

---

# Applications des approches séquentielles

Le chapitre précédent a présenté d'un point de vue général la séparation de signaux sources par des méthodes séquentielles. Nous considérons dans ce chapitre deux applications intéressantes de la méthode qui a été proposée. Nous étudions d'abord l'utilisation des méthodes de séparation dans le cadre des télécommunications et plus particulièrement des signaux modulés par une modulation à phase continue (CPM). Ensuite, nous établissons de quelle manière les méthodes développées peuvent se généraliser au cas des images et des signaux multidimensionnels.

## 4.1 Séparation et détection d'un mélange de signaux modulés CPM

### 4.1.1 Introduction aux modulations CPM

#### 4.1.1-a) Généralités

Les modulations à phase continue, couramment appelées modulations CPM (continuous phase modulation) présentent des propriétés qui les rendent particulièrement attractives, parmi lesquelles la propriété importante de module constant de leur enveloppe. De plus, elles présentent une très bonne efficacité spectrale et réalisent un bon compromis entre efficacité de puissance et complexité des modulateurs/démodulateurs. Pour ces raisons, les modulations CPM sont utilisées dans le système européen de téléphones mobiles de seconde génération (GSM), ainsi que dans de nombreux systèmes de communications militaires, ...

La démodulation de signaux CPM ayant subi une transmission selon un canal à trajets multiples trouve un intérêt pratique dans l'application à l'écoute passive. Dans le cas d'un émetteur unique, la plupart des méthodes consistent à estimer conjointement les paramètres du canal et la séquence de symboles [70, 21, 51]. En réalité, d'après [10], il est possible d'estimer la séquence de symboles à l'aide d'un égaliseur —par exemple l'algorithme de module constant (CMA) de Godard [38]— suivi d'un algorithme de détection classique. Nous allons illustrer que cette méthode est généralisable dans la configuration d'émetteurs multiples. Nous rappelons d'abord les propriétés essentielles des CPM dont nous aurons l'utilité. Elles sont exposées plus en détail dans [9]; d'autres informations peuvent être trouvées dans [81].

#### 4.1.1-b) Modèle de signal

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d. de symboles de communication. Nous supposons que, pour tout  $n$ ,  $a_n$  prend de manière équiprobable sa valeur dans l'alphabet binaire  $\{+1, -1\}$ . L'enveloppe complexe (à temps continu) du signal CPM associé est :

$$\underline{s}(t) := e^{i\psi(t)}, \quad (4.1)$$

où la phase  $\psi(t)$  de  $\underline{s}(t)$  vaut :

$$\psi(t) := \pi h \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - kT_s) \right). \quad (4.2)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $h \in ]0, 1[$  est un paramètre fixe appelé indice de modulation et  $T_s$  désigne la période symbole. Enfin,  $\phi$  est une fonction continue, croissante telle que, si l'on fixe  $L \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} \forall t \leq 0, \quad \phi(t) &= 0 \\ \forall t \in [0, LT_s] \quad \phi(t) &\in [0, 1] \\ \forall t \geq LT_s \quad \phi(t) &= 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans la pratique, la fonction  $\phi$  est une primitive de ce qui est appelé la fonction de mise en forme  $g(t)$  : cette dernière est continue, positive, de support  $[0, LT_s]$  ( $L$  est donc la longueur du filtre de mise en forme) et normalisée de sorte que  $\int_0^{LT_s} g(t) dt = 1$ . Nous avons par conséquent la relation :  $\phi(t) := \int_0^t g(u) du$ . Selon la longueur du filtre de mise en forme, on distingue :

- si  $L = 1$ , la modulation est dite modulation CPM à réponse complète. Dans ce cas, le support de la fonction de mise en forme correspond à  $[0, T_s]$ .
- si  $L > 1$ , la modulation est dite modulation CPM à réponse partielle.

Dans la suite de l'exposé, seules les modulations CPM à réponse complète seront envisagées.

#### 4.1.1-c) Représentation de Laurent (CPM à réponse complète)

Dans le cas de CPM à réponse complète, il a été démontré dans [59] que le signal  $\underline{s}(t)$  peut s'écrire comme une modulation linéaire de pseudo-symboles. Nous reprenons ici la démonstration donnée dans [9].

D'après (4.1) et (4.2),

$$\underline{s}(t) = e^{i\pi h \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - kT_s) \right)} \quad (4.4)$$

Supposons  $t \in [nT_s, (n+1)T_s[$ . En utilisant les propriétés (4.3) de la fonction  $\phi$ , il vient :

$$\forall t \in [nT_s, (n+1)T_s[ \quad \underline{s}(t) = \underline{s}(nT_s) e^{i\pi h a_n \phi(t - nT_s)} \quad (4.5)$$

Par ailleurs, en exploitant le fait que  $a_n = \pm 1$ , on vérifie aisément que :

$$e^{i\pi h a_n \phi(t - nT_s)} = e^{i\pi h a_n} \frac{\sin(\pi h \phi(t - nT_s))}{\sin(\pi h)} + \frac{\sin(\pi h (1 - \phi(t - nT_s)))}{\sin(\pi h)} \quad (4.6)$$

et donc :

$$\forall t \in [nT_s, (n+1)T_s[$$

$$\underline{s}(t) = \underline{s}(nT_s)e^{i\pi h a_n} \frac{\sin(\pi h \phi(t - nT_s))}{\sin(\pi h)} + \underline{s}(nT_s) \frac{\sin(\pi h(1 - \phi(t - nT_s)))}{\sin(\pi h)} \quad (4.7)$$

Introduisons la suite  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\underline{s}((n+1)T_s))_{n \in \mathbb{Z}}$ , appelée suite de pseudo-symboles. Cette suite est liée à  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et vérifie :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, & s(n+1) = e^{i\pi h a_n} s(n) \\ s(0) \text{ est une variable aléatoire centrée, de module 1, uniformément distribuée} \\ \text{sur l'ensemble de ses états possibles, et indépendante de } (a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}. \end{cases} \quad (4.8)$$

De (4.7), on déduit alors successivement

$$\forall t \in [nT_s, (n+1)T_s[$$

$$\underline{s}(t) = s(n) \frac{\sin(\pi h \phi(t - nT_s))}{\sin(\pi h)} + s(n-1) \frac{\sin(\pi h(1 - \phi(t - nT_s)))}{\sin(\pi h)} \quad (4.9)$$

puis l'équation suivante, appelée représentation de Laurent :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \underline{s}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k)c(t - kT_s) \quad (4.10)$$

où  $c(t)$  est la fonction de mise en forme de Laurent définie par :

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin ]0, 2T_s[, \\ \frac{\sin(\pi h \phi(t))}{\sin(\pi h)} & \text{si } 0 \leq t \leq T_s, \\ \frac{\sin(\pi h(1 - \phi(t - T_s)))}{\sin(\pi h)} & \text{si } T_s \leq t \leq 2T_s, \end{cases} \quad (4.11)$$

Il apparaît donc que le signal  $\underline{s}(t)$  a la structure d'une modulation linéaire, mais où la suite de pseudo-symboles —qui remplace la suite de symbole originelle— n'est pas i.i.d. mais seulement stationnaire. Plus précisément,  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est strictement stationnaire et n'est pas un processus linéaire.

## 4.1.2 Séparation de CPM dans le cas où la période symbole est égale à la période d'échantillonnage

### 4.1.2-a) Formulation du problème et lien avec les chapitres précédents

Nous considérons le cas d'une transmission de  $N$  signaux de communication distincts modulés en CPM. Nous notons  $s_j(t)$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  chacun de ces  $N$  signaux de communications;  $h_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  désigneront les indices de modulation respectivement associés et  $(a_n^j)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$  seront les symboles correspondants aux différents utilisateurs. Ces signaux sont transmis au travers d'un canal de propagation linéaire et invariant dans le temps, qui, par exemple, peut résulter d'un modèle de propagation multi-trajets.

Au niveau des capteurs, et après échantillonnage au rythme de la période symbole  $T_s$ , les observations  $\mathbf{x}(n)$  suivent alors un modèle de mélange convolutif du type :

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{M}(n-k)\mathbf{s}(n) + \mathbf{b}(n) \quad (4.12)$$

Il s'agit là du modèle exposé au chapitre 1.4.1, où les sources sont des suites de pseudo-symboles vérifiant les propriétés de l'équation (4.8). Le problème est de reconstituer chacune des communications, ce qui revient à l'étude de la séparation du mélange de pseudo-symboles, puis à l'application d'une démodulation. Un schéma de principe est donné à la figure 4.1.

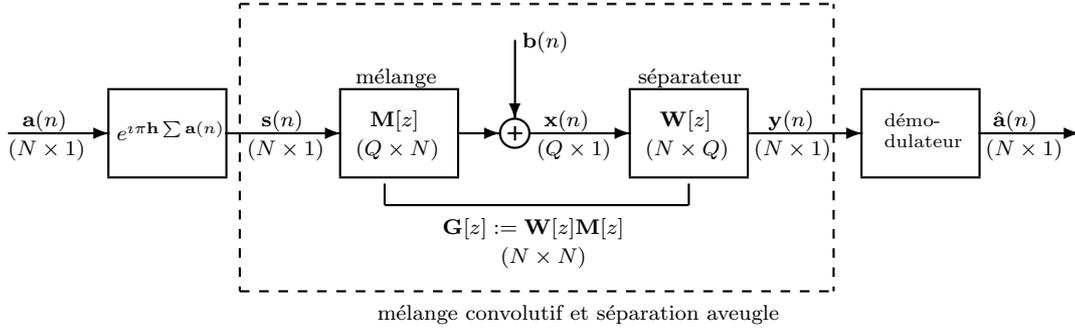


FIG. 4.1 – Système global à temps discret.

Dans cette application, nous considérons uniquement des approches séquentielles. Nous supposons être à la  $P^{\text{ème}}$  étape de la séparation, qui a été achevée avec succès par maximisation de  $J|_{\mathcal{F}_P}$  et éventuellement post-optimisation (voir le chapitre précédent). Ainsi, la  $P^{\text{ème}}$  sortie  $y_P(n)$  est une filtrée de la  $P^{\text{ème}}$  source, ce que nous écrivons :

$$y_P(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_P(k) s_P(n - k) \quad (4.13)$$

Pour atteindre notre objectif, qui est de détecter les symboles  $(a_k^P)_{k \in \mathbb{Z}}$ , il serait possible d'effectuer une égalisation du signal  $(y_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et d'appliquer ensuite un algorithme de décision dure. Nous allons montrer dans la suite que cette étape peut être grandement simplifiée.

#### 4.1.2-b) Contraste choisi et critère de module constant

Le choix effectué pour le critère  $J$  de l'équation (3.8) est  $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$  et  $f$  égale à moins l'identité. Ainsi, nous avons :

$$J(\mathbf{g}) = -\kappa_y(0, 0, 0) \quad (4.14)$$

Ce choix nous permet d'établir un lien entre  $J$  et le critère dit de module constant défini par :

$$J_{\text{CM}}(\mathbf{g}) := \mathbb{E}\{(|y(n)|^2 - 1)^2\} \quad (4.15)$$

Un tel lien a déjà été remarqué dans le cadre SISO [84]. Il est facile de généraliser ce résultat :

**Lemme 3** *Si le filtre global vérifie  $\|\mathbf{g}\| = 1$ , alors :*

$$J(\mathbf{g}) = 1 - J_{\text{CM}}(\mathbf{g}) \quad (4.16)$$

*De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , la borne supérieure définie dans (3.9) est atteinte pour le filtre identité et  $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \mathcal{M}_i = 1$ .*

*Preuve:* En supposant  $\|\mathbf{g}\|^2 = \mathbb{E}\{|y(n)|^2\} = 1$  et en utilisant la circularité de  $y(n)$  qui entraîne  $\mathbb{E}\{y(n)^2\} = 0$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\kappa_y(0, 0, 0) &= \mathbb{E}\{|y(n)|^4\} - 2\mathbb{E}\{|y(n)|^2\}^2 - |\mathbb{E}\{y(n)^2\}|^2 \\ &= \mathbb{E}\{|y(n)|^4\} - 2\mathbb{E}\{|y(n)|^2\} + 1 - 1 \\ &= \mathbb{E}\{(|y(n)|^2 - 1)^2\} - 1\end{aligned}\quad (4.17)$$

ce qui donne (4.16). D'autre part, il est clair d'après (4.15) et (4.16) que  $J(\mathbf{g})$  est majoré par 1. Enfin, si  $\mathbf{g} = (0, \dots, 0, z^0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{G}_i$ , nous avons  $J_{CM}(\mathbf{g}) = 0$  et ainsi  $J(\mathbf{g}) = 1$ , ce qui prouve que la borne supérieure est atteinte et vaut  $\mathcal{M}_i = 1$ . ■

Le lemme ci-dessus justifie l'hypothèse H.11 qui affirme que la borne supérieure (3.9) est atteinte. En général, les autres travaux [88] ont considéré ce point comme une hypothèse technique supplémentaire.

#### 4.1.2-c) Caractérisation de l'ambiguïté de filtrage scalaire

L'ensemble des filtres numériques qui, attaqués en entrée par un signal CPM, donnent une sortie de module constant a été caractérisé dans [10]. Ainsi, le lien établi entre  $J$  et le critère  $J_{CM}$  permet de caractériser l'ambiguïté de filtrage scalaire sur chacune des sources. On notera que les résultats sont distincts dans les cas où l'indice de modulation vaut  $h_P = \frac{1}{2}$  et  $h_P \neq \frac{1}{2}$ .

**Proposition 18** (cas  $h_P \neq \frac{1}{2}$ ) *Supposons  $h_P \neq \frac{1}{2}$ . La suite  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  peut alors s'écrire comme*

$$g_P(k) = e^{i\varphi_P} \check{g}_P(k - k_P), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

où  $k_P$  est un entier,  $\varphi_P \in [-\pi, \pi)$  et où  $(\check{g}_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  coïncide avec l'une des suites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{g}_P(0) = \frac{\sin \theta_P}{\sin(\pi h_P)} \\ \check{g}_P(1) = \frac{\sin(\pi h_P - \theta_P)}{\sin(\pi h_P)} \\ \check{g}_P(2) = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{g}_P(0) = \frac{\sin \theta_P}{\sin(\pi h_P)} \\ \check{g}_P(1) = \frac{e^{-i\theta_P}}{i \tan(\pi h_P)} \\ \check{g}_P(2) = \frac{i \cos \theta_P}{\sin(\pi h_P)} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

et  $\check{g}_P(k) = 0$  pour tout  $k$  différent de 0, 1 ou 2. Ici,  $\theta_P$  prend n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ .

Si maintenant  $h_P = \frac{1}{2}$ , le résultat suivant a été présenté dans [10] et est une conséquence directe de [41] :

**Proposition 19** (cas  $h_P = \frac{1}{2}$ ) *Supposons  $h_P = \frac{1}{2}$ . La suite  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  peut alors s'écrire comme :*

$$g_P(k) = e^{i\varphi_P} \check{g}_P(k - k_P), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (4.20)$$

où  $k_P$  est un entier,  $\varphi_i \in [-\pi, \pi[$  et où  $(\check{g}_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  coïncide avec l'une des séquences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{g}_P(0) = \sin \theta_P \\ \check{g}_P(K) = i^{-(K-1)} \cos \theta_P \end{array} \right. \quad (4.21)$$

où  $\check{g}_P(k) = 0$  pour tout  $k$  différent de 0 et  $K$ . Ici,  $\theta_P \in [-\pi, \pi[$  et  $K$  est un entier strictement positif.

A partir de maintenant, nous nous concentrons uniquement sur le cas  $h_P \neq \frac{1}{2}$ .

#### 4.1.2-d) Commentaires

Nous dénommerons respectivement filtre de type I et type II les familles de filtres précédemment définies dans (4.19). Ainsi, on peut dire que le filtre  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  correspond à un filtre de type I ou II à un retard et un déphasage près.

Dans le cas où  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  correspond à un filtre de type I (à un retard et un déphasage près), le signal de sortie  $(y_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est tel que pour tout entier  $n$ ,

$$y_P(n) = e^{i\varphi_P} \left( \frac{\sin \theta_P}{\sin(\pi h_P)} s_i(n - k_P) + \frac{\sin(\pi h_P - \theta_P)}{\sin(\pi h_P)} s_P(n - k_P - 1) \right) \quad (4.22)$$

où  $k_P$ ,  $\phi_P$  et  $\theta_P$  sont les paramètres définis dans la proposition 18. Supposons maintenant que  $\theta_P$  soit tel que  $0 \leq \theta_P \leq \pi h_P$ . Dans ce cas,  $\theta_P$  peut s'écrire  $\theta_P = \pi h_P \phi_P(\tau_P)$ , où  $\tau_P$  est un élément de l'intervalle de temps  $[0, T_s]$  et où  $\phi_P$  est la primitive de la fonction de mise en forme telle que définie à l'aide de (4.3). En utilisant la décomposition de Laurent (4.10) (ou bien l'équation (4.9)), on constate que l'équation (4.22) entraîne que pour tout entier  $n$ ,  $y_P(n) = e^{i\varphi_P} \underline{s}_P(nT_s - k_P T_s - \tau_P)$ , où  $\underline{s}_P(t)$  représente la source CPM à temps continu. En d'autres termes, le filtre  $\sum_k g_P(k) z^{-k}$  peut s'interpréter comme un filtre interpolateur (à un déphasage  $\varphi_P$  près). Ainsi, une étape de synchronisation suivie d'un algorithme de détection de CPM classique sont les seuls éléments nécessaires pour reconstituer les symboles émis  $(a_k^P)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Comme le paramètre  $\theta_P$  ne vérifie pas nécessairement  $0 \leq \theta_P \leq \pi h_P$  et comme  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  peut également être un filtre de type II, l'estimation des symboles peut demander une procédure plus compliquée. Cependant, il est intéressant de noter que dans tous les cas, l'utilisation d'un égaliseur SISO permettant de récupérer  $(s_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas indispensable. La proposition 18 donne une paramétrisation du filtre  $(g_P(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  et permet donc de remplacer une étape d'égalisation potentiellement coûteuse par une estimation plus simple des paramètres inconnus. Par exemple, un estimateur du maximum de vraisemblance peut être considéré en chaque point  $\theta_P$  d'une grille discrète afin d'estimer simultanément  $\theta_P$  et la suite de symboles. D'autres méthodes plus évoluées ont également été proposées parmi lesquelles on peut citer le «Per-Survivor Processing» [82].

#### 4.1.3 Simulations

##### 4.1.3-a) Méthodologie et description générale

Nous avons étudié d'abord la méthode de séparation en elle-même et ensuite envisagé la détection des différentes suites de symboles. Pour l'étude de la seule séparation, ont été pris en compte les critères

$$\tau_P := 1 - \frac{\max_{j \geq P} \|g_j\|_j^2}{\sum_j \|g_j\|_j^2} \quad (P \text{ fixé, } 1 \leq P \leq N) \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{g}[z] = (g_1[z], \dots, g_N[z])$  représente la  $P^{\text{ème}}$  ligne du filtre global. Comme expliqué au paragraphe 3.5.2, nous avons  $0 \leq \tau_P \leq 1$  et  $\tau_P = 0$  uniquement dans le cas d'une séparation parfaitement réussie. Nous avons par ailleurs utilisé la moyenne  $\tau = \frac{1}{N} \sum_{P=1}^N \tau_P$  comme critère de réussite de la séparation MIMO.

Compte tenu du contexte applicatif, nous avons considéré un modèle de canal classique en télécommunications. Les filtres de mélange ont été tirés selon un modèle de propagation multi-trajets réduit à trois trajets. Les facteurs d'atténuation ont été fixés à 1 pour le

premier trajet et tirés aléatoirement dans  $[-1, 1]$  (loi uniforme) pour les autres trajets. Les retards de propagation ont été supposés nuls pour le premier trajet et tirés uniformément dans  $[0, 3T_s]$  pour les autres trajets. Enfin, l'effet des angles d'arrivée a été modélisé par un déphasage complexe entre les capteurs, lequel a été tiré selon une loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

#### 4.1.3-b) Validité de la méthode

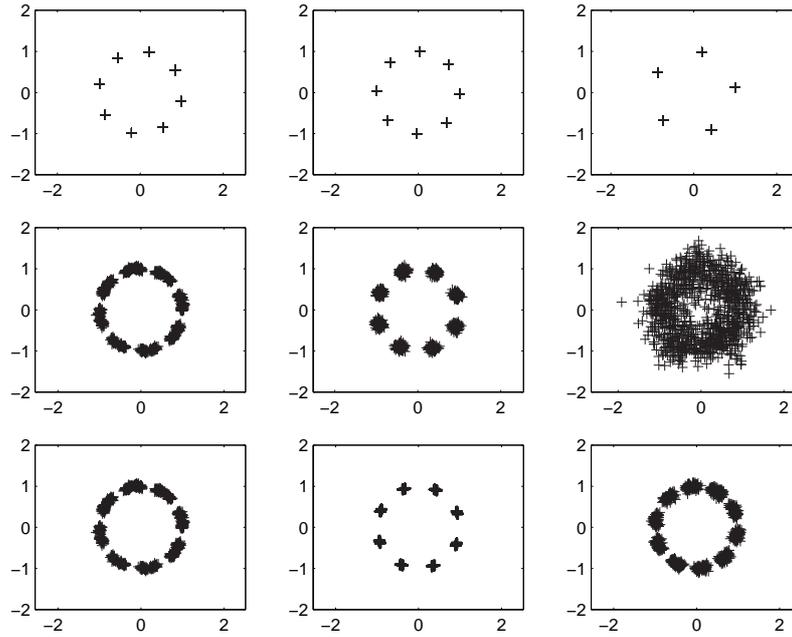


FIG. 4.2 – Sources originales (1<sup>ère</sup> ligne) et reconstituées, sans post-optimisation locale (2<sup>ème</sup> ligne) et avec (3<sup>ème</sup> ligne) (Indices de modulations : 0,25 ; 0,75 et 0,4 ; 4 capteurs, filtre de mélange de longueur 4, 1000 échantillons.)

La figure 4.2 représente les constellations de  $N = 3$  sources ainsi que les constellations obtenues après séparation de leur mélange sur  $Q = 4$  capteurs. Nous constatons clairement que la méthode de séparation réussit particulièrement bien pour les deux premières sources (colonnes 1 et 2), contrairement à la troisième source dont la restauration semble de moindre qualité.

En outre, la procédure post-optimisation expliquée au paragraphe 3.4.5 mène à des résultats de qualité bien meilleure comme le montre la dernière ligne de la figure 4.2. Cet exemple illustre que, au cours des étapes successives, l'estimation des ensembles  $\mathcal{F}_i, i \in \{2, \dots, N\}$  devient de moindre qualité. Il s'agit d'un point qu'il convient de traiter avec soin.

On remarquera que les sources extraites sont de module unité, témoignant de ce que l'algorithme, basé sur une méthode d'optimisation locale, a en réalité convergé vers une solution de module un : il s'agit donc d'un maximum global du critère  $J$ . Il est intéressant de noter aussi que les sources sont bien reconstituées à un filtrage près de type I tel que défini à l'équation (4.19) : ceci s'observe particulièrement bien à la dernière ligne, dernière colonne de la figure 4.2, où l'on distingue clairement 10 groupes de points au lieu des 5 groupes représentés en haut de la même colonne et correspondant à un indice de

modulation de 0,4. Le même phénomène s'est produit dans la seconde colonne, mais le paramètre  $\theta$  étant proche de zéro (ou  $\pi$ ), les différents groupes de points ne peuvent être clairement distingués.

#### 4.1.3-c) Difficulté du cas des sources CPM

Nous avons illustré précédemment que la méthode de séparation hiérarchique était susceptible d'accumuler des erreurs. De ce fait, comme les ensembles  $\mathcal{F}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  ne sont pas connus exactement mais seulement estimés, des difficultés peuvent survenir lorsque l'on essaie d'imposer le nombre requis de contraintes. Nous avons tracé sur la figure 4.3 deux exemples typiques de distribution des valeurs singulières de la matrice de contrainte (*i.e.* le vecteur des paramètres recherchés appartient au noyau de cette matrice, qui avait été notée  $\mathbf{A}_1$  dans le paragraphe 3.4.4). Ces exemples correspondent aux mélanges de deux sources i.i.d. et de deux sources CPM respectivement. Sur la figure 4.3(a), les

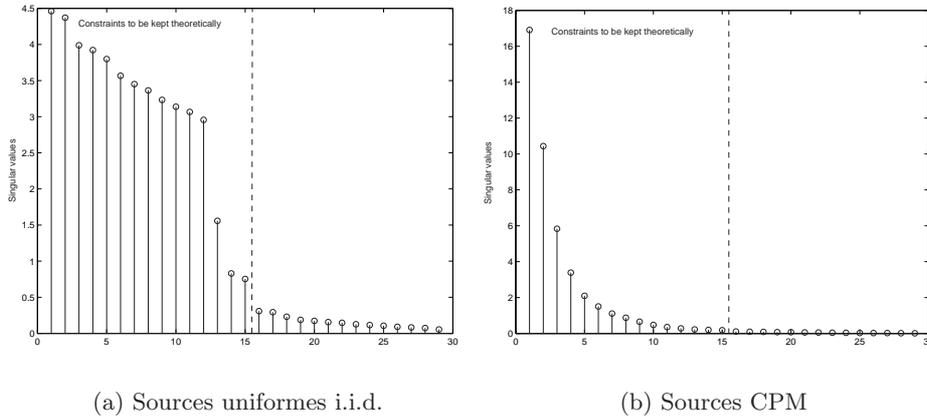


FIG. 4.3 – Deux exemples typiques des distributions des valeurs singulières de la matrice de contrainte (obtenus avec un filtre de mélange identique, 10000 échantillons et deux types de sources distincts).

valeurs singulières peuvent être séparées en deux groupes et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs correspondant aux valeurs singulières les plus petites permet d'aboutir à une estimation fiable de l'ensemble  $\mathcal{F}_i$  cherché. En comparaison, ce phénomène ne se produit pas pour des sources CPM et il n'apparaît pas de saut dans la distribution des valeurs singulières de la figure 4.3(b). Dès lors, il ne peut être exclu que l'estimation des ensembles  $\mathcal{F}_i$  soit fortement compromise. Ainsi, le nombre idéal de contraintes à prendre en compte résulte d'un compromis et le nombre théorique déterminé au paragraphe C.4 n'apparaît plus que comme une indication. Prendre en compte plus de contraintes limitera le risque de retrouver plusieurs fois sur une source déjà extraite, mais limitera fortement la qualité de la séparation. En revanche, choisir moins de contraintes mènera à une séparation de meilleure qualité, mais à un risque accru d'extraire une source déjà extraite.

#### 4.1.3-d) Etude sur deux filtres fixés

Nous illustrons ici sur deux filtres fixés les possibilités offertes par la méthode hiérarchique de séparation sur des sources CPM. Les performances sont également comparées à

celles offertes par une méthode de déflation.

Le premier filtre considéré comporte 4 capteurs pour 3 sources en entrée et sa longueur est de 4. D'après le paragraphe 3.4, le filtre séparant a été choisi de longueur 9 et le nombre de contraintes d'orthogonalité à imposer en théorie est de 12 par source précédemment extraite. Nous avons représenté sur la figure 4.4 les fonctions de répartition du critère de séparation  $\tau$  pour respectivement 4 et 9 conditions d'orthogonalité par source extraite. Nous constatons sur la figure 4.4(a) que, si le nombre de contraintes imposées est suffisamment faible, la méthode hiérarchique offre des performances très satisfaisante en comparaison de la déflation. Une post-optimisation améliore encore les performances de la séparation. En revanche, lorsque le nombre de contraintes d'orthogonalité est plus important, la qualité de la séparation est moindre, comme indiqué par la figure 4.4(b).

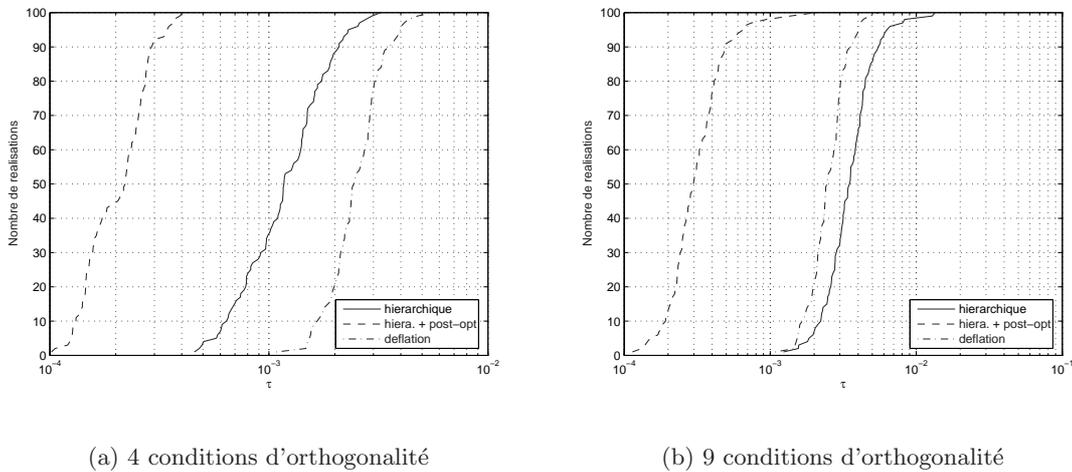
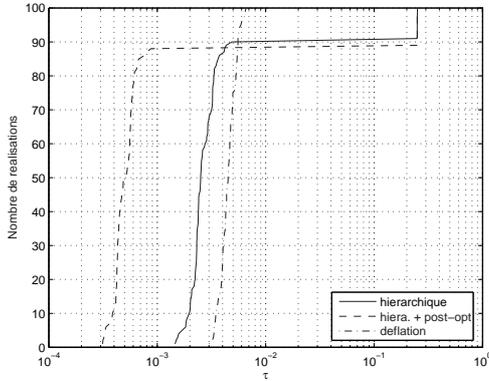
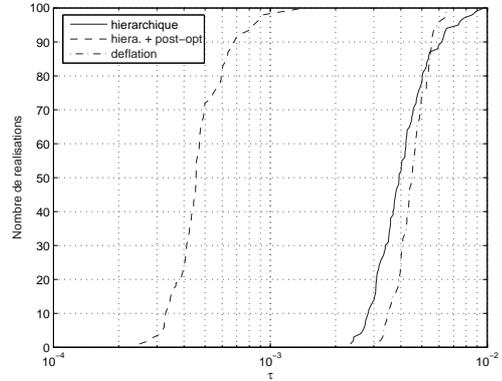


FIG. 4.4 – Fonction de répartition du critère  $\frac{\sum_{i=1}^3 \tau_i}{3}$  pour un filtre  $4 \times 3$  fixé. (4000 échantillons)

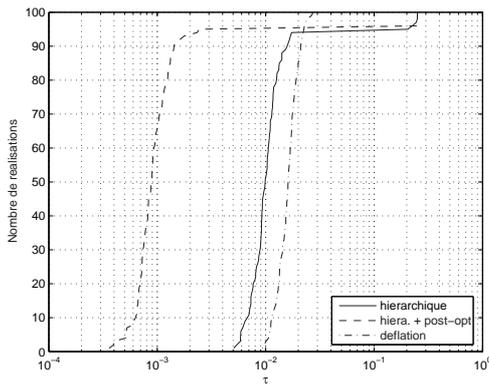
Afin de mieux cerner les limites de la méthode hiérarchique, il est intéressant de se placer dans le cas d'un mélange de 4 sources sur 5 capteurs et de longueur 4 (figure 4.5 et tableau 4.1). Nous remarquons que la méthode hiérarchique offre, pour 4000 échantillons disponibles, de bons résultats lorsque 9 conditions d'orthogonalité sont prises en compte par source (figure 4.5(b)). Un nombre plus faible de conditions d'orthogonalité divise en revanche les réalisations en deux catégories (figure 4.5(a)) : une majorité d'entre elles donne une séparation meilleure que dans le cas d'une déflation, tandis que dans une minorité de cas, la séparation a échoué. L'apparition de ces cas d'échec complet de la séparation se remarque aussi dans le cas d'une diminution du nombre d'échantillons (figure 4.5(d)). L'observation des tableaux 4.1 et 4.2 montre par ailleurs que la difficulté provient de l'estimation de la dernière source. Les premières sources sont en effet correctement estimées, avec une accumulation d'erreur inférieure à celle de la déflation. Dans le cas d'un nombre trop faible de contraintes, il existe en revanche une minorité de cas où la dernière source est l'une de celles précédemment extraite. Ceci se traduit à la fois par une très forte dégradation de la valeur moyenne du critère de séparation de la dernière source, et par une dégradation plus mesurée de la valeur médiane.



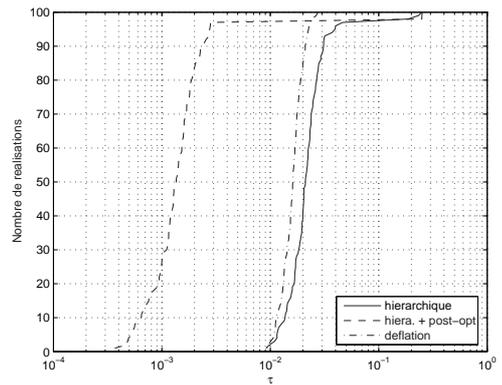
(a) 6 conditions d'orthogonalité, 4000 échantillons



(b) 9 conditions d'orthogonalité, 4000 échantillons



(c) 6 conditions d'orthogonalité, 1000 échantillons



(d) 9 conditions d'orthogonalité, 1000 échantillons

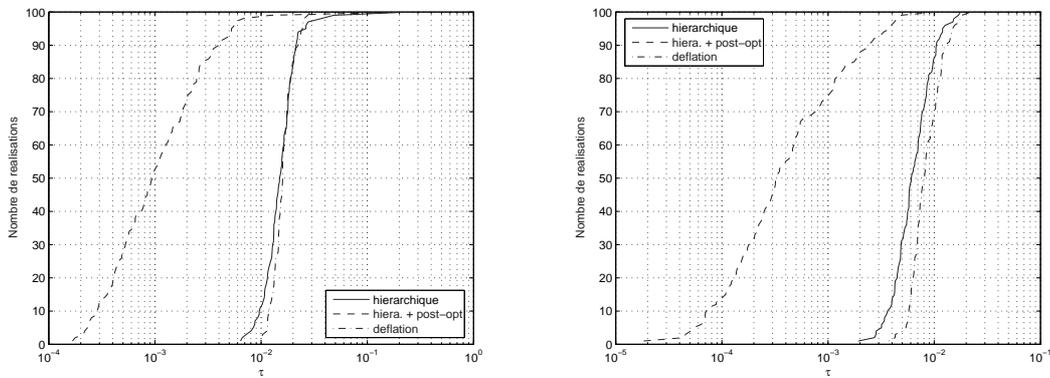
FIG. 4.5 – Fonction de répartition du critère  $\frac{\sum_{i=1}^4 \tau_i}{4}$  pour un filtre  $5 \times 4$  fixé.

	6 cond. orth.			9 cond. orth.		
	hiéra	hiéra+ post-opt.	déflation	hiéra.	hiéra + post-opt.	déflation
1 <sup>ère</sup> source : $\tau_1$	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	3.695e-3	0.0004
2 <sup>ème</sup> source : $\tau_2$	0.0004	0.0002	0.0034	0.0011	3.734e-3	0.0034
3 <sup>ème</sup> source : $\tau_3$	0.0044	0.0003	0.0063	0.0068	3.350e-3	0.0063
4 <sup>ème</sup> source : $\tau_4$	0.1042	0.1209	0.0082	0.0088	9.136e-3	0.0082

TAB. 4.1 – Valeurs moyennes des critères  $\tau_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  pour un filtre  $5 \times 4$  fixé, 4000 échantillons, 100 réalisations de Monte-Carlo.

#### 4.1.3-e) Etude de Monte-Carlo avec canal aléatoire

Comme indiqué précédemment, le nombre de conditions d'orthogonalité sélectionnées a un impact important sur la qualité de séparation. Aussi, de nombreuses possibilités permettent de faire le choix des valeurs singulières à conserver ou non. A la figure 4.6 sont donnés les résultats pour des filtres tirés aléatoirement et où seules les contraintes correspondant à des valeurs singulières supérieures à un seuil ont été conservées. Nous constatons que la méthode hiérarchique est susceptible de fournir de bon résultats sous réserve de bien effectuer le choix des conditions d'orthogonalité. Remarquons aussi que l'étape de post-optimisation améliore considérablement les résultats. Enfin, ces simulations témoignent également du fait que les résultats précédents ne sont pas particuliers aux filtres choisis.



(a) 4 sources, limite des valeurs singulières conservées : 1

(b) 3 sources, limite des valeurs singulières conservées : 0.7

FIG. 4.6 – Fonction de répartition du critère  $\frac{\sum_{i=1}^N \tau_i}{N}$  pour des filtres  $4 \times 3$  et  $5 \times 4$  générés aléatoirement. Le nombre d'échantillons a été fixé à 1000.

#### 4.1.3-f) Cas réel bruité et taux d'erreurs

Nous avons envisagé la détection des symboles dans le cas favorable du mélange de la figure 4.4(a) avec 4 conditions d'orthogonalité. Il convient dans le cadre d'une application de prendre en compte le bruit. Aussi, le tableau 4.3 donne pour différents rapports signal à bruit les critères de séparation moyen obtenus. Le tableau 4.4 donne quant à lui les taux d'erreurs estimés à partir de 1000 réalisations. Nous constatons que les résultats sont de bonne qualité, ce qui permet d'envisager des applications concrètes.

	6 cond. orth.			9 cond. orth.		
	hiéra	hiéra+ post-opt.	déflation	hiéra.	hiéra + post-opt.	déflation
1 <sup>ère</sup> source : $\tau_1$	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	3.721e-4	0.0004
2 <sup>ème</sup> source : $\tau_2$	0.0003	0.0001	0.0031	0.0011	1.052e-4	0.0031
3 <sup>ème</sup> source : $\tau_3$	0.0041	0.0002	0.0063	0.0064	2.300e-4	0.0063
4 <sup>ème</sup> source : $\tau_4$	0.0051	0.0011	0.0079	0.0077	9.770e-4	0.0079

TAB. 4.2 – Valeurs médiane des critères  $\tau_i, i \in \{1, \dots, 4\}$  pour un filtre  $5 \times 4$  fixé, 4000 échantillons, 100 réalisations de Monte-Carlo.

SNR en dB	Hiéra.				Hiéra. + post-opt.			
	25	20	15	10	25	20	15	10
1 <sup>ère</sup> source : $\tau_1$	8.3e-4	1.6e-3	3.5e-3	7.1e-3	8.3e-4	1.6e-3	3.5e-3	7.1e-3
2 <sup>ème</sup> source : $\tau_2$	1.0e-3	2.4e-3	4.5e-3	7.1e-3	9.4e-4	2.3e-3	4.6e-3	7.8e-3
3 <sup>ème</sup> source : $\tau_3$	1.3e-2	1.6e-2	2.0e-2	3.5e-2	1.2e-3	3.1e-3	8.3e-3	2.3e-2

TAB. 4.3 – Valeur moyenne des critères  $\tau_i, i \in \{1, \dots, 3\}$  pour un filtre de mélange  $4 \times 3$  fixé et pour différentes valeurs du SNR. Le nombre de réalisations de Monte-Carlo est de 100.

SNR en dB	Hiéra.			Hiéra. + post-opt.		
	$\infty$	25	15	$\infty$	25	15
1 <sup>ère</sup> source : $\tau_1$	1.4e-5	5.8e-5	2.6e-3	1.4e-5	5.8e-5	2.6e-3
2 <sup>ème</sup> source : $\tau_2$	2.9e-5	8.1e-5	4.6e-3	1.8e-5	8.3e-5	4.2e-3
3 <sup>ème</sup> source : $\tau_3$	1.4e-5	2.4e-5	1.9e-3	2.0e-6	1.9e-5	0.7e-3

TAB. 4.4 – Estimation du BER pour un filtre de mélange  $4 \times 3$  fixé et pour différents SNR. Le nombre de réalisations de Monte-Carlo est de 1000.

## 4.2 Séparation de mélanges convolutifs d'images

Nous considérons dans cette partie une application de la séparation de sources aux mélanges linéaires d'images. Deux difficultés se sont principalement présentées au cours de cette étude.

Nous avons d'abord dû étudier l'inversibilité des mélanges MIMO convolutifs 2D. Ce dernier problème peut se ramener à des propriétés des matrices polynomiales à deux indéterminées. Même si leur accès n'est pas aisé dans la littérature, les résultats requis existent quel que soit le nombre d'indéterminées : ils sont présentés dans l'annexe A mais les points utiles peuvent être admis sans nuire à la compréhension du texte. Après résolution des difficultés propres au cas 2D, nous avons pu étendre les algorithmes de séparation 1D au cas des images.

L'autre problème auquel nous avons été confrontés est que le contenu spectral des images se révèle en général non uniforme, notamment dans le cas d'images naturelles. Il est donc apparu indispensable de vérifier que nos méthodes s'appliquent dans le cas de telles sources. Par delà l'aspect théorique, il convient d'être conscient des limites qu'imposent des sources au spectre très inégalement réparti.

Enfin, des simulations illustreront la validité des points théoriques qui ont été soulevés.

### 4.2.1 Bref aperçu des méthodes de séparation/restauration en image

La séparation de sources a soulevé un certain intérêt dans le domaine du traitement d'images. En général, le modèle exploité reste toutefois celui des mélanges instantanés et de l'analyse en composantes indépendantes. Parmi les nombreuses applications de l'analyse en composantes indépendantes dans le domaine des images, on peut citer l'extraction de composantes modélisant le fonctionnement neuronal du cerveau [44], la séparation du rayonnement fossile dit CMB (Cosmic Microwave Background) [16], ...

Le problème de la déconvolution d'images appartient à un domaine différent de celui de la séparation de source et qui a été exploré depuis plus longtemps. Dans le cas SISO, de nombreuses méthodes ont été proposées. Elles font généralement appel à une régularisation ou une information *a priori* (voir [55] pour une revue des méthodes existantes). Par ailleurs, il est dans certain cas possible d'utiliser l'acquisition d'une même image sur différents canaux : cette configuration de type SIMO (une seule et même image se trouve sur plusieurs capteurs) a également donné lieu à un certain nombre de contributions, notamment dans le cas aveugle (voir [37, 95] et les références qui y sont citées). A notre connaissance, le cas MIMO convolutif n'avait en revanche encore jamais été abordé pour des images.

### 4.2.2 Inversibilité des mélanges

Afin de ne pas laisser d'ambiguïté de notation, nous reformulons brièvement le problème de la séparation de mélanges convolutifs de sources dans le cas bidimensionnel<sup>1</sup>. Les  $N$  sources, mutuellement indépendantes, sont notées  $(s_i(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  et sont mélangées par un filtre MIMO de réponse impulsionnelle  $(\mathbf{M}(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$  suivant le modèle :

$$\mathbf{x}(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{M}(k_1, k_2) \mathbf{s}(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (4.24)$$

<sup>1</sup>Compte tenu du fait que les résultats de l'annexe A sont valables dans le cas général multidimensionnel, une extension à des signaux  $nD$  (avec  $n > 2$ ) est immédiate sur le plan théorique. Pour des raisons de lisibilité, ceci est laissé au soin du lecteur.

Le vecteur  $(\mathbf{x}(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$  est composé des observations sur les  $Q \geq N$  capteurs et, à partir de sa seule connaissance, le problème de la séparation recherche un séparateur  $(\mathbf{W}(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$  tel que la sortie globale permette de restituer les sources (aux ambiguïtés près : filtrage scalaire, permutation) et s'écrive :

$$\mathbf{y}(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{W}(k_1, k_2) \mathbf{x}(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (4.25)$$

De même que dans le cas unidimensionnel, on définit la transformée en  $z$  bidimensionnelle du système de mélange par :

$$\mathbf{M}[z_1, z_2] = \sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{M}(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} \quad (4.26)$$

La transformée en  $z$  du système séparant est définie de façon analogue. Dans le cas général de sources non i.i.d., on souhaite alors trouver  $\mathbf{W}[z_1, z_2]$  tel que le filtre global  $\mathbf{G}[z_1, z_2] := \mathbf{W}[z_1, z_2] \mathbf{M}[z_1, z_2]$  soit «diagonal à une permutation près».

Dans le cas de filtres unidimensionnels et RIF, il a été possible d'assurer l'existence d'un tel inverse. Ce résultat se généralise au cas bidimensionnel :

**Propriété 2** *Supposons que  $\mathbf{M}[z_1, z_2]$  soit RIF. Alors,  $\mathbf{M}[z_1, z_2]$  admet un inverse RIF si et seulement si le nombre de capteurs est supérieur ou égal au nombre de sources ( $Q \geq N$ ) et si de plus :*

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{*2} \quad \text{Rang}(\mathbf{M}[z_1, z_2]) = N \quad (4.27)$$

Cette propriété découle directement de résultats sur les matrices polynomiales à plusieurs indéterminées [35] (voir le paragraphe A.3 de l'annexe pour plus d'informations).

Dans le cas d'un filtre de mélange obtenu aléatoirement, il est intéressant de savoir si son inversibilité constitue une caractéristique vraisemblable. Des éléments de réponse ont été donnés dans [83] et en particulier, la propriété suivante s'applique (voir le paragraphe 1.3.3-c) de l'annexe A) :

**Propriété 3** *Supposons que le filtre  $\mathbf{M}[z_1, z_2]$  de taille  $Q \times N$  soit RIF. Si ses coefficients sont tirés selon une lois de probabilité à densité continue, et si  $Q > N$ , alors  $\mathbf{M}[z_1, z_2]$  est presque sûrement inversible à gauche par un filtre RIF.*

Pour terminer, signalons également notre intérêt à connaître l'ordre minimal d'un inverse en cas d'existence. Cette question a déjà été en partie abordée et, dans certains cas, des majorants de l'ordre minimal ont été donnés [83]. La question de l'obtention de bornes minimales semble toutefois encore ouverte.

### 4.2.3 Application des méthodes de séparation séquentielles dans le cas des images

Nous supposons dans ce paragraphe que le filtre de mélange admet un inverse à gauche de réponse impulsionnelle finie. Nous allons alors montrer que les procédures de séparation utilisées dans le cas unidimensionnel peuvent aisément être utilisées pour la séparation d'images.

Considérons dans un premier temps l'extraction d'une source à partir des observations  $(\mathbf{x}(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$ . De même que dans le cas unidimensionnel, nous noterons  $\mathbf{w}[z_1, z_2]$

une ligne du filtre séparant  $\mathbf{W}[z_1, z_2]$ .  $(y(n_1, n_2))_{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2}$  est la sortie correspondante, ce que l'on écrit :  $y(n_1, n_2) = \mathbf{w}[z_1, z_2] \mathbf{x}(n_1, n_2)$ .

Dans le cas où le système séparant  $\mathbf{w}[z_1, z_2]$  est RIF et causal<sup>2</sup>, il existe des entiers positifs  $D_1$  et  $D_2$  qui caractérisent la longueur du filtre séparant<sup>3</sup>, c'est-à-dire tels que :

$$w(k_1, k_2) = 0 \text{ pour } (k_1, k_2) \notin \{0, \dots, D_1 - 1\} \times \{0, \dots, D_2 - 1\} \quad (4.28)$$

$\mathbf{w}[z_1, z_2]$  est donc défini par ses coefficients  $\mathbf{w}(k_1, k_2)$  pour  $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, D_1 - 1\} \times \{0, \dots, D_2 - 1\}$ . Il est alors possible de définir un vecteur ligne  $\underline{\mathbf{w}}$  et, pour tout  $(n_1, n_2)$ , un vecteur colonne  $\underline{\mathbf{x}}(n_1, n_2)$  qui contiennent les termes respectifs  $w_j(k_1, k_2)$  et  $x_j(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  lorsque  $(k_1, k_2)$  varie dans  $\{0, \dots, D_1 - 1\} \times \{0, \dots, D_2 - 1\}$  et  $j$  varie dans  $\{1, \dots, Q\}$ . La sortie du séparateur peut alors s'exprimer ainsi :

$$\forall (n_1, n_2) \quad y(n_1, n_2) = \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{x}}(n_1, n_2) \quad (4.29)$$

Dans le cas unidimensionnel, nous avons de la même façon :

$$\forall n \quad y(n) = \underline{\mathbf{w}} \underline{\mathbf{x}}(n) \quad (4.30)$$

La méthode de séparation justifiée au chapitre 3 par la proposition 9 et les suivantes (propositions 11, 12, 13 et 14) utilise une optimisation d'un critère de contraste ne dépendant que de  $y(n)$ . L'optimisation était effectuée par rapport aux paramètres du vecteur  $\underline{\mathbf{w}}$  à l'aide d'un gradient, en prenant soin de le renormaliser à chaque itération de sorte que la sortie globale soit de puissance unité.

Il ressort donc que la procédure de séparation 1D ne requiert pour son utilisation que les réalisations du vecteur  $\underline{\mathbf{x}}(n)$ . Compte tenu de l'écriture similaire des équations (4.29) et (4.30), nous constatons que les procédures de séparation 1D utilisées dans les méthodes séquentielles sont utilisables pour la séparation 2D à la condition d'adapter au préalable les procédés de construction de  $\underline{\mathbf{w}}$  et de  $\underline{\mathbf{x}}(n)$ .

On peut constater que le problème de séparation bidimensionnelle perd sa spécificité une fois effectuée la traduction pour une résolution par des procédures 1D. En particulier, toute éventuelle structure satisfaite par des filtres bidimensionnels (telle que l'isotropie, la symétrie, ...) est ignorée par les procédures 1D. Naturellement, dans le cas où une telle information *a priori* est disponible, il est tout à fait judicieux d'essayer de la prendre en compte et de l'incorporer au modèle du filtre.

#### 4.2.4 Problèmes liés à l'occupation spectrale des sources

Les images naturelles sont fortement corrélées et leur spectre est principalement concentré sur les basses fréquences. Aussi, nous considérons ici le cas limite où les sources n'occupent pas toute la bande spectrale existante mais où leur spectre est positif sur un ensemble  $\Omega$  et s'annule sur son complémentaire  $\bar{\Omega}$ . Pour des raisons de facilité de notation, nous revenons temporairement (uniquement dans les paragraphes 4.2.4 et 4.2.5-a)) à des notations unidimensionnelles. Le cas étudié revient donc à supposer :

<sup>2</sup>La causalité n'est ici supposée que par facilité de notation et peut être obtenue par un simple décalage de la réponse impulsionnelle puisque cette dernière est supposée finie.

<sup>3</sup>Des valeurs de  $D_1, D_2$  qui assurent l'existence d'un inverse sont données dans certains cas et en fonction des différents paramètres dans [83]. Ces bornes ne sont cependant pas minimales et nous renvoyons le lecteur à la partie simulations pour connaître les ordres de grandeur menant à des résultats satisfaisants.

H.14 Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , la densité spectrale de puissance de la  $i^{\text{ème}}$  source vérifie :

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega & \Gamma_i(\omega) > 0 \\ \forall \omega \in \bar{\Omega} & \Gamma_i(\omega) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Cette hypothèse remplace et affaiblit l'hypothèse H.10 faite au chapitre précédent, paragraphe 3.1.2. Si l'on considère le filtre global  $\mathbf{g}[z] := (g_1[z], \dots, g_N[z])$ , et que pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  quelconque, on pose :

$$\|g_i\|_i := \left( \sum_{k,l} g_i(k) g_i^*(l) \gamma_i(l-k) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

il apparaît que  $\|\cdot\|_i$  ne définit une norme que lorsque  $\bar{\Omega}$  est de mesure nulle. Les résultats du chapitre précédent s'appliquent uniquement dans ce cas, car il est alors possible d'écrire pour tout  $i$  et pour tout filtre  $g_i[z]$  :

$$g_i[z] = \|g_i\|_i \tilde{g}_i[z] \quad (4.33)$$

où l'on pose de même qu'à l'équation (3.12) :

$$\tilde{g}_i[z] = \begin{cases} \frac{g_i[z]}{\|g_i\|_i} & \text{si } \|g_i\|_i \neq 0, \\ 0 & \text{si } \|g_i\|_i = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Cette approche n'est pas valable en l'état dans le cas où  $\bar{\Omega}$  est de mesure non nulle, la division par  $\|g_i\|_i$  n'étant pas toujours possible ci-dessus. En conséquence, nous proposons de décomposer le filtre global en :

$$\mathbf{g}[z] = \mathbf{g}^\Omega[z] + \mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z] \text{ avec :} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{g}^\Omega[e^{i\omega}] = \begin{cases} \mathbf{g}[e^{i\omega}] & \text{si } \omega \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \omega \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad \text{et :} \quad \mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[e^{i\omega}] = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \Omega, \\ \mathbf{g}[e^{i\omega}] & \text{si } \omega \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (4.36)$$

Compte tenu de l'hypothèse H.14, nous avons pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\mathbf{g}^\Omega[z] \mathbf{s}(n) = \mathbf{g}[z] \mathbf{s}(n) \quad \text{et :} \quad \mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z] \mathbf{s}(n) = 0 \quad (4.37)$$

et de plus :

$$\|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{g}^\Omega\|. \quad (4.38)$$

Nous pouvons donc reprendre les démonstrations du chapitre précédent à condition de ne considérer que le filtre  $\mathbf{g}^\Omega[z] := (g_1^\Omega[z], \dots, g_N^\Omega[z])$ . Ainsi, les contrastes habituels sont maximum si et seulement si  $\mathbf{g}^\Omega[z]$  est séparant, ce que nous résumons dans la proposition suivante :

**Proposition 20** *Les résultats du chapitre 3 (propositions 11, 12, 13, 14, 15 et 16) demeurent valables si l'on remplace l'hypothèse H.10 par l'hypothèse H.14 à condition de remplacer également les ensembles  $\mathcal{G}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\mathcal{F}_i, i \in \{1, \dots, N\}$  par  $\mathcal{G}_i \cap \mathfrak{G}, i \in \{1, \dots, N\}$  et  $\mathcal{F}_i \cap \mathfrak{G}, i \in \{1, \dots, N\}$  respectivement, où  $\mathfrak{G}$  représente l'ensemble des filtres globaux tels que  $\mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z] = 0$ .*

**Remarque 11:** L'extension de cette propriété au cas multidimensionnel est immédiate après adaptation des notations.

**Remarque 12:** Par utilisation de la proposition ci-dessus, nous savons que les procédures séquentielles donnent un filtre tel que  $\mathbf{g}^\Omega[z]$  soit séparant. En revanche, nous n'avons aucune information concernant  $\mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z]$ , qui peut être quelconque. En raison de (4.37), ceci n'a toutefois aucune influence sur la sortie du séparateur, dans le cas idéal où la densité spectrale des sources s'annule strictement sur  $\bar{\Omega}$ . Cependant, on peut imaginer que, dans le cas où la densité spectrale ne s'annule pas strictement, l'absence de contrôle de  $\mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z]$  puisse être indésirable et amplifier fortement des composantes de bruit.

### 4.2.5 Simulations

Nous illustrons d'abord l'effet d'une bande limitée des signaux sources. Ensuite, les simulations ont été réalisées sur des images offrant une difficulté croissante pour la séparation : deux images i.i.d. d'abord, le mélange d'une image i.i.d. et d'une image naturelle ensuite, et enfin le mélange de deux images naturelles.

#### 4.2.5-a) Séparation de sources de bande non pleine

Afin de distinguer plus nettement les seuls effets liés à la considération de sources qui n'occupent pas toute la bande spectrale, nous avons mené quelques simulations sur des signaux unidimensionnels pour des filtres de longueur  $L = 3$ . Des sources ont été générées par filtrage de sorte que seule une certaine proportion de la bande spectrale soit occupée : après tirage de signaux selon une loi i.i.d. uniforme centrée, les coefficients des transformées de Fourier discrètes respectives ont été artificiellement mis à zéro pour des fréquences supérieures à un certain seuil.

La figure 4.7 représente un cas typique obtenu dans le cas d'une séparation de deux signaux de 16384 échantillons et qui n'occupent que 30% de la bande spectrale. Sont représentés sur la figure 4.7 les périodogrammes des deux sources présentes dans le mélange ainsi que les composantes du filtre ligne global,  $g_1[e^{i\omega}]$  et  $g_2[e^{i\omega}]$  respectivement.

Nous constatons que le filtre global  $\mathbf{g}[z] = (g_1[z], g_2[z])$  est séparant dans la mesure où, sur la bande occupée par les sources, nous avons sensiblement :

$$\forall \omega \in \Omega \quad |g_1[e^{i\omega}]| = |g_1^\Omega[e^{i\omega}]| \approx 1 \quad (4.39)$$

$$|g_2[e^{i\omega}]| = |g_2^\Omega[e^{i\omega}]| \approx 0. \quad (4.40)$$

En revanche, pour  $\omega \in \bar{\Omega}$ , nous constatons des valeurs relativement élevées de  $g_1^{\bar{\Omega}}[e^{i\omega}]$  et  $g_2^{\bar{\Omega}}[e^{i\omega}]$ . Ceci confirme la discussion théorique du paragraphe 4.2.4 :  $\mathbf{g}^\Omega[z]$  est séparant tandis que  $\mathbf{g}^{\bar{\Omega}}[z]$  est quelconque.

Le tableau 4.5 donne, pour divers pourcentages de la bande occupée et différents nombres d'échantillons, la valeur du critère  $\tau_1$  défini à l'équation (4.23) et obtenu par moyennage sur 10 réalisations distinctes des sources et du canal (tiré aléatoirement, avec 3 capteurs, 2 sources). Le graphique 4.8 représente ce même critère  $\tau_1$  en fonction du nombre d'échantillons et du pourcentage de bande occupée ; il correspond donc aux valeurs du tableau 4.5 et en donne une représentation visuelle. Nous constatons que, sous réserve d'augmenter de façon importante le nombre d'échantillons, la séparation est effective même pour une très faible occupation de la bande spectrale. Cependant, compte

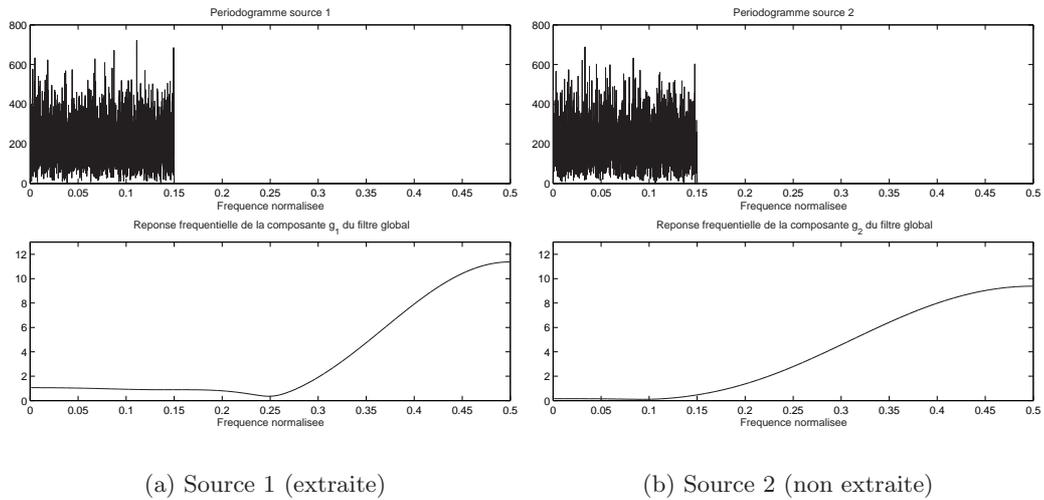


FIG. 4.7 – Exemple typique de résultat de séparation dans le cas de sources n’occupant pas toute la bande : observations au niveau spectral (16384 échantillons).

tenu du procédé utilisé pour la génération des sources, il a été observé que celles-ci se rapprochaient de la gaussianité pour une faible occupation de la bande spectrale. Ce point explique que des résultats corrects de la séparation ne puissent être obtenus que difficilement dans le cas d’une faible bande occupée.

échant \ % bande		% bande				
		0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
$2^{11}$		0.0061	0.0220	0.0710	0.2389	0.2870
$2^{12}$		0.0030	0.0111	0.0513	0.1614	0.2429
$2^{13}$		0.0020	0.0078	0.0185	0.1640	0.2579
$2^{14}$		0.0045	0.0048	0.0132	0.0480	0.2418
$2^{15}$		0.0004	0.0009	0.0049	0.0185	0.2199
$2^{16}$		0.0003	0.0006	0.0020	0.0126	0.1260
$2^{17}$		0.0008	0.0004	0.0012	0.0059	0.1179

TAB. 4.5 – Valeur du critère  $\tau_1$  en fonction du nombre d’échantillons et du pourcentage occupé de la bande.

Il ressort donc de ces quelques simulations que la difficulté de séparation peut être sérieusement accrue dans le cas des images naturelles dont le spectre est concentré dans les basses fréquences. Nous constaterons en particulier ce même phénomène d’amplification des hautes fréquences de la source séparée.

#### 4.2.5-b) Cas d’images sources i.i.d.

L’étude a été réalisée sur des ensembles de 100 réalisations de Monte-Carlo. Pour chacune des réalisations, les coefficients du filtre de mélange ont été tirés selon une loi gaussienne, centrée de variance unité. Compte tenu de la taille du filtre MIMO — $N = 2$  sources et  $Q = 3$  capteurs—, ceci assure d’après la propriété 2 l’existence presque sûre d’un

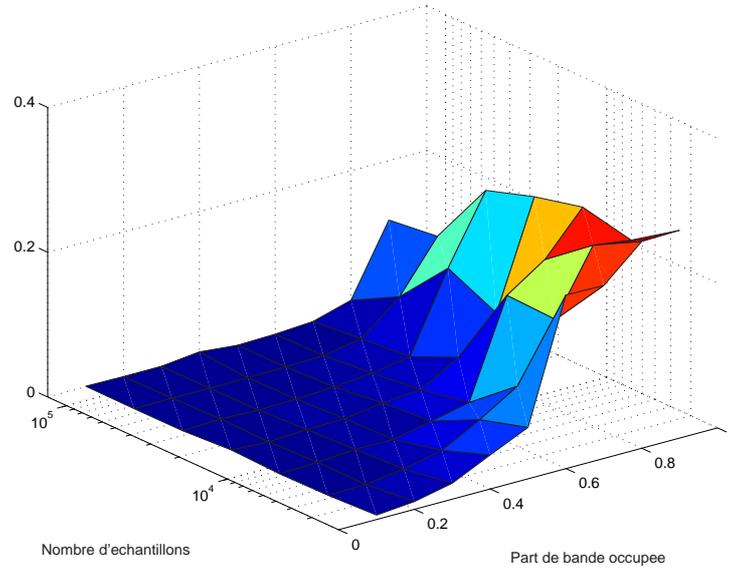


FIG. 4.8 – Valeur du critère  $\tau_1$  en fonction du nombre d'échantillons et du pourcentage occupé de la bande.

inverse MIMO RIF. Les sources étaient des sources de loi uniforme, centrée et de variance unité. La longueur du système mélangeant était  $L_1 = L_2 = 2$  et celle du séparateur était  $D_1 = D_2 = 5$ . Les sources étant i.i.d., elles ont été reconstituées à un retard et un facteur multiplicatif près ; après élimination de ces ambiguïtés par corrélation, nous avons donc considéré l'EQM sur chacune des sources comme critère de séparation. Les résultats sont donnés sur la figure 4.9 pour des images de taille  $256 \times 256$  pixels. La moyenne de l'EQM sur toute les réalisations était de  $5.5 \times 10^{-3}$ . Ces résultats confirment l'applicabilité des méthodes de séparation dans le cas convolutif multidimensionnel.

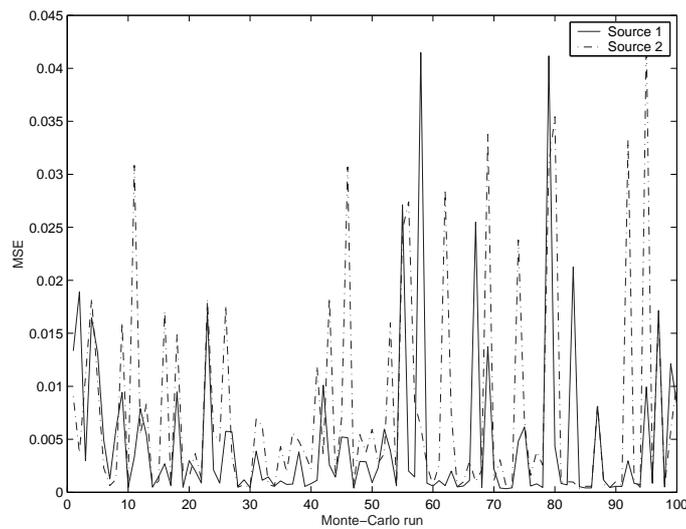


FIG. 4.9 – EQM après séparation de deux sources i.i.d. uniformes 2D.

#### 4.2.5-c) Images naturelles

Le cas de la séparation d'un bruit et d'une image naturelle, mélangés par un filtre de longueur  $L_1 = 3, L_2 = 1$  est donné en figure 4.10. Le nombre de pixels était de  $256 \times 256$  et la longueur du filtre séparant était  $D_1 = 4, D_2 = 1$ . Un autre exemple de séparation de deux images naturelles de taille  $256 \times 256$  est donné par la figure 4.11. Le filtre de mélange est de longueur  $L_1 = 2, L_2 = 1$  et le séparateur de longueur  $D_1 = 2, D_2 = 1$ .

Les sorties directes de l'algorithme de séparation, représentées sur les figures 4.10(c) et 4.11(c) illustrent clairement le fait que les sources ne sont reconstituées qu'à un filtrage (ici passe-haut) près. D'autres filtres résiduels, dont certains au comportement plutôt passe-bas, ont également été trouvés comme points stationnaires des algorithmes de séparation utilisés. Ainsi, afin de supprimer l'ambiguïté de filtrage SISO et de reconstituer complètement l'image de départ, il convient d'envisager l'utilisation d'autres méthodes de traitement d'image. Nous nous sommes cependant placé dans des cas simplifiés.

Par une étape de déflation, il est possible de supprimer la contribution d'une des sources au mélange. Comme nous nous sommes restreint à deux sources, il est en réalité possible d'obtenir la contribution séparée de chacune des sources sur chaque capteur.

Dans le cas de la figure 4.10, la contribution du bruit a été retirée des capteurs par moindre carrés, ce qui conduit au résultat de la figure 4.10(d). Nous pouvons constater le bon fonctionnement de la méthode. En revanche, selon le filtre de mélange choisi, nous pourrions ne retrouver que des images semblables à celle du milieu de la figure 4.10(d).

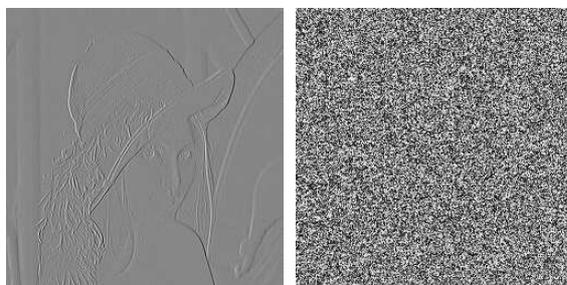
Pour éviter ce cas délicat, le filtre de mélange de la figure 4.11 a été choisi de sorte que chacune des sources ait une contribution non convolutive sur un des capteurs au moins. La même méthode que précédemment assure alors que l'image originale se retrouve sur l'un des capteurs au moins, après soustraction de la contribution de l'autre image. Le résultat de cette opération est donné en figure 4.11(d).



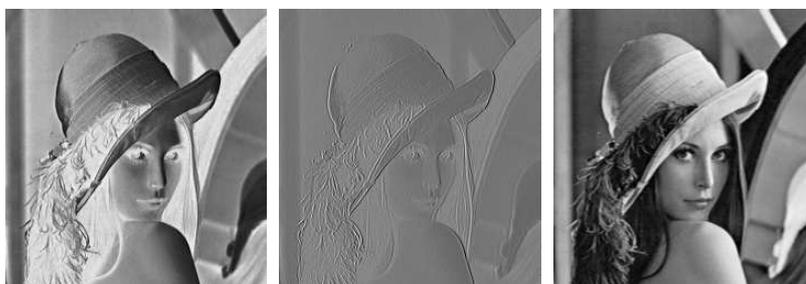
(a) Images sources originales



(b) Observations sur les capteurs



(c) Sortie de l'algorithme de séparation

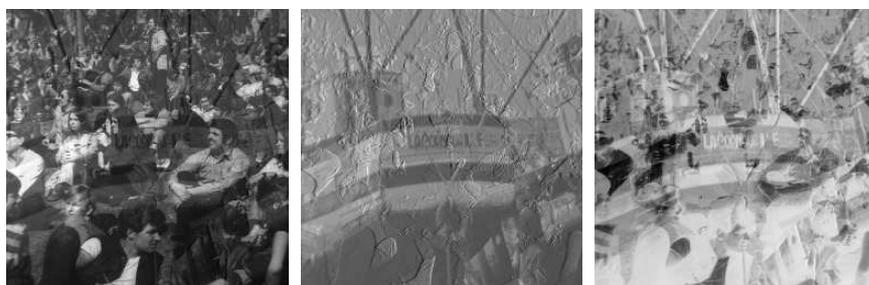


(d) Soustraction du bruit reconstitué aux capteurs

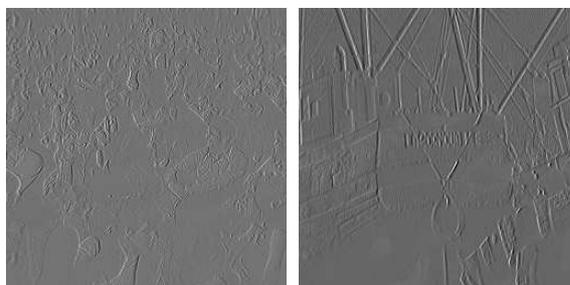
FIG. 4.10 – Exemple de séparation d'une image naturelle et d'un bruit i.i.d. uniforme



(a) Images sources originales



(b) Observations sur les capteurs



(c) Sortie de l'algorithme de séparation



(d) Reconstruction après moindres carrés

FIG. 4.11 – Exemple de séparation de deux images naturelles