Appl ications à l'érosion

Les méthodes numériques implémentées tout au long de cette thèse sont assemblées pour simuler l'érosion interfaciale d'un sol sous l'effet d'un écoulement fluide incompressible. La modélisation décrite précédemment sera appliquée à l'érosion d'un sol cohésif par des écoulements à faible nombre de Reynolds ou modéré. Rappelons que dans le modèle numérique que nous avons présenté dans le premier chapitre, les calculs se déroulent en deux étapes :

- 1. L'étape de l'écoulement dans laquelle une méthode de pénalisation est utilisée pour calculer les équations de Navier-Stokes autour d'un obstacle avec une méthode aux domaines fictifs pour s'affranchir d'un maillage dépendant de la géométrie.
- 2. L'étape de l'érosion, où l'interface eau/sol est décrite par une fonction Level Set couplée à une loi d'érosion empirique à seuil. Cette loi est une relation linéaire entre la vitesse d'érosion et la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur le solide.

L'objectif ici est de simuler le déplacement de l'interface fluide/solide durant l'érosion. L'évolution de cette interface est pilotée par la vitesse d'érosion qui dépend de la contrainte de cisaillement tangentiel du fluide. Étant donné que l'on s'attend à une discontinuité du gradient de la vitesse de l'écoulement à travers l'interface, des problèmes se poseront pour le calcul de la contrainte de cisaillement. La difficulté est de calculer d'une manière consistante la contrainte de ce problème. Nous mettrons en évidence cette difficulté et nous proposerons par la suite des solutions pour déterminer la contrainte qui doit être estimée correctement au niveau de l'interface. Cette difficulté est rencontrée pour les problèmes à frontière libre résolus sur grille fixe comme les problèmes de Stefan [25,45] et de Hele-Shaw [7,22]. Enfin, la validation du modèle numérique et la pertinence des solutions proposées seront confirmées par plusieurs résultats de simulation.

5.1 Équations du modèle

Pour commencer, nous réécrivons d'abord les différentes équations qui décrivent les deux étapes énoncées dans le modèle, à savoir : l'écoulement incompressible et l'érosion interfaciale. Les milieux en jeux sont le fluide et le solide, qui occupent respectivement deux domaines notés Ω_f et Ω_s et séparés par une interface $\Gamma = \Omega_f \cap \Omega_f$, isocontour 0 d'une Level Set ϕ .

En choisissant une approche Eulérienne sur maillage fixe avec des domaines fictifs, toutes les équations sont discrétisées dans le domaine global $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_f$. Ainsi, le déroulement des calculs peut être effectué selon le schéma suivant :

Le calcul de l'écoulement :

Le système d'équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement incompressible que nous utilisons est le suivant (cf. chapitre 4):

$$\begin{cases}
\rho\left(\partial_{t}\mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{u}\right) - \mu\Delta\mathbf{u} + \frac{\mu}{K_{s}}H(\phi)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{s}) &= -\nabla p + \mathbf{f} & \operatorname{dans}]0, T[\times\Omega, \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 & \operatorname{dans}]0, T[\times\Omega, \\
(+\text{C.L.}) & \operatorname{sur}]0, T[\times\partial\Omega,
\end{cases}$$
(5.1)

où **u** est le champ de vitesse défini sur Ω , tout comme la pression p, la densité ρ et la viscosité dynamique μ . Les conditions aux limites (C.L.) permettent de fermer le système et elles seront définies plus tard selon le cas étudié. La fonction Level Set est définie sur Ω telle que :

$$\begin{cases}
\phi < 0 & \text{dans le fluide } \Omega_f, \\
\phi = 0 & \text{sur l'interface } \Gamma, \\
\phi > 0 & \text{dans le solide } \Omega_s.
\end{cases}$$
(5.2)

Le paramètre de pénalisation K_s représentant une perméabilité est choisi tel que $K_s \ll 1$. Ceci permet d'imposer la vitesse \mathbf{u}_s dans le sol Ω_s , caractérisé par $\phi > 0$, en utilisant la fonction Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$
 (5.3)

Le calcul de la contrainte :

Le calcul de l'érosion commence par l'estimation de la composante tangentielle du vecteur contrainte du fluide à l'interface Γ :

$$\overrightarrow{\tau} = 2\mu[\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n} - (\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}], \tag{5.4}$$

où le tenseur D(u) représente le gradient symétrique de la vitesse d'écoulement :

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \tag{5.5}$$

et \overrightarrow{n} la normale orientée dans le sens "fluide" vers "solide" et naturellement donnée par :

$$\overrightarrow{n} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}.\tag{5.6}$$

Le calcul de la vitesse d'érosion :

L'érosion est pilotée par la célérité normale de l'interface v_{Γ} . La loi d'érosion reliant cette vitesse à la composante tangentielle à l'interface Γ est la suivante :

$$v_{\Gamma} = \begin{cases} K_d(\tau - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (5.7)

Où le coefficient K_d est un paramètre décrivant la cinétique de l'érosion et le seuil τ_c est la contrainte critique.

La vitesse représentant l'érosion doit être étendu dans tout le domaine Ω pour faire évoluer toutes les lignes de niveau de la Level Set ϕ de la même manière. Pour cela, on utilise la technique d'extension des vitesses étudiée et validée dans le chapitre 2. Ainsi, la vitesse étendue v_{Γ}^{ext} est la solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases}
\partial_t v_{\Gamma}^{ext} + \operatorname{sgn}(\phi) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla v_{\Gamma}^{ext} &= 0, \\
v_{\Gamma}^{ext}(t=0,x) &= v_{\Gamma}.
\end{cases}$$
(5.8)

Enfin, l'évolution de l'interface Γ est décrite par l'équation de transport de la Level Set ϕ :

$$\begin{cases}
\partial_t \phi + v_{\Gamma}^{ext} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla \phi = 0, \\
\phi(t = 0, x) = \phi_0.
\end{cases} (5.9)$$

Le calcul de l'écoulement incompressible, l'extension de la vitesse et le transport de la Level Set ont été étudiés et testés séparément. Le processus complet de l'érosion nécessite l'assemblage de ces calculs. L'estimation de la contrainte représente le chainon important reliant le calcul de l'écoulement et de l'érosion. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de ce chapitre, avoir une bonne estimation pour la contrainte pose une grande difficulté étant donné que nous utilisons une approche eulérienne sur maillage fixe avec pénalisation. Puis nous mettrons en évidence ce problème, dans le cas HET, avant de proposer des solutions.

5.2 Gestion du problème à frontière libre

Le problème qui nous concerne est classiquement rencontré dans les problèmes à frontières libres, comme par exemple ceux posés par les écoulements dans des géométries élastiques qui obligent à résoudre des équations elliptiques sur des domaines en mouvement. Faire intervenir des maillages body-fitted [93] qui collent à la géométrie oblige à remailler les domaines au cours des itérations d'évolution en temps. Une solution très coûteuse en remaillage. En utilisant des maillages fixes, comme dans notre cas, les équations elliptiques peuvent être résolues sur un domaine approché. L'erreur de la solution est alors inconsistante pour les gradients au

voisinage de l'interface sur le bord du domaine approché. On retrouve par exemple ce type d'inconsistance dans le problème de Hele-Shaw [7,22] et dans le problème de Stefan [25,45] décrivant la fonte des glaces par le transfert de chaleur dans un milieu homogène qui subit un changement de phase. Ces problèmes ont été résolus par exemple à l'aide des méthodes IIM (Immersed Interface Method) proposées par R.J. LeVeque et A.L. Li [62]. Dans ce cas, la continuité des propriétés à l'interface de discontinuité est assurée grâce à des prolongements de Taylor de la solution de chaque coté de l'interface. Mais pour garder la méthode de pénalisation sur un maillage fixe, des traitements spécifiques doivent être apportés.

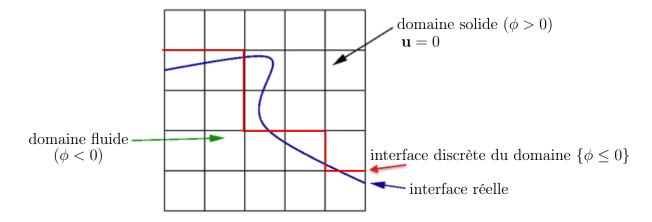


FIGURE 5.1: Représentation d'une interface avec des grilles non body-fitted.

La figure ci-dessus illustre l'origine du problème de l'inconsistance dans notre cas où l'interface approchée entre les deux domaines ne "colle" pas aux grilles du maillage fixe.

5.3 Calcul de la contrainte

5.3.1 Discrétisation DDFV

Par le schéma DDFV, le tenseur symétrique $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ est discrétisé sous la forme suivante :

$$\mathbf{D}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2} (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{D}^{\mathrm{T}}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

Comme dans la section 3.5, nous avons bien vérifié que cet opérateur est d'ordre 2 en normes $L^2(\Omega)$ et $L^{\infty}(\Omega)$. Avec la même discrétisation, le vecteur normal peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{n}^{\mathcal{T}} = \frac{\nabla^{\mathcal{T}} \phi^{\mathcal{D}}}{\| \nabla^{\mathcal{T}} \phi^{\mathcal{D}} \|}.$$

Il en résulte que la contrainte de cisaillement est discrétisée sur le maillage \mathcal{T} .

5.3.2 Calcul du cisaillement brut

Pour un premier calcul de la contrainte, on prend l'exemple d'un écoulement de poiseuille cylindrique. C'est un cas simulant l'essai HET où le cylindre représente un tube totalement érodable. Ci-dessous, on illustre ce cas test à l'état initial. Le long du tube, on résout un écoulement de Stokes de vitesse \mathbf{u} . L'extérieur du cylindre représente le milieu contenant le sol à éroder. Par la pénalisation, on impose dans cette zone une vitesse nulle $\mathbf{u}=0$.

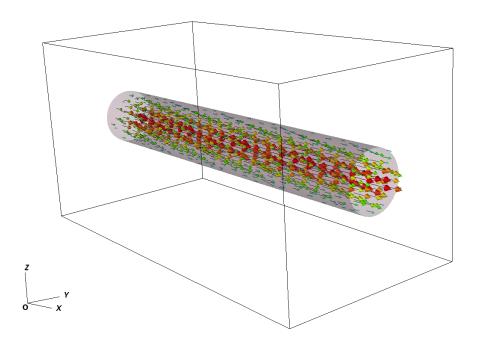


FIGURE 5.2: État initial de la simulation de l'écoulement de conduit avec érosion.

Le domaine du calcul est le parallélépipè de rectangle $\Omega = [0,2] \times [0.1]^2$, $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est la base orthonormée associée. Le rayon initial du cylindre est $r_0 = 0.2$. Initialement, l'interface Γ est représentée par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante :

$$\phi_0 = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} - r_0,$$

où $y_0 = z_0 = 0.5$. L'écoulement obtenu est cisaillé dans la direction (O, x) et sa vitesse est sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = u(r)\overrightarrow{e_x}$$
, avec $r = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

La solution analytique u(r) et la norme τ de la contrainte tangentielle du cisaillement associé sont :

$$\begin{array}{ll} u(r) & = -(r^2 - r_0^2)/4\mu, \\ \tau & = \frac{r}{2}. \end{array}$$

Dans la figure suivante, on affiche le résultat numérique du calcul de la contrainte de cisaillement représentée sur une coupe du cylindre selon l'axe de l'écoulement. À l'intérieur, on constate que la solution est parfaitement radiale et qu'il s'agit bien d'une suite de cercles de rayon $\frac{r}{2}$ correspondant à la solution exacte. Mais, au voisinage de l'interface $\phi_0 = 0$, la solution est fausse et on remarque l'existence d'une couche limite d'inconsistance.

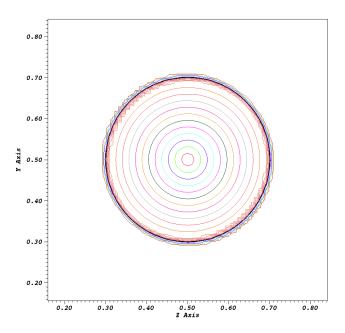


FIGURE 5.3: Représentation du cisaillement dans le cas du poiseuille cylindrique.

Un zoom sur une partie de la région en question donne le résultat suivant :

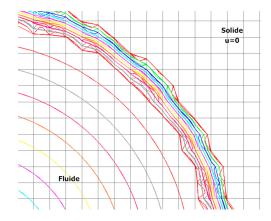


FIGURE 5.4: Zoom autour de la couche limite d'inconsistance.

Ce résultat est attendu car notre géométrie, comme nous l'avons évoqué précédemment, ne se raccorde pas aux grilles du maillage. Dans la partie solide, la vitesse **u** s'annule le long d'une ligne brisée qui n'approche pas le cercle. Le calcul du gradient de vitesse à l'interface est totalement erroné.

Pour avoir une idée plus précise sur le comportement de la norme de la composante tangentielle, τ dans la couche limite d'inconsistance (la zone autour de $\phi = 0$), on trace τ en fonction du rayon r en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. Dans la figure ci-dessous, on donne un tracé contenant les superpositions de la contrainte en projection dans la même direction.

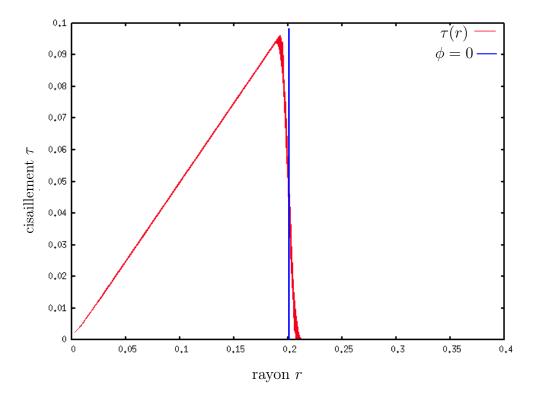


FIGURE 5.5: Tracé de la contrainte de cisaillement en fonction du rayon.

On constate que la solution est parfaitement linéaire à l'intérieur du domaine fluide, ce qui correspond à la solution exacte $\tau = \frac{r}{2}$. À quelques mailles de l'interface, la solution devient erronée. On trouve que cette inconsistance est limitée à environ 4 mailles de l'interface. En notant h le pas du maillage, il est donc pertinent de calculer la contrainte de cisaillement quand $\phi = -3h$.

5.3.3 Correction de la contrainte

À partir des résultats précédents, où nous avons constaté qu'il suffit de se placer dans la zone qui correspond à $\phi \leq -3h$ pour trouver des valeurs consistantes de la contrainte, nous proposons une première solution pour corriger la contrainte au niveau de l'interface. Pour cela, on reconstitue la valeur de la contrainte sur l'interface $\phi = 0$ par une extrapolation directe à partir de la valeur obtenue au niveau $\phi = -3h$.

En notant τ^* la valeur calculée par extrapolation linéaire, à partir du cisaillement initial τ et évaluée en tout point pour le représenter à l'interface. On peut écrire :

$$\tau^* = \tau - \phi \nabla \tau \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}.$$
 (5.10)

Pour déterminer la vitesse d'érosion à partir de la nouvelle estimation du cisaillement, on calcule la vitesse de l'interface Γ en utilisant la contrainte corrigée τ^* (évaluant τ à l'interface). Par la loi d'érosion (cf. chapitre 1) on peut écrire :

$$v_{\Gamma}^* = \begin{cases} K_d(\tau^* - \tau_c) & \text{si } \tau > \tau_c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (5.11)

La vitesse étendue v_{Γ}^* est alors la solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases}
\partial_t v_{\Gamma}^{ext} + \operatorname{sgn}(\phi + 3h) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla v_{\Gamma}^{ext} = 0, \\
v_{\Gamma}^{ext}(t = 0, x) = v_{\Gamma}^*.
\end{cases} (5.12)$$

L'extension se fait donc à partir de l'interface $\phi = -3h$, là où τ^* sera le plus pertinent.

Finalement, l'évolution de l'interface Γ est décrite par le transport de la Level Set ϕ :

$$\begin{cases}
\partial_t \phi + v_{\Gamma}^{ext} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot \nabla \phi = 0, \\
\phi(t = 0, x) = \phi_0.
\end{cases} (5.13)$$

Ce transport est effectué sur une seule maille en respectant la condition CFL (cf. chapitre 2). Après avoir obtenu une nouvelle interface donnée par la position de la fonction ϕ transportée, on itère alors les calculs de l'écoulement et ceux de l'érosion.

5.3.4 Validation de la correction

Pour les validations qui suivent, on utilise les paramètres $K_d=10^{-7}~{\rm cm}^3/{\rm N.s}$ et $\tau_c=0$ Pa.

5.3.4.1 Simulation HET

Afin de valider la correction que nous venons de proposer, on reprend le test précédent d'érosion du tube avec l'écoulement de poiseuille cylindrique. On utilise donc le cisaillement τ^* donné par l'équation (5.10) et la vitesse de l'interface v_{Γ}^* calculée par la loi d'érosion (5.11). L'extension de la vitesse d'érosion est faite depuis l'isocontour $\phi = -3h$ par l'équation (5.12).

On procède à un processus d'érosion qui fait élargir le cylindre du rayon initial $r_0 = 0.2$ au rayon final $r_1 = 0.4$. On représente dans la figure ci-après deux étapes d'érosion, la première correspond à une situation intermédiaire et la seconde à la situation finale. Le cylindre interne représente l'état initial (voir la figure 5.2) et l'externe représente le cylindre après érosion.

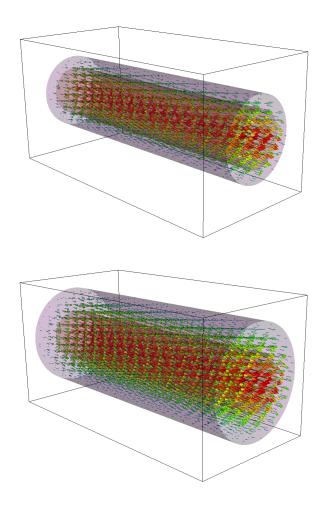


FIGURE 5.6: Résultats d'érosion d'un tube sous un écoulement de poiseuille cylindrique.

On observe une érosion symétrique et régulière le long du tube. Puis, on répète cette simulation en variant la taille du maillage pour calculer le rayon moyen du cylindre à la fin du test et pour estimer la radialité en mesurant, dans le voisinage de l'isocontour $\phi = 0$, la variation de rayon le long d'une section du tube. On calcule aussi la différence entre le rayon exact r_{exc} et le rayon approché r_{num} . Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Pas du maillage	$\parallel r_{num} - r_{exc} \parallel_{\infty}$	La radialité
1/20	$8.42 \ 10^{-3}$	$2.42 \ 10^{-3}$
1/40	$4.06 \ 10^{-3}$	$6.51 \ 10^{-4}$
1/80	$2.01 \ 10^{-3}$	$1.58 \ 10^{-4}$
1/160	$9.94 \ 10^{-4}$	$3.92 \ 10^{-5}$

Table 5.1: Variation du rayon et radialité et pour différents maillages.

On obtient une radialité d'ordre 2, ce qui confirme l'érosion uniforme obtenue dans ce test. On obtient aussi une convergence d'ordre 1 pour le rayon du tube et nous avons donc une validation dans le cas radial de l'approche de la correction du cisaillement qui consiste à calculer une extrapolation de la contrainte depuis l'intérieur du domaine fluide (à environ 3 mailles de l'interface), en s'affranchissant de la couche limite d'inconsistance. Il reste à vérifier sa validité dans d'autres cas.

5.3.4.2 Simulation RCT

On procède à un test utilisant un écoulement réalisé dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux, un écoulement de Couette. Le cylindre interne est animé d'une vitesse de rotation rigide et supposé constitué par un échantillon de sol érodable. Le cylindre externe est fixe. Cet essai est une variante du Rotating Cylinder Test (RCT) [70]. L'écoulement généré entre les deux surfaces cylindriques provoquera l'érosion du cylindre interne.

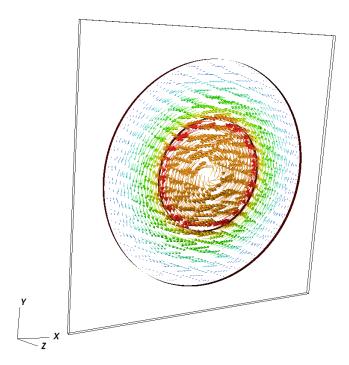


FIGURE 5.7: État initial de la simulation de l'écoulement de Couette.

Le domaine de calcul est $\Omega = [0.1]^2$ (dans la pratique on utilise un domaine faux-2D). Le cylindre interne a un rayon initial $r_i = 0.2$ et il est entrainé par une vitesse angulaire ω . Le cylindre externe a un rayon $r_e = 0.4$. Initialement, l'interface Γ entre le cylindre interne (sol) et le fluide est représentée par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante (avec $x_0 = y_0 = 0.5$):

$$\phi_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - r_i.$$

En considérant la base polaire orthonormée $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ associée à Ω , la solution de cet écoulement a une vitesse orthoradiale $\mathbf{u} = u_{\theta}(r)\overrightarrow{e_{\theta}}$ telle que :

$$u_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

où:

$$A = -\frac{\omega r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}$$
 et $B = \frac{\omega r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$.

La composante tangentielle de la contrainte de cisaillement (dans la direction de $\overrightarrow{e_{\theta}}$) a comme norme :

$$\tau = 2\mu \frac{B}{r^2},$$

et la vitesse pénalisée dans le cylindre en rotation (le solide) est la suivante : $\mathbf{u}_s = \omega r \overrightarrow{e_{\theta}}$.

La simulation numérique de ce test (cf. la figure 5.7 pour illustration), donne, comme prévu, une couche limite d'inconsistance pour le calcul de la contrainte de cisaillement τ à l'interface fluide/solide. Dans la figure suivante, on représente en fonction du rayon r, les valeurs exactes (en bleu) et les valeurs numériques (en rouge) de τ , en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. Ceci montre bien l'inconsistance de la solution approchée au niveau de l'isocontour $\phi_0 = 0$ (donné en vert).

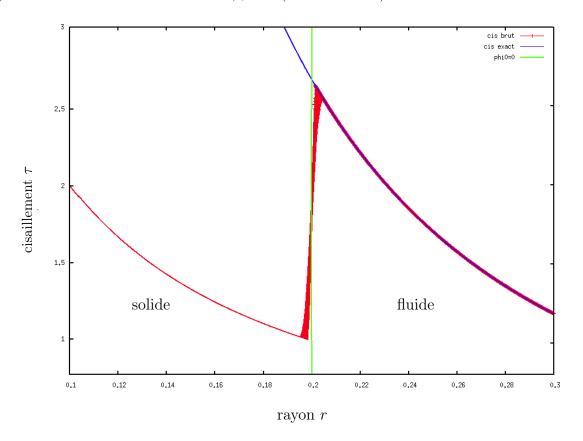


FIGURE 5.8: Contrainte exacte et approchée en fonction du rayon.

On procède à la correction de la contrainte cisaillement comme nous l'avons proposé dans le paragraphe 5.3.3, en utilisant les équations (5.10) à (5.13), pour s'affranchir de la couche limite d'inconsistance. Puis, on effectue une nouvelle simulation. Dans la figure suivante, on donne les résultats de la correction de la contrainte en comparaison avec le le résultat exact. Dans la loi d'érosion nous utilisons donc la vitesse v_{Γ}^* e s'appuyant la contrainte τ^* .

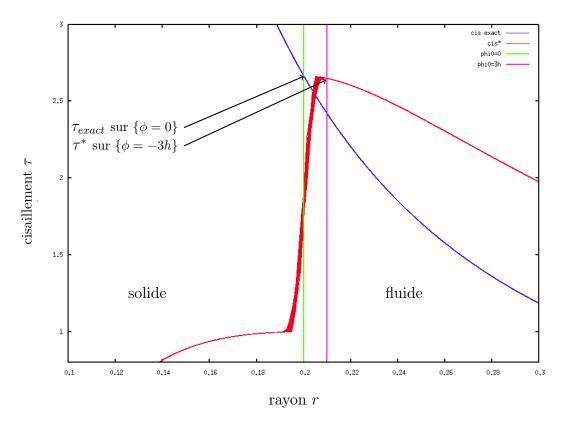


FIGURE 5.9: Tracés de la contrainte exacte τ_{exact} et corrigée τ^* en fonction du rayon r.

Après correction, on effectue des tests d'érosion complets pour différentes tailles de maillage. À la fin de chaque simulation, faisant passer le rayon r_i de 0.2 à 0.1, on calcule la radialité dans le voisinage de l'isocontour $\phi = 0$ ainsi que la différence entre le rayon exacte r_{exc} et le rayon approché r_{num} . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous et montrent qu'on obtient l'ordre 2 pour la radialité et l'ordre 1 pour le rayon comme dans le cas précédent.

Pas du maillage	$\parallel r_{num} - r_{exc} \parallel_{\infty}$	La radialité
1/40	$1.88 \ 10^{-2}$	$4.79 \ 10^{-3}$
1/80	$9.03 \ 10^{-3}$	$1.30 \ 10^{-3}$
1/160	$4.47 \ 10^{-3}$	$3.22 \ 10^{-4}$
1/320	$2.21 \ 10^{-3}$	$8.04 \ 10^{-5}$

Table 5.2: Variation du rayon et radialité et pour différents maillages.

On représente ci-dessous trois étapes d'érosion où l'on observe l'évolution du cylindre interne sous l'effet de l'écoulement de Couette. L'état initial est représenté dans la figure 5.7.

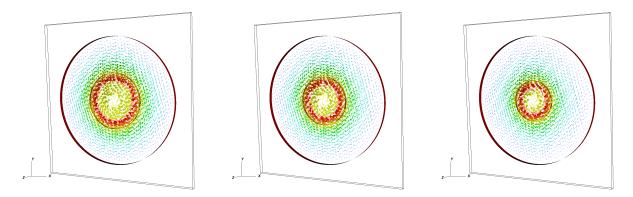


FIGURE 5.10: Résultats d'érosion du cylindre interne sous un écoulement de Couette.

Nous avons validé des processus complets d'érosion dans les deux cas tests simulant les essais HET et RCT. La couche limite d'inconsistance observée lors du calcul de la contrainte de cisaillement à l'interface solide/fluide a été corrigée par un nouveau calcul depuis l'isocontour $\phi = -3h$. Cette correction s'appuie sur une extrapolation de la valeur de la contrainte évaluée en tout point. Il reste à voir si ces corrections peuvent être validées dans autres cas.

5.3.5 Limites de la correction

Nous effectuons une simulation dans laquelle une bille de sol est placée au milieu d'un canal rectangulaire. Le système d'équations de Navier-Stokes (nombre de Reynolds Re = 20) est utilisé pour le calcul de l'écoulement.

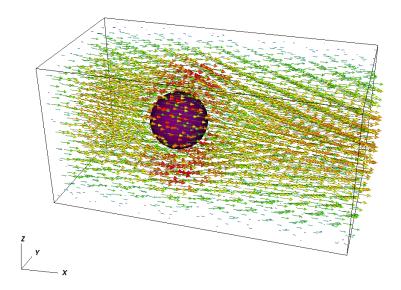


FIGURE 5.11: Cas test d'une bille sous un écoulement au milieu d'un canal.

Le domaine de calcul est $\Omega = [0,2] \times [0.1]^2$. La bille de sol est une sphère de rayon $r_0 = 0.1$ et de centre $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 0.5, 0.5)$. L'interface Γ est représentée initialement par l'isocontour 0 de la fonction Level Set suivante :

$$\phi_0 = r_0 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Le but du test est d'observer les variations du cisaillement au voisinage de l'interface $\phi=0$. Au voisinage de la zone où il y a une grande pression sur la bille, à savoir la paroi face à l'écoulement, un fort gradient est exercé sur l'interface par le fluide qui est forcé d'emprunter un autre chemin en contournant l'obstacle et ainsi le cisaillement varie rapidement spécialement dans cette zone. Un zoom sur une partie de la zone en question est illustré dans la figure suivante où on affiche les variations de la contrainte du cisaillement.

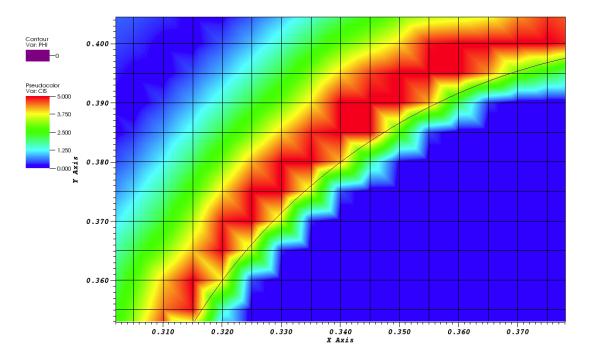


FIGURE 5.12: Zoom sur variations du cisaillement au voisinage de l'interface de la bille.

On remarque dans ce cas, quand on s'éloigne de l'interface $\phi=0$ de trois mailles on rencontre une variation d'environ 50% sur la valeur du cisaillement Ceci montre bien les limites de la première approche. En voulant s'affranchir de la couche limite d'inconsistance, on perd beaucoup d'informations. Donc, il est préférable d'éliminer cette couche plutôt que de s'en extraire.

5.4 Nouvelle correction

Il s'avère donc qu'il est nécessaire d'estimer les valeurs du cisaillement à l'interface pour obtenir une bonne érosion quelque soient les variations de l'écoulement. En gardant un maillage non body-fitted, il est impossible que les points de grille soient situés exactement à la frontière de l'obstacle constitué par le sol. Dans ce cas, la pénalisation classique ne peut faire mieux que de proposer une approximation inconsistante du gradient de la vitesse à l'interface. Pour éviter cet inconvénient, il convient de rechercher un moyen de forcer une condition qui donne une discrétisation consistante de ce gradient à la frontière de l'obstacle.

J. Hovnanian [55] et M. Bergmann et al. [10] ont proposé, dans le cas d'un problème d'interaction fluide/structure, une méthode IPC (Image Point Correction) en s'appuyant sur l'approche Ghost-Cell [35, 36] pour corriger les valeurs de pénalisation de la vitesse dans l'obstacle. Par cette méthode, seuls les "Ghost nodes" subissent une correction, en imposant à la vitesse de ces nœuds la valeur obtenue par un prolongement affine depuis valeurs de la vitesse calculées autour des points symétriques des nœuds en question par rapport à la frontière; à tous les autres points une pénalisation classique est appliquée.

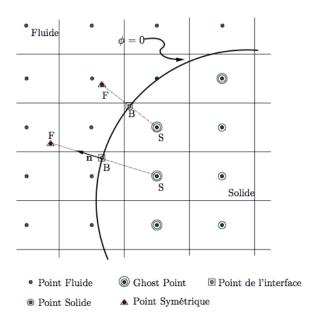


FIGURE 5.13: Schéma décrivant les éléments utilisés par J. Hovnanian [55] pour la correction.

Dans l'objectif d'apporter une correction de même type, mais sans avoir recours à des extrapolations dans une direction de grille, C. Galusinski [44] a proposé de modifier plutôt la condition aux limites sur les bords du domaine approché. Cette condition modifiée s'appuie sur l'information de la distance au bord du domaine exact. Mais sa mise en œuvre n'est pas compatible avec une approche par pénalisation de domaine.

Dans le cadre d'optimisation et de contrôle d'écoulement, F. Chantalat et al. [20,21] avaient proposé une méthode similaire pour trouver une extension pertinente de la vitesse dans un obstacle. La solution est donc prolongée itérativement dans l'obstacle à l'aide de fonctions Level Set et d'équations de transport et imposée par pénalisation dans l'obstacle. Dans un esprit analogue, nous proposons dans la suite une méthode itérative qui modifie le champ de vitesse sur les points de grille à l'intérieur des obstacles et voisins de l'interface qui se révèle être un prolongement C^1 dans le le sol. Il s'agit donc d'une alternative aux Immersed Boundary Methods (IMB) [77].

5.4.1 Principe de la méthode

Notre objectif dans cette méthode est d'imposer une vitesse non nulle dans le sol pour obtenir un prolongement C^1 de la vitesse de la vitesse du fluide dans le solide. Dans les travaux de F. Chantalat, le prolongement est construit d'une façon affine. Ici, le prolongement sera construit par un procédé de symétrisation moins coûteux à mettre en œuvre. En prenant un point M dans le sol, on cherche d'abord son symétrique M_{sym} dans le fluide par rapport à l'interface Γ . Et à partir de la vitesse \mathbf{u}_{sym} , on construit la vitesse \mathbf{u}_s dans le point M.

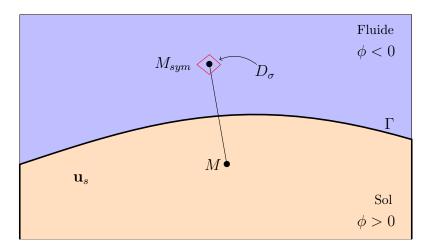


FIGURE 5.14: Schéma donnant la représentation du point dans le solide et son symétrique.

La détermination de la position des points symétriques est facilité par la Level Set ϕ . Ainsi, en considérant le point de O, origine de la base associée au domaine, on a :

$$\overrightarrow{OM}_{sym} = \overrightarrow{OM} - 2\phi \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}.$$
 (5.14)

Naturellement, le point symétrique ne coïncide pas avec un nœud de la grille. Il est à l'intérieur d'un diamant D_{σ} obtenu en cherchant le numéro de la face σ dont le centre F est

donné par le calcul de :

$$\max_{F \in \mathcal{K}} \left(\frac{\overrightarrow{FM}_{sym}}{\|\overrightarrow{FM}_{sym}\|} \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right), \tag{5.15}$$

où \mathcal{K} est la cellule où se trouve le point M_{sym} . Dans le cas conforme cette cellules a six faces.

Nous devons donc interpoler sa vitesse \mathbf{u} à partir de six points de ce diamant. Dans le cas particulier où ce diamant est traversé par l'interface Γ , on utilisera donc le deuxième diamant le plus proche dans la direction de $-\nabla \phi$; ceci permet d'avoir un diamant complètement immergé dans le fluide.

On construit par la suite la vitesse symétrique à imposer dans le solide, de telle sorte que le gradient de vitesse à l'interface reste identique lorsqu'il est évalué de chaque côté de l'interface (voir la figure 5.16). Elle est donné par le prolongement suivant :

$$\mathbf{u}_{sym} = \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \overrightarrow{MM}_{sym}. \tag{5.16}$$

En notant \mathbf{u}_{Γ} la vitesse à l'interface (qui peut être non nulle comme dans le cas du Rotating Cylinder), la valeur de la nouvelle vitesse de pénalisation est :

$$\mathbf{u}_s = -\mathbf{u}_{sym} + 2\mathbf{u}_{\Gamma}.\tag{5.17}$$

Ce prolongement de la vitesse à travers l'interface n'a pas de sens physique en soit. Il s'agit d'un outil numérique permettant d'avoir un prolongement continu du gradient de la vitesse à l'interface. En pratique, on utilise juste une bande de nœuds au voisinage de l'interface Γ .

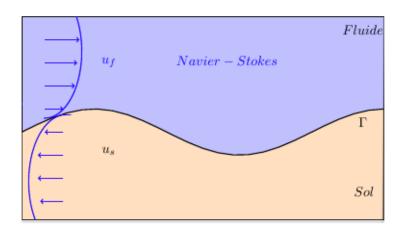


FIGURE 5.15: Schéma représentant la nouvelle vitesse symétrique à imposer dans le sol.

Nous considérons un procédé itératif où à la première étape, on pénalise avec la vitesse nulle ou la vitesse rigide du solide en mouvement. Puis, dans les étapes qui suivent, nous utilisons la vitesse prolongée pour imposer la nouvelle vitesse dans le sol. On itère le processus

qui se révèle convergent. En comparant à chaque fois la vitesse \mathbf{u}^k construite à l'étape k avec la vitesse à l'étape qui la précède, et en utilisant la condition d'arrêt $\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\| = \mathcal{O}(h^2)$, où h est le pas du maillage, 3 itérations suffisent. Ce procédé converge rapidement vers la solution du problème souhaitée avec de plus un prolongement C^1 de la solution dans l'obstacle.

Remarque 15

Le système d'équation de Navier-Stokes à résoudre en utilisant cette correction est :

$$\begin{cases}
\rho\left(\partial_{t}\mathbf{u}^{k}-\mathbf{u}^{k}\wedge\operatorname{rot}\mathbf{u}^{k}\right)-\mu\Delta\mathbf{u}^{k}+\frac{\mu}{K_{s}}H(\phi)(\mathbf{u}^{k}-\mathbf{u}_{s}^{k}) &= -\nabla p+\mathbf{f} & dans \]0,T[\times\Omega,\\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{k}) &= \operatorname{div}(\mathbf{u}_{s}^{k}) & dans \]0,T[\times\Omega,\\ (+C.L.) & sur \]0,T[\times\partial\Omega.
\end{cases}$$

5.4.2 Validation

Cette correction doit permettre d'éliminer la couche limite d'inconsistance. Nous devons donc obtenir une estimation correcte de la contrainte de cisaillement à l'interface. Pour valider la pertinence de cette nouvelle approche, nous reprenons le Rotating Cylinder Test (cf. paragraphe 5.3.4.2) et nous calculons la contrainte en utilisant le procédé itératif qu'on vient d'exposer. Le cylindre interne de rayon r_i a une vitesse rigide $\mathbf{u}_{\Gamma} = \omega r_i \overrightarrow{e_{\theta}}$. La pénalisation du sol (cylindre interne) par la vitesse donnée dans (5.16), puis stabilisée par le processus itératif, donne l'écoulement représenté dans la figure suivante :

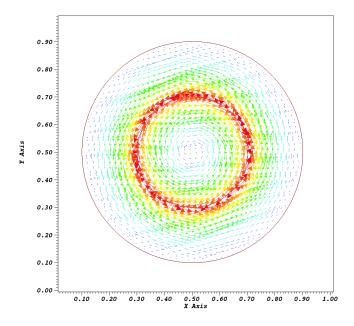


FIGURE 5.16: Écoulement entre deux cylindres avec une vitesse symétrique imposée au sol.

Dans la figure ci-dessous, nous représentons en fonction du rayon r les valeurs exactes (en bleu) et les valeurs numériques obtenues par la nouvelle approche (en rouge) de la contrainte τ en superposant toutes les solutions prises dans la direction radiale. On observe qu'au niveau de l'isocontour $\phi_0 = 0$ (donné en vert), la couche limite d'inconsistance est éliminée. Nous pouvons estimer avec precision la vitesse d'érosion et l'étendre à partir de l'interface pour faire des calculs d'érosion comme nous l'avons décrit dans les équations du modèle au début de ce chapitre.

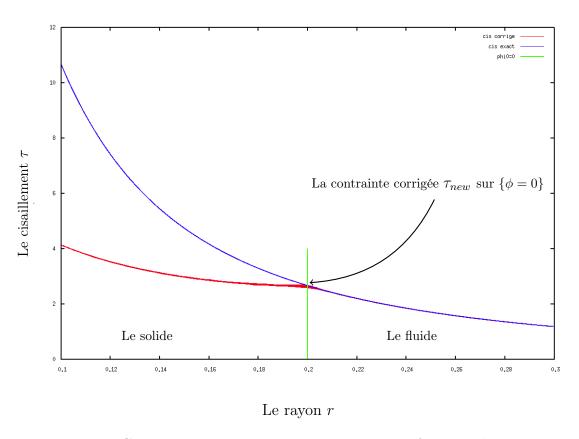


FIGURE 5.17: Contrainte exacte τ_{exact} et corrigée τ_{new} en fonction du rayon r.

On effectue plusieurs simulations en faisant varier la taille du maillage et à chaque fois on calcule les erreurs ErrL_2 et $\operatorname{ErrL}_\infty$ commises dans l'estimation de la nouvelle contrainte τ_{new} par rapport à la contrainte exacte τ_{exact} calculées à l'interface. Ces erreurs sont obtenues en calculant :

$$\mathrm{ErrL}_2 = \frac{\|\tau_{exact} - \tau_{new}\|_2}{\|\tau_{exact}\|_2} \quad \mathrm{et} \quad \mathrm{ErrL}_\infty = \frac{\|\tau_{exact} - \tau_{new}\|_\infty}{\|\tau_{exact}\|_\infty},$$

où $\|.\|_2$ et $\|.\|_{\infty}$ sont prise sur un voisinage de Γ . Dans la figure ci-après, nous représentons deux courbes qui donnent les tracés de ces erreurs cette en fonction du pas du maillage h.

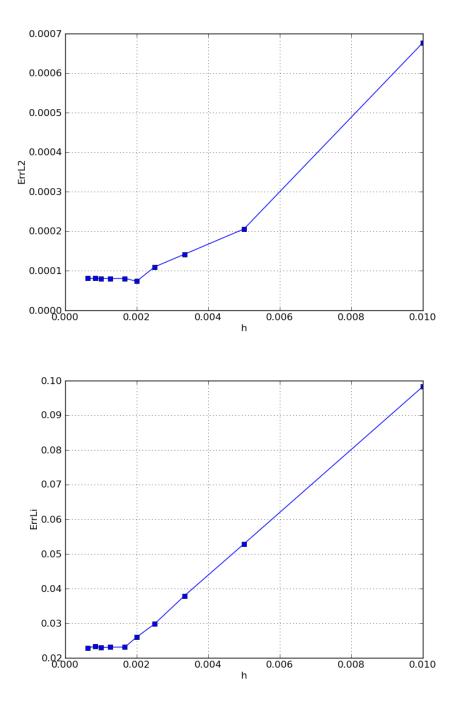


FIGURE 5.18: Courbes des erreurs sur τ_{new} en normes L_2 et L_{∞} en fonction du pas du maillage h.

Nous remarquons donc qu'on peut atteindre 3% d'erreur sur le calcul de la contrainte du cisaillement à l'interface Γ en utilisant un maillage de pas h=1/500 (qui correspond à 300 points de grille dans la zone d'intérêt). Au delà de ce nombre, il est inutile de de prendre plus de mailles et de raffiner car l'erreur n'évolue plus. Mais ceci est largement suffisant pour nos applications. L'erreur est d'ordre 1 sur des grilles fines, mais par une raison non identifiée cet ordre est perdu sur des grilles extrêmement fines.

5.5 Applications

Dans cette section, des simulations numériques d'érosion complète, dont le calcul est basé sur les algorithmes développés précédemment, sont présentées. Nous nous intéressons à deux cas applicatifs : l'érosion d'un cylindre et l'érosion d'une bille. Les deux obstacles sont placés dans un canal rectangulaire et soumis à des écoulements incompressibles. L'érosion de la bille a été déjà évoquée dans le paragraphe 5.3.5 pour montrer les limites de la première approche pour la correction de la contrainte. Ici, nous utiliserons ce test pour valider la seconde approche et pour illustrer un cas 3D. Pour le cas de l'érosion du cylindre, il sera traité en 2D. Ce cas test nous permet d'explorer les résultats l'érosion en fonction du nombre de Reynolds, de la nature de l'écoulement (confiné ou pas) et des paramètres de l'érosion (le coefficient K_d et le seuil τ_c).

5.5.1 Érosion d'un cylindre

5.5.1.1 Expérimentation au laboratoire

Nous présentons d'abord une expérience de laboratoire (figure ci-dessous) menée par M. Moore *et al.* [80, 81], dans lequel un corps d'argile sous forme cylindrique est maintenu fixe et soumis à un écoulement d'eau à grande vitesse.

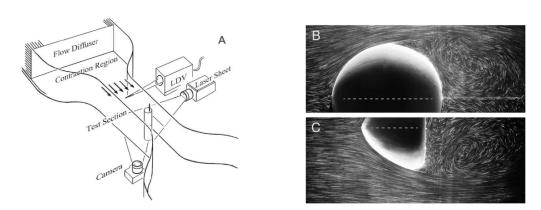


FIGURE 5.19: (A) : Le schéma du dispositif expérimental utilisé pour l'érosion d'un cylindre en argile.

(B) et (C) : visualisation de l'écoulement autour d'un corps cylindrique à des différents instants dans le processus d'érosion (extraits de M. Moore et al. [81]).

Cet essai expérimental nous permet d'avoir à la fois la visualisation de l'écoulement, ainsi que le profil du cylindre qui change de forme au cours de l'érosion. Dans [81], les auteurs ont aussi élaboré un modèle numérique utilisant la loi d'érosion interfaciale couplée à un modèle asymptotique de couche mince. En ayant recours aux équations de Prandtl [85], ce modèle simplifie le système d'équations de Navier-Stokes en un système d'équations différentielles ordinaires.

5.5.1.2 Simulations numériques

Nous avons réalisé une série de tests pour observer l'érosion d'un cylindre sous l'écoulement incompressible à Reynolds faibles à modérés. Ce choix est légitime étant donné l'échelle d'érosion à concernée dans notre étude. Nous mettons en évidence l'influence du nombre de Reynolds sur le profil de l'objet érodé et nous confronterons nos résultats aux résultats expérimentaux et numériques obtenus par M. Moore et al. [81]. Nous testerons également la sensibilité au type d'écoulement et aux paramètres de la loi d'érosion.

Description du cas

On considère un domaine rectangulaire Ω , où on place un cylindre de rayon initial r_0 et de centre (x_0, y_0) . L'écoulement incompressible est résolu par les équations de Stokes, puis par les équation de Navier Stokes avec les conditions aux bords suivantes :

- Sur le bord Γ_{ℓ} on impose une vitesse d'entrée \mathbf{u}_0 par une condition de Dirichlet .
- Sur le bord Γ_r on impose des conditions de "Neumann" pour avoir une sortie libre.
- Sur les deux autres bords, Γ_t et Γ_b , on impose les conditions de Dirichlet ou de "Neumann" pour avoir respectivement des écoulements confinés ou non confinés.

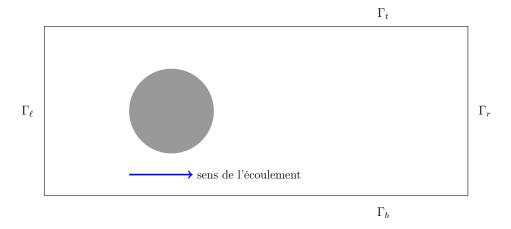


FIGURE 5.20: Cas test du cylindre en sol érodable placé au milieu d'un écoulement.

Pour le calcul de la contrainte de cisaillement, nous utilisons la deuxième approche, qui consiste à éliminer la couche limite d'inconsistance et nous suivons le processus global alternant les étapes écoulement et érosion (voir les équations du modèle dans la section 5.1). Les points suivants résument les différents cas tests des simulations numériques effectuées :

- On traite deux types d'écoulement, confiné par des parois et non confiné;
- On fait varier le nombre de Reynolds $(0 \le Re \le 100)$;
- On fait varier le seuil τ_c et le coefficient d'érosion K_d .

Maillage utilisé

Nous utilisons un maillage DDFV non conforme comme illustré dans la figure 5.21 avec trois niveaux de raffinement. Le maillage est initialisé en tenant compte de la géométrie comme critère de raffinement AMR (Adaptive Mesh Refinement) [48]. Puis, les informations des différents volumes de contrôle nécessaires aux schémas DDFV sont calculées. L'obstacle est contenu dans la zone la plus raffinée pour assurer une bonne estimation de la contrainte.

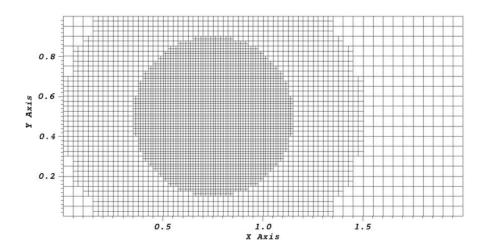


FIGURE 5.21: Visualisation du type de maillage utilisé pour la simulation numérique.

État initial

Dans la figure qui suit, on donne l'état initial des cylindres à éroder sous des écoulements confinés. À gauche, il s'agit d'un écoulement de Stokes et à droite d'un écoulement de Navier-Stokes (Re = 40).

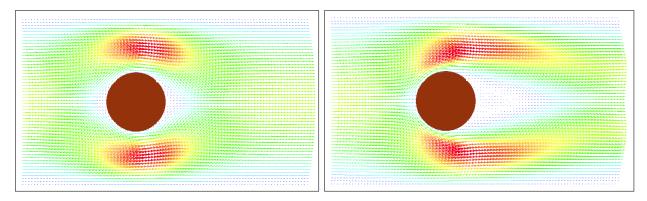
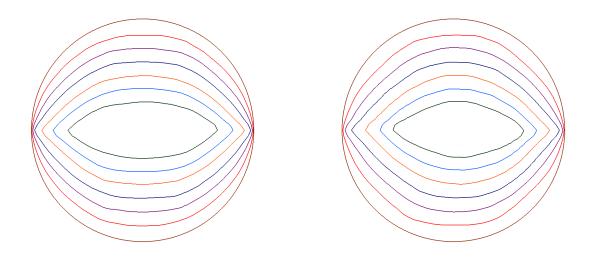


FIGURE 5.22: Cylindres à l'état initial sous des écoulements confinés (Stokes à gauche, Navier-Stokes à droite).

Résultats d'érosion

Dans les figures suivantes, on affiche les profils de l'interface du cylindre à différentes étapes d'érosion pour des simulations correspondants aux cas tests annoncés précédemment. Pour ces simulations, on utilise les paramètres de l'érosion : $K_d = 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{N.s}$ et $\tau_c = 0$ Pa.

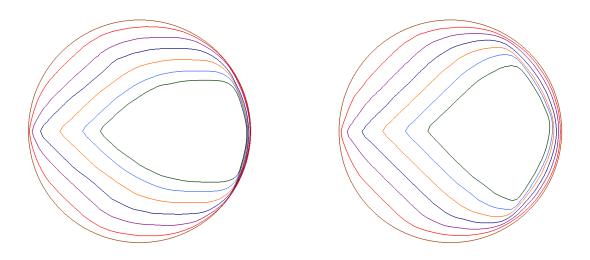
• Écoulements de Stokes :



- (a) Cylindre sous écoulement confiné
- (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.23: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Stokes.

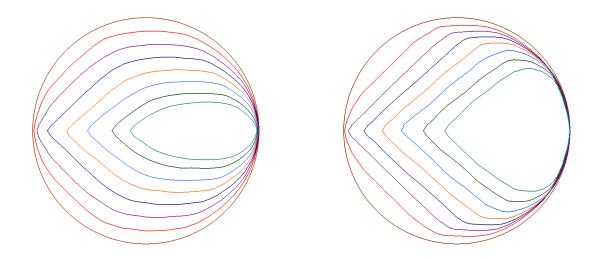
• Écoulements de Navier-Stokes avec Re = 20:



- (a) Cylindre sous écoulement confiné.
- (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.24: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

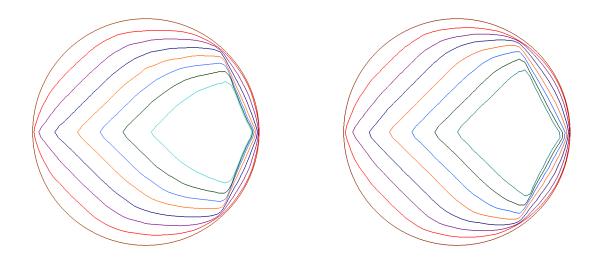
• Écoulements de Navier-Stokes avec Re = 40:



- (a) Cylindre sous écoulement confiné.
- (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.25: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

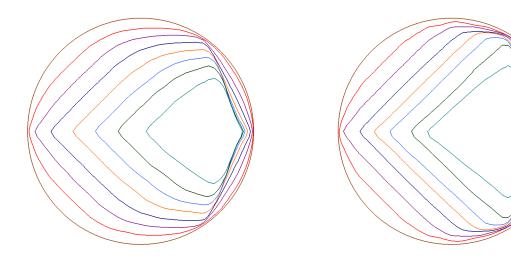
• Écoulements de Navier-Stokes avec Re = 50:



- (a) Cylindre sous écoulement confiné.
- (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.26: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulements de Navier-Stokes.

• Écoulement de Navier-Stokes avec Re = 80:



- (a) Cylindre sous écoulement confiné.
- (b) Cylindre sous écoulement non confiné.

FIGURE 5.27: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion sous écoulement de Navier-Stokes.

Les résultats que nous venons de présenter montrent plusieurs aspects sur l'évolution de la section du cylindre sous l'effet de l'érosion. Ainsi, nous pouvons faire une première analyse sur la forme de l'objet érodé selon le type d'écoulement :

- Sous l'écoulement de Stokes, le cylindre érodé a une forme ovale présentant une parfaite symétrie et garde le même centre de gravité que le cylindre initial (figure 5.23). Cette forme se voit d'avantage érodée par l'écoulement confiné près des parois. On retrouve ici les résultats obtenus par D. Lachouette [60], avec plus de précision.
- Sous l'écoulement de Navier-Stokes, le cylindre érodé ne présente plus de symétrie amont/aval et en s'érodant, il prend en amont une forme plus ou moins triangulaire, qui présente un point d'arrêt pointant vers l'arrivée du flux. On retrouve ici les résultats observés dans les expériences de M. Moore et al. [80,81]. Par contre, en observant l'objet érodé en aval, on constate qu'avec des écoulements à faibles Reynolds (< 50), il garde une forme circulaire (figures 5.24 et 5.25); et avec des Reynolds plus élevés (> 50), cet objet prend une forme triangulaire mais avec un angle différent de celui observé en amont (figures 5.24 et 5.25). Les simulations numériques de M. Moore et al. n'ont pas relevé cet aspect, parce qu'ils ont considéré un modèle sur couche mince. Le confinement a ici, aussi, un effet d'érosion de l'objet, accentuée près des parois.

Nos simulations ont permis de capter des informations sur la physique de l'objet érodé. Dans ce qui suit, nous mettons en exergue plus de détails pour l'analyse de l'érosion que nous avons obtenu en fonction du nombre Reynolds.

Dans la figure suivante on affiche les profils du cylindre érodé, après une durée d'érosion égale, sous écoulements de Stokes et de Navier-Stokes avec différents nombre de Reynolds :

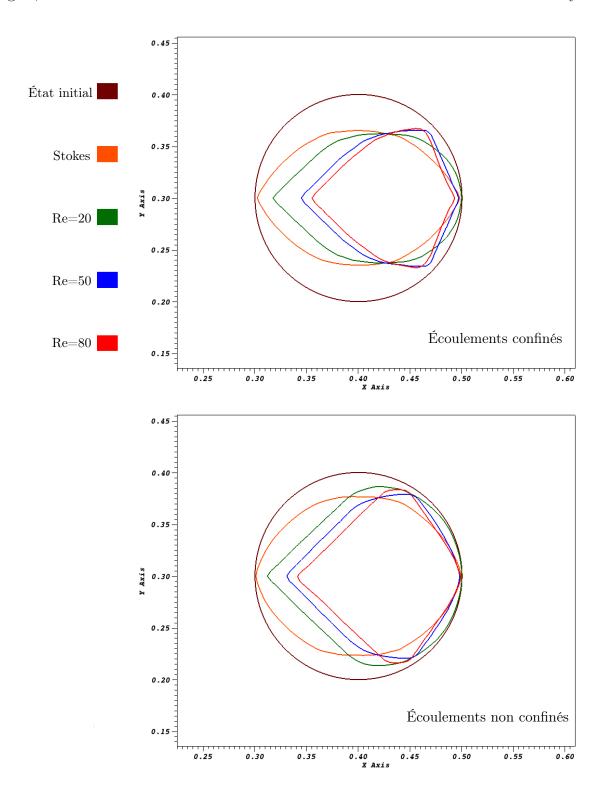


FIGURE 5.28: Profils des interfaces érodées prises au même instant en fonction du Reynolds.

On constate, comme prévu, qu'en augmentant le nombre de Reynolds l'érosion devient plus rapide. Le confinement de l'écoulement la rend encore plus rapide. La forme en amont, que nous avons évoquée avant, présente une pointe avec un angle asymptotique atteint pour des Reynolds de l'ordre de quelques dizaines. Cet angle est le même pour les nombres de Reynolds que nous avons étudié et il est proche de 90°. M. Moore et al. [81] ont trouvé numériquement le même angle avec un modèle asymptotique d'écoulement valable à haut Reynolds. Mais, expérimentalement le temps d'érosion n'était pas suffisant pour atteindre un tel angle.

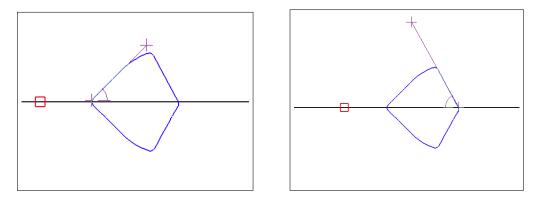


FIGURE 5.29: Exemples d'angles asymptotiques avals et amont (Re=50).

Les formes triangulaires observées en aval, pour des érosions sous des écoulements à Reynolds élevés, sont dues aux tourbillons dernière l'obstacle (voir figure 5.30). Ces recirculations sont plus importantes dans le cas d'écoulements confinés, donc l'érosion est plus forte à cet endroit. Enfin, notons que l'angle asymptotique atteint dans ce cas est 120°.

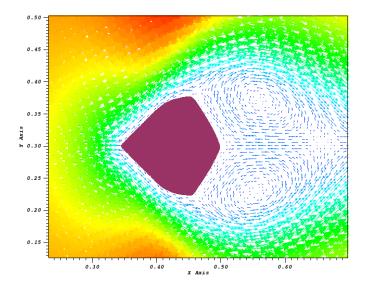


FIGURE 5.30: Érosion en aval de l'obstacle sous l'effet des tourbillons (Re = 50).

• Érosion avec $\tau_c \neq 0$:

Nous avons effectué ce cas test pour mettre en évidence l'effet seuil de la loi d'érosion. Pour cela on considère un écoulement non confiné avec Re = 50. On fixe le coefficient d'érosion $K_d = 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{N.s.}$ Numériquement, nous avons constaté que la contrainte de cisaillement dans cette configuration est de l'ordre de 2.5 Pa, on choisit donc pour ce cas test la contrainte critique $\tau_c = 1$ Pa. Dans la figure suivante on donne les résultats de la simulation, où on constate qu'à cause de ce nouveau seuil, la partie aval du cylindre ne s'érode plus car le cisaillement très faible à cet endroit.

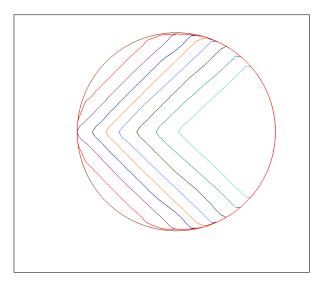


FIGURE 5.31: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion ($\tau_c = 1$ Pa).

La partie amont s'érode comme dans le cas sans seuil, sauf au début où l'érosion n'opère pas au "nez" de l'obstacle (voir la figure ci-dessous), car dans ce cas, le cisaillement est sous le seuil critique.

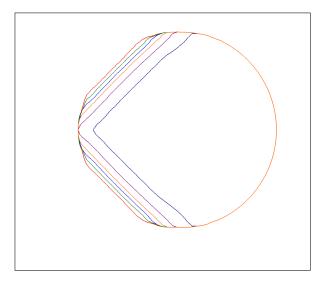


FIGURE 5.32: Zoom sur les profils de l'interface au début de l'érosion ($\tau_c = 1$ Pa).

• Érosion avec $K_d = 1$ cm³/N.s:

Ce dernier test ne correspond pas aux hypothèses du modèle, puisqu'en prenant $K_d=1$ cm³/N.s les vitesses de l'érosion et de l'écoulement auront la même échelle. Mais, ce test nous permet d'observer l'influence d'une érosion rapide par rapport à l'écoulement. Pour cela on considère un écoulement non confiné, avec Re=50 et on fixe la contrainte critique τ_c à 0. Dans la figure 5.33, on représente les profils de l'interface lors de l'érosion avec $K_d=1$ cm³/N.s. Pour comparaison, on affiche les profils des interfaces érodées sous le même écoulement avec $K_d=0$ cm³/N.s. Les interfaces érodées gardent globalement les mêmes profils, mais avec des érosions plus accentuées pour le cas $K_d=1$ cm³/N.s. Sur la moitié droite de l'objet, en aval de l'écoulement, ces profils perdent la particularité rectiligne, ceci ressemble aux profils constatés sous un écoulement à bas Reynolds. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'écoulement trouve un régime asymptotique plus tard près du "nez" de l'obstacle.

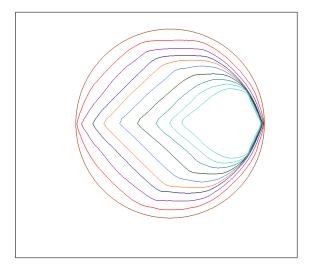


FIGURE 5.33: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion avec $K_d = 1 \text{ cm}^3/\text{N.s.}$

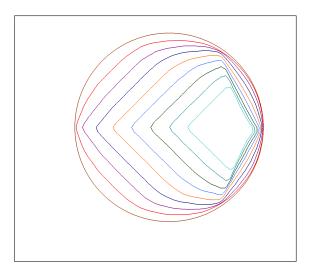


FIGURE 5.34: Profils de l'interface du cylindre au cours de l'érosion avec $K_d = 10^{-7}$ cm³/N.s.

5.5.2 Érosion d'une bille

Pour illustrer un cas 3D, on reprend la simulation de la bille de sol placée au milieu d'un canal rectangulaire $\Omega = [0,2] \times [0,1]^2$ que nous avons présentée précédemment. On utilise deux écoulements confinés, l'un est décrit par les équations de Stokes et l'autre est décrit par les équations de Navier-Stokes avec Re = 20.

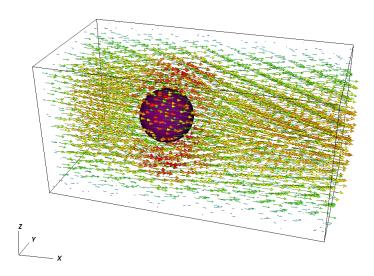


FIGURE 5.35: Cas test d'une bille sous un écoulement au milieu d'un canal.

Le maillage utilisé est représenté dans la figure 5.36. C'est un maillage DDFV non conforme, initialisé, comme dans le cas précédent, en tenant compte de la géométrie comme critère de raffinement AMR. Les informations nécessaires aux schémas DDFV sont calculées ensuite. L'objet à éroder est contenu dans la zone la plus raffinée.

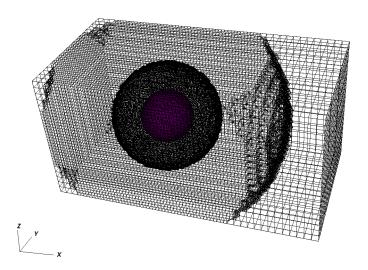


FIGURE 5.36: Visualisation du maillage utilisé et de la bille à éroder.

Dans les deux figures ci-dessous on représente la norme de la contrainte du cisaillement exercée par le fluide sur la bille. Cette contrainte est parfaitement symétrique dans le cas d'un écoulement de Stokes comme le montre la figure 5.37. Dans le cas de Navier-Stokes, la symétrie est perdue; l'inertie du fluide impose un fort cisaillement sur la partie de la bille se trouvant en amont du flux. En observant les profils de ces contraintes, on constate qu'ils présentent autour de la bille des valeurs très importantes sur les cotés qui sont faces aux parois et moins importantes dans les parties face aux angles du canal qui est une région moins confinée. Dans les parties amont et aval, les valeurs du cisaillement sont quasi nulles.

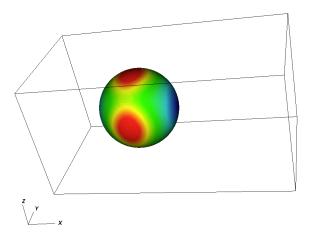


FIGURE 5.37: Contrainte de cisaillement d'une bille soumise à un écoulement de Stokes confiné.

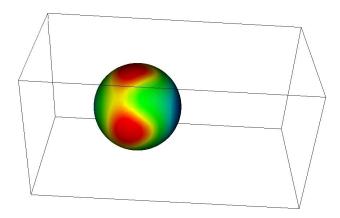


FIGURE 5.38: Contrainte de cisaillement d'une bille soumise à un écoulement de Navier-Stokes confiné.

Nous donnons, sur les figures qui suivent, quelques résultats de la simulation numérique de l'érosion de la bille sous un écoulement de Navier-Stokes (Re=20). Pour les paramètres de l'érosion on prend : $K_d=10^{-7}~{\rm cm}^3/{\rm N.s}$ et $\tau_c=0$ Pa.

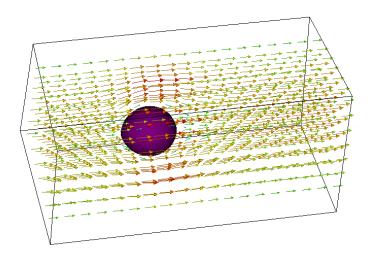


FIGURE 5.39: La bille au début de l'érosion.

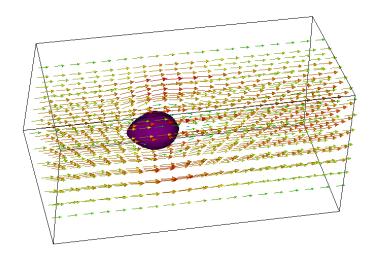


FIGURE 5.40: La bille en érosion à un temps intermédiaire.

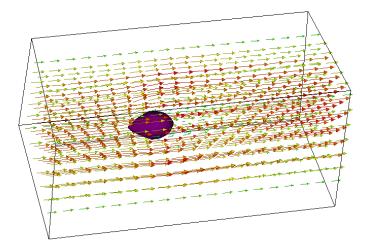


Figure 5.41: La bille en érosion à un autre temps intermédiaire.

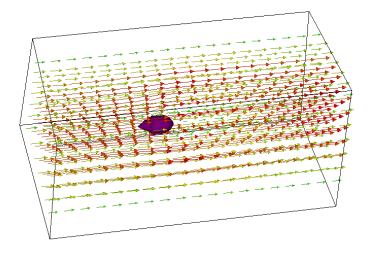


Figure 5.42: La bille à la fin de l'érosion.

5.6 Conclusion

À travers ce chapitre, nous avons présenté deux approches pour donner un calcul pertinent de la contrainte de cisaillement à l'interface solide/fluide. La première approche consiste à s'extraire de la couche limite d'inconsistance. Une approche qui fonctionne bien dans le cas radial mais qui montre ses limites quand l'écoulement présente des grandes variations de cisaillement au voisinage de l'obstacle. La deuxième approche permet d'éliminer la couche limite d'inconsistance et de donner un calcul consistant de la contrainte à l'interface. C'est ainsi que les limites de la première sont corrigées .

Par la suite, nous avons assemblé les outils numériques développés tout au long de la thèse pour présenter des applications décrivant des processus complets d'érosion. Des validations ont été présentées dans les cas simulant l'érosion d'un trou (HET) et l'érosion d'un cylindre tournant (RCT). Les simulations numériques du cas de l'érosion du cylindre, tel que décrit dans l'expérience de M. Moor et al. [80, 81], permettent d'explorer en détails plusieurs aspects physiques. Nous avons mené ces simulations en variant les paramètres d'écoulement (le nombre de Reylonds et le confinement ou pas de l'écoulement) et les paramètres de la loi d'érosion (le seuil τ_c et le coefficient K_d). Les résultats ont été confrontés aux expérimentations réelles et ont montré que notre modèle donne une description riche du phénomène. Le cas de l'érosion de la bille, bien qu'il reste purement académique, montre bien la capacité du code à fournir de simulations totalement 3D.