

Application de la méthode des lignes de courant à un cas plus complet

4.1 Introduction

Dans cette partie on va appliquer la méthode des lignes de courants à un modèle de bassin plus complet et réaliste que dans le modèle déjà traité dans la partie précédente. Il y aura plusieurs différences dont les plus importantes sont la compaction et la génération de l'huile.

1- Compaction:

Au cours de la formation du bassin les sédiments sont déposés dans le bassin, ensuite ils se compactent sous le poids des sédiments sus-jacents. Dans les sédiments compactés on peut constater d'abord un changement du volume et une diminution de la porosité, ainsi qu'une expulsion de l'huile pour les sédiments qui en contiennent (les roches mères). Sur le modèle mathématique ceci se traduit par une variation au cours du temps du domaine de résolution du système et de la porosité, ce qui implique une vitesse totale dont la divergence n'est pas nulle (voir équation ci-après).

2- Génération de l'huile:

Certains matériaux déposés dans le bassin pendant sa formation contiennent des débris organiques. Puis, par des réactions chimiques, ces débris donnent naissance à une matière organique appelée kérogène. Ensuite celle ci se transforme sous l'effet du temps et de la température pour donner de l'huile et du gaz. En général il y a deux étapes appelées craquage primaire et craquage secondaire. Dans le système des équations mathématiques ceci se traduit par l'apparition des termes sources dans les équations de conservation de la masse, et on a aussi un terme de plus dans la relation de la divergence de la vitesse totale.

La méthode des lignes de courant sera implantée dans le code Visco3D¹, un code développé à l'IFP pour la modélisation des bassins. On rappelle que dans l'étude d'un bassin sédimentaire, on peut distinguer plusieurs phénomènes physiques. Les plus importants d'entre eux sont:

1. Evolution géométrique du bassin
2. Evolution thermique
3. Génération d'huile à partir de la matière organique
4. Ecoulement polyphasique dans le bassin

La méthode des lignes de courant sera appliquée aux équations de l'écoulement (i.e le quatrième point), les autres équations seront traitées numériquement par le code Visco3D. Dans Visco3D, on utilise deux types de schémas pour traiter les équations de la saturation:

- Schéma IMPES:
Ce schéma nécessite une condition CFL sur le pas de temps pour qu'il reste stable au cours de la modélisation, ce qui oblige à faire plus souvent une résolution d'un système linéaire (équation de la pression), et augmente le temps de calcul.
- Schéma Fully Implicite:
Ce schéma ne demande pas de condition sur le pas de temps. Par contre à chaque pas de temps on a un système non linéaire à résoudre, cette étape est très coûteuse.

Ces deux schémas vérifient le critère de la conservation des bilans de fluides. On donnera dans la suite le schéma IMPES, pour le schéma Fully Implicite voir ([3] et [4]).

¹Pour plus de détails sur Visco3d, on peut consulter ([31], [32]), et les rapports IFP ([22], [3] et [4])

4.2 Les équations mathématiques du modèle

4.2.1 Lois de conservation dans le bassin

- Conservation de la masse solide

$$\partial_t(\rho_s(1 - \Phi)) + \text{div}(\rho_s(1 - \Phi)\vec{V}_s) = \rho_s q_s. \quad (4.1)$$

- Conservation de la masse de la phase α , $\alpha \in \{w, o, g\}$

$$\partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) + \text{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha. \quad (4.2)$$

- Equilibre mécanique

$$\partial_z(\sigma_z) = (\Phi \rho_f + (1 - \Phi)\rho_s)g \quad (4.3)$$

Où:

- Φ est la porosité du milieu
- ρ_s est la densité de la phase solide (entre 2500 et 3000 Kg/m^3)
- \vec{V}_s est la vitesse de la phase solide. Cette vitesse est supposée nulle dans les directions de x et y
- q_s est le terme source de la phase solide, correspondant à la quantité de solide déposée (ou retirée) au toit du bassin
- σ_z est la contrainte totale exercée par les terrains sus-jacents, supposée verticale
- g est la valeur algébrique de la pesanteur ($9.81 m/s^2$)

Pour $\alpha \in \{w, o, g\}$, on a noté:

- ρ_α est la masse volumique de la phase α , qui est soit constante, soit dépendante de la température (entre 1000 – 1100 pour l'eau, 700 – 900 pour l'huile et 1 – 200 Kg/m^3 pour le gaz)
- S_α est la saturation de la phase α , et on a $\sum_\alpha S_\alpha = 1$
- \vec{V}_α est la vitesse de Darcy de la phase α , donnée par la relation

$$\vec{V}_\alpha = \Phi S_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{V}_s).$$

Où \vec{v}_α est la vitesse de la phase α (entre 10^{-6} et 1 $m/annee$)

- q_α est le terme source de la phase α . Pour l'eau, ce terme est lié à la sédimentation ou à l'érosion. Pour l'huile, ce terme est lié aux phénomènes de craquage primaire et secondaire
- ρ_f est la densité moyenne du fluide définie par $\rho_f = \sum_\alpha \rho_\alpha S_\alpha$

4.2.2 Loi de Darcy

Les fluides sont supposés obéir à la loi de Darcy généralisée, qui donne la vitesse de la phase α en fonction de sa pression:

$$\vec{V}_\alpha = -A_\alpha K (\vec{\nabla} P_\alpha - \rho_\alpha \vec{g}). \quad (4.4)$$

Avec:

- P_α est la pression de la phase α
- K est la matrice de perméabilité intrinsèque du milieu

- A_α est la mobilité de la phase α , A_α est donnée par:

$$A_\alpha(S_\alpha, T) = \frac{kr_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha(T)},$$

où kr_α est la perméabilité relative de la phase α en présence des autres phases, et μ_α la viscosité de la phase α . T est la température.

4.2.3 Transferts thermiques

Les transferts thermiques sont régis par l'équation de la conservation de la chaleur, dans laquelle sont pris en compte les phénomènes de conduction, convection et radioactivité. On donne ici la forme générale de cette équation:

$$\partial_t(\rho c_b T) + \text{div} \left(\sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} (\rho_\alpha c_\alpha T \vec{V}_\alpha) + \rho_s c_s (1 - \Phi) T \vec{V}_s - \lambda_b \vec{\nabla} T \right) = q_h + q_r + q_{oh} \quad (4.5)$$

Avec:

- T la température
- c_α la capacité calorifique de la phase α
- ρc_b la capacité calorifique du milieu poreux saturé par les fluides, donnée par:

$$\rho c_b = \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} \rho_\alpha \Phi S_\alpha c_\alpha + \rho_s (1 - f) c_s$$

- λ_b la conductivité thermique du milieu, donnée par:

$$\lambda_b = \lambda_s^{1-\Phi} \prod_{\alpha \in \{w, o, g\}} \lambda_\alpha^{\Phi S_\alpha}$$

avec λ_α la conductivité de la phase α qui dépend de T

- q_h le terme source de chaleur dû au dépôt ou à l'érosion de sédiments
- q_r le terme source dû à la radioactivité
- q_{oh} le terme source dû à la variation de volume fluide par génération d'huile

Pour les cas particuliers de cette équation, les conditions initiales et aux limites, ainsi que le traitement numérique de cette équation dans le code Visco on se réfère à ([2]).

4.2.4 Perméabilités intrinsèques

La matrice K de perméabilité est supposée diagonale dans le repère strate-antistrade, de la forme:

$$K = k(\Phi) \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

avec:

- k_x, k_y et k_z sont les coefficients d'anisotropie dans les directions x, y et z
- $k(\Phi)$ est une fonction de la porosité, donnée par la formule de Kozeny-Carman:

$$k(\Phi) = \begin{cases} \frac{0.2\Phi^3}{S_0^2(1-\Phi)^2} & \text{si } \Phi \geq 0.1 \\ \frac{20\Phi^5}{S_0^2(1-\Phi)^2} & \text{si } \Phi \leq 0.1 \end{cases} \quad (4.7)$$

où S_0 est la surface spécifique du sédiment, constante pour chaque lithologie. En général $k(\Phi)$ varie entre 10^{-12} et $10^{-21} m^2$

4.2.5 Perméabilités relatives

Les perméabilités relatives sont des fonctions des saturations et de la lithologie. Dans le cas d'un écoulement diphasique, la perméabilité relative de l'huile est définie de cette façon:

$$kr_o(S_o) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_o \leq S_{atex}^o \\ \left(\frac{S_o - S_{atex}^o}{S_{atir}^o - S_{atex}^o} \right)^{p_{ow}} & \text{si } S_{atex}^o \leq S_o \leq S_{atir}^o \\ 1 & \text{si } S_o \geq S_{atir}^o \end{cases} \quad (4.8)$$

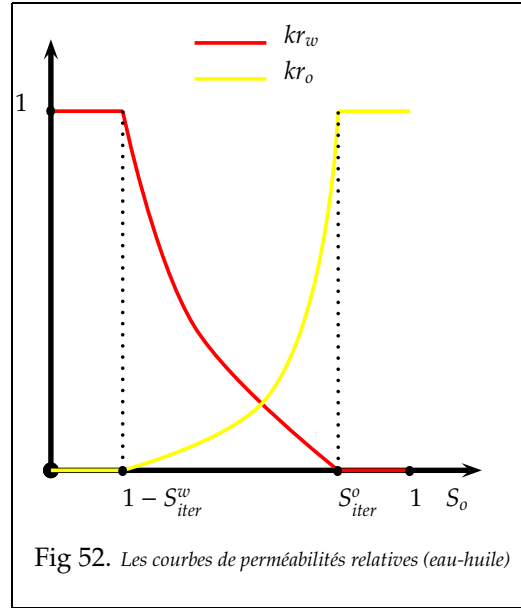
De la même façon, la perméabilité relative de l'eau en présence d'huile est donnée par:

$$kr_w(S_w) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_w \leq 1 - S_{atir}^w \\ \left(\frac{S_w - (1 - S_{atir}^w)}{S_{atir}^w - S_{atex}^w} \right)^{p_{wo}} & \text{si } 1 - S_{atir}^w \leq S_w \leq 1 - S_{atex}^w \\ 1 & \text{si } S_w \geq 1 - S_{atex}^w \end{cases} \quad (4.9)$$

Avec:

- p_{ow} et p_{wo} sont des constantes ≥ 1

- S_{atex}^o est la saturation minimale de l'huile (saturation d'expulsion)
- S_{atir}^o est la saturation maximale de l'huile
- S_{atex}^w est la saturation minimale de l'eau (saturation d'expulsion, entre 0 et 0.25)
- S_{atir}^w est la saturation maximale de l'eau (entre 0.5 et 0.95)



Les constantes S_{atir}^α et S_{atex}^α sont reliées par la relation:

$$S_{atir}^\alpha = 1 - S_{atex}^\beta \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \{o, w\}.$$

4.2.6 Pression capillaire

Les pressions capillaires relient les pressions des fluides. elles vérifient la relation pour $\alpha, \beta \in \{w, o, g\}$:

$$P_{c_{\alpha\beta}} = P_\alpha - P_\beta = P_{c_{\alpha\beta}}(S_\alpha, S_\beta).$$

La formule utilisée pour calculer $P_{c_{\alpha\beta}}$ est:

$$P_{c_{\alpha\beta}}(S_\alpha, S_\beta) = \begin{cases} Pc1_{\beta\alpha} + (Pc1_{\alpha\beta} - Pc1_{\beta\alpha}) \left(\frac{\bar{S}_\alpha - S_{r,\alpha\beta}}{1 - S_{r,\beta\alpha} - S_{r,\alpha\beta}} \right)^{\gamma_{\alpha\beta}} & \text{si } S_{r,\alpha\beta} < \bar{S}_\alpha < 1 - S_{r,\alpha\beta} \\ Pc1_{\beta\alpha} & \text{si } \bar{S}_\alpha \leq S_{r,\alpha\beta} \\ Pc1_{\alpha\beta} & \text{si } \bar{S}_\alpha \geq 1 - S_{r,\alpha\beta} \end{cases} \quad (4.10)$$

Avec $\alpha = w$ et $\beta \in \{o, g\}$, et :

- $S_{r,\alpha\beta}$ est la saturation résiduelle.
- $\bar{S}_\alpha = \frac{S_\alpha}{S_w + S_\alpha}$.
- $\gamma_{\alpha\beta}$ est une constante comprise entre 0 et 1.
- $Pc1_{\alpha\beta}$ et $Pc1_{\beta\alpha}$ sont des constantes.

On définit la pression moyenne du fluide par:

$$P_f = S_w P_w + S_o P_o + S_g P_g. \quad (4.11)$$

On définit, pour chaque phase α , $P_{c_{\alpha,f}}$ par:

$$P_{c_{\alpha,f}} = P_\alpha - P_f.$$

Pression capillaire dans un écoulement diphasique

On considère un écoulement diphasique (eau, huile). Dans ce cas la pression capillaire est définie par:

$$Pc(\Phi, S_w) = P_o - P_w = \overline{\overline{Pc}}(\Phi) + \overline{Pc}(S_w).$$

Avec $\overline{\overline{Pc}}(\Phi)$ donnée par:

$$\overline{\overline{Pc}}(\Phi) = \begin{cases} Pc_0 & \text{si } \Phi > \Phi_0 \\ Pc_0 + (Pc_{lim} - Pc_0) \left(\frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0 - \Phi_{lim}} \right)^{p\Phi} & \text{si } \Phi_{lim} \leq \Phi \leq \Phi_0 \\ Pc_{lim} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

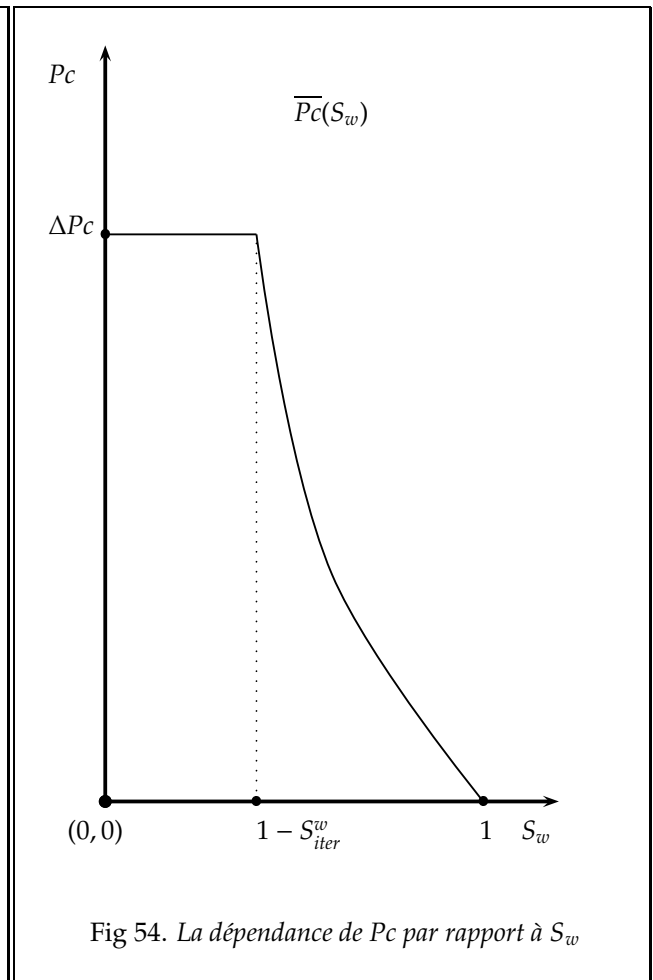
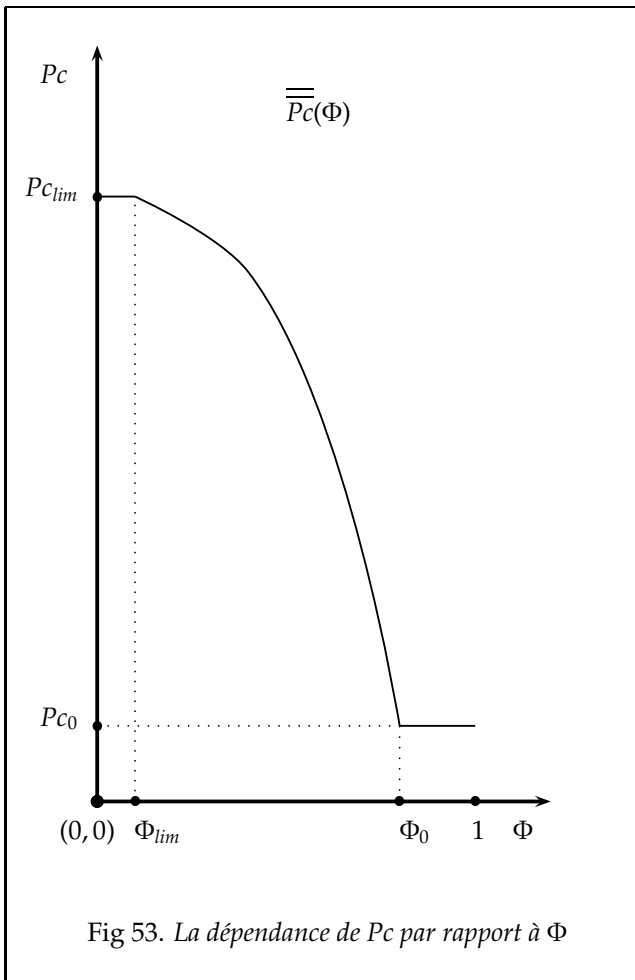
Où

- Pc_0 est la pression capillaire en surface, ou pour une porosité maximale Φ_0 ,
- Pc_{lim} est la pression capillaire pour l'enfouissement maximal ou pour une porosité minimale Φ_{lim}
- $p\Phi$ est une constante.

La dépendance par rapport à la saturation s'exprime par:

$$\overline{Pc}(S_w) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_w = 1 \\ \Delta Pc \left(\frac{1 - S_w}{S_{atir}^w} \right)^{psw} & \text{si } 1 - S_{atir}^w \leq S_w \leq 1 \\ \Delta Pc & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

où S_{atir}^w est la saturation maximale de l'eau, ΔPc est l'augmentation de pression capillaire pour une variation maximale de la saturation des hydrocarbures (entre 0 et S_{atir}) et psw est le coefficient en exposant de la fonction.



4.2.7 Viscosités

La viscosité de l'eau est une fonction de la température, donnée par la relation suivante (Loi de Bingham):

$$\mu_w(T) = \frac{21.5}{T + \sqrt{8078 + T^2} - 1200}$$

La viscosité de l'huile est une fonction de la température, donnée par:

$$\mu_o(T) = \mu_0 e^{\frac{Ak_0}{T}}$$

où μ_0 est une viscosité de référence et Ak_0 un paramètre. Dans les deux relations ci-dessus T est exprimée en degrés Celsius.

4.2.8 Compaction

La compaction du milieu poreux est décrite par la loi rhéologique suivante (ceci nous donne l'évolution de la porosité au cours du temps par rapport à la contrainte effective moyenne σ) :

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\beta(\Phi, \sigma) \partial_t \sigma - \alpha(\Phi, \sigma) \sigma. \quad (4.14)$$

Où σ , β et α sont définies de la façon suivante :

$$\sigma = \sigma_z - P_f. \quad (4.15)$$

$$\beta(\Phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{\Phi_a}{E_a} e^{\frac{-\sigma}{E_a}} + \frac{\Phi_b}{E_b} e^{\frac{-\sigma}{E_b}} & \text{si } \sigma \geq \sigma_m \text{ et } \Phi > \Phi_r \\ \frac{1}{E_c} & \text{si } \sigma \leq \sigma_m \text{ et } \Phi > \Phi_r \\ 0 & \text{si } \Phi \leq \Phi_r \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\alpha(\Phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{1 - \Phi}{\mu_b(T)} & \text{si } \sigma \geq 0 \text{ et } \Phi > \Phi^{min} \\ 0 & \text{si } \sigma \leq 0 \text{ et } \Phi \leq \Phi^{min} \end{cases} \quad (4.17)$$

où

- $\Phi_r, \Phi_a, \Phi_b, \Phi^{min}, E_a, E_b$ et E_c sont des constantes,
- σ_m est le seuil de plasticité égal à la contrainte effective maximale atteinte au cours de l'histoire géologique,
- μ_b est la viscosité de la roche, c'est une fonction de la température :

$$\mu_b(T) = \mu_0 e^{\frac{E}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})},$$

où μ_0 est la viscosité de la roche pour une température de 15° Celsius, E est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits.

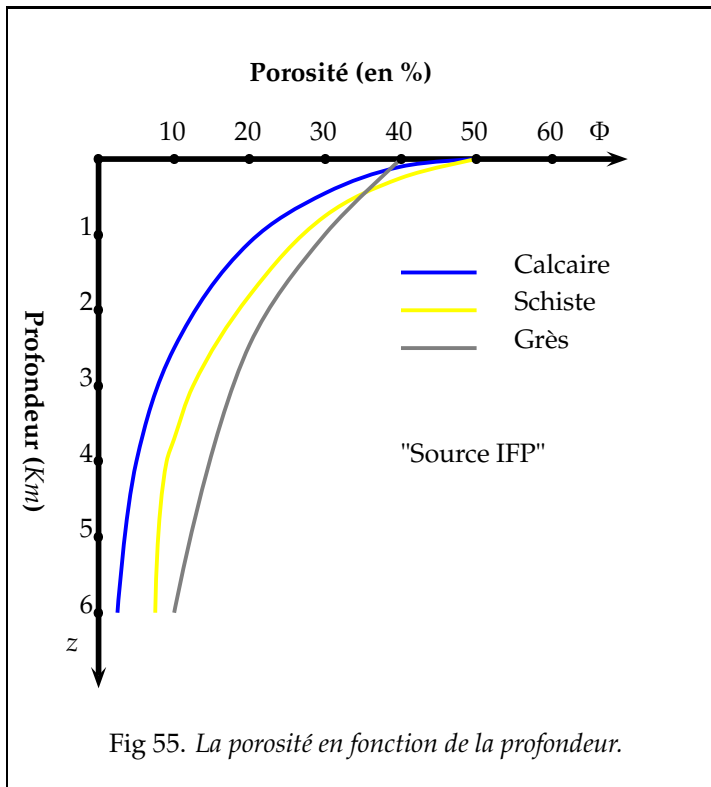


Fig 55. La porosité en fonction de la profondeur.

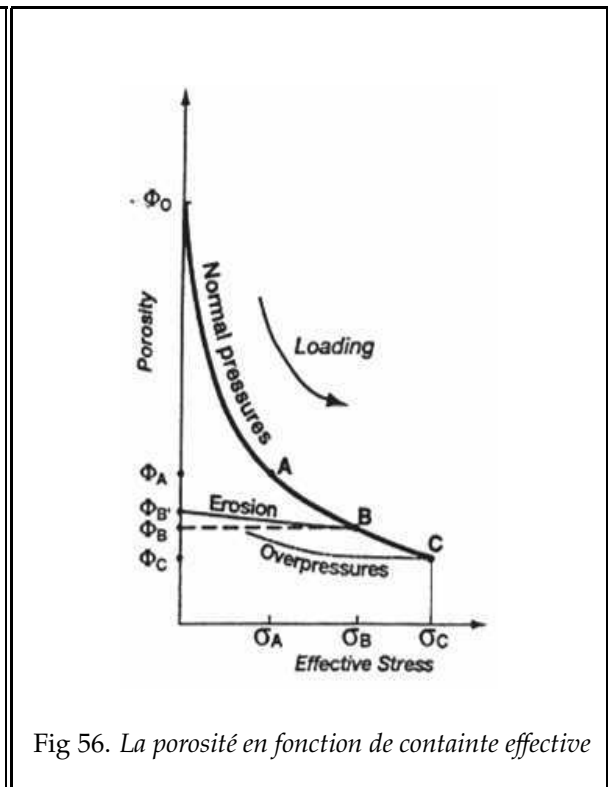


Fig 56. La porosité en fonction de contrainte effective

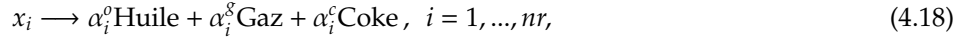
4.2.9 Génération des hydrocarbures

Craquage primaire

La génération des hydrocarbures est effectuée à partir d'un modèle conservatif à deux classes: les hydrocarbures lourds (huile) et légers (gaz). Les phases eau, huile, gaz sont constituées d'un seul composant. Les échanges entre

phases ne sont pas pris en compte.

Lors du craquage primaire, le kérogène se transforme en huile, gaz et coke, suivant nr réactions parallèles :



où

- x_i représente le potentiel normalisé de la réaction i . C'est une donnée du kérogène qui obéit à la condition suivante : $\sum_i x_i = 1$.
- $\alpha_i^o, \alpha_i^g, \alpha_i^c$ sont les quantités d'huile, de gaz et de coke produites par la réaction i , ces quantités vérifient la relation :

$$\forall i \in \{1, \dots, nr\}, \quad \alpha_i^o + \alpha_i^g + \alpha_i^c = 1.$$

Chacune des ces réactions élémentaires obéit à une cinétique du premier ordre qui se formalise ainsi :

$$\frac{dx_i}{dt} = -k_i x_i, \quad \text{avec } k_i = A_i e^{-\frac{E_i}{RT}}. \quad (4.19)$$

A_i est le facteur pré-exponentiel. (A_i est de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} et E_i entre 210 et 290 KJ/mol).

Craquage secondaire

L'huile formée par craquage primaire se transforme suivant une réaction cinétique du premier ordre en gaz et en coke :



β_o^g et β_o^c sont des coefficients stoechiométriques de la réaction, ils respectent la condition: $\beta_o^g + \beta_o^c = 1$.
Pour un élément de roche de porosité Φ , les termes sources sont donnés par les relations suivantes:

$$q_o = \rho_s(1 - \Phi) \frac{TOC}{c - TOC} \sum_{1 \leq i \leq nr} \alpha_i^o k_i x_i - \rho_o S_o \Phi k_o \quad (4.21)$$

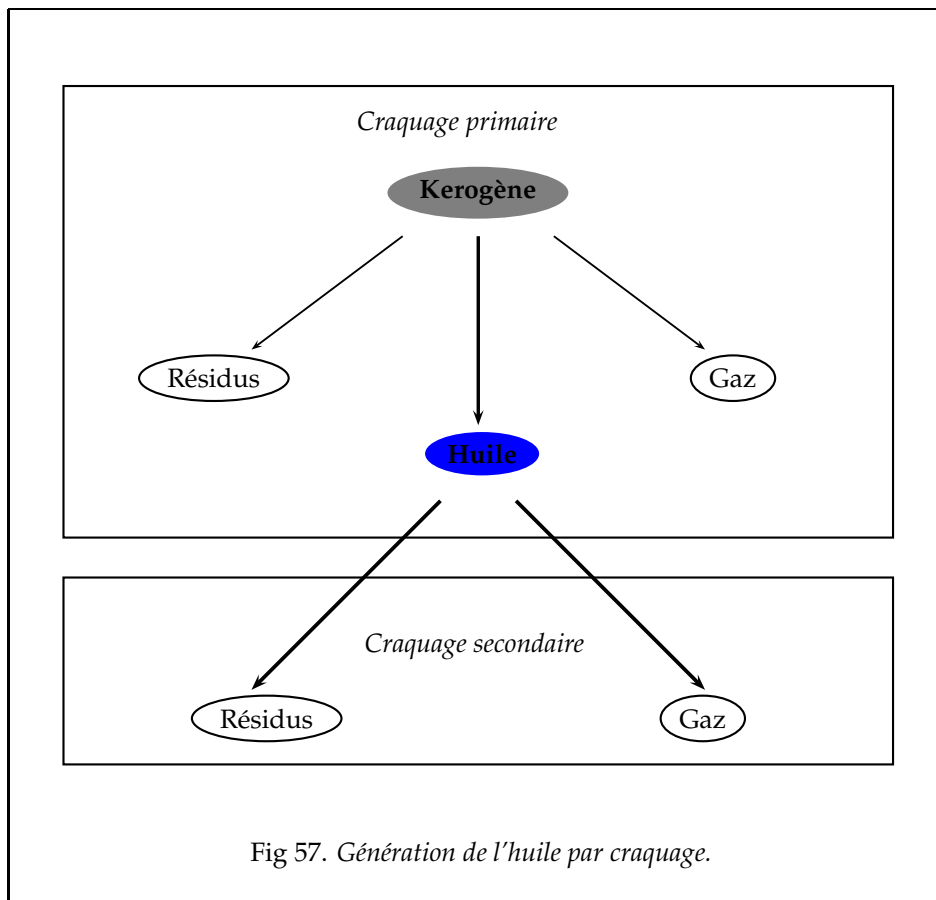
$$q_g = \rho_s(1 - \Phi) \frac{TOC}{c - TOC} \sum_{1 \leq i \leq nr} \alpha_i^g k_i x_i + \rho_o S_o \Phi k_o \beta_o^g \quad (4.22)$$

où TOC (le potentiel en carbone organique) et c (teneur massique en carbone) sont des données caractéristiques du kérogène.

4.2.10 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont:

- la contrainte totale est imposée au toit du bassin, elle est égale à la somme de la pression atmosphérique et de la pression exercée par le poids de la colonne d'eau plus sédiments.
- Au toit du bassin, la pression est égale à la somme de la pression atmosphérique et de la pression exercée par le poids de la colonne d'eau en milieu marin.
- A la base du bassin, le flux d'eau est supposé nul.
- Sur les bords latéraux, le flux total est supposé nul.



4.2.11 Conditions initiales

A l'instant initial, le bassin n'existe pas. Les premiers sédiments sont déposés sur le socle. La sédimentation est caractérisée par la donnée de la hauteur solide de sédiments déposés et sa porosité de dépôt.

Le seul fluide présent dans les sédiments lors du dépôt est l'eau.

La pression et la contrainte totale initiales des sédiments déposés sont calculées en considérant l'équilibre hydrostatique:

$$P_f = \sigma_z = P_{atm} + \rho_w g h_w$$

où h_w est la hauteur de la colonne d'eau et P_{atm} la pression atmosphérique.

4.3 Discrétisation des équations

Nous donnons dans cette partie le schéma numérique utilisé dans Visco. La discrétisation en espace est faite avec un schéma volume fini centré sur les mailles, tandis que pour la discrétisation temporelle on utilise :

- Un schéma d'Euler implicite pour les équations de la pression et de la contrainte.
- Un schéma d'Euler explicite pour l'équation de la saturation.

On obtient donc un système découplé en pression-contrainte saturation, on résout un système linéaire pour connaître la pression et la contrainte, puis on met à jour la saturation.

4.3.1 Notions du maillage

Discrétisation en temps

La durée de simulation est divisée en grands intervalles du temps $([T^j, T^{j+1}])_{0 \leq j < Ev_{max}}$ appelés événements. Chaque événement correspond à une période géologique pendant laquelle une nouvelle couche se dépose. Ainsi, le nombre des mailles augmente à ces instants T^j . $Ev_{max} \in \mathbb{N}^*$ est le nombre maximal des événements.

Ensuite, pour chaque événement Ev_j on a une subdivision de l'intervalle $[T^j, T^{j+1}]$. dont le pas de temps est géré dans le code visco selon les variations de la saturation, la porosité et la pression.

Maillage du bassin

Le maillage est défini par un ensemble de colonnes d'arêtes verticales s'appuyant sur une grille horizontale cartésienne. Chaque colonne contient le même nombre d'arêtes verticales, qui peuvent éventuellement être de hauteur nulle.

La géométrie d'une arête est définie par sa hauteur solide qui évolue au cours du temps par dépôt ou érosion.

A chaque début d'événement le nombre d'arêtes dans chaque colonne est augmenté de un.

Une maille est alors définie par la donnée de quatre arêtes verticales voisines dans la même couche. On note \mathcal{M} l'ensemble de toutes les mailles, bien entendu le maillage \mathcal{M} dépend du temps. A chaque instant t^n , on note pour une maille p de \mathcal{M} :

- Vol_p^n le volume de la maille p dans le maillage à t^n , ce volume change au cours du temps selon la compaction de la maille p .
- $A_{\sigma,p}$ l'ensemble des interfaces de p , pour chaque σ on notera \mathcal{S}_σ^n la surface de σ à l'instant t^n qui peut être de mesure nulle.
- R_p l'ensemble des arêtes verticales de p à l'instant t^n .
- hs_p^n (resp. hr_p^n) la hauteur solide (resp. hauteur réelle) de la maille p à l'instant t^n . hs_p^n et hr_p^n sont définies par :

$$hr_p^n = \frac{1}{4} \sum_{\delta \in R_p} hr_\delta^n,$$

$$hs_p^n = \frac{1}{4} \sum_{\delta \in R_p} hs_\delta^n.$$

On rappelle que la hauteur solide est reliée à la hauteur réelle par cette relation :

$$hs = \frac{hr}{1 - \Phi}.$$

4.3.2 Discrétisation de l'équation de conservation de la phase α

Soit p une maille du maillage \mathcal{M} , on intègre l'équation (4.2) sur cette maille, ce qui donne:

$$\int_p \partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) dx + \int_p \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) dx = \int_p \rho_\alpha q_\alpha dx.$$

On note $I = \int_p \partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) dx$, $II = \int_p \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) dx$ et $TS_\alpha = \int_p \rho_\alpha q_\alpha dx$.

Approximation de I

I sera approché de cette façon:

$$I \cong \frac{\rho_{\alpha,p}^n}{\Delta t} \left((\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} S_{\alpha,p}^{n+1}) - (\operatorname{Vol}_p^n \Phi_p^n S_{\alpha,p}^n) \right).$$

ou:

- $\rho_{\alpha,p}^n$ est l'approximation de ρ_α dans la maille p à l'instant t^n . Comme la densité dépend de la température, on prend pour $\rho_{\alpha,p}^n$ la valeur $\rho_\alpha(T_p^n)$.
- Vol_p^j est le volume de la maille p à l'instant t^j (avec $j \in \{n, n+1\}$).

Approximation de II

D'après la formule de Green, on a :

$$II = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_\sigma \rho_\alpha \vec{V}_\alpha \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\sigma.$$

On donne ici les approximation de $\int_\sigma \rho_\alpha \vec{V}_\alpha \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\sigma$ dans le cas où σ est une interface intérieure (i.e $\sigma \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_\partial$), dans ce cas on peut supposer que $\sigma = \sigma_{pq}$ pour un certain $q \in \mathcal{M}$. Pour les autres cas voir ([?]).

Donc II sera approché par:

$$II \cong \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} Q_{\alpha,\sigma_{pq}}.$$

Avec:

- $\rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n$ est l'approximation de ρ_α sur l'interface σ à l'instant t^n . On prend pour cette approximation la valeur:

$$\rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n = \frac{1}{2} (\rho_{\alpha,p}^n + \rho_{\alpha,q}^n).$$

- $S_{\sigma_{pq}}^{n+1}$ est la surface d'échange entre les mailles p et q à l'instant t^{n+1} .
- $Q_{\alpha,\sigma_{pq}}$ est le flux de la phase α échangé entre les deux mailles p et q .

Pour $\sigma = \sigma_{pq}$ on introduit la fonction $\psi_{\alpha,\sigma}$, définie par:

$$\psi_{\alpha,\sigma}^{n+1} = P_f^{n+1} + PC_{\alpha,f}^{n+1} - \rho_{\alpha,\sigma}^n g z,$$

en utilisant cette fonction, on prend pour $Q_{\alpha,\sigma_{pq}}$ la valeur:

$$Q_{\alpha,\sigma_{pq}} = \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha,\sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha,\sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha,\sigma_{pq}}(q)).$$

Avec:

- $K_{\sigma_{pq}}^n$ est la moyenne harmonique entre $|K_p^n \vec{n}_{\sigma_{pq}}|$ et $|K_q^n \vec{n}_{\sigma_{pq}}|$.

- $d_{\sigma_{pq}}^{n+1}$ est la distance entre les centres des mailles p et q .
- $A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n$ est la mobilité de la phase α sur l'interface σ_{pq} , définie par:

$$A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n = \begin{cases} \frac{kr_{\alpha, p}^n}{\mu_{\alpha, p}^n} & \text{si } (\vec{\nabla} P_{\alpha, \sigma} - \rho_{\alpha, \sigma} \vec{g}) \cdot \vec{n}_{\sigma, p} > 0 \\ \frac{kr_{\alpha, q}^n}{\mu_{\alpha, q}^n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\vec{\nabla} P_{\alpha, \sigma} \cdot \vec{n}_{\sigma, p}$ est approché par:

$$\vec{\nabla} P_{\alpha, \sigma} \cdot \vec{n}_{\sigma, p} = \frac{1}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (P_{\alpha, p}^{n+1} - P_{\alpha, q}^{n+1}).$$

Approximation de TS_{α}

Le dernier terme représente le terme source pour chaque phase, il sera approché de cette façon:

- Pour la phase eau: on pose,

$$TS_{\alpha, p} = \begin{cases} \rho_{w, p}^n \Delta x \Delta y \Phi_p^n \frac{hr_p^{n+1} - hr_p^n}{\Delta t} & \text{si } \Delta \text{Vol}_{s, p} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec $\Delta \text{Vol}_{s, p}$ la variation du volume solide de la maille p , Δx le pas d'espace en x et Δy le pas d'espace en y , hr_p la hauteur réelle de la maille p .

- Pour les phases d'huile et de gaz: le terme source provient du craquage de la matière organique, il sera approché par (pour $\beta \in \{o, g\}$):

$$TS_{\beta} = \rho_{s, p}^n \text{Vol}_{s, p} \text{IHTOC} \sum_{0 \leq i \leq nr} \alpha_i^{\beta} \frac{dx_i}{dt},$$

Les équations différentielles de génération des hydrocarbures sont discrétisées par un schéma d'Euler implicite.

4.3.3 Equation de l'équilibre mécanique

Soit p une maille de \mathcal{M} et q la maille sus-jacente à p , l'équation de l'équilibre mécanique (4.3) est intégrée entre les deux centres des mailles p et q :

$$\int_{z_q}^{z_p} \partial_z \sigma_z dz = \int_{z_q}^{z_p} ((1 - \Phi)\rho_s + \Phi\rho_f) g dz,$$

ou z_j est la profondeur du centre de maille j , $j \in \{p, q\}$.

Le premier membre de l'équation ci-dessus est approché par:

$$\sigma_{z_p}^{n+1} - \sigma_{z_q}^{n+1}.$$

Le second membre est décomposé en deux parties:

$$\begin{aligned} \int_{z_q}^{z_p} ((1 - \Phi)\rho_s + \Phi\rho_f) g dz &= \int_{z_q}^{z_{\sigma_{pq}}} ((1 - \Phi)\rho_s + \Phi\rho_f) g dz + \int_{z_{\sigma_{pq}}}^{z_p} ((1 - \Phi)\rho_s + \Phi\rho_f) g dz \\ &= \frac{hr_q^{n+1}}{2} ((1 - \Phi_q^{n+1})\rho_s + \Phi_q^{n+1} \rho_{f, q}^n) g \\ &\quad + \frac{hr_p^{n+1}}{2} ((1 - \Phi_p^{n+1})\rho_s + \Phi_p^{n+1} \rho_{f, p}^n) g. \end{aligned}$$

Avec $\rho_{f,j}^n = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha,j}^n S_{\alpha,j}^n$, $j \in \{p, q\}$.

La discrétisation finale de l'équilibre mécanique est:

$$\sigma_{z_p}^{n+1} - \sigma_{z_q}^{n+1} = \sum_{j \in \{p,q\}} \frac{hr_j^{n+1}}{2} \left((1 - \Phi_j^{n+1}) \rho_s + \Phi_j^{n+1} \rho_{f,j}^n \right) g.$$

4.3.4 Compaction

La loi de compaction (4.14) est discrétisée pour chaque maille par un schéma d'Euler linéairement implicite:

$$\frac{\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n}{\Delta t} = -\beta_p^n \left(\frac{\sigma_p^{n+1} - \sigma_p^n}{\delta t} \right) - \alpha_p^n \sigma_p^{n+1}.$$

où

- $\sigma_p = \sigma_{z_p} - P_{f,p}$ est la contrainte effective de la maille p ,
- $\alpha_p^n = \alpha(\Phi_p^n, \sigma_p^n)$, $\beta_p^n = \beta(\Phi_p^n, \sigma_p^n)$.

4.4 Calcul des saturations, schéma IMPES

On suppose qu'on a deux instants t^n et t^{n+1} et qu'on connaît les valeurs des fonctions à l'instant t^n (i.e P_α^n , S_α^n , σ^n et Φ^n). On cherche à calculer les valeurs de la saturation à t^{n+1} .

La méthode IMPES consiste à résoudre d'abord l'équation de la pression et trouver P_α , σ et Φ à l'instant t^{n+1} , puis calculer les valeurs des saturations à t^{n+1} .

4.4.1 Equation de la pression,

Soit p une maille de \mathcal{M} , En sommant les équations discrètes des saturations on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} - \text{Vol}_p^n \Phi_p^n &+ \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha, p}^n} \sum_{p \in \mathcal{N}(p)} \rho_{\alpha, \sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(q)) \\ &= \Delta t \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} q_{\alpha, p}^n \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ensuite on remplace la porosité à l'instant t^{n+1} (i.e Φ^{n+1}) par une combinaison linéaire de la pression et de la contrainte verticale et Φ^n :

$$\Phi_p^{n+1} = \Phi^n - \beta_p^n (\sigma_p^{n+1} - \sigma_p^n) - \Delta t \alpha_p^n \sigma_p^{n+1}.$$

Après avoir fait ce calcul pour toutes les mailles, on obtient un système linéaire en pression-contrainte. La résolution de ce système nous donnera P^{n+1} et σ^{n+1} . Ensuite on calcule la valeur de la porosité à l'instant t^{n+1} .

4.4.2 Calcul des saturations

Après avoir calculé les nouvelles valeurs P^{n+1} , σ^{n+1} et Φ^{n+1} , on met à jour les saturations, par la relation suivante ($\alpha \in \{w, o, g\}$):

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{M}, S_{\alpha, p}^{n+1} &= \frac{\text{Vol}_p^n \Phi_p^n}{\text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} S_{\alpha, p}^n + \frac{\Delta t q_{\alpha, p}^n}{\text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \\ &- \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha, p}^n \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \sum_{p \in \mathcal{N}(p)} \rho_{\alpha, \sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(q)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.4.3 Gestion du pas de temps

Le schéma IMPES nécessite une gestion du pas de temps sous une condition CFL afin que le schéma reste stable au cours de la simulation.

Les critères de la gestion du pas de temps sont basés sur les variations de la porosité, la pression et la saturation. On donne ici les indicateurs sur les saturations.

Deux types d'indicateur sont activés, l'un porte sur la somme des saturations, l'autre sur la variation maximale admissible entre deux pas de temps.

- Si la somme des saturations (i.e $\sum_\alpha S_\alpha^{n+1}$) n'est pas comprise entre 0 et 1, alors le pas de temps est annulé. Cette condition est vérifiée à $\varepsilon_{sat} = 10^{-3}$ ou 10^{-4} près.
- Si la variation de saturation maximale est atteinte, la valeur du pas de temps suivant est diminuée.

4.5 Méthode des lignes de courants

Dans cette partie on donne l'algorithme de la méthode des lignes de courant, on se limite au cas d'un écoulement diphasique (eau, huile) incompressible. On notera $S = S_o$ et par conséquent $S_w = 1 - S$, et on notera aussi $P = P_w$. La vitesse totale est définie par la somme des deux vitesses:

$$\vec{V}_T = \vec{V}_o + \vec{V}_w.$$

D'après les lois de Darcy, on peut écrire \vec{V}_T sous la forme:

$$\vec{V}_T = -K \left((A_o + A_w) \vec{\nabla} P + A_o \vec{\nabla} P_C - (\rho_o A_o + \rho_w A_w) \vec{g} \right). \quad (4.25)$$

Avec $P_C = P_o - P_w$ la pression capillaire.

En utilisant la loi de Darcy et la relation (4.25), on peut écrire la vitesse de l'huile en fonction de la vitesse totale de cette façon:

$$\vec{V}_o = f(S) \vec{V}_T - \frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C - G(S) K \vec{g} \quad (4.26)$$

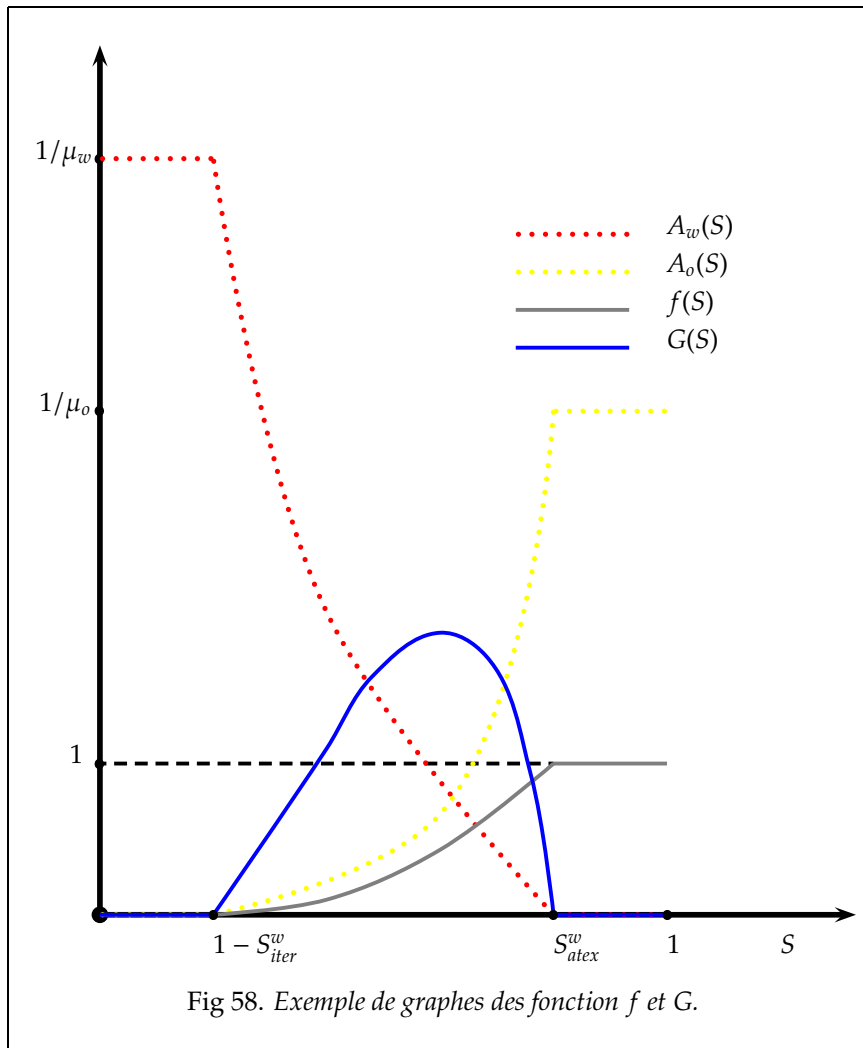
Où les fonctions f et G sont définies par (voir Fig-58):

$$f(S) = \frac{A_o}{A_o + A_w}, \quad (4.27)$$

$$G(S) = (\rho_w - \rho_o) \frac{A_o A_w}{A_o + A_w}. \quad (4.28)$$

Par ailleurs si on somme les deux équations de la conservation de la masse pour les deux phases eau et huile, et en utilisant la relation $S_o + S_w = 1$, on obtient :

$$\partial_t \Phi + \text{div}(\vec{V}_T) = q_o + q_w. \quad (4.29)$$



Remarque 4.5.1 Sur la figure (58), on peut remarquer que f est croissante entre 0 et 1. Il faut tenir compte que cette figure donne une idée "mathématiques" du comportement de ces fonctions et qu'elles n'ont pas la même unité physique.

4.5.1 Résolution numérique de l'équation de la saturation

On se donne deux instants t^n et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, on suppose qu'on connaît toutes les inconnues discrètes du problème à l'instant t^n (i.e S_α, P, σ et Φ), et on cherche à calculer une approximation de la saturation à t^{n+1} . Pour cela on commence par résoudre le système de la pression et la contrainte pour trouver P^{n+1} et σ^{n+1} , puis on calcule Φ^{n+1} . L'équation de la saturation va être découpée en deux équations:

1. Partie flux total:

$$\partial_t(\Phi S) + \text{div}(f(S)\vec{V}_T) = q_o, \quad (4.30)$$

2. Partie gravité et pression capillaire:

$$\partial_t(\Phi S) - \text{div}\left(\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{V} P_C + G(S) K \vec{g}\right) = 0. \quad (4.31)$$

4.5.2 Equation sur une ligne de courant:

Soit l une ligne de courant tracée dans le bassin par rapport à \vec{V}_T^{n+1} , l est caractérisée par (p_l, I_l, q_l) , où:

- p_l est le point d'origine de la ligne l
- I_l est son intervalle de définition
- q_l est un paramétrage de l

On définit sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}]$ la fonction \bar{v} par:

$$\bar{v}(\tau, t) = S(q_l(\tau), t), \quad \forall (\tau, t) \in I_l \times [t^n, t^{n+1}].$$

Le but est donc de trouver une approximation de \bar{v} sur l , or il est très difficile de déterminer l'équation vérifiée par \bar{v} sur l . On va donc approcher \bar{v} par une autre fonction v telle que v vérifie l'équation suivante:

$$\partial_t(\Phi v) + \partial_\tau f(v) + f(v) \operatorname{div}(\vec{V}_T^{n+1}) = q_o. \quad (4.32)$$

Schéma numérique pour l'équation 4.32

On se donne une subdivision $(\tau_i)_{0 \leq i \leq M}$ (avec $M \in \mathbb{N}_+^*$) de I_l , on note pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$, $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$. On suppose que:

$$\forall 0 \leq i < M, \exists ! K \in \mathcal{M}, \text{ tel que: } \operatorname{Im}(q_l|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}) \subset K.$$

Pour chaque $i \in \{0, \dots, M-1\}$, on notera K_i la maille qui vérifie la relation ci-dessus.

Remarque 4.5.2 La relation précédente implique que l'ensemble des points d'intersection entre l et les interfaces de \mathcal{M} est inclus dans $(q_l(\tau_i))_{0 \leq i \leq M}$.

On se donne aussi une subdivision $(\sigma^j)_{0 \leq j \leq N}$ de $[t^n, t^{n+1}[$ de la forme:

$$\sigma^j = t^n + j \times dt, \text{ avec } dt = \frac{t^{n+1} - t^n}{N}.$$

Discrétisation des fonctions!!!!

Pour chaque fonction ψ définie sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}]$ on notera ψ_i^j l'approximation de ψ sur $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\sigma^j, \sigma^{j+1}[$.

- Approximation de Φ .
La porosité sera approchée de cette manière:

$$\phi_i^j = \Phi_{K_i}^n + (\sigma^j - t^n) \frac{\Phi_{K_i}^n - \Phi_{K_i}^{n+1}}{t^{n+1} - t^n}. \quad (4.33)$$

Les valeurs de la porosité aux instants t^n et t^{n+1} sont connues.

- Approximation de $\operatorname{div}(\vec{V}_T^{n+1})$.
La divergence de la vitesse totale sera approchée par:

$$d_i = (\operatorname{div}(\vec{V}_T^{n+1}))_{K_i}. \quad (4.34)$$

Avec:

$$(\operatorname{div}(\vec{V}_T^{n+1}))_{K_i} = \frac{1}{\operatorname{Vol}_{K_i}^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{K_i}} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} \vec{V}_T \cdot \vec{n}_{K_i, \sigma}.$$

- Approximation du terme source:
L'approximation du terme source est déjà connue dans chaque maille entre les deux instants t^n et t^{n+1} , on la note $q_{o,K}$ pour la maille K . On pose alors:

$$Q_i = q_{o, K_i}.$$

Enfin, v_i^j sera l'approximation de v sur $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\sigma^j, \sigma^{j+1}]$.
 v est calculée par le schéma suivant:

$$\begin{aligned} v_i^{j+1} = & \frac{\phi_i^j}{\phi_i^{j+1}} v_i^j - \frac{dt}{\phi_i^{j+1} \Delta_i} (f(v_i^j) - f(v_{i-1}^j)) \\ & - \frac{dt}{\phi_i^{j+1}} f(v_i^j) d_i + \frac{dt}{\phi_i^{j+1}} Q_i. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$ et $j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Pour compléter ce schéma, il faut définir les conditions initiales et la condition à la limite:

- Pour les conditions initiales, on pose:

$$\forall i \in \{0, \dots, M-1\}, v_i^0 = S_{K_i}^n, \quad (4.36)$$

avec K_i la maille qui vérifie, $\text{Im}(q_l | [\tau_i, \tau_{i+1}]) \subset K_i$.

- Pour la condition à la limite:

$$\forall j \in \{0, \dots, N\}, v_{-1}^j = S_{K_{ori}}^n + (\sigma^j - t^n) q_{0, K_{ori}}, \quad (4.37)$$

avec $p_l \in \overline{K_{ori}}$ (p_l le point d'origine de l).

Une fois que le calcul est fait pour toutes les lignes de courant, on passe les nouvelles valeurs de la saturation au maillage \mathcal{M} par la méthode expliquée au chapitre 2 (partie 2.4). On aura donc une première approximation de la saturation à l'instant t^{n+1} , notée S^* . A la fin de cette étape, on peut commencer la résolution de l'équation (4.31) entre t^n et t^{n+1} avec S^* comme donnée initiale.

Remarques sur le schéma utilisé sur une ligne de courant

Sur le schéma numérique qu'on a choisi sur les lignes de courant, on peut distinguer plusieurs différences avec le modèle déjà traité, au Chapitre (3), et aussi avec la méthode IMPES:

1. Contrairement à la méthode IMPES, où on utilise le volume de la maille aux instants t^n et t^{n+1} (voir relation 4.24), on n'utilise ici que le volume à l'instant t^{n+1} , un choix qu'on a retenu parce que les lignes de courant sont tracées par rapport à \vec{V}_T^{n+1} .
 En général l'huile se trouve à des profondeurs assez importantes, or l'effet de la compaction est plus important dans les mailles qui se trouvent dans la partie supérieure (près du toit) du bassin (voir les figures 67, 69, 72 du test numérique). Donc dans les mailles profondes le changement du volume n'est pas très important.
2. Comme on l'a vu au chapitre 3, la méthode des lignes de courant n'est pas conservative à cause du passage des informations entre les lignes de courant et le maillage. En plus, dans ce cas le schéma sur la ligne de courant n'est plus conservatif, car la divergence de la vitesse totale n'est plus nulle.
3. Pour assurer la stabilité du schéma numérique sur chaque ligne de courant, il y a une condition (CFL) sur le pas de temps, qui dépend du maillage sur la ligne, de la fonction f et aussi de $\text{div}(\vec{V}_T)$. Dans les tests numériques, on a adopté une gestion du pas de temps similaire à celle utilisée dans le code Visco3D.

4.5.3 Résolution numérique de l'équation (4.31)

Une fois qu'on a $S^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, on peut commencer la résolution de l'équation (4.31). Pour cette équation, on a choisi une méthode volume fini, et une discrétisation très proche de celle utilisée dans Visco3d.

Plus précisément, soit $p \in \mathcal{M}$ on intègre l'équation (4.31) sur la maille p , ce qui donne:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_p \partial_t(\Phi S) - \operatorname{div}\left(\frac{G(S)}{(\rho_w - \rho_o)} K \vec{\nabla} P_C + G(S) K \vec{g}\right) dx \\
&\cong \frac{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi^{n+1}}{dt} (S_p^{n+1} - S_p^*) - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_{\sigma} \frac{G(S^*)}{(\rho_w - \rho_o)} K (\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\gamma \\
&\cong \frac{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi^{n+1}}{dt} (S_p^{n+1} - S_p^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} S_{\sigma}^{n+1} G_{\sigma} \times \bar{K}_{\sigma} A_{\sigma}.
\end{aligned}$$

Où:

- \bar{K}_{σ} est une approximation de K sur σ . Si $\sigma = \sigma_{pq}$, alors \bar{K}_{σ} est la moyenne harmonique entre K_p et K_q . Sinon (i.e $\sigma \in \mathcal{A}_{\partial}$) $\bar{K}_{\sigma} = K_p$
- A_{σ} est une approximation de $-\left(\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}\right) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$
- G_{σ} est une approximation de $G(S^*)$ calculée en fonction du signe de A_{σ} de la façon suivante:
 - Si $\sigma = \sigma_{pq}$, alors:

$$G_{\sigma} = \begin{cases} \frac{A_o(S_p^*) A_w(S_q^*)}{A_o(S_p^*) + A_w(S_q^*)} & \text{si } A_{\sigma} \geq 0 \\ \frac{A_o(S_q^*) A_w(S_p^*)}{A_o(S_q^*) + A_w(S_p^*)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.38)$$

- Si $\sigma \in \mathcal{A}_{\partial}$:

$$G_{\sigma} = \begin{cases} G(S_p^*) & \text{si } A_{\sigma} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit finalement,

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad S_p^{n+1} = S_p^* + \frac{dt}{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} S_{\sigma} G_{\sigma} \bar{K}_{\sigma} A_{\sigma} \quad (4.39)$$

Remarques sur le schéma numérique de l'équation (4.31)

- L'équation précédente impose une condition (CFL) sur le pas de temps, pour un pas de temps grand on peut faire plusieurs sous pas de temps, sans toutefois être obligé de recalculer la pression.
- Dans ce schéma, on remarque que l'on a fixé la porosité à l'instant t^n , ce choix est dû au fait qu'on a déjà traité la variation de la porosité entre t^n et t^{n+1} dans le schéma numérique pour la partie lignes de courant.
- On peut constater la même chose pour le volume, bien que la variation du volume au cours du temps ne soit pas traitée dans la partie lignes de courant. Il nous a semblé plus juste de traiter cette équation sans tenir compte du volume à l'instant t^n .
- Contrairement au schéma " gravité et pression capillaire " déjà traité dans le chapitre 3 (Partie 3.2.3, relation 3.37), où on cherche deux approximations de G_{σ} selon les signes de $\vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$ et $(\rho_w - \rho_o) \vec{g} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$, ici on cherche la même approximation mais par rapport à leur somme (i.e $(\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$). Ce choix est fait de cette façon afin d'être plus proche du schéma déjà implanté dans le code Visco3D.

- Notre principal objectif était orienté vers la partie des lignes de courant, donc on n'a pas testé d'autre choix d'approximation pour l'équation (4.31). Néanmoins, on peut traiter cette équation de différentes manières, par exemple:
 1. Prendre un autre schéma volume fini, par exemple le choix déjà fait dans le chapitre 3 (relation 3.37), ou les propositions faites dans ([39]).
 2. Faire un découplage de l'équation (4.31) en deux parties : gravité et pression capillaire, traiter la partie gravité par une méthode des lignes de courant, et la partie pression capillaire par une méthode de volume fini.

4.6 Conservation des bilans des fluides

L'équation de la conservation de la masse d'huile à l'instant t^{n+1} pour une maille $p \in \mathcal{M}$ s'écrit par:

$$\left((\text{Vol}\Phi S)_p^{n+1} - (\text{Vol}\Phi S)_p^n \right) + \Delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} V_{p,\sigma}^{n+1} = \Delta t \times q_{o,p}^n. \quad (4.40)$$

Où $V_{p,\sigma}^{n+1}$ est une approximation de $\vec{V}_\sigma^{n+1} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$.

Si σ est une interface intérieure (i.e $\sigma = \sigma_{pq}$, avec $q \in \mathcal{N}(p)$), alors l'approximation de la vitesse sur l'interface σ vérifie:

$$V_{p,\sigma_{pq}}^{n+1} = -V_{q,\sigma_{pq}}^{n+1}.$$

Alors en sommant l'équation (4.40), sur l'ensemble des mailles on trouve :

$$\underbrace{\sum_{p \in \mathcal{M}} \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} S_p^{n+1}}_{M_o^{n+1}} = \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{M}} \text{Vol}_p^n \Phi_p^n S_p^n}_{M_o^n} - \underbrace{\Delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_\partial} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} V_{p,\sigma}^{n+1}}_{Tr^{n+1}} + \underbrace{\Delta t \sum_{p \in \mathcal{M}} q_{o,p}^n}_{Cr^n}. \quad (4.41)$$

Où:

- \mathcal{A}_∂ est l'ensemble des interfaces incluses dans $\partial\Omega$
- M_o^n la masse d'huile présente dans le bassin à l'instant t^n
- Tr^{n+1} représente la variation de la masse d'huile due au terme de transport entre t^n et t^{n+1}
- Cr^{n+1} représente la variation de la masse d'huile due au terme de source (génération de l'huile par craquage) entre t^n et t^{n+1}

Les méthodes numériques déjà implantées dans le code Visco3D respectent le caractère conservatif de cette équation, c-à-d, la solution donnée par Visco3D vérifie:

$$(M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1} - Cr^{n+1} = 0.$$

En revanche, comme on l'a signalé, la méthode des lignes de courant n'est pas une méthode conservative. En plus il est très difficile de donner une majoration de la différence entre $(M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1}$ et Cr^{n+1} , vu que le nombre de lignes de courant qui passent par une maille n'est pas constant.

Vu que notre objectif est d'avoir une méthode rapide, alors on peut avoir une tolérance sur cette différence, qui doit être définie selon le cas qu'on traite, par exemple une différence comprise entre 0 et 10% de la valeur de Cr^{n+1} .

Pour le test numérique qui suit, les quantités qu'on mesure à la fin de chaque événement $j \in \{0, E\bar{v}_{max} - 1\}$ sont les suivantes:

$$Dif_j = \sum_{n, t^{n+1} \leq T^{j+1}} \left((M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1} - Cr^{n+1} \right),$$

$$Q_j = \sum_{n, t^{n+1} \leq T^{j+1}} Cr^{n+1}.$$

Notre critère pour une solution LDC acceptable sera:

$$Dif_j \leq 0.1 \times Q_j.$$

4.7 Test numérique

4.7.1 Données du test

Il s'agit d'une section 2D d'un bassin constitué de différentes lithologies. Les dimensions du bassin sont 10Km dans la direction de x et une profondeur maximale de 4Km.

La durée de la simulation est de 8 Millions d'années, divisée en 20 événements.

Le maillage dans la direction de x est donné par une subdivision régulière de pas $dx = \frac{10}{14}Km$, à la fin de chaque événement une nouvelle couche dans la direction de z apparaît.

Les données pour les perméabilités relatives sont: $S_{atex}^o = 0.02$, $S_{atir}^o = 0.98$ et $p_{wo} = p_{ow} = 2$.

Afin de pouvoir comparer les deux solutions obtenues par la méthode des lignes de courant et Visco, on a construit une solution de référence. Cette solution est obtenue par le code Visco sur un maillage plus fin dans la direction de x (le pas en x est divisé par 2). En effet on ne peut pas raffiner plus le maillage, sur tout le maillage dans la direction de z à cause de la variation de la géométrie (ce qui rend très difficile la projection de la solution de référence sur le maillage initial).

L'erreur qu'on mesure à la fin de chaque événement est la suivante:

$$E_M(ev) = 100 \times \frac{\sum_{k \in \Omega} Vol_k^{ev} |S_k^M - S_k^r|}{\sum_{k \in \Omega} Vol_k^{ev} |S_k^r|}$$

Avec S^r est la solution de référence et S^M est la solution LDC ou Visco.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

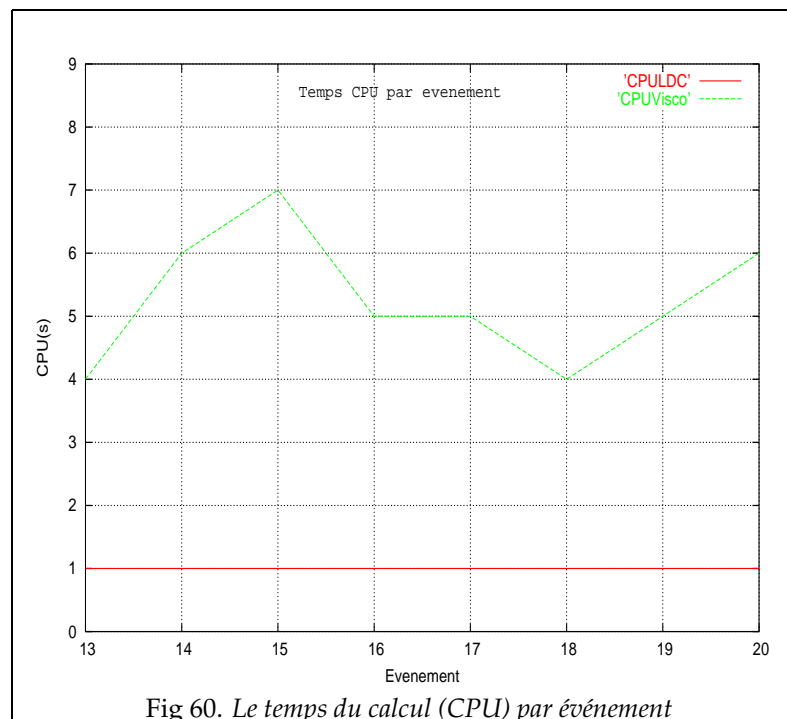
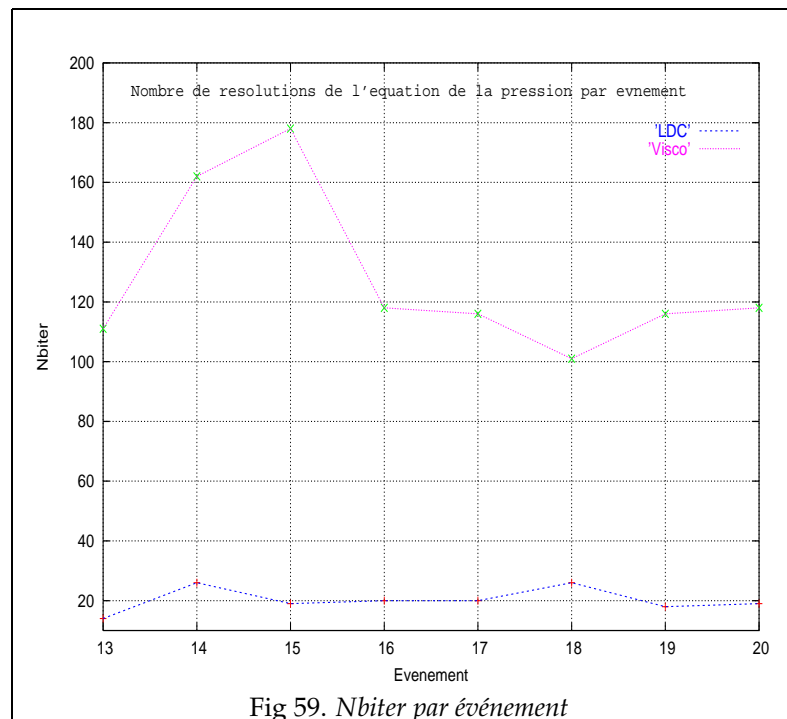
Événement \ Méthode	13	14	15	16	17	18	19	20
LDC	17.17	15.17	13.20	11.80	11.73	11.71	12.36	12.50
Visco	08.83	23.17	06.73	07.75	06.47	06.56	06.92	06.02

Sur ce tableau on remarque que la solution donnée par la méthode des lignes de courant reste correcte (une erreur moyenne de 13%) par rapport à celle donnée par le code Visco (avec une erreur moyenne de 9%).

4.7.2 Nombre de résolutions de l'équation de pression

Le figure (Fig-59) suivant nous donne le nombre de résolutions de l'équation de la pression pour chaque événement. On remarque que la méthode des lignes de courant reste plus rapide que le code Visco3d , et on résout moins souvent l'équation de la pression, le rapport entre ces deux nombres peut être très important comme pour l'événement 15 (ce rapport s'élève à 12 pour l'év 15).

La figure (Fig-60), nous donne le temps du calcul (CPU) pour chaque événement. On remarque que la méthode des lignes de courant reste plus rapide que le code Visco3d. Le rapport CPU(Visco)/CPU(LDC) est égal à $44/10 = 4,4$.



4.7.3 Bilan

Le tableau ci-dessous montre le bilan de la méthode des lignes de courant,

Ev	13	14	15	16	17	18	19	20
Q	117.30	188.32	248.34	294.01	329.54	356.24	378.88	397.82
Dif	01.45	01.63	03.98	05.90	09.24	12.92	16.11	20.15
$100 \frac{Dif}{Q}$	01.24%	00.87%	01.60%	02.01%	02.80%	03.62%	04.25%	05.06%

On remarque sur la quantité qu'on mesure pour la conservation du bilan qu'on a une augmentation de la différence par événement ce qui constitue un point négatif pour cette méthode, on peut signaler que cette différence est très sensible par rapport au nombre de lignes de courant tracées dans le bassin. Une des perspectives de ce travail sera d'améliorer l'étude du bilan.

4.7.4 Les figures

Les figures de la saturation:

- (Fig-61) représente la saturation dans le bassin donnée par le code Visco3D à la fin de l'événement 15
- (Fig-62) représente la saturation dans le bassin donnée par la méthode des lignes de courant à la fin de l'événement 15
- (Fig-63) représente la saturation dans le bassin donnée par le code Visco3D à la fin de l'événement 20 (l'âge actuel)
- (Fig-64) représente la saturation dans le bassin donnée par la méthode des lignes de courant à la fin de l'événement 20

Les courbes des lignes de courant:

- (Fig-65) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 14, par rapport à $-\vec{V}_T$
- (Fig-66) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 14, par rapport à $-\vec{V}_T$. C'est la même figure que (Fig-65), à la différence que sur celle ci on voit les différentes lithologies
- (Fig-68) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 15, par rapport à \vec{V}_T
- (Fig-70) donne les lignes de courant tracées dans le bassin à la fin de l'événement 15, par rapport à \vec{V}_T
- (Fig-71) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 20, par rapport à \vec{V}_T
- (Fig-73) donne les lignes de courant tracées dans le bassin à la fin de l'événement 20, par rapport à \vec{V}_T

Les figures de $\text{div}(\vec{V}_T)$,

- (Fig-67) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 14
- (Fig-69) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 15
- (Fig-72) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 20

4.7.5 Principe retenu pour tracer les lignes de courants:

Au début de chaque événement on trace des lignes de courant à l'arrière (i.e par rapport à $-\vec{V}_T$) dans plusieurs mailles de Ω , ensuite on suit ces lignes jusqu'à la fin de leur trajectoires.

On remarque que la plupart de ces lignes se dirigent vers les mailles qui contiennent les termes sources (ou les mailles dont la divergence de la vitesse totale est la plus élevée). A partir de là, on trace les lignes de courant par rapport à la vitesse totale dans ces mailles.

Les défauts de cette méthode dans notre test:

- Ce critère donne une idée sur les mailles d'origine des lignes de courant mais pas une indication sur leur nombre ou l'emplacement exact des points d'origine.
- Le choix des points d'origine est fixé par événement, or celui ci doit être amélioré de sorte qu'à la fin de chaque résolution de la l'équation de pression de nouveaux points d'origine soient choisis.

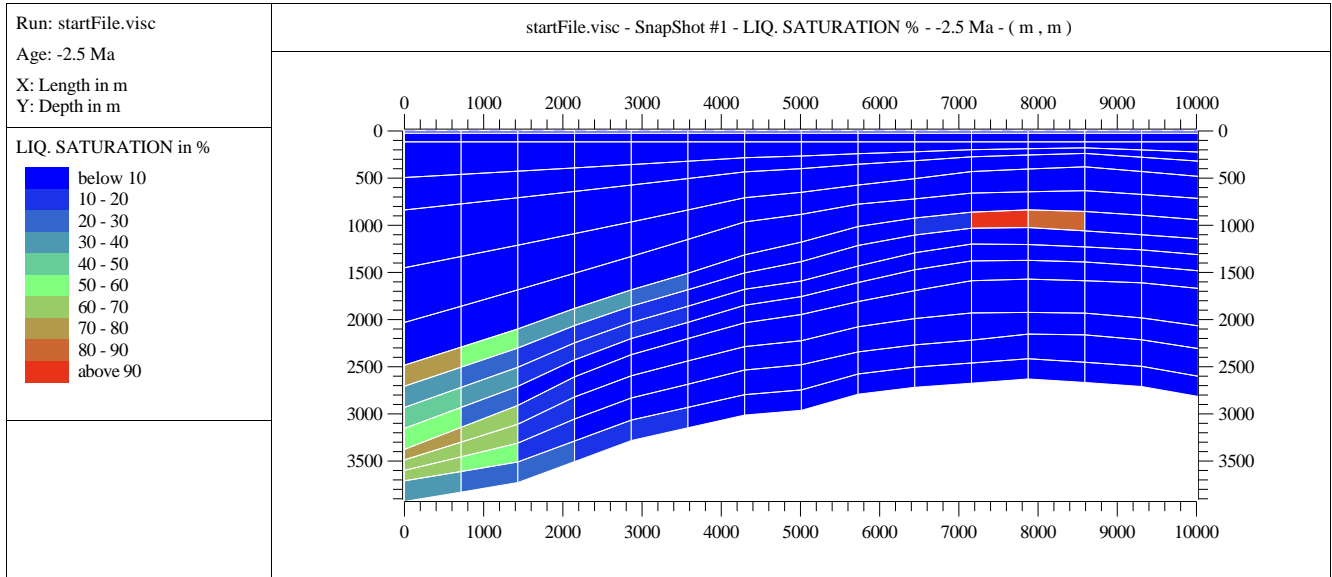


Fig 61. La saturation de l'huile donnée par Visco3D, Ev_15_FIN

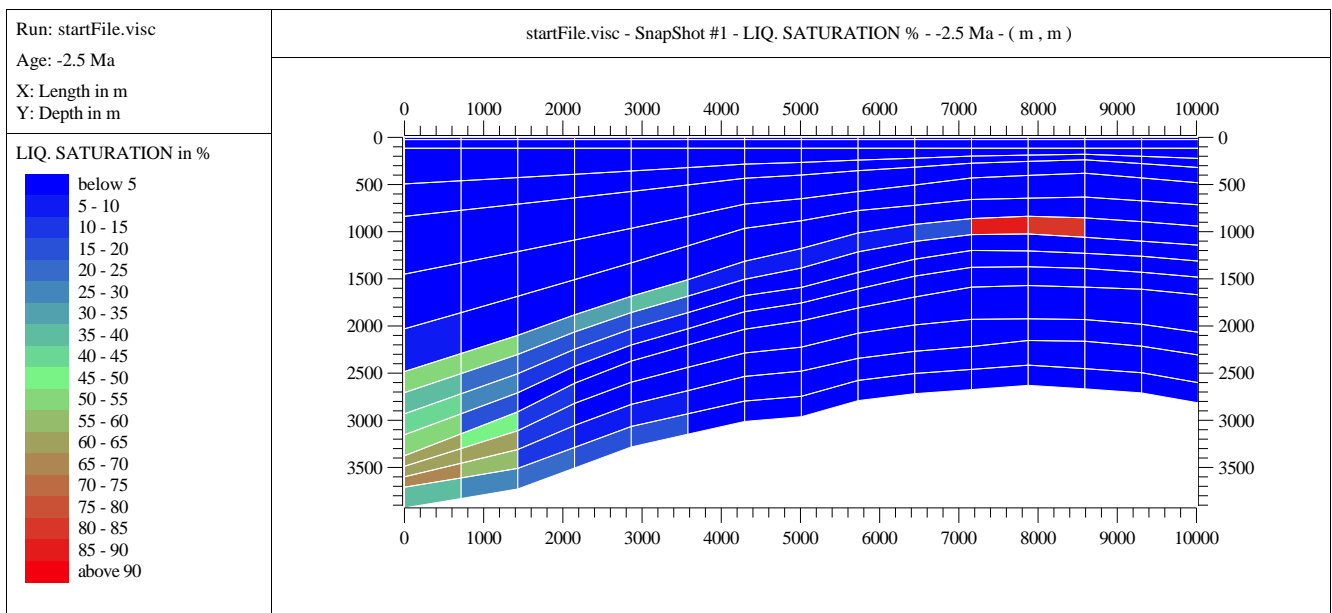


Fig 62. La saturation de l'huile donnée par LDC, Ev_15_FIN

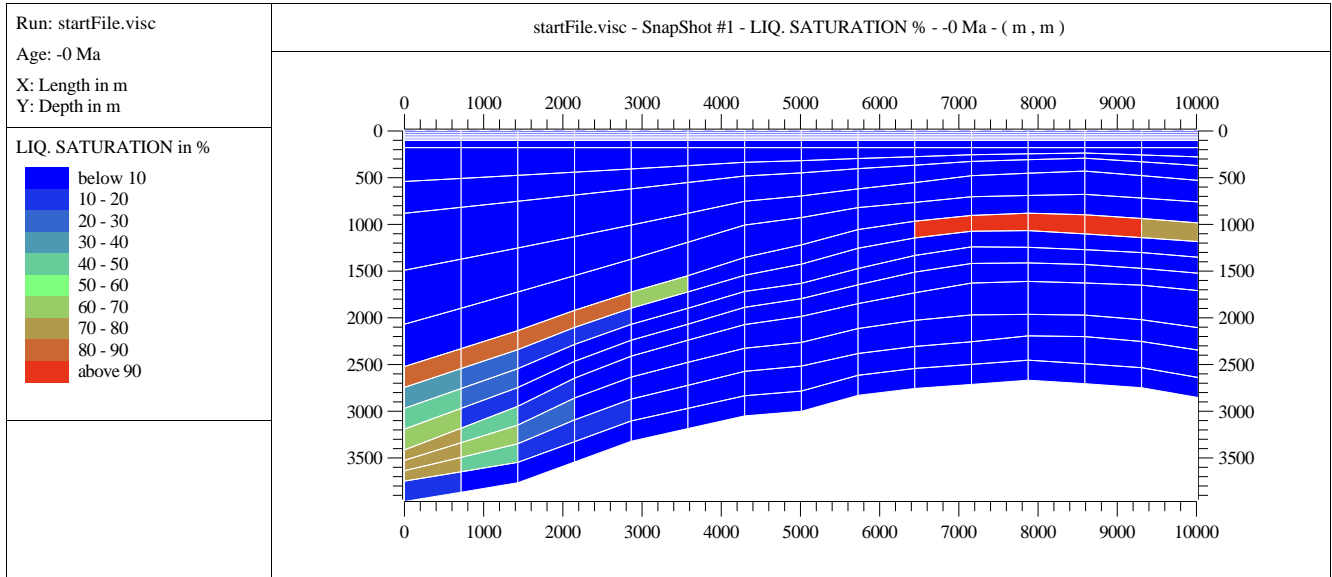


Fig 63. La saturation de l'huile donnée par Visco3D, Ev_20_FIN

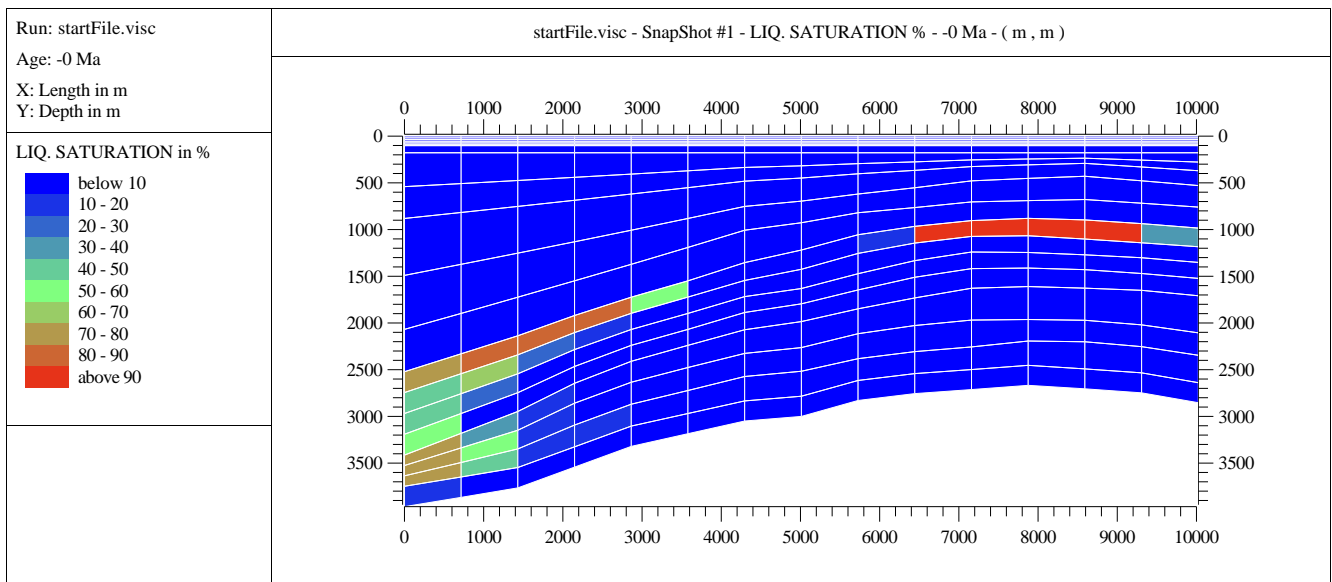


Fig 64. La saturation de l'huile donnée par LDC, Ev_20_FIN

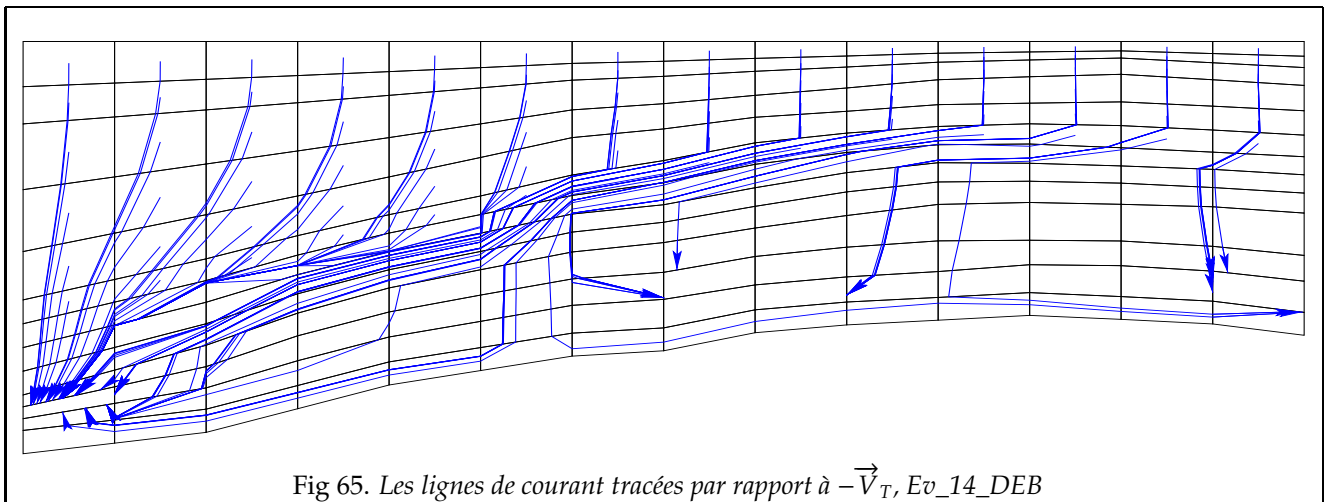


Fig 65. Les lignes de courant tracées par rapport à $-\vec{V}_T, Ev_{14_DEB}$

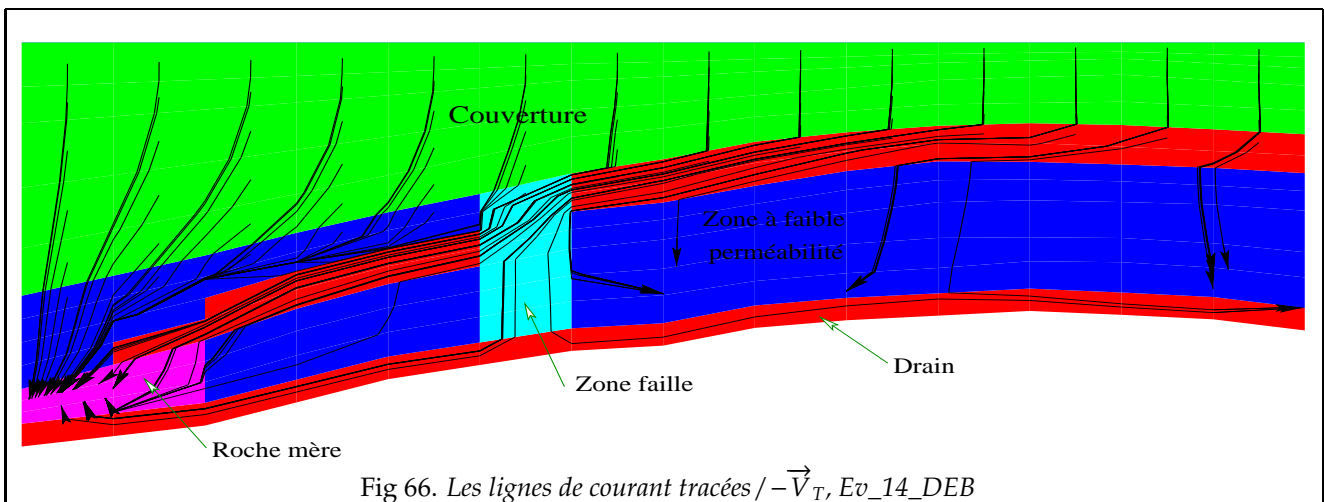


Fig 66. Les lignes de courant tracées / $-\vec{V}_T, Ev_{14_DEB}$

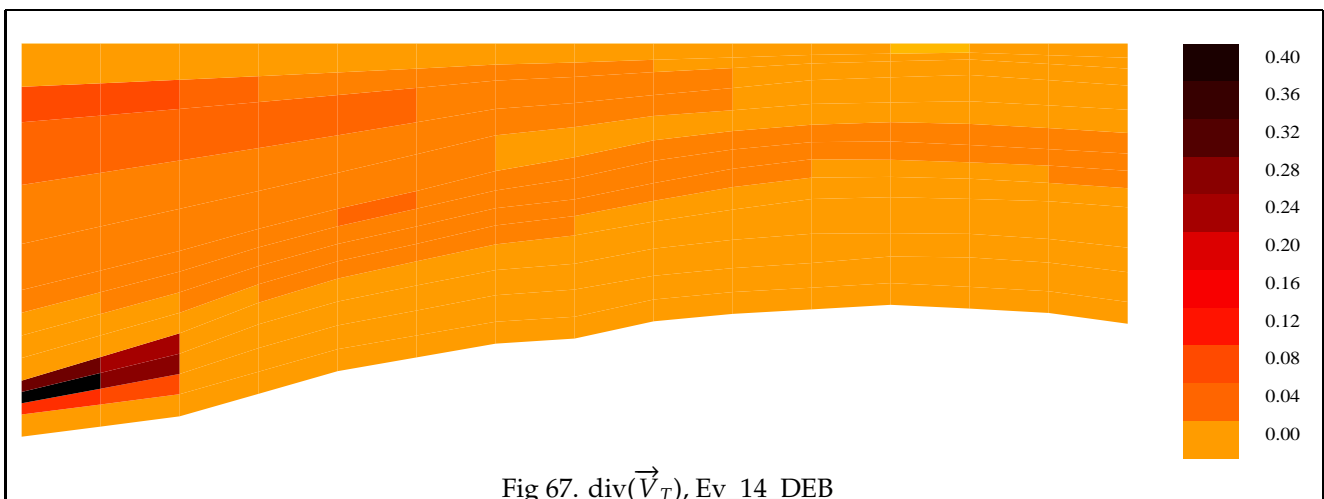
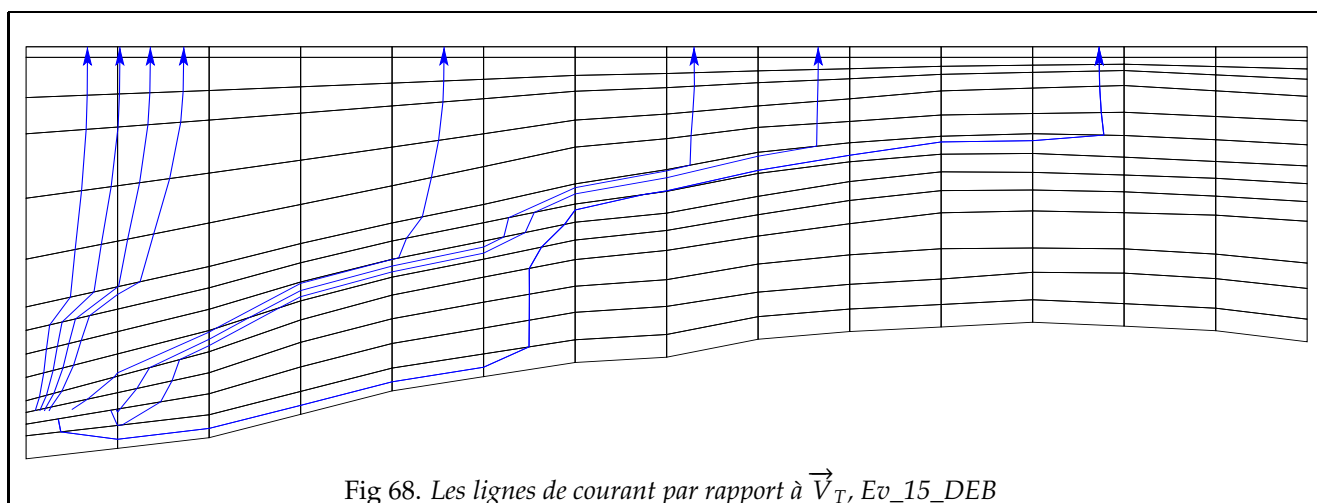
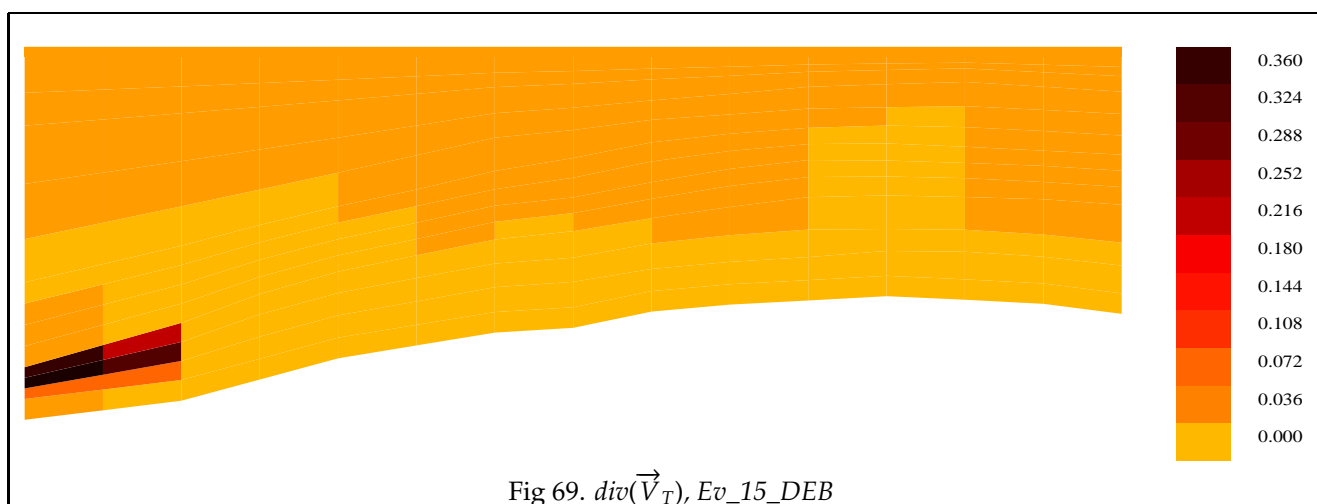
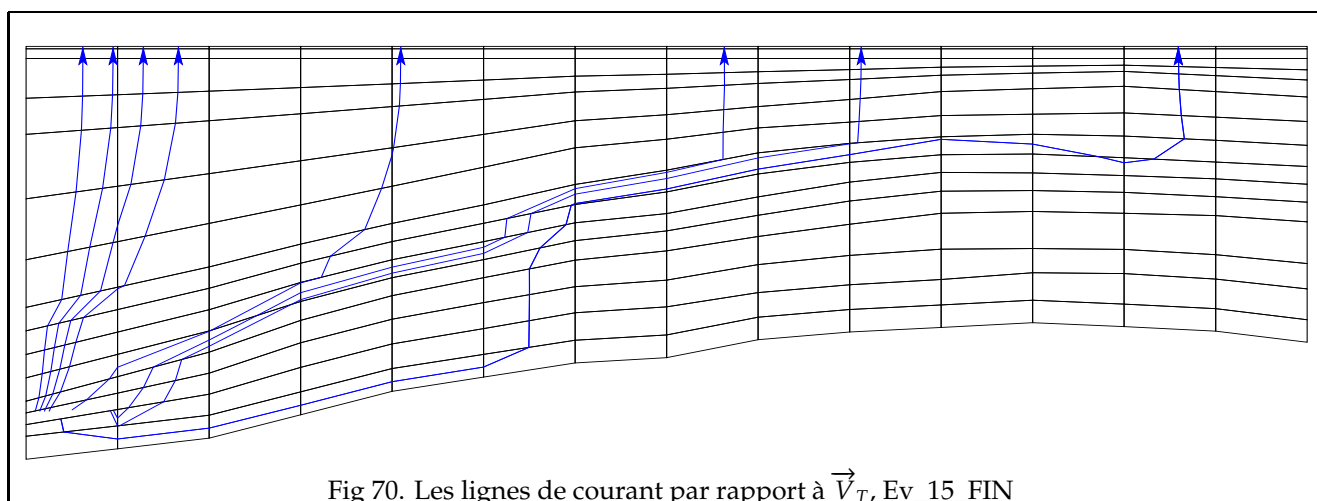
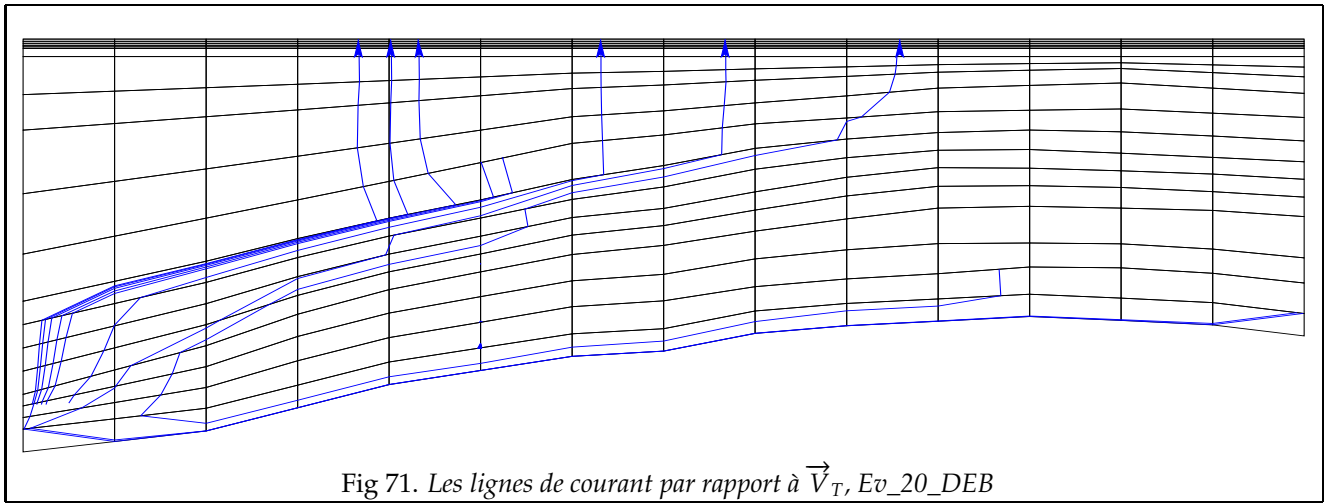
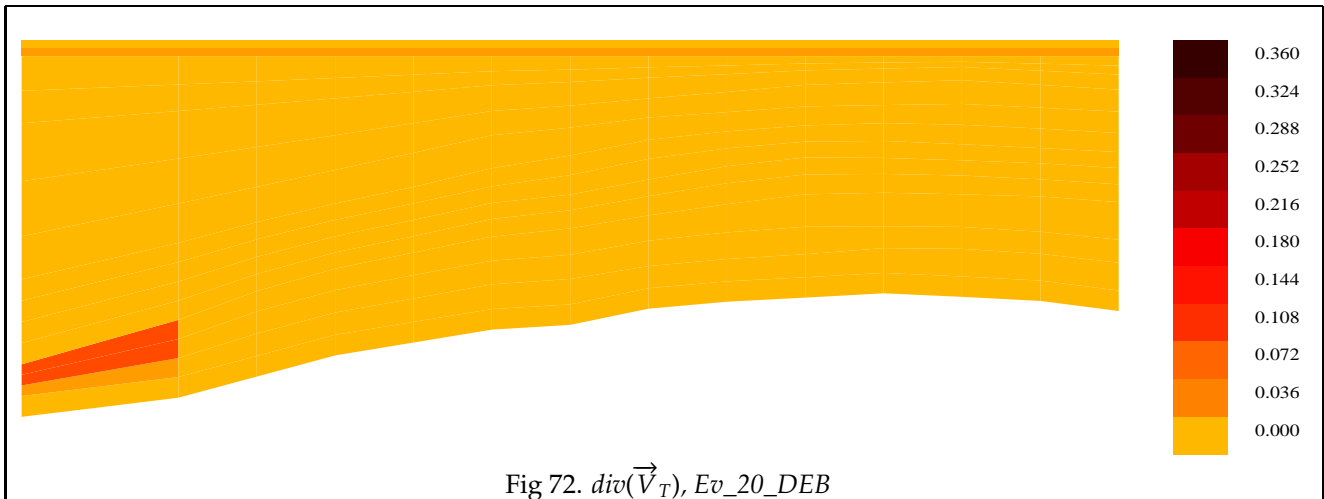
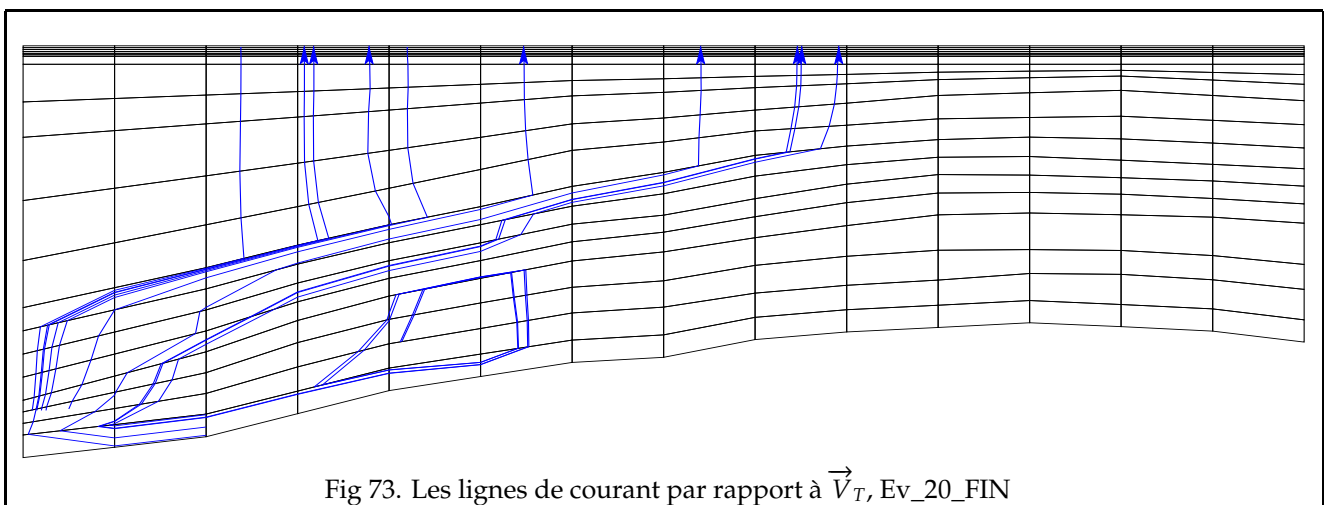


Fig 67. $\text{div}(\vec{V}_T), Ev_{14_DEB}$

Fig 68. Les lignes de courant par rapport à \vec{V}_T , Ev_15_DEBFig 69. $\text{div}(\vec{V}_T)$, Ev_15_DEBFig 70. Les lignes de courant par rapport à \vec{V}_T , Ev_15_FIN

Fig 71. Les lignes de courant par rapport à \vec{V}_T , Ev_20_DEBFig 72. $\text{div}(\vec{V}_T)$, Ev_20_DEBFig 73. Les lignes de courant par rapport à \vec{V}_T , Ev_20_FIN