Remarquons que (2.34) signifie qu'il existe un ensemble $\mathcal{F}_j(\omega, \nu)$ inclus dans $\mathcal{E}(\omega, \nu)$ et de mesure non nulle tel que

$$\forall \alpha \in \mathcal{F}_j(\omega, \nu), \quad \Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right) \neq 0. \quad (2.36)$$

Par conséquent, si H.6 est vérifiée, l'hypothèse H.5 l'est clairement aussi. Si de plus pour tout j , $\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est continue sur $[-\pi, \pi]^3$, nous avons même équivalence entre les deux hypothèses. Dans ce cas en effet, (2.22) implique que (2.34) est satisfaite.

En particulier, si les cumulants des sources forment une famille sommable et si, pour tout j , $\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une fonction rationnelle en $(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}, e^{i\omega_3})$, les conditions H.5 et H.6 sont équivalentes à la condition suivante :

H.7 Pour $N - 1$ sources au moins, il existe des retards temporels $(\tau_{1j}, \tau_{2j}, \tau_{3j})$ tels que

$$\text{Cum}\{s_j(n), s_j^*(n + \tau_{1j}), s_j(n + \tau_{2j}), s_j^*(n + \tau_{3j})\} \neq 0. \quad (2.37)$$

Preuve: La sommabilité de la famille de cumulants des sources assure la continuité de $\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $[-\pi, \pi]^3$ et ainsi l'équivalence entre H.5 et H.6. Nous démontrons par conséquent uniquement l'équivalence entre H.5 et la condition citée ci-dessus.

Si nous supposons (2.22), $\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ n'est pas la fonction identiquement nulle et par suite (2.37) est vérifiée.

Réciproquement, supposons H.5 fautive : il existe alors $\mathcal{N} \subset [0, 2\pi]^2$ de mesure non nulle tel que, pour tout $(\omega, \nu) \in \mathcal{N}$ et pour tout $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$, au moins deux sources vérifient :

$$\Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right) = 0. \quad (2.38)$$

Ainsi, il existe un ensemble de mesure non nulle qui annule la fonction ci-dessus pour deux indices j distincts (au moins). Or, $\Gamma_j^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ étant une fonction rationnelle en $(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}, e^{i\omega_3})$, $\Gamma_j^4\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right)$ est une fraction rationnelle en $(e^{i\omega}, e^{i\frac{\nu}{2}}, e^{i\frac{\alpha}{2}})$ et comme (2.38) est vérifiée sur un ensemble de mesure non nulle, cette fraction rationnelle est nulle. Donc Γ_j^4 est identiquement nulle et (2.37) n'est pas vérifié, ce qui achève la démonstration. ■

Il est également clair que lorsque $\mathcal{E}(\omega, \nu)$ est un sous ensemble fixé \mathcal{E} de $[-2\pi, 2\pi[$ (indépendant de (ω, ν)), on a

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{I}}_{\alpha} d\alpha \quad (2.39)$$

où $\bar{\mathcal{I}}_{\alpha}$ est un critère similaire à (2.23). Un exemple de tel contraste est considéré dans le paragraphe suivant.

Intégration sur tout l'espace fréquentiel Un critère qui pourrait apparaître plus intuitif est donné par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (2.40)$$

En utilisant les 2π -périodicités de $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, et après quelques changements de variables, l'intégrale ci-dessus peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \int_{-2\pi+|\nu|}^{2\pi-|\nu|} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu+\alpha}{2}, \frac{\nu-\alpha}{2}\right) d\alpha d\nu d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-2\pi+\nu}^{2\pi-\nu} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu+\alpha}{2}, \frac{\nu-\alpha}{2}\right) d\alpha d\nu d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu+\alpha-2\pi}{2}, \frac{\nu-\alpha-2\pi}{2}\right) d\alpha d\nu d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-2\pi+\nu}^{2\pi+\nu} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu+\alpha}{2}, \frac{\nu-\alpha}{2}\right) d\alpha d\nu d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu+\alpha}{2}, \frac{\nu-\alpha}{2}\right) d\alpha d\nu d\omega. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Cette expression est égale à $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}/2$ quand $\mathcal{E}(\omega, \nu) = [-2\pi, 2\pi[$. En utilisant (2.14), il en découle :

$$\frac{1}{2} \mathcal{I}_{[-2\pi, 2\pi[} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (2.42)$$

$$= \sum_{i_1 l_2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{C}_{i_1 l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (2.43)$$

En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient également une expression de ce critère dans le domaine temporel :

$$\frac{1}{16\pi^3} \mathcal{I}_{[-2\pi, 2\pi[} = \sum_{i_1 l_2} \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n + \tau_1), y_{l_1}(n + \tau_2), y_{l_2}^*(n + \tau_3)\}|^2. \quad (2.44)$$

Sources i.i.d. Lorsque les sources sont i.i.d., l'hypothèse H.5 se réduit à l'hypothèse plus habituelle : au plus l'un des cumulants d'ordre quatre des sources est nul. De plus, d'après (2.13), $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ devient une fonction des deux variables ω_1 et $\omega_2 + \omega_3$ dans ce cas. Par conséquent, les contrastes $\bar{\mathcal{I}}$ ne dépendent plus du choix de $\alpha_{\omega, \nu}$, qui peut être fait arbitrairement. Enfin, on a

$$\bar{\mathcal{I}} = \frac{1}{4\pi} \mathcal{I}_{[-2\pi, 2\pi[}. \quad (2.45)$$

Ceci montre que le critère correspondant est de nouveau équivalent à un contraste basé sur les intercumulants (2.44). Dans ce cas, il est facile de montrer que (2.24) devient

$$\frac{1}{4\pi^2} \bar{\mathcal{I}} = \sum_j \left(|\gamma_j^4|^2 \sum_i \|G_{ij}\|^4 \right) \leq \sum_j |\gamma_j^4|^2. \quad (2.46)$$

où $\gamma_j^4 := \text{Cum}\{s_j(n), s_j^*(n), s_j(n), s_j^*(n)\}$ est l'autocumulant d'ordre 4 (et sans aucun retard) de la $j^{\text{ème}}$ source.

On peut noter que, contrairement à l'approche de [20], la séparation peut être obtenue en maximisant la fonction de contraste proposée, sans supposer que les valeurs $|M_{l_1 i}(\omega_2)M_{l_2 i}(-\omega_3)|$ sont distinctes. A cet égard, cette approche ne fait pas jouer un rôle critique à certaines valeurs de ω_2 et ω_3 .

2.2.1-c) Contrastes discrétisés

L'utilisation pratique et l'estimation numérique des contrastes fréquentiels introduits précédemment peuvent être délicates. Aussi, nous proposons d'étudier dans ce paragraphe leurs versions équivalentes après discrétisation des fréquences.

Considérons le critère suivant :

$$\bar{\mathcal{I}}^{(K)} := \frac{4\pi^2}{K^2} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{K-1} \mathcal{I}\left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r_{p,q}}}{2}, \frac{\nu_{q-r_{p,q}}}{2}\right) \quad (2.47)$$

où pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, $\nu_p = 2\pi p/K$ et pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$, $r_{p,q} \in \{-K+1, \dots, K-1\}$.

$\bar{\mathcal{I}}^{(K)}$ est obtenu à partir de l'équation (2.23) après discrétisation sur $K \in \mathbb{N}^*$ points fréquentiels. Pour clarifier le liens qui existe entre $\bar{\mathcal{I}}^{(K)}$ et le critère $\bar{\mathcal{I}}$ dans (2.23), supposons que $\alpha_{\omega, \nu} = 2\pi a_{\omega, \nu}/P$ où $P \in \mathbb{N}^*$ et $a_{\omega, \nu} \in \{-P+1, \dots, P-1\}$. Supposons aussi que la fonction

$$(\omega, \nu) \mapsto \mathcal{I}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) \quad (2.48)$$

est intégrable au sens de Riemann. Alors, en choisissant $K = kP$ avec $k \in \mathbb{N}$ et, pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$, $r_{p,q} = k a_{\nu_p, \nu_q}$, on obtient directement : $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{I}}^{(K)} = \bar{\mathcal{I}}$.

Nous allons étudier maintenant ce qui se passe lorsque nous ne sommes pas dans les conditions asymptotiques. L'hypothèse H.5 doit d'abord modifiée comme suit :

H.8 Pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$, il existe $r_{p,q} \in \{-K+1, \dots, K-1\}$ tel que, pour au moins $N-1$ sources :

$$\Gamma_j^4\left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r_{p,q}}}{2}, \frac{\nu_{q-r_{p,q}}}{2}\right) \neq 0. \quad (2.49)$$

Nous pouvons alors donner le résultat suivant, qui peut être vu comme la forme équivalente de la proposition 1 dans le cas discrétisé :

Proposition 3 *Sous l'hypothèse H.8, la borne supérieure de $\bar{\mathcal{I}}^{(K)}$ est atteinte si et seulement si, pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, $\mathbf{G}(\nu_p) = \mathbf{P}^{(K)} e^{i\Phi_p^{(K)}}$, où $\mathbf{P}^{(K)}$ est une matrice de permutation et où, pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, $\Phi_p^{(K)}$ est une matrice diagonale réelle. De plus, si le système global a pour réponse impulsionnelle $(g_{ij}(k))_k$ de longueur finie, inférieure ou égale à un entier K , ce que l'on note¹ :*

$$g_{ij}(k) = 0 \quad \text{pour } k < 0 \text{ ou } k \geq K \quad (2.50)$$

la borne supérieure est atteinte si et seulement si la séparation est réalisée. On a alors pour tout ω , $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{P} e^{i(\Phi + \mathbf{D}\omega)}$ où \mathbf{P} est une matrice de permutation, Φ est une matrice diagonale réelle et \mathbf{D} est une matrice diagonale à éléments entiers.

¹L'extension au cas non causal RIF est immédiate.

Preuve: Nous allons procéder de manière similaire à la preuve de la proposition 1. D'après (2.15),

$$\bar{\mathcal{I}}^{(K)} \leq \frac{4\pi^2}{K^2} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{K-1} \sum_j \left| \Gamma_j^4 \left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r_{p,q}}}{2}, \frac{\nu_{q-r_{p,q}}}{2} \right) \right|^2 \quad (2.51)$$

et la borne supérieure est atteinte si et seulement si, pour tout j tel que (2.49) soit vérifiée et pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$,

$$\sum_i |G_{ij}(-\nu_p - \nu_q)|^2 |G_{ij}(-\nu_p)|^2 = 1. \quad (2.52)$$

En utilisant l'égalité de Parseval (pour la TFD), ceci mène à

$$\sum_i \left| \sum_{k=0}^{K-1} |g_{ij}^{(K)}(k)|^2 \right|^2 = 1, \quad (2.53)$$

où $(g_{ij}^{(K)}(k))_{0 \leq k < K}$ correspond à la TFD inverse de $(G_{ij}(\nu_p))_{0 \leq p < K}$ i.e. à une version périodisée de la (i, j) ème réponse impulsionnelle globale $(g_{ij}(k))_k$:

$$g_{ij}^{(K)}(k) := \sum_p g_{ij}(k + pK). \quad (2.54)$$

De plus le fait que, pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, la matrice $\mathbf{G}(\nu_p)$ soit une matrice unitaire introduit les contraintes :

$$\forall j, \quad \sum_i \sum_{k=0}^{K-1} |g_{ij}^{(K)}(k)|^2 = 1, \quad (2.55)$$

$$\forall i, \quad \sum_j \sum_{k=0}^{K-1} |g_{ij}^{(K)}(k)|^2 = 1. \quad (2.56)$$

En utilisant les mêmes arguments qu'à la fin de la preuve de la proposition 1, ceci nous permet de conclure que $\mathbf{G}(\nu_p)$ est de la forme $\mathbf{P}^{(K)} e^{i\Phi_p^{(K)}}$.

Sous l'hypothèse (2.50), $(g_{ij}(k))_k$ et sa version périodisée sont identiques pour $k \in \{0, \dots, K-1\}$ (c'est-à-dire $g_{ij}^{(K)}(k) = g_{ij}(k), \forall k \in \{0, \dots, K-1\}$) et par conséquent, pour tout (i, j) fixé dans $\{0, \dots, N-1\}^2$, nous avons l'équivalence :

$$\left(\forall p \in \{0, \dots, K-1\}, \quad G_{i,j}(\nu_p) = 0 \right) \iff \left(\forall k \in \{0, \dots, K-1\}, \quad g_{i,j}(k) = 0 \right). \quad (2.57)$$

Ceci signifie que $\bar{\mathcal{I}}^{(K)}$ est maximal si et seulement si la séparation est réalisée. De plus, comme le système global a été supposé RIF, l'indétermination passe-tout se réduit à une indétermination de phase et de retard (voir paragraphe 2.4.1-b)). ■

Il est également possible de définir une version discrétisée de $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)} := \frac{8\pi^3}{K^3} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{K-1} \sum_{r \in \mathcal{E}_{p,q}^K} \mathcal{I} \left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r}}{2}, \frac{\nu_{q-r}}{2} \right) \quad (2.58)$$

où $\mathcal{E}_{p,q}^K \subset \{-K+1, \dots, K-1\}$. Des résultats analogues à ceux obtenus pour le critère précédent s'appliquent alors. On peut en particulier facilement démontrer :

Proposition 4 *Supposons :*

H.9 Pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$, il existe un ensemble $\mathcal{E}_{p,q}^K \subset \{-K+1, \dots, K-1\}$ tel que, pour au moins $N-1$ sources,

$$\sum_{r \in \mathcal{E}_{p,q}^K} \left| \Gamma_j^4 \left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r}}{2}, \frac{\nu_{q-r}}{2} \right) \right|^2 \neq 0. \quad (2.59)$$

Sous l'hypothèse H.9, la borne supérieure de $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)}$ est atteinte si et seulement si, pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, $\mathbf{G}(\nu_p) = \mathbf{P}^{(K)} e^{i\Phi_p^{(K)}}$, où $\mathbf{P}^{(K)}$ est une matrice de permutation et, pour tout $p \in \{0, \dots, K-1\}$, $\Phi_p^{(K)}$ est une matrice diagonale réelle.

De plus, si le système global a pour réponse impulsionnelle $(g_{ij}(k))_k$ de longueur finie inférieure ou égale à K , la borne supérieure est atteinte si et seulement si pour tout ω , $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{P} e^{i(\Phi + \mathbf{D}\omega)}$.

Il est intéressant de remarquer que la proposition 3 est en fait un cas particulier de la proposition 4 dans la mesure où nous avons :

$$\bar{\mathcal{I}}^{(K)} = \frac{K}{2\pi} \mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)} \quad (2.60)$$

quand, pour tout $(p, q) \in \{0, \dots, K-1\}^2$, $\mathcal{E}_{p,q}^K$ se réduit au singleton $\{r_{p,q}\}$. Ainsi, après discrétisation, $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)}$ apparaît comme la forme la plus générale de contraste fréquentiel que l'on peut considérer.

Des commentaires supplémentaires peuvent être faits à propos de l'hypothèse (2.50). En pratique, la connaissance *a priori* que nous pouvons avoir est que le système mélangeant para-unitaire a une réponse impulsionnelle de longueur finie inférieure ou égale à L . Ainsi, ses sorties peuvent être séparées en utilisant un système à réponse impulsionnelle finie, dont la réponse impulsionnelle est de la même longueur maximale et le système global résultant vérifie alors (2.50) avec $K = 2L - 1$. La difficulté principale dans ce cas est de trouver une paramétrisation des matrices $\mathbf{G}(\nu_p)$, $p \in \{0, \dots, K-1\}$ cohérente avec à la fois les hypothèses de réponse impulsionnelle finie et de para-unitarité. Nous verrons dans la partie 2.4.1, qu'une possibilité pour cela est de considérer une représentation de l'inverse estimé du système mélangeant par une structure en treillis sans perte.

2.2.2 Retour sur les contrastes temporels

2.2.2-a) Généralisation de contrastes connus

Les contrastes précédents requièrent l'estimation de nombreux cumulants croisés, comme on peut le voir au travers de l'équation (2.44), par exemple. De ce fait, il faut s'attendre à des performances limitées au niveau de la qualité de l'estimation statistique. De plus, le calcul d'un critère mettant en jeu de nombreux cumulants peut représenter une charge de calcul importante. Pour faire face à ces difficultés, nous adoptons la même approche que dans [90] et nous déduisons des contrastes qui demeurent valables même dans le cas non i.i.d. Cette approche est basée sur la propriété suivante [69, 90] :

Propriété 1 (majoration d'un contraste) Soit \mathcal{C}_1 une fonction réelle des sorties du système global et soit \mathcal{C}_2 un contraste. Si les conditions suivantes sont réunies :

- (i) pour tout signal source $(\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ dont les composantes sont indépendantes : $\mathcal{C}_1((\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) = \mathcal{C}_2((\mathbf{s}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$,

(ii) pour toutes les sorties globales $(\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ possibles : $\mathcal{C}_1((\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}) \leq \mathcal{C}_2((\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}})$, alors, \mathcal{C}_1 est un contraste.

De manière similaire à l'expression de $\mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ dans le lemme 1, définissons :

$$\mathcal{J}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) := \sum_{i l_1 l_2} \eta_{i l_1 l_2} |\tilde{\mathcal{C}}_{i l_1 l_2}^4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|^2 \quad (2.61)$$

où, les coefficients de pondération $\eta_{i l_1 l_2}$ sont définis par :

$$\forall (i, l_1, l_2) \in \{1, \dots, N\}^3 \quad \eta_{i l_1 l_2} \begin{cases} = 1 & \text{quand } i = l_1 = l_2 \\ \leq 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.62)$$

Par analogie avec (2.23), nous considérons maintenant :

$$\bar{\mathcal{J}} := \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{J}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha_{\omega, \nu}}{2}, \frac{\nu - \alpha_{\omega, \nu}}{2}\right) d\omega d\nu. \quad (2.63)$$

D'après (2.14), nous avons $\mathcal{J}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \leq \mathcal{I}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ et par conséquent $\bar{\mathcal{J}} \leq \bar{\mathcal{I}}$. De plus, lorsque les sorties du système global sont égales aux sources à une permutation et un filtrage passe-tout près, les termes dans (2.61) et (2.14) pour lesquels l'un des indices i, l_1, l_2 diffère des deux autres, s'annulent. Par conséquent, $\bar{\mathcal{J}}$ atteint la valeur maximale de $\bar{\mathcal{I}}$ et dans ce cas : $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}_{\max}$. En invoquant la propriété 1, nous pouvons alors conclure :

Proposition 5 *Sous l'hypothèse H.5, $\bar{\mathcal{J}}$ est un contraste.*

En utilisant les mêmes arguments, on montre que :

Proposition 6 *Sous l'hypothèse H.6,*

$$\mathcal{J}_{\mathcal{E}} := \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathcal{E}(\omega, \nu)} \mathcal{J}\left(\omega, \frac{\nu + \alpha}{2}, \frac{\nu - \alpha}{2}\right) d\alpha \right) d\omega d\nu \quad (2.64)$$

est un contraste.

Le choix des coefficients de pondération $\eta_{i l_1 l_2}$ offre toute une gamme de contrastes possibles. Cependant, il semble judicieux de fixer à zéro certains des coefficients de pondération : les critères obtenus ont alors moins de termes et présentent donc une expression plus simple que celle de $\bar{\mathcal{I}}$ ou $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ correspondante. Comme premier cas particulier, on peut choisir :

$$\eta_{i l_1 l_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } l_1 = l_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.65)$$

En appliquant l'égalité de Parseval, on a alors

$$\frac{1}{16\pi^3} \mathcal{J}_{[-2\pi, 2\pi]} = \sum_{i l} \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n + \tau_1), y_l(n + \tau_2), y_l^*(n + \tau_3)\}|^2. \quad (2.66)$$

Cette expression nous rappelle un contraste introduit dans [67] pour les mélanges instantanés et dans [90] pour le cas convolutif i.i.d. Un autre choix possible pour les coefficients de pondération est

$$\eta_{i l_1 l_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } l_1 = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Le contraste s'écrit alors :

$$\frac{1}{16\pi^3} \mathcal{J}_{[-2\pi, 2\pi[} = \sum_{il} \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n + \tau_1), y_i(n + \tau_2), y_i^*(n + \tau_3)\}|^2, \quad (2.68)$$

qui peut être vu comme une extension du contraste dans [58] au cas convolutif. Enfin, il nous faut mentionner la possibilité suivante :

$$\eta_{il_1 l_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } l_1 = l_2 = i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.69)$$

qui mène à l'expression la plus simple du contraste :

$$\frac{1}{16\pi^3} \mathcal{J}_{[-2\pi, 2\pi[} = \sum_i \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3} |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n + \tau_1), y_i(n + \tau_2), y_i^*(n + \tau_3)\}|^2. \quad (2.70)$$

Cette équation est la plus simple expression connue d'un contraste temporel, basé sur des cumulants d'ordre quatre, et valable de plus dans le cas général de signaux non i.i.d. (i.e. sans aucune hypothèse sur les sources en dehors de leur indépendance mutuelle). Elle a déjà également été obtenue par Liu et Inouye par une approche entièrement temporelle [60]. En raison de la somme infinie sur τ_1, τ_2, τ_3 , ce contraste demeure cependant délicat à utiliser, tout comme l'étaient les contrastes fréquentiels.

2.2.2-b) Simplification maximale des contrastes

En nous appuyant sur certaines propriétés des sources, nous proposons d'exploiter les contrastes précédents pour les simplifier encore plus : nous cherchons à réduire autant que possible le nombre de termes dans les sommes des équations (2.66), (2.68) ou (2.70).

En évoquant à nouveau la propriété 1, on remarque aisément que, dans les expressions (2.66), (2.68) ou (2.70), nous pouvons faire disparaître tous les termes qui s'annulent lorsque la séparation est effectuée. Nous pouvons ainsi affirmer la proposition suivante :

Proposition 7 *Si le support des cumulants d'ordre quatre des sources est contenu dans un support \mathcal{S} , on obtient toujours un contraste en remplaçant la somme infinie sur τ_1, τ_2, τ_3 dans (2.66), (2.68) ou (2.70) par une somme sur \mathcal{S} .*

Il faut souligner ici que nous considérons le support des cumulants des sources, et non pas celui des sorties globales qui est en général plus large et dépend de l'ordre du système de mélange. Le domaine de sommation dépend ainsi des sources considérées, et pour une large classe de sources, il peut être supposé fini.

En particulier, si $s_i(n)$ est i.i.d., seul l'autocumulant sans aucun retard est non nul. On peut ainsi se limiter à $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ dans la somme (2.70) et nous obtenons le contraste déjà trouvé dans [24] :

$$\zeta_0 = \sum_i |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n), y_i^*(n)\}|^2. \quad (2.71)$$

Dans la partie 2.3, d'autres exemples de signaux seront donnés, qui présentent un support fini du champ d'autocumulants. En particulier, les sources de type multiplicatif

telles que celles décrites dans le paragraphe 2.3.2-a), vérifient :

$$\begin{aligned} \text{Cum}\{s_i(n), s_i^*(n + \tau_1), s_i(n + \tau_2), s_i^*(n + \tau_3)\} \neq 0 \\ \Downarrow \\ \begin{cases} (\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau_3 \text{ et } |\tau_2| \leq M) \\ \text{ou :} \\ (\tau_2 = 0, \tau_1 = \tau_3 \text{ et } |\tau_1| \leq M) \\ \text{ou :} \\ (\tau_3 = 0, \tau_1 = \tau_2 \text{ et } |\tau_1| \leq M) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.72)$$

On obtient dans ce cas le contraste suivant :

$$\zeta_M = \sum_i \left[|\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n), y_i^*(n)\}|^2 + 6 \sum_{\tau=1}^M |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n + \tau), y_i^*(n + \tau)\}|^2 \right]. \quad (2.73)$$

Il a été observé au cours des simulations que, pour un certain nombre de sources non linéaires, le critère ζ_0 semblait mener à la séparation. En conséquence, une question que l'on peut naturellement se poser à ce stade est de savoir si ζ_0 est également un contraste dans le cas non i.i.d. Comme on peut s'y attendre, la réponse est en général négative :

Proposition 8 *Le critère ζ_0 n'est pas nécessairement un contraste pour la séparation aveugle de sources non i.i.d.*

Ce fait important, qui souligne l'intérêt des contrastes (2.73) est prouvé par le contre-exemple ci-après :

Preuve: Considérons des sources multiplicatives telles que celles qui seront décrites au paragraphe 2.3.2-b) et telles que $\epsilon < 1/4$. Ces sources vérifient :

$$\text{Cum}\{s(n), s(n), s(n), s(n)\} = \epsilon \quad (2.74)$$

$$\forall p \neq 0 \quad \text{Cum}\{s(n), s(n), s(n + p), s(n + p)\} = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ si } p \in \{-1, 1\} \\ 0 \text{ si } |p| > 1. \end{cases} \quad (2.75)$$

Supposons que la matrice de réponse fréquentielle du filtre global soit donnée par :

$$\mathbf{G}(\omega) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-i\omega} & 1 + e^{-i\omega} \\ -1 - e^{-i\omega} & -1 + e^{-i\omega} \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

En utilisant la multilinéarité des cumulants et l'indépendance des sources, on obtient aisément les autocumulants sans retards :

$$\text{Cum}\{y_1(n), y_1^*(n), y_1(n), y_1^*(n)\} = \text{Cum}\{y_2(n), y_2^*(n), y_2(n), y_2^*(n)\} = \frac{4\epsilon + 3}{16} \quad (2.77)$$

et par suite, nous avons la valeur du contraste pour le filtre \mathbf{G} donné ci-dessus :

$$\zeta_0 = 2 \left(\frac{4\epsilon + 3}{16} \right)^2 \quad (2.78)$$

Pour $\epsilon < \frac{1}{4}$, cette expression est plus grande que $2\epsilon^2$, qui est la plus grande valeur de ζ_0 pour un filtre global séparant. Ainsi, dans ce cas, le maximum de ζ_0 ne correspond pas à une solution séparante et ce ne peut donc pas être un contraste. ■

Nous allons maintenant introduire quelques signaux permettant d'appliquer les idées qui viennent d'être exposées dans cette partie.

2.3 Exemples de signaux non linéaires

Cette partie présente quelques signaux non linéaires qui ont été utilisés dans nos simulations. Conformément aux hypothèses de ce chapitre, les signaux en questions sont décorrélés.

Les domaines de l'économétrie et de la finance ont été rapidement confrontés à des phénomènes que les approches linéaires ne peuvent expliquer, tels que la persistance d'une forte variance des prix, ... Ils ont donc éprouvé la nécessité de considérer des modèles non linéaires et offrent ainsi un grand nombre d'exemples de signaux non linéaires, dont une classe importante est constituée par les processus conditionnellement gaussiens. Nous introduisons très brièvement la notion de volatilité avant de définir les modèles dits de volatilité stochastiques. Un signal inspiré du modèle précédent et construit de manière *ad hoc* pour servir de contre-exemple est présenté. Enfin, nous décrivons les modèles ARCH. Les propriétés utiles de chacun de ces processus sont rappelées à chaque fois.

2.3.1 Signaux de volatilité stochastique

Les données financières ou économiques présentent fréquemment des corrélations dans leurs amplitudes. Ainsi, si $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est la grandeur étudiée, l'analyse empirique de certaines données financières montre que $s(n)^2$ et $s(n+m)^2$ (où $m \in \mathbb{N}^*$) sont corrélées. Ce fait se traduit par un phénomène de regroupement des valeurs prises par série, en des périodes de grande ou de faible agitation. Ce phénomène peut être pris en compte au travers de modèles de type «multiplicatifs» qui s'écrivent comme le produit de deux autres signaux :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad s(n) = a(n)\xi(n) \quad (2.79)$$

Le cas le plus simple, qui sera celui que nous considérerons, est celui où $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est i.i.d. centré et de variance 1. $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de plus indépendant de $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Plusieurs conséquences découlent de ces hypothèses :

- $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est décorrélé et de moyenne nulle.
- La variance de $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est égale à celle de $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.
- dans le cas où $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de plus gaussien, la loi conditionnelle de $s(n)$ connaissant $a(n)$ est une loi normale centrée de variance $a(n)^2$.

Ainsi, la non linéarité de $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée à la dépendance temporelle introduite par le processus $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui contrôle la variance conditionnelle de $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Dans la littérature financière, $a(n)$ est appelée *volatilité*² : elle constitue une mesure de la variabilité d'une grandeur et fournit de ce fait une indication sur son risque boursier.

La suite $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ peut être une fonction du temps, ou une variable aléatoire. Le modèle dit de volatilité stochastique est celui où $a(n)$ s'écrit $a(n) = e^{\frac{\Delta(n)}{2}}$ et où $\Delta(n)$ est un modèle AR engendré par un bruit indépendant de $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ [86].

Toutefois, pour nos applications, nous considérerons uniquement le cas où $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un modèle MA (paragraphe 2.3.2) ainsi que le cas des signaux ARCH (paragraphe 2.3.3). Auparavant, nous examinons l'allure du champs de cumulants d'une source donnée par (2.79).

²Il existe en réalité plusieurs notions de volatilité (implicite, historique, instantanée, ...) correspondant à des définitions distinctes. La volatilité peut parfois être simplement assimilée à l'écart-type des observations effectuées (voir [86] pour une présentation détaillée ou [72] pour une simple introductions aux liens entre marchés financiers et mathématiques).

Champ de cumulants Si l'on note $\sigma_a^2 := E\{a(n)^2\}$, il vient en utilisant l'indépendance de $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ et de $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \kappa_s^4(p_1, p_2, p_3) &= M_s^4(p_1, p_2, p_3) - \sigma_a^4(\delta_{p_1} \delta_{p_2-p_3} + \delta_{p_2} \delta_{p_1-p_3} + \delta_{p_3} \delta_{p_1-p_2}) \\ &= M_a^4(p_1, p_2, p_3) M_\xi^4(p_1, p_2, p_3) - \sigma_a^4(\delta_{p_1} \delta_{p_2-p_3} + \delta_{p_2} \delta_{p_1-p_3} + \delta_{p_3} \delta_{p_1-p_2}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

où l'on a noté

$$\kappa_s^4(p_1, p_2, p_3) := \text{Cum}\{s(n), s^*(n+p_1), s(n+p_2), s^*(n+p_3)\} \quad \text{et} \quad (2.81)$$

$$M_s^4(p_1, p_2, p_3) := E\{s(n)s^*(n+p_1)s(n+p_2)s^*(n+p_3)\}. \quad (2.82)$$

Or, $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ étant i.i.d., $M_\xi^4(p_1, p_2, p_3)$ est non nul uniquement quand (p_1, p_2, p_3) vérifie l'une des conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1 = 0 \text{ et } p_2 = p_3) \\ \text{ou :} \\ (p_2 = 0 \text{ et } p_1 = p_3) \\ \text{ou :} \\ (p_3 = 0 \text{ et } p_1 = p_2) \end{array} \right. \quad (2.83)$$

L'ensemble des triplets (p_1, p_2, p_3) satisfaisant (2.83) prend la forme de trois droites concourantes en l'origine ; nous noterons \mathcal{S}_* l'ensemble des tels triplets. Il apparaît donc que $\kappa_s^4(p_1, p_2, p_3)$ est nul en dehors de l'ensemble \mathcal{S}_* . Compte tenu de l'invariance des cumulants par permutation, il est alors suffisant de considérer les cumulants pour les triplets du type $(0, p, p)$ avec $p \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Cas particuliers où $a(n)$ est MA

Nous supposons maintenant que $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un modèle MA :

$$a(n) = \sum_{i=0}^M b(n)\varepsilon(n-i), \quad \text{où } (\varepsilon(n))_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est i.i.d.} \quad (2.84)$$

Ce choix a été dicté par le souhait d'obtenir un modèle dont le champ de cumulants soit de support borné. Par ailleurs, cela nous a permis de construire un exemple de signal dont l'autocumulant d'ordre quatre en $(0, 0, 0)$ est nul, sans pour autant que le champs d'autocumulants soit nul (ni que le signal soit gaussien).

2.3.2-a) Support fini des cumulants

Compte tenu de (2.84), $a(n)$ et $a(n-p)$ sont indépendants dès que $|p| > M$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall p, |p| > M \quad M_a^4(0, p, p) &= E\{a(n)^2 a(n-p)^2\} \\ &= E\{a(n)^2\} E\{a(n-p)^2\} = \sigma_a^4 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Comme par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall p \neq 0 \quad \kappa_s^4(0, p, p) &= M_a^4(0, p, p) M_\xi^4(0, p, p) - \sigma_a^4 \\ &= M_a^4(0, p, p) E\{\xi(n)^2\} E\{\xi(n-p)^2\} - \sigma_a^4 \\ &= M_a^4(0, p, p) - \sigma_a^4 \end{aligned} \quad (2.86)$$

on en déduit que $\kappa_s^4(0, p, p) = 0$ si $|p| > M$. Par suite, les cumulants de $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont non nuls uniquement sur $\mathcal{S}_* \cap \{(p_1, p_2, p_3) \mid |p_1| \leq M, |p_2| \leq M, |p_3| \leq M\}$ et seul un nombre fini de cumulants de $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont donc non nuls.

2.3.2-b) Une source de cumulants d'ordre quatre nul en (0,0,0)

Nous reprenons le modèle multiplicatif de l'équation (2.79) et considérons le cas où $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un modèle MA d'ordre 1 donné par :

$$a(n) = \varepsilon(n) + \varepsilon(n-1) \quad (2.87)$$

où $\varepsilon(n)$ est un processus i.i.d. prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$ avec des probabilités respectives $1/4, 1/2$ et $1/4$. $\xi(n)$ est choisi comme étant un processus i.i.d. prenant avec une même probabilité $1/4$ ses valeurs dans l'ensemble :

$$\left\{ \pm \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2(3+\epsilon)}{5}}} - 1; \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2(3+\epsilon)}{5}}} - 1 \right\}$$

où l'on suppose que $\epsilon \in]-1/2, 2]$.

On peut aisément vérifier que $a(n)$ et $\xi(n)$ sont de variance unité et que $E\{a(n)^4\} = 5/2$ et $E\{\xi(n)^4\} = \frac{2(3+\epsilon)}{5}$. Ainsi :

$$\text{Cum}\{s(n), s(n), s(n), s(n)\} = E\{a(n)^4\}E\{\xi(n)^4\} - 3 = \epsilon \quad (2.88)$$

et pour $p \neq 0$, on obtient aisément :

$$\text{Cum}\{s(n), s(n), s(n+p), s(n+p)\} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } p \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{si } |p| > 1. \end{cases} \quad (2.89)$$

Ainsi, nous avons obtenu un processus de champs de cumulants d'ordre quatre non nul et ayant une valeur arbitrairement proche de zéro (et éventuellement nulle) de son cumulants d'ordre quatre en (0,0,0).

2.3.3 Signaux ARCH

2.3.3-a) Définition

Les modèles auto-régressifs à hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH en anglais) ont été introduits par Engle en 1982 [34]. On pourra consulter [40, 86] pour leur étude plus précise et [11] pour leurs applications possibles en finance.

Les signaux ARCH correspondent à un modèle de signaux multiplicatifs (2.79), mais dans lequel n'intervient qu'une seule source aléatoire :

Définition 4 On dit que le processus $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ suit un modèle ARCH(M) lorsqu'il est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad s(n) = a(n)\xi(n) \quad (2.90)$$

où $(\xi(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est i.i.d., centré, gaussien et de variance 1 et $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est positif et donné par l'équation suivante dans laquelle $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq M}$ sont des coefficients réels :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a(n)^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i s(n-i)^2 \quad (2.91)$$

On constate dans ce modèle que la variance est une fonction des valeurs passées du processus. L'idée sous-jacente à un tel modèle est que les chocs aléatoires peuvent avoir une plus forte probabilité à certains moments qu'à d'autres. Sur les données financières, il permet d'expliquer les regroupements de volatilité, *i.e.* la persistance de fortes (ou faibles) variations de la grandeur étudiée sur plusieurs périodes.

2.3.3-b) Etude du cas particulier d'un processus ARCH(1)

Dans le cas d'un processus ARCH(1), une étude directe permet d'obtenir rapidement quelques propriétés. Nous les présentons ici avant de citer les théorèmes généraux dans le paragraphe suivant.

Dans le cas ARCH(1), l'équation (2.91) devient :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a(n)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 s(n-1)^2 \quad (2.92)$$

et on en déduit immédiatement que le processus $s(n) = a(n)\xi(n)$ vérifie :

$$E\{s(n)^2\} = \alpha_0 + \alpha_1 E\{s(n-1)^2\}. \quad (2.93)$$

Si $\alpha_1 < 1$, l'équation de récurrence (2.93) admet l'unique solution stationnaire :

$$E\{s(n)^2\} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (2.94)$$

De plus, on a :

$$E\{s(n)^4\} = E\{a(n)^4\}E\{\xi(n)^4\} \quad (2.95)$$

et $\xi(n)$ étant gaussien :

$$E\{s(n)^4\} = 3E\{a(n)^4\} = 3E\{(\alpha_0 + \alpha_1 s(n-1)^2)^2\} \quad (2.96)$$

$$= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E\{s(n-1)^2\} + \alpha_1^2 E\{s(n-1)^4\}) \quad (2.97)$$

$$= 3 \frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{1 - \alpha_1} + 3\alpha_1^2 E\{s(n-1)^4\}. \quad (2.98)$$

En supposant à la fois $0 < \alpha_1 < 1$ et $3\alpha_1^2 < 1$ (ce qui se résume à la condition $0 < \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$), nous pouvons donc obtenir la solution stationnaire à l'ordre quatre :

$$E\{s(n)^4\} = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)}. \quad (2.99)$$

De plus, par les équations (2.94) et (2.99), nous obtenons le cumulants d'ordre quatre du processus ARCH(1) $s(n)$:

$$\text{Cum}\{s(n), s(n), s(n), s(n)\} = \frac{E\{s(n)^4\}}{E\{s(n)^2\}^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}. \quad (2.100)$$

On constate en particulier que le coefficient de kurtosis est positif ce qui implique que la distribution de $s(n)$ est leptokurtique (elle a une queue épaisse).

2.3.3-c) Conditions d'existence d'une solution stationnaire et des moments d'ordre quatre

Les théorèmes suivants sont adaptés de [40] et permettent d'assurer respectivement l'existence d'une solution stationnaire et l'existence des moments d'ordre quatre pour le processus défini par (2.90)- (2.91).

Théorème 1 *Sous les conditions de régularité*

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, M \text{ et } \sum_{i=1}^M \alpha_i < 1, \quad (2.101)$$

il existe une solution stationnaire au sens large p.s. pour le processus ARCH(M) décrit par les équations (2.90) et (2.91). Ce processus est non corrélé, de moyenne nulle et de variance $\frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^M \alpha_i}$.

Théorème 2 *Pour un processus ARCH(M) défini par les équations (2.90) et (2.91) avec les paramètres $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, M$ et $\sum_{i=1}^M \alpha_i < 1$, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de moments d'ordre quatre est :*

$$3\alpha^T(\mathbf{Id} - \psi^{-1})\alpha < 1 \quad (2.102)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)^T$ et ψ est la matrice $\psi = (\psi_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, M\}^2}$ avec :

$$\psi_{ij} = \alpha_{i+j} + \alpha_{i-j} \quad (2.103)$$

où, dans l'équation (2.103) uniquement, on a adopté la convention $\alpha_p = 0$ si $p \leq 0$ ou $p \geq M$.

Remarque 3: On retrouve les résultats du paragraphe précédent par application des théorèmes ci-dessus. Un processus ARCH(1) défini par l'équation (2.92) :

- admet une solution stationnaire si $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 < 1$.
- a des moments d'ordre quatre finis si en outre $3\alpha_1^2 < 1$.

2.4 Mise en œuvre de la séparation

2.4.1 Paramétrisation par une structure en treillis sans perte

L'ensemble des résultats obtenus dans la partie 2.2 sont valables à condition d'avoir effectué un préblanchiment et de travailler avec un filtre séparateur para-unitaire. Nous donnons ici une paramétrisation des filtres para-unitaires qui permet de se ramener à un problème d'optimisation sans contraintes. Les techniques utilisées pour la maximisation sont alors brièvement exposées.

2.4.1-a) Paramétrisation

Les filtres para-unitaires peuvent être paramétrisés par une structure dite en treillis sans perte³. On consultera [96] pour plus de précisions. La paramétrisation est la suivante pour un filtre $\mathbf{W}[z]$:

³Il arrive que les filtres para-unitaires soient aussi appelés filtres sans perte.

$$\mathbf{W}[z] = \left(\prod_{k=1}^{N-1} \mathbf{R}_{kN}(\theta_{kN}^L) \right) \mathbf{D}[z] \dots \left(\prod_{k=1}^{N-1} \mathbf{R}_{kN}(\theta_{kN}^2) \right) \mathbf{D}[z] \left(\prod_{k=1}^{N-1} \left(\prod_{j=k+1}^N \mathbf{R}_{kj}(\theta_{kj}^1) \right) \right). \quad (2.104)$$

Dans cette expression, les angles de rotation $\theta_{k,j}^l$ peuvent être choisis dans $[-\pi/2, \pi/2]$ et l'élément (n, m) de chaque matrice de rotation est défini par :

$$\forall \varphi \in [0, \pi/2], \quad [\mathbf{R}_{kj}(\varphi)]_{n,m} = \begin{cases} \cos(\varphi) & \text{si } n = m = k \text{ ou } n = m = j \\ -\sin(\varphi) & \text{si } (n, m) = (k, j) \\ \sin(\varphi) & \text{si } (n, m) = (j, k) \\ 1 & \text{si } n = m \notin \{j, k\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.105)$$

tandis que $\mathbf{D}[z] = \text{Diag}(1, \dots, 1, z^{-1})$ correspond à un retard sur la dernière composante. Afin de fournir une paramétrisation complète de l'ensemble des filtres para-unitaires de réponse impulsionnelle finie, un terme multiplicatif $\text{Diag}(\pm 1, \dots, \pm 1, \pm z^{-d})$, $d \in \mathbb{Z}$, doit être inclus dans (2.104).

La paramétrisation ci-dessus sera utilisée pour le filtre de séparation. Le filtre de mélange sera choisi également avec une telle paramétrisation. Ceci offre le double avantage de permettre l'étude de la séparation indépendamment de l'étape de préblanchiment (qui peut poser quelques difficultés dans la pratique), et de pouvoir connaître la longueur de la réponse impulsionnelle du filtre para-unitaire séparant —un filtre para-unitaire de réponse impulsionnelle finie est en effet inversible par un filtre para-unitaire dont la réponse impulsionnelle est de même longueur. Il résulte de ceci que le filtre global $\mathbf{G}[z]$, dont on sait qu'il est para-unitaire, sera en outre de réponse impulsionnelle finie dans notre mise en œuvre. Examinons la conséquence de ce fait sur l'ambiguïté de filtrage qui reste après séparation.

2.4.1-b) Une conséquence sur l'ambiguïté de filtrage

Nous avons déjà vu que le fait de travailler dans l'ensemble des filtres para-unitaires transformait l'ambiguïté de filtrage SISO résiduel en une ambiguïté de filtrage *passé-tout*. Le fait de travailler avec des filtres à réponse impulsionnelle finie (ce qui est le cas en utilisant la paramétrisation ci-dessus) entraîne une restriction supplémentaire.

Dans le cas où le filtre global $\mathbf{G}[z]$ est para-unitaire et de réponse impulsionnelle finie, l'ambiguïté de filtrage résiduelle après séparation se réduit à un retard et une phase et le filtre SISO correspondant est du type : $e^{i\varphi} z^{-d}$.

Preuve: Notons en effet $h[z]$ le filtre SISO résiduel à l'issue de la séparation. Comme ce dernier est passé-tout, il vérifie $|h[z]| = 1$ pour tout z du cercle unité. Ayant supposé la réponse impulsionnelle finie, il existe de plus $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z^k h[z]$ soit un polynôme, qui vérifie $|z^k h[z]| = 1$ pour tout z du cercle unité. Il s'ensuit que le polynôme $z^k h[z]$ est nécessairement de la forme $e^{i\varphi} z^l$ avec $l \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On obtient donc le résultat précédemment annoncé avec $d = -l + k$. ■

Le fait souligné ici est d'importance pour les simulations : il nous sera en effet possible dans ce cas de calculer une erreur quadratique moyenne sur les sources reconstituées après suppression des seules ambiguïtés de phase et de retard.

2.4.2 Optimisation des contrastes

2.4.2-a) Algorithmes classiques : optimisation sans contrainte

Une fois donnée la paramétrisation (2.104) du filtre séparant, la maximisation du contraste se ramène à un problème classique d'optimisation sans contrainte (les angles de rotations peuvent être choisis dans $[-\pi/2, \pi/2]$, mais il n'y a nulle obligation). Une introduction aux différentes méthodes d'optimisation possible peut être trouvée dans de nombreux ouvrages ([63] par exemple); les méthodes d'optimisation qui ont été utilisées sont :

- descente successive selon les coordonnées : comme la paramétrisation choisie est fonction d'angles de Jacobi, cette méthode appartient à l'ensemble des méthodes dites de *Jacobi*.
- *gradient* : étant une méthode extrêmement simple, elle a été programmée en premier afin de constater la validité des résultats.
- *gradient conjugué* : elle offre une vitesse de convergence bien plus rapide que la méthode du gradient sans nécessiter le calcul du hessien de la fonction optimisée.
- *méthodes de quasi-Newton* : elles nécessitent le calcul du hessien de la fonction optimisée, mais pas son inversion. La toolbox de Matlab a offert la possibilité d'utiliser aisément ces méthodes dont la rapidité de convergence est nettement améliorée comparativement au gradient.

L'ensemble des méthodes évoquées ci-dessus ne permettent généralement qu'une optimisation locale du critère considéré. Or, comme expliqué dans la partie 2.5, nous avons constaté que les contrastes présentaient de nombreux maxima locaux. Afin de proposer un début de solution, nous avons envisagé l'utilisation d'algorithmes génétiques. Nous proposons une courte présentation de ces derniers dans le paragraphe suivant.

2.4.2-b) Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques offrent une possibilité d'optimisation globale. Leur mise en œuvre ainsi que leur principe de base, que nous présentons ici, sont relativement simples. L'efficacité de telles méthodes est reconnue dans des cas où d'autres méthodes se révèlent inefficace. Une toolbox Matlab est disponible sur internet [1], accompagnée d'une introduction plus approfondie aux algorithmes génétiques, ainsi que d'une bibliographie.

Qu'est-ce qu'un algorithme génétique ? Un algorithme génétique est un « algorithme stochastique itératif » qui, à partir d'une population initiale, opère sur des ensembles de points codés à l'aide de trois opérateurs : croisement, mutation, sélection. Les deux premiers sont des opérateurs d'exploration de l'espace, tandis que le dernier fait évoluer la population vers les optima d'un problème. Cette méthode est directement inspirée de la théorie de Darwin sur l'évolution des espèces : en permettant aux seuls individus bien adaptés à l'environnement de se reproduire, la nature assure la pérennité de leurs meilleures caractéristiques, lesquelles se recombinent entre elles (chaque enfant reçoit de bonnes caractéristiques à la fois de son père et de sa mère) pour former à chaque génération de nouveaux individus toujours mieux adaptés à leur environnement.

Descriptif du fonctionnement d'un algorithme génétique Les algorithmes génétiques considèrent une population d'individus, qui représentent autant de solutions possibles au problème considéré. Chaque individu est représenté par ses *chromosomes* par le

biais d'un codage défini entre l'ensemble des solutions envisageables *a priori* et un ensemble de chaînes de caractères définies sur un certain alphabet. Dans un cas simple, il est par exemple possible de coder les solutions possibles sur un certain nombre de bits.

Une population initiale est créée, par exemple par tirage aléatoire, et est amenée à vivre. Les individus de cette population se reproduisent en suivant trois règles pour générer la population de la génération suivante :

croisement Etant donnés deux parents de la population actuelle, un croisement donne au chromosome fils des caractéristiques partagées de ses deux parents.

mutation Les mutations consistent à opérer des modifications aléatoires sur les gènes des différents chromosomes afin d'introduire une plus grande diversité et ainsi mieux explorer l'espace des solutions.

sélection Au sein de la population fille, obtenue par reproduction (croisement et mutation), sont sélectionnés les individus les mieux adaptés au problème posé au sens d'un certain critère d'adéquation à définir. Ce critère se définit en général comme une fonction de la grandeur à optimiser. Le résultat de la sélection donne alors la population de la génération suivante.

Le processus ainsi décrit est réitéré sur un certain nombre de générations. Un critère d'arrêt permet l'arrêt du processus, et la, ou les solution(s) retournée(s) est alors celle(s) correspondant à l'individu (ou aux individus) qui, au sein de la dernière génération, répond(ent) le mieux au problème posé.

Avantages des algorithmes génétiques Les algorithmes génétiques présentent un certain nombre de caractéristiques propres. On peut en particulier noter les points suivants :

- les algorithmes génétiques travaillent en parallèle sur une population de points et non pas sur un seul point.
- les algorithmes génétiques ne nécessitent aucune information sur la dérivée, ni de toute autre nature concernant la fonction à maximiser (convexité, continuité, ...).
- les algorithmes génétiques utilisent des règles de transitions aléatoires et non pas déterministes.
- les algorithmes génétiques travaillent sur un codage de l'ensemble des paramètres, pas sur les paramètres eux-mêmes (à moins de se placer dans le cas particulier de gènes réels).

Compte tenu de ces faits, les algorithmes génétiques sont adaptés à certains problèmes particuliers : on peut évoquer entre autres les problèmes de nature discrète par essence, ceux où l'ensemble des solutions envisageable est de grande dimension. Egalement dans le cas de problèmes à solution non unique ou d'optimisation multi-objectifs, les algorithmes génétiques se révèlent potentiellement intéressant pour trouver un ensemble de solutions Pareto-optimales⁴ En revanche, dans le cas de fonctions simples, convexes, dérivables, la performance des algorithmes génétiques est en général bien inférieure à celle des méthodes plus classiques.

D'après ces observations rapides, il semble donc que, dans les problèmes de séparation de sources, les algorithmes génétiques pourraient être utiles afin de résoudre la difficulté liée à l'existence de maxima locaux. En revanche, un algorithme classique, et même un simple gradient, devrait être bien plus efficace pour converger vers le point cherché une

⁴Dans le cadre de la maximisation multi-objectifs, une solution est dite Pareto-optimale lorsque toute autre solution permettant de maximiser plus l'un des critères, en diminue nécessairement un autre.

fois ramené dans le voisinage d'une solution globale. Nous avons donc proposé d'évaluer rapidement les résultats que peut fournir une telle méthode, parfois au prix d'un coût de calcul élevé. Le fait d'obtenir des résultats positifs inviterait à poursuivre l'effort dans la recherche de méthodes conjointes de séparation de sources.

2.5 Simulations

En plus de confirmer la validité des résultats théoriques aussi bien dans le cas i.i.d. que non i.i.d., le but de ces simulations a été de comparer les différents contrastes afin d'offrir des éléments de choix. Intuitivement, un contraste devrait être d'autant plus délicat à estimer qu'il prend en compte un plus grand nombre de cumulants avec des retards plus importants. On peut s'attendre dans ce cas à une moins bonne estimation statistique et à une moindre qualité de la séparation. Cependant, la prise en compte de retards supplémentaires est aussi susceptible d'apporter une information supplémentaire qui peut améliorer la séparation. Rappelons les différents contrastes utilisés dans ces simulations et apportons quelques précisions à leur sujet :

- contrastes fréquentiels :

$$\bar{\mathcal{I}}^{(K)} = \frac{4\pi^2}{K^2} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{K-1} \mathcal{I}\left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r_{p,q}}}{2}, \frac{\nu_{q-r_{p,q}}}{2}\right) \quad (2.106)$$

avec $r_{p,q} = 0$ (noté I sur les figures)

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)} = \frac{8\pi^3}{K^3} \sum_{p=0}^{K-1} \sum_{q=0}^{K-1} \sum_{r \in \mathcal{E}_{p,q}^K} \mathcal{I}\left(\nu_p, \frac{\nu_{q+r}}{2}, \frac{\nu_{q-r}}{2}\right) \quad (2.107)$$

avec $\mathcal{E}_{p,q}^K = \{-K+1, \dots, K-1\}$ (noté I_{E^K} sur les figures)

Le nombre K de fréquences discrètes a été choisi égal à deux fois la longueur du filtre de mélange. Pour le calcul de ces critères, une estimée du trispectre a été obtenue par une technique du tri-périodogramme lissé. L'optimisation de tels contrastes a été réalisée par une procédure de type Jacobi.

- contrastes temporels :

$$\zeta_{AC,M} = \sum_i \sum_{\substack{|\tau_1| \leq M \\ |\tau_2| \leq M \\ |\tau_3| \leq M}} |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n + \tau_1), y_i(n + \tau_2), y_i^*(n + \tau_3)\}|^2 \quad (2.108)$$

$$\zeta_M = \sum_i \left[|\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n), y_i^*(n)\}|^2 + 6 \sum_{\tau=1}^M |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n + \tau), y_i^*(n + \tau)\}|^2 \right] \quad (2.109)$$

$$\zeta_0 = \sum_i |\text{Cum}\{y_i(n), y_i^*(n), y_i(n), y_i^*(n)\}|^2 \quad (2.110)$$

Le contraste $\zeta_{AC,M}$ est la forme la plus générale, valable théoriquement pour tout type de signal lorsque $M \rightarrow +\infty$, tandis que ζ_M est valable pour les signaux multiplicatifs et que ζ_0 n'est théoriquement valable que dans le cas de signaux i.i.d. La méthode d'optimisation employée a été un gradient en ce qui concerne ces contrastes temporels.

Les signaux source considérés étaient tous centrés et de variance unité. Plus précisément, il s'agissait de :

- signaux i.i.d. : nous avons considéré des signaux réels de type PAM4 (rappelons qu'ils prennent avec une probabilité 1/4 l'une des quatre valeurs $\{\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{3}{\sqrt{5}}\}$) et des signaux distribués selon une loi uniforme. L'ensemble des critères considérés constituent des contrastes pour ces sources.
- des signaux de volatilité stochastique (voir équation (2.79)), avec $a(n)$ pris comme un modèle MA. Les sources de contre-exemple données dans le paragraphe 2.3.2-b) en sont un cas particulier particulièrement intéressant. Pour de telles sources, les critères fréquentiels, $\zeta_{AC,M}$ et ζ_M (avec M suffisamment grand, mais fini) sont des contrastes. En revanche, ζ_0 n'est pas un contraste.
- de signaux ARCH, pour lesquels en théorie, les mêmes contrastes que ci-dessus sont valables, avec cependant M infini.
- des signaux obtenus par sous-échantillonnage d'un facteur 2 d'une source linéaire, provenant elle-même du filtrage d'une source i.i.d. binaire par le filtre de réponse impulsionnelle : (0.1759 0.0350 0.3609 0.1890 -0.0545 0.3231 0.3087 0.4688 0.1204 -0.6041). Dans ce cas, les critères fréquentiels ainsi que $\zeta_{AC,M}$ avec $M \geq 5$ sont des contrastes ; tandis que ζ_M n'en est pas un quel que soit M .

2.5.1 Propriétés locales des contrastes

Afin d'isoler les différents problèmes susceptibles d'intervenir, nous avons utilisé, dans toute cette partie sur les propriétés locales, des algorithmes d'optimisation locale initialisés à des points proches de la vraie valeur des paramètres. Plus précisément, l'algorithme d'optimisation a été initialisé de façon systématique en prenant pour valeur initiale de chaque angle, la vraie valeur cherchée à laquelle a été ajoutée une variable aléatoire uniformément répartie dans $[-\pi/20, \pi/20]$: ceci représente un écart maximal de 10% de l'intervalle de variation des angles.

Après séparation, les seules indéterminations restantes (phase et retard d'après le paragraphe 2.4.1-b)) ont été éliminées par une méthode de corrélation. Ceci a permis de considérer l'erreur quadratique moyenne sur chacune des sources reconstituées afin de quantifier la qualité de la séparation.

Tous les résultats et valeurs proviennent du moyennage sur 100 réalisations des filtres et des sources, tirés aléatoirement par une méthode de Monte-Carlo.

Résultats et commentaires L'erreur quadratique moyenne de reconstruction des sources (EQM) est donnée en fonction du nombre d'échantillons et pour différents contrastes utilisés sur les figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5. Le type de sources utilisées sont respectivement des sources i.i.d. PAM4, les sources du contre-exemple donné en 2.3.2-b), des sources ARCH(9) et des sources obtenues par sous-échantillonnage d'un processus linéaire. Le tableau 2.1 donne également la valeur de l'EQM pour les intervalles de confiance à 90%, pour des sources i.i.d. et du contre-exemple. La figure 2.6 donne la valeur de l'EQM moyenne en fonction de la longueur du filtre, tandis que la figure 2.7 permet de voir l'influence d'un bruit additif.

D'une façon générale, on constate qu'il est avantageux de considérer le contraste qui comporte le moins de cumulants possibles. En particulier, les contrastes fréquentiels, qui utilisent théoriquement le champ de cumulants complet, offrent de moins bons résultats que les contrastes temporels. Parmi les critères temporels possibles, les meilleurs résultats

sont obtenus en utilisant le critère comprenant le moins de cumulants, mais dont on a l'assurance théorique que c'est un contraste pour les sources en question : dans le cas de sources i.i.d. (Figure 2.2), il s'agit de ζ_0 tandis que dans le cas des sources du contre-exemple du paragraphe 2.3.2-b), ζ_1 offre les meilleurs résultats. De même sur la figure 2.5, on sait que $\zeta_{AC,5}$ est bien un contraste; il fournit des résultats corrects, tandis que les autres critères donnent des résultats de moindre qualité, en accord avec l'impossibilité que nous avons d'affirmer qu'il s'agit de contrastes. Enfin, si l'on regarde les figures 2.3 et 2.5, nous constatons clairement que ζ_0 n'est pas un contraste pour ce type de sources.

Notons finalement que $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^K}^{(K)}$ mène à de meilleurs résultats que $\bar{\mathcal{I}}^{(K)}$, ce qui montre que le fait de prendre en compte plus de points fréquentiels améliore la séparation.

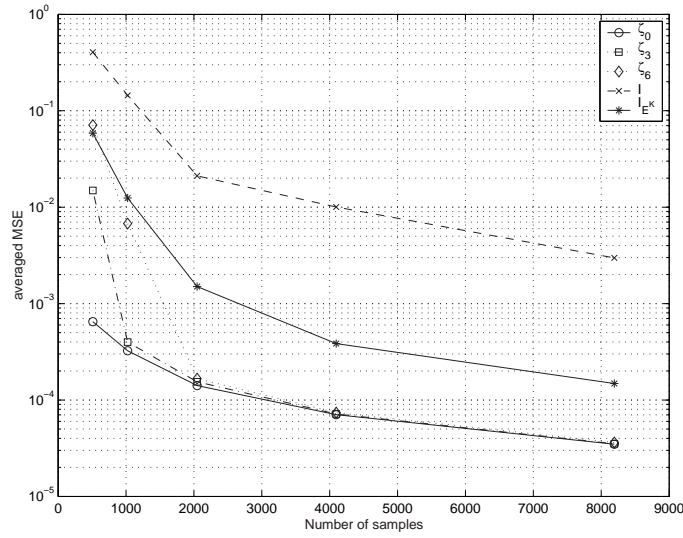


FIG. 2.2 – Comparaison des contrastes dans le cas de deux sources i.i.d. PAM4 (moyenne de l'EQM en fonction du nombre d'échantillons). Le filtre de mélange est de longueur 5.

		Nombre d'échantillons			
		2048	4096	8192	16384
sources PAM4 (ζ_0 , Fig. 2.2)	EQM moyenne	1.4540e-04	7.4188e-05	3.5643e-05	1.7824e-05
	inter. conf. 90%	2.8466e-04	1.4084e-04	6.5007e-05	3.3668e-05
sources non i.i.d. ($\epsilon = 0.5$, ζ_1 Fig. 2.3)	EQM moyenne	0.1245	0.0222	0.0067	0.0030
	inter. conf. 90%	0.4278	0.0375	0.0133	0.0056

TAB. 2.1 – EQM moyenne et pour des intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre d'échantillons.

2.5.2 Propriétés globales des contrastes

2.5.2-a) Existence de maxima locaux

Afin de se faire une idée plus précise sur l'allure et le comportement global des fonctions de contraste, nous avons considéré le cas de 2 sources et d'un filtre de mélange de longueur 2. Le filtre séparant est alors également un filtre de longueur 2, et est paramétré par deux

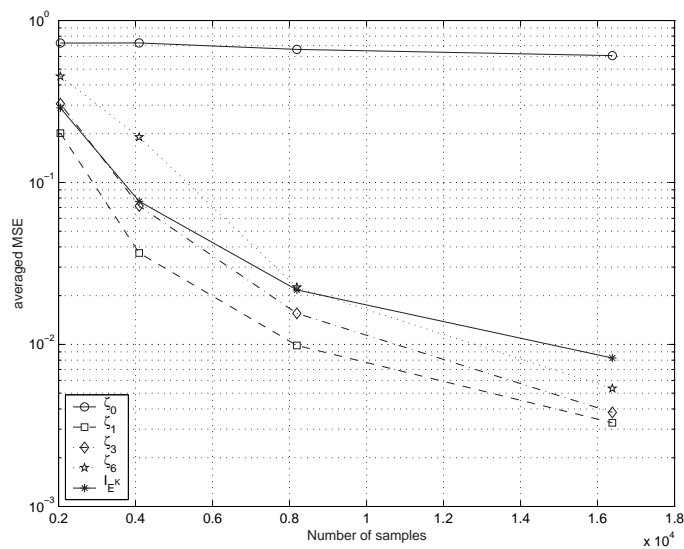
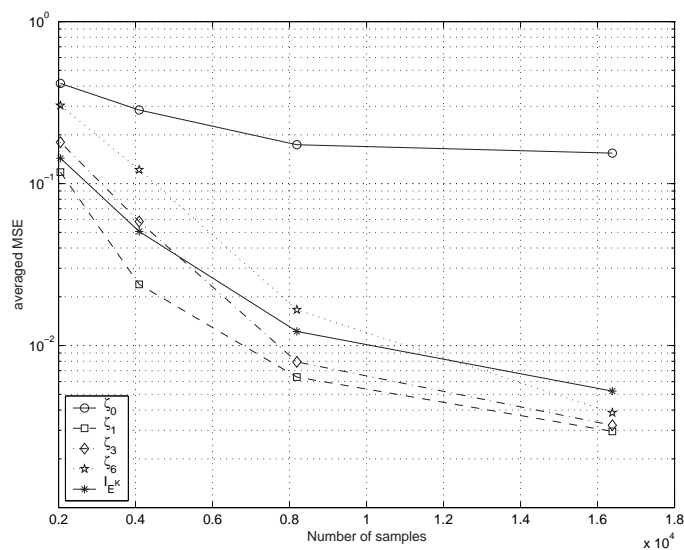
(a) $\epsilon = 0$ (b) $\epsilon = 0.5$

FIG. 2.3 – Comparaison des contrastes dans le cas de deux sources multiplicatives du contre-exemple en 2.3.2-b) et pour deux valeurs du paramètre ϵ (EQM moyenne en fonction du nombre d'échantillons). Le filtre de mélange est de longueur 5.

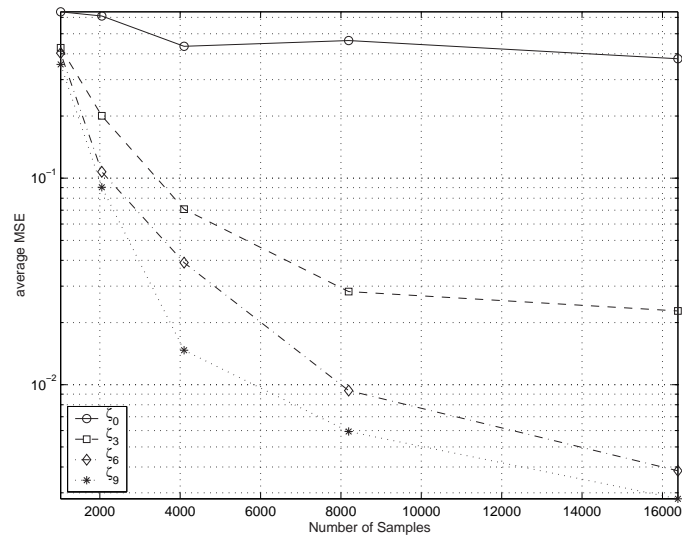


FIG. 2.4 – Comparaison des contrastes pour deux sources ARCH(9). Le filtre de mélange est de longueur 5.

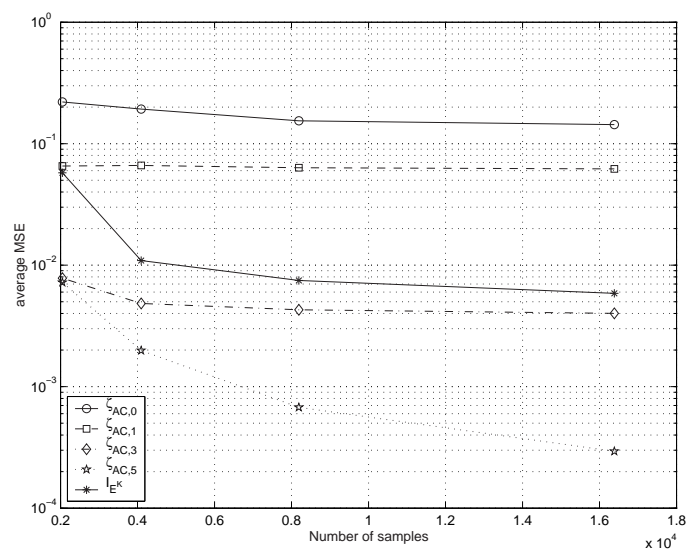


FIG. 2.5 – Comparaison des contrastes pour deux sources non linéaire obtenues par sous-échantillonnage d'un processus linéaire. Le filtre de mélange est de longueur 3.

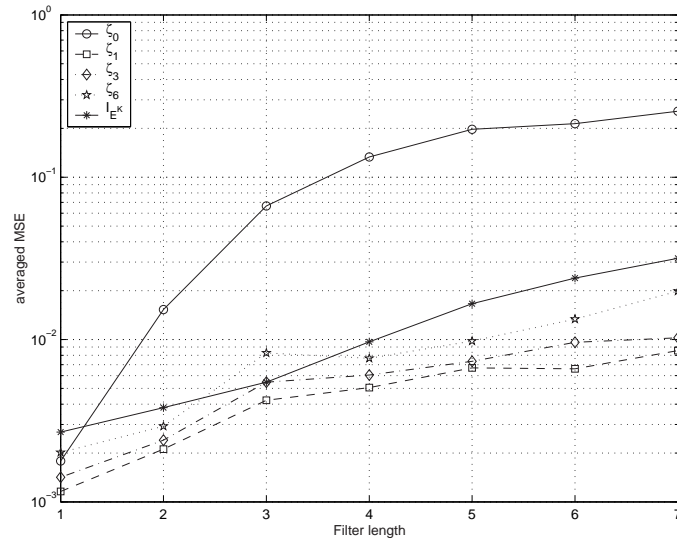


FIG. 2.6 – EQM moyenne en fonction de la longueur du filtre de mélange pour des signaux du contre-exemple en 2.3.2-b) avec $\epsilon = 0.5$. Le nombre de sources était de 2 et le nombre d'échantillons de 8192.

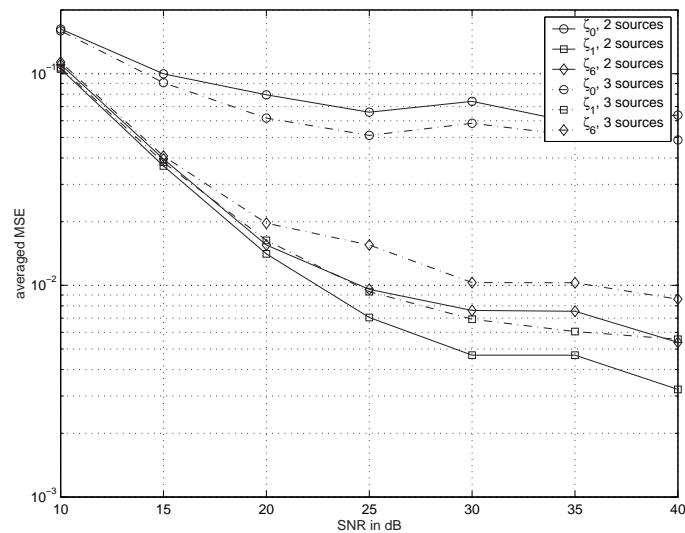


FIG. 2.7 – EQM moyenne en fonction du SNR pour des signaux du contre-exemple en 2.3.2-b) $\epsilon = 0.5$; Le nombre de sources était de 2 ou 3, le nombre d'échantillons de 8192 et la longueur du filtre de mélange de 5.

angles θ_1 et θ_2 . Nous avons tracé sur la figure 2.8 l'allure du contraste ζ_0 en fonction de ces deux angles. L'allure des contrastes ζ_M avec $M < 5$ est par ailleurs tout à fait semblable à celle de ζ_0 . Nous constatons sans équivoque l'existence de maxima locaux du contraste.

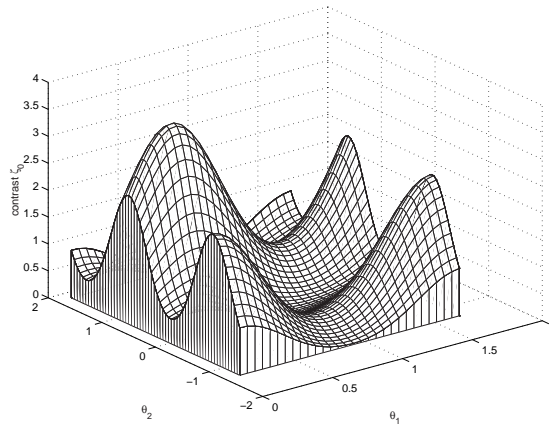


FIG. 2.8 – Représentation du contraste ζ_0 comme fonction des angles de rotation. Les sources sont PAM4 i.i.d. et ont 2048 échantillons.

2.5.2-b) Difficultés d'estimation

Afin de confirmer l'intérêt de considérer, dans la mesure du possible, un nombre minimal de cumulants, nous avons regardé, dans le cas de sources i.i.d., la variance de l'estimation des contrastes $\zeta_0, \zeta_2, \zeta_3$ et ζ_4 . Le résultat a été obtenu par moyennage sur 2500 réalisations de Monte-Carlo et est donné sur la figure 2.9. Nous constatons que plus le nombre de cumulants intervenant dans le contraste est élevé, plus la variance d'estimation est importante. De plus, les deux maxima de la figure 2.9 indiquent les valeurs des paramètres du séparateur pour lesquelles la variance d'estimation du contraste est la plus grande et correspondent précisément aux minima du contraste. Ainsi, les problèmes d'estimation sont susceptibles de faire apparaître des maxima locaux parasites supplémentaires.

2.5.2-c) Apport des algorithmes génétiques

Pour affirmer l'intérêt des approches conjointes et pour démontrer qu'elles sont utilisables malgré la présence de maxima locaux parasites, nous avons envisagé l'utilisation d'algorithmes génétiques. L'utilisation de telles méthodes se fait cependant au prix d'un coût de calcul accru. Une toolbox Matlab disponible gratuitement [1] a été utilisée. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.2 : nous constatons que l'utilisation d'un algorithme génétique avant une phase d'optimisation classique augmente considérablement les chances de succès de la séparation.

2.6 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à une approche conjointe de la séparation de sources. Après avoir présenté le problème, nous avons exposé comment il est possible,

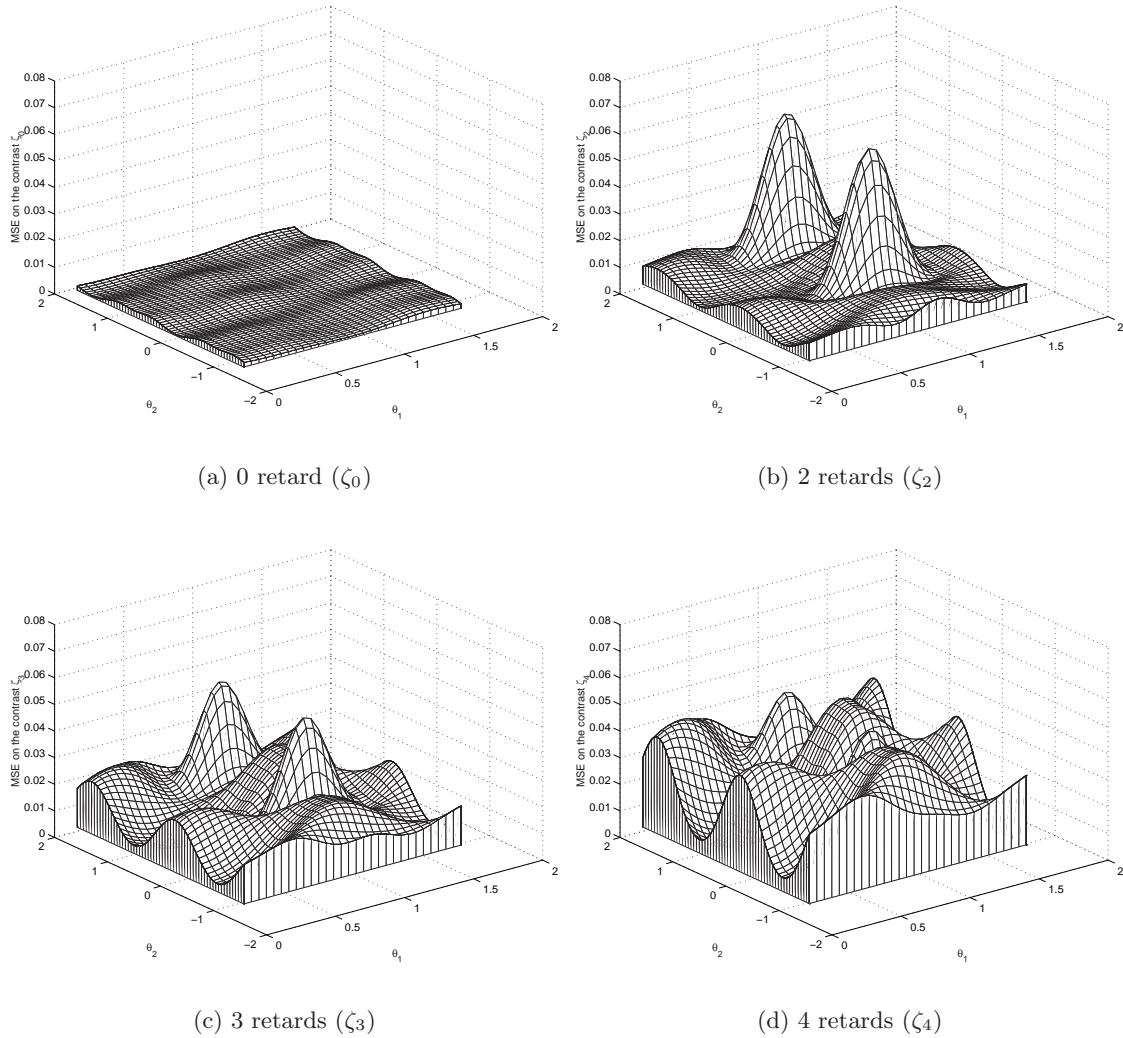


FIG. 2.9 – Erreur d'estimation des contrastes. Les sources sont PAM4 i.i.d. avec 2048 échantillons.

Méthode	% de succès
Gradient initialisé aléatoirement	51
Alg. gén. (gènes binaires) + gradient	92
Alg. gén. (gènes réels) + gradient	96

TAB. 2.2 – Pourcentage de succès de la séparation pour deux sources ARCH(5) mélangées par un filtre de longueur 3 (La séparation a été considérée comme réussie lorsque l'EQM moyenne sur les deux sources était inférieure à $1e-2$).

d'utiliser les statistiques d'ordre deux pour un préblanchiment et de se restreindre ensuite à la recherche d'un inverse dans l'ensemble des filtres para-unitaires.

En se basant sur une approche spectrale, nous avons pu démontrer la validité de contrastes fréquentiels. La relation de Parseval a permis de déterminer des contrastes à base de cumulants qui leur correspondent dans le domaine temporel. Le problème de l'estimation de ces contrastes se pose dans leur utilisation concrète : il convient en effet de limiter au maximum le nombre de termes estimés afin d'obtenir des performances convenables. Par la prise en compte d'informations sur la nature des sources et plus précisément leur champs de cumulants nous avons alors :

- mis en évidence une classe très générale de contrastes. Leur expression, simplifiée au maximum facilite leur utilisation.
- montré que le critère standard (2.71) n'est en général pas un contraste pour des processus non linéaires.

Les simulations ont confirmé l'intérêt de la famille de contrastes proposés. D'autre part, l'applicabilité de l'ensemble des résultats a été montrée, au prix d'une charge de calcul éventuellement importante. L'étape de préblanchiment n'a cependant pas été considérée ; cette dernière limite l'utilisation pratique de telles méthodes.