

Analyse des séquences 3 à 6

Séquence 3 : sur l'activité mathématique consistant à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques

Phase 4 : en quoi consiste l'activité mathématique ?

Cette courte phase est introduite par une question du formateur : « on va s'interroger sur qu'est ce que c'est que faire des mathématiques ». R. Cori semble décider de manière improvisée de solliciter les stagiaires plutôt que de faire un exposé : « je pourrais vous demander votre opinion là dessus ben je vais le faire allez ». Cette question est très large, et les réponses de ces derniers sont sans doute influencées par un effet de contrat didactique qui les oriente vers une réponse à *coloration logique*.

Une stagiaire, professeure de physique qui envisage sa reconversion, compare l'activité mathématique à un casse-tête chinois. Cette réponse est commentée sur un ton ironique par R. Cori : « j'ai un conseil à vous donner, si vous devenez professeur de mathématiques, essayez de ne pas propager cette [idée] », mais pas reprise, elle ne semble pas intéresser le formateur. Un autre stagiaire propose « émettre des règles et organiser le raisonnement sur ». R. Cori questionne alors : « sur quoi, alors sur quoi ? », montrant ainsi qu'il attend finalement une certaine réponse. Mais la réponse attendue ne vient pas. Une troisième stagiaire propose « voir si les propositions mathématiques sont vraies ou fausses ». Là encore R. Cori voit une ouverture vers la réponse attendue et tente de la faire venir : « c'est des phrases qui parlent de quoi ? » La réponse attendue est donnée par cette stagiaire : « D'objets mathématiques », et reconnue comme attendue par le formateur : « D'objets mathématiques alors là nous y sommes ».

Une dernière intervention d'un stagiaire porte sur la modélisation mathématique pour résoudre des problèmes concrets, là encore, l'ironie de la réponse du formateur (« j'avais un problème tout-à-l'heure, je n'arrivais pas à faire communiquer l'ordinateur et le vidéoprojecteur, et les mathématiques ne m'ont été d'aucun secours ») montre que cette réponse ne va pas dans le sens de ce qu'il attend pour pouvoir continuer son exposé.

Finalement, la sollicitation des stagiaires ne semble avoir pour but que d'amener dans le dialogue un élément attendu par le formateur (les objets mathématiques), les autres propositions ne sont pas retenues.

Phase 5 : dans l'activité mathématique, on cherche à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques

Dans l'exposé qui suit, R. Cori reprend dans un premier épisode (voir dialogue 5.1 en annexe page 581) la notion d'objet mathématique. Il évoque la théorie des ensembles qui permet de considérer tous les objets mathématiques comme étant de même nature (des ensembles) ce qui « a un avantage considérable sur le plan conceptuel [...] mais sur le plan

pratique ça a aussi beaucoup d'inconvénients parce que ça tue un peu l'intuition ». Après les objets mathématiques, le formateur parle des informations concernant ces objets, le mathématicien cherchant à en avoir le maximum.

Les termes *objet (mathématique)* et *information* sont utilisés respectivement 30 fois et 17 fois par le formateur dans cette phase.

Dans un deuxième épisode (voir dialogue 5.2 en annexe page 583), le discours du formateur s'oriente vers le langage : « pour communiquer ces informations, c'est quand même une affaire de communication, il faut les formuler, il faut les exprimer, donc on a besoin de phrases pour les dire. » La notion *d'expression mathématique* est alors introduite, divisée en deux catégories : les *noms* et les *propositions*. R. Cori propose tout de suite aux stagiaires de mettre en application ces notions en reprenant la liste des assemblages utilisés dans la séquence 2 sur la notion de proposition.

La notion de proposition n'est pas plus mathématiquement définie que dans la séquence 2, et les noms sont présentés comme ce qui sert à nommer les objets mathématiques, ce qui n'est pas non plus une définition mathématique. R. Cori explicite le caractère naïf de son approche :

R. Cori : [...] je suis en train de faire une analyse naïve de ce que je fais quand je fais des maths, donc vous avez tout à fait la possibilité de dire que je délire complètement, [que] c'est pas du tout comme ça, je ne peux pas vous apporter de preuves. Moi je ne sais pas faire de preuves en dehors des mathématiques. Là nous sommes en dehors des mathématiques, nous les observons mais nous sommes en dehors des mathématiques. [extrait du dialogue 5.2 en annexe page 583]

Séquence 4 : sur la présence de variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et langage mathématique

Phase 6 : y a-t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Le dialogue est relancé avec une nouvelle question, celle de la différence, s'il y en a une, entre la langue naturelle et le langage mathématique. Quand il pose la question, R. Cori parle de *langue usuelle* ou *langue naturelle*, présentée comme « celle avec laquelle nous communiquons, avec laquelle nous avons commencé à parler », et utilise successivement *langue mathématique* et *langage mathématique* (voir en annexe page 584, dialogue 6.1). Il ne donne pas de définition pour ces termes *langue naturelle*, *langue mathématique*, *langage mathématique*, pas plus qu'il ne donne de définition mathématique des mots *proposition* ou *connecteur*. Mais à l'inverse de ces notions de logique pour lesquelles il a une référence savante bien précise, il ne semble pas disposer de telle référence pour ces notions linguistiques. En témoigne à mon avis l'utilisation simultanée de *langue mathématique* et de

langage mathématique, ou l'utilisation du terme *discours mathématique* signalée en note page 356.

Pour le premier stagiaire qui s'exprime, il n'y a pas de différence « [le langage mathématique] est un langage adapté, c'est tout », mais il est immédiatement contredit par un autre stagiaire sur le ton de l'ironie « ben si, sinon on ne s'embêterait pas à... » Un autre stagiaire met en avant la présence plus importante de sous-entendus dans la langue naturelle, tout en intégrant ce qui a déjà été fait dans le stage sur l'implication et qui a montré qu'il y avait aussi des sous-entendus en mathématiques.

Phase 7 : différence syntaxe/sémantique

R. Cori se sert de cette réponse pour aborder la distinction entre syntaxe et sémantique (voir en annexe page 585, dialogue 7.1), ce qui permet ensuite de classer d'autres réponses de stagiaires comme relevant de la sémantique. Là encore, le formateur introduit dans le milieu du stage des termes (syntaxe/sémantique) qui seront largement utilisés. Il insiste sur le fait que la logique s'occupe à la fois de syntaxe et de sémantique, alors qu'en mathématiques en général, on fait peu de cas de la syntaxe.

Pour montrer l'importance de ce double aspect, il revient sur l'exercice qui a servi pour mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication pour reprendre dans ces termes ce qui avait été dit autrement quand ils n'étaient pas disponibles : « le hiatus qu'il y avait tout-à-l'heure, c'est que deux phrases à la construction syntaxique identique avaient des interprétations sémantiques différentes. »

Phase 8 : y a-t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?

Un autre stagiaire propose comme différence le fait qu'il y a des *synonymes* dans la langue naturelle. Sans le savoir, il utilise un mot qui est également dans le vocabulaire de la formation, mais qui n'a pas encore été introduit. R. Cori se contente de contre-argumenter, mais sans choisir de développer ici cette notion : « en mathématiques aussi il y a des synonymes, je dirai même qu'en mathématiques il y en a beaucoup plus que dans la langue naturelle. Ça c'est une très bonne remarque parce que c'est un point que je vais développer, la synonymie c'est beaucoup utilisé en mathématiques. » Les réponses suivantes : le fait que le vocabulaire est moins précis dans la langue courante, qu'on utilise un vocabulaire spécifique, qu'il y a plusieurs sens pour un même mot, restent dans le domaine de la sémantique, c'est d'ailleurs ce qu'argue R. Cori pour la première et la troisième, pour la deuxième il fait remarquer que ça n'est pas une particularité des mathématiques mais de n'importe quel domaine d'activité.

Un stagiaire propose alors quelque chose qui relève de la syntaxe : « le langage mathématique, la syntaxe est plus rigoureuse, plus précise. » Ceci permet de faire deux remarques : que la langue naturelle obéit à des règles syntaxiques autant que le langage mathématique, et que les mathématiciens ne sont pas toujours rigoureux vis-à-vis du respect de la syntaxe du langage mathématique.

Phase 9 : les symboles ne sont pas une distinction fondamentale

Un stagiaire propose enfin les symboles, réponse reconnue comme attendue par le formateur : « Ah, voilà, j’attendais les symboles, ils ont tardé à venir mais les voilà ». Il explique alors que ça n’est pas une différence cruciale : en effet, quand bien même l’utilisation de symboles a permis des progrès considérables en mathématiques, nous pourrions nous en passer, c’est d’ailleurs le cas dans les textes anciens qui n’utilisent que les symboles des chiffres et des figures géométriques (voir en annexe page 589, dialogue 9.1).

Phase 10 : la distinction fondamentale c’est la présence de variables dans le langage mathématique

C’est finalement R. Cori qui amène ce qu’il présente comme la différence essentielle entre langue naturelle et langage mathématique : l’utilisation de variables dans le langage mathématique. Il sait qu’il est peu probable que ce point vienne des stagiaires, et il le présente comme un point de vue personnel : « Et bien la différence essentielle, pour moi en tout cas, c’est que le langage mathématique utilise des variables. Et ça c’est une caractéristique du langage mathématique qui le distingue de façon essentielle, de façon fondamentale, du langage naturel. » (voir dialogue 10.1 en annexe page 590).

Dans cette séquence il n’y a pas de connaissances logiques en jeu. Son rôle est de justifier le fait que la suite du travail d’analyse du langage mathématique porte sur la notion de variable, en la présentant comme une notion fondamentale dans le langage mathématique. Cette justification est nécessaire car le formateur sait qu’il est très peu courant de donner de l’importance à la notion de variable (l’absence de cette notion dans les pages qui traitent de logique dans les manuels semble lui donner raison). La sollicitation des stagiaires est un choix ponctuel⁹, elle permet qu’émergent des éléments que le formateur disqualifie (notamment la présence de symboles), mais qui sont l’occasion de faire des remarques qui, tout en n’étant pas essentielles dans le contenu du stage, contribuent à l’enrichir (différence syntaxe/sémantique qui aurait été explicitée à un autre moment si elle n’avait pas émergé ici, notion de synonymie reportée à un moment ultérieur, fait que les mathématiciens se préoccupent très peu de la syntaxe, que la langue française a aussi une syntaxe rigoureuse...).

Séquence 5 : sur le statut muette/parlante des variables

Phase 11 : le destin des variables en mathématiques c’est qu’elles peuvent devenir muettes

Le formateur laisse quelques secondes aux stagiaires pour réagir à cette « prise de position » en faveur des variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et

9. En 2012, en arguant qu’il fallait faire vite, l’organisation du stage n’étant pas la même, R. Cori avait introduit les variables comme élément caractéristique du langage mathématique en mettant en scène un dialogue fictif entre lui et les stagiaires, en ne mentionnant comme réponse supposée des stagiaires que la question des symboles, qui est, nous l’avons vu, celle attendue ici aussi.

langage mathématique, et devant le silence de ceux-ci, il amène lui-même l'objection à laquelle il s'attend éventuellement pour la contre-argumenter :

R. Cori : Et là, j'attends vos protestations. Normalement dans le scénario vous devez vous mettre à protester en disant « mais si dans la langue naturelle il y a plein de variables » [...] Habituellement l'objection que j'ai, mais vous êtes un bon public, vous n'objectez pas, c'est « mais je peux très bien utiliser la lettre x dans une phrase du langage courant, je peux dire “hier j'ai rencontré monsieur x ” ». Sauf que quand je dis « hier j'ai rencontré monsieur x », non mais vous mettez x à la place de Dupont, c'est pas ça qui en fait vraiment une variable [...] Le destin des variables dans la langue mathématique c'est quoi ? [extrait du dialogue 11.1 en annexe page 591]

Là encore il est très peu probable que la réponse à laquelle pense le formateur (la mutification) soit proposée par les stagiaires en réponse à cette question très générale. Il reformule donc sa question et interroge les stagiaires sur « une façon faire disparaître une variable ». Une stagiaire amène alors le terme « muette », qui est sans doute connu d'une partie des stagiaires car il est utilisé au lycée à propos de la variable d'intégration en Terminale.

Phase 12 : exemple d'une proposition mathématique avec une variable muette

Comme pour la notion de proposition, les notions de variable parlante ou muette ne sont pas mathématiquement définies. Par contre, il y a une volonté du formateur de faire passer des expressions, des façons de dire pour faire comprendre ces notions, notamment l'expression qui a déjà été rencontrée « la proposition parle de la variable x » ou « le nom d'un objet qui dépend de x . »

Phase 13 : synonymie

La notion d'expressions synonymes est également introduite avec cet aspect sémantique : deux noms sont synonymes s'ils désignent le même objet, deux propositions synonymes sont deux façons de dire la même chose (voir dialogue 13.1 en annexe page 592).

Phase 14 : qu'est-ce qui me fait dire que x est muet ?

À partir d'un exemple d'expression comportant des variables muettes donné par un stagiaire ($\int_0^1 x dx$, qui était présent dans la liste d'assemblages pour la séquence 2, le formateur fait identifier l'assemblage $\int \dots d \dots$ comme étant ce qui rend la variable muette et demande une « autre façon plus commune de fabriquer des expressions avec des variables muettes. » Les stagiaires proposent « les équations », puis « les fonctions ». Ces réponses sont justes, mais ne sont pas développées par le formateur qui les juge compliquées comme premiers exemples de signes mutificateurs (l'expression n'est pour l'instant pas utilisée). Celui-ci provoque alors ce qu'il attend en revenant à la définition de « la suite u_n converge vers ℓ » pour identifier les quantificateurs comme mutificateurs.

 Phase 15 : retour sur les énoncés « n est premier et n est impair »

et « n est premier $\Rightarrow n$ est impair »

R. Cori revient alors encore une fois sur la différence de réaction face aux expressions « n est impair et n est premier » et « n est impair $\Rightarrow n$ est premier » pour montrer comment il est maintenant possible avec le vocabulaire introduit d'expliquer ce qui se passe :

R. Cori : Maintenant on est en mesure, je pense, de formuler de façon plus précise, et plus claire peut-être, qu'est-ce qui a fait que nous réagissons tous différemment devant ces deux phrases. Et bien c'est que dans la première nous voyons une affirmation relative à un objet qui s'appelle n , et dans la deuxième nous voyons une affirmation générale relative aux propriétés de l'ensemble des entiers. Et donc très précisément ce que ça signifie, c'est que nous avons traité la variable n dans le deuxième cas comme si elle était muette alors que ici (*en montrant première proposition*) elle était parlante [...] Et donc n est apparue comme muette ici et parlante là, alors que rien ne l'indique parce que la chose qui pourrait l'indiquer, pourquoi elle est muette, parce qu'il y a le « quelque soit » sauf qu'il n'est pas écrit mais il y est quand même. [extrait dialogue 15.1 en annexe page 594]

Un stagiaire intervient alors et ramène la question du « donc », en demandant : « si on met “ n est impair donc n est premier”, elle est muette ou parlante ? » Le formateur rappelle en premier lieu que ce n'est pas une proposition, mais précise que s'il fallait donner un statut à la variable n dans un tel énoncé, ce serait celui de variable parlante parce qu'il n'y a pas de mutification. Finalement, le premier argument pouvait suffire : l'énoncé « n est impair donc n est premier » n'est pas une proposition, cela n'a donc pas de sens de se poser la question du statut de la variable ici. Cependant, nous avons vu que le fait qu'un tel énoncé ne soit pas une proposition, s'il a déjà été abordé, n'est pas encore quelque chose dont les stagiaires sont convaincus. Par ailleurs, dans la mesure où le parti pris est de ne pas donner de définition mathématique du statut des variables mais d'en donner une certaine compréhension à travers l'idée « ça parle de n », on peut appliquer ce critère à la phrase « n est impair donc n est premier ». Répondre à la question du stagiaire avec comme seul argument « ça n'est pas une proposition » aurait eu alors toute chance de passer pour une position autoritaire inopérante. Un stagiaire demande ensuite si c'est ça la différence entre *si... alors* et *donc*. Nous voyons que cette question, présente dès le début de la matinée mais finalement toujours « non résolue », reste à l'esprit de plusieurs stagiaires. Cette persistance peut être interprétée comme une réelle difficulté à changer de conception sur les énoncés avec « donc ». Pour le formateur, il manque encore des connaissances sur l'implication pour revenir à cette distinction, qu'il va aborder à la suite de ces réactions des stagiaires. C'est donc sur l'implication que va porter la séquence suivante, plus précisément sur le connecteur implication et sur les éventuelles réactions que peut susciter sa table de vérité.

Séquence 6 : sur la différence entre *si A alors B* et *A donc B*

Phase 16 : table de vérité de l'implication

R. Cori demande aux stagiaires de lui dire dans quels cas « A implique B » est vrai, dans quels cas c'est faux. Une stagiaire répond « si A est fausse c'est toujours vrai et si A est vraie, l'implication n'est vraie que si B est vraie. » R. Cori remplit donc la table de vérité en interpellant les stagiaires mais c'est toujours la même personne ayant déjà répondu qui s'exprime pour chaque ligne. Nous savons bien que cette table de vérité, et notamment les lignes avec la prémisse fausse, peut poser problème, et le formateur intervient immédiatement en donnant un premier argument pour essayer de convaincre que c'est bien comme ça qu'il faut remplir cette table : la seule façon de convaincre quelqu'un que l'implication « A implique B » est fausse c'est de lui prouver que A est vraie et que B est fausse. Un stagiaire au moins exprime qu'il n'est pas complètement convaincu : « en fait les deux premiers cas on dit que c'est vrai parce que c'est pas faux, je ne comprends pas... » Le formateur utilise alors un deuxième argument : il écrit la proposition « n pair $\Rightarrow n^2$ pair » qui est vraie pour tout entier n et donc en particulier pour 2 (ce qui ne pose pas de problème puisqu'on a alors « 2 pair \Rightarrow 4 pair ») mais aussi pour 3 (et là on a « 3 pair \Rightarrow 9 pair », qui est un cas « faux implique faux »).

Un stagiaire reprend alors la justification : « l'implication est vraie parce qu'on a quelque chose de faux au départ, on a quelque chose de faux à la fin, donc au total c'est vrai ». Remarquons qu'il ne nomme pas les deux parties de l'implication, et parle avec un vocabulaire qui évoque plutôt la déduction puisqu'il y a un départ et une fin, c'est-à-dire un cheminement.

Phase 17 : différence entre *si A alors B* et *A donc B*

Il était indispensable d'être d'accord sur la table de vérité de l'implication avant d'aborder finalement cette distinction entre *si... alors* et *donc* puisque la première remarque du formateur, qui va enfin expliquer cette distinction, concerne la table de vérité de l'implication :

— R. Cori : Alors j'en viens juste à une chose, quand vous dites « si A alors B », qui est une phrase que vous prononcez souvent devant vos élèves, est-ce que savoir que ça c'est vrai, ça vous renseigne sur la vérité de A ?

— S : Non.

— R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de A . Quand vous dites « si A alors B » vous ne dites rien sur le fait que A est vraie ou non. Est-ce que ça vous renseigne sur la vérité de B ?

— S : Non.

— R. Cori : Non, ça ne vous renseigne pas sur la vérité de B , la seule chose que ça vous dit c'est que à coup sûr vous n'êtes pas dans le cas où A est vraie et B est fausse. [extrait dialogue 17.1 en annexe page 598]

Le formateur en appelle à la pratique des stagiaires : il les invite à se pencher sur leur propre utilisation de *si... alors* et de *donc* :

— R. Cori : Maintenant écrivons « A donc B », qui est aussi quelque chose que vous dites souvent à vos élèves, et vous je suis certain que vous ne le dites pas indifféremment. Quand vous dites « A donc B », qu'est-ce que vous êtes en train de leur dire ?

— S : Que A est vraie.

— R. Cori : Vous êtes en train de leur dire que A est vraie, et vous êtes en train de leur dire que B est vraie [...] et suivant les circonstances, vous dites un troisième ingrédient, en tout cas vous ajoutez une troisième chose qui est « et j'ai de bonnes raisons de pouvoir vous dire que B est vraie après vous avoir dit que A est vraie ». [extrait dialogue 17.1 en annexe page 598]

8.2.7 Analyse globale de l'exposé sur le langage mathématique

Sur l'activité du formateur

Cette partie du stage est de celles que j'ai appelées « exposés théoriques » dans le tableau donnant le planning général. Nous voyons qu'il ne s'agit pas d'un exposé magistral avec transmission directe des connaissances, même si c'est essentiellement le formateur qui a la parole (ce qu'il reconnaît d'ailleurs), mais plutôt d'un dialogue. C'est pour cette raison que je l'ai apparenté à ce que M. Hersant a appelé *cours dialogué* dont je vais reprendre ici les caractéristiques présentées page 337 :

- « Le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif » : il ne s'agit pas vraiment ici d'une entrée par des problèmes, mais plutôt d'une entrée par des questions. Dans les deux premières séquences, il y a un milieu matériel (les énoncés de l'exercice du test de début de stage pour la séquence 1, les assemblages proposés par le formateur pour la séquence 2), chaque stagiaire est invité à se prononcer sur la question posée et il y a une mise en commun des réponses voulue par le formateur qui amène une première confrontation des différentes réponses entre elles. Cette diversité des réponses serait sans doute suffisante pour proposer, à la suite de cette situation d'action, une situation de formulation où les stagiaires mis en petits groupes auraient à rédiger une seule réponse argumentée collective. Dans la séquence 1, les stagiaires sont peu sollicités pour formuler les raisons de leurs actions. Nous voyons par exemple dans le dialogue 1.6 (voir en annexe page 568), quand les stagiaires qui ont déclaré que tous les énoncés de la séquence 1 étaient faux sont sollicités, que le premier qui expose son argument le fait de façon confuse. Une mise à l'écrit à plusieurs donnerait sans doute des arguments plus clairs.

- Nous pouvons dire que, comme dans un cours dialogué, le formateur « choisit une résolution collective et guidée ». La participation des stagiaires ne fait finalement pas dévier le formateur d'un itinéraire pensé à l'avance.
- Même si certains mots (« connecteur » dans la phase 1, « muette » dans la phase 11) ou certaines propriétés des notions de logique (table de vérité de l'implication dans la phase 16) sont proposés par des stagiaires, c'est à chaque fois en réponse à une question très ciblée du formateur, et nous pouvons dire qu'il garde « la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation ».

Le discours du formateur est empreint d'humour, d'ironie, de métaphore, de parenthèses culturelles. Cette tonalité est d'autant plus possible (et semble appréciée des stagiaires qui y réagissent par des rires, des commentaires) qu'il s'agit d'échanges entre adultes faisant d'une certaine façon partie d'un même corps de métier, même si dans le temps du stage ils occupent les positions différentes de stagiaires et de formateur.

Les pratiques individuelles ne sont jamais remises en cause directement par le formateur. Celui-ci essaie plutôt de faire prendre conscience aux stagiaires d'un contexte institutionnel contraignant qui les influence, sans forcément qu'ils s'en rendent compte d'ailleurs :

- lecture de l'implication avec une quantification universelle comme c'est fait dans la communauté mathématique : « vous avez des yeux de mathématiciens, ce qui n'est pas étonnant puisque vous êtes professeurs de mathématiques [...] chaque fois que le mathématicien lit ou écrit une implication dans laquelle figure une variable ou plusieurs, il l'interprète systématiquement comme étant universellement quantifiée », dialogue 1.8.
- Interdiction d'exhiber les quantifications : « la quantification n'est jamais explicite pour une raison très simple c'est que nous sortons d'une période [...] où les quantificateurs ont été totalement bannis », dialogue 2.1.
- Confusion entre *si... alors* et *donc* dans les manuels : « je vous rassure tout de suite il y a au moins la moitié des manuels qui interprètent le donc comme une implication », dialogue 3.5.

Sur la constitution d'un savoir de référence

Dans la séquence 1, plusieurs notions de logique sont introduites lors des épisodes 3 et 4 de la phase 1 :

- la notion de proposition : elle n'est pas définie (R. Cori : « on peut appeler ça [les énoncés de l'exercice] des propositions mathématiques, on est d'accord »), de toute façon ici il ne sera question que de phrases qui sont des propositions mathématiques. Des lettres majuscules sont utilisées pour nommer les propositions. Le terme *proposition* est utilisé 14 fois par le formateur, 1 fois par un stagiaire.
- L'aspect syntaxique de la construction d'une proposition : les propositions sont des assemblages « fabriqués » selon certains procédés, par exemple à l'aide d'un connecteur.

- La notion de connecteur : le terme est proposé par un stagiaire. Ils sont vu ici du point de vue syntaxique d’opérateurs sur les propositions.
- La notion de variable libre : R. Cori choisit de ne pas utiliser la terminologie « la variable n est libre dans la proposition P », mais d’utiliser une expression qui porte un sens intuitif : « la proposition P parle de la variable n », reprise sous différentes formes dans le dialogue 1.4. Ces répétitions constituent une sorte d’institutionnalisation de cette expression, utilisée par le formateur au même titre que les mots « proposition », « connecteur ».

Dans ces épisodes, les notions de proposition, connecteur, variable sont d’abord introduites comme des outils, des noms pour les éléments des énoncés qui sont analysés. Mais la dimension objet est également très rapidement présente dans le discours du formateur :

- le rôle des connecteurs est donné dans un cadre généralisé : « à partir de propositions on en fabrique d’autres en utilisant les connecteurs ».
- Les propositions sont décrites comme « des affirmations » (le terme est proposé par un stagiaire) qui « disent » des choses, et sont « susceptibles d’être vraies ou fausses ».
- Les variables sont présentes comme noms d’objet : « un objet qui s’appelle n ». Certaines propositions sont des « affirmations relatives à un objet qui s’appelle n », et d’autres sont des « affirmations générales relatives aux propriétés d’un ensemble d’objets¹⁰ », distinction qui caractérise le statut d’une variable : *parlante* ou *muette*.

Nous pouvons voir aussi comment les outils sont affinés au fur et à mesure de l’exposé. Par exemple, le phénomène qui est l’objet de la première séquence (le fait d’associer une quantification universelle implicite à une implication, ce qui provoque une différence de réaction face aux trois énoncés de l’exercice 1 du test de début de stage) est repris plusieurs fois, et explicité de façons différentes :

- « le *si... alors* est porteur de quantification universelle » (séquence 1, dialogue 1.8),
- « les mathématiciens utilisent l’implication presque exclusivement non pas comme simple connecteur binaire, mais comme connecteur binaire accompagné d’une quantification universelle implicite » (séquence 1, dialogue 2.1),
- « deux phrases à la construction syntaxique identique avaient une interprétation sémantique différente » (séquence 4, dialogue 7.1).
- « dans la première [proposition « n est un carré parfait et n est impair »] nous voyons une affirmation relative à un objet qui s’appelle n , et dans la deuxième [proposition « n est impair $\Rightarrow n$ est premier »] nous voyons une affirmation générale relative aux propriétés de l’ensemble des entiers. Et donc très précisément ce que ça signifie, c’est que nous avons traité la variable n dans le deuxième cas comme si elle était muette alors que ici (*en montrant première proposition*) elle était parlante » (séquence 5, dialogue 15.1).

10. Le domaine auquel la variable est astreinte.

Le savoir n'est pas exposé de façon linéaire, chaque nouveau point institutionnalisé est ensuite disponible pour être repris à un autre moment du stage.

M. Hersant qualifie le cours dialogué de « pratique dans laquelle la décontextualisation et l'institutionnalisation des savoirs et connaissances se font de façon diffuse tout au long de l'enseignement » (Hersant, 2004, p. 4). C'est bien ce qui se passe ici, et un des leviers utilisés par le formateur pour l'institutionnalisation est la répétition des mots ou expressions. M. Hersant s'interroge sur la capacité des élèves à distinguer ces fonctions de décontextualisation et d'institutionnalisation. Sur ce point, le fait d'être en présence d'adultes est important : ils sont plus en mesure que des enfants de prendre en charge cette décontextualisation et cette institutionnalisation grâce à une plus grande capacité à extraire du discours du formateur les éléments à retenir (R. Cori note quelques points importants au tableau, mais finalement assez peu de choses), capacité qu'ils ont acquise notamment via leur expérience d'étudiants dans l'enseignement supérieur.

Il se constitue ainsi pour les stagiaires un corpus de savoirs sur des notions de logique, qui n'est pas un corpus mathématique, qui est le *savoir enseigné dans la formation*. Il vient éventuellement compléter, renouveler, des connaissances en logique mathématique que les stagiaires avaient déjà pour constituer pour chacun d'eux une référence permettant de clarifier le savoir à enseigner. À l'échelle de la communauté de ce stage, il constitue donc un *savoir de référence*.

8.2.8 Après-midi de la première journée

La première matinée du stage a donc été consacrée au langage. Nous avons vu dans la description du contenu qu'il y avait un choix d'axer prioritairement la formation sur ce pilier de la logique. Mais le raisonnement est également abordé, notamment à travers la première séquence de l'après-midi qui est un exposé de T. Joly sur la structure modulaire du raisonnement mathématique.

Nous avons vu aussi que les formateurs prévoyaient une alternance d'exposés théoriques et d'apports pratiques. Dans cette première après-midi, des membres du groupe Logique de l'IREM de Paris viennent présenter des activités proposées en classe.

Des descriptions un peu plus détaillées de l'exposé de T. Joly et de la présentation d'activités sont données en annexe, respectivement page 600 et page 604.

Exposé théorique sur la structure modulaire du raisonnement mathématique, dialectique démonstrateur/utilisateur

Cet exposé est fait par T. Joly, enseignant-chercheur à l'Université Paris Diderot, membre de l'équipe *Preuves, programmes, systèmes*. C'est une commande qui lui a été faite, et

cet exposé correspond en grande partie à ce qu'il expose aux étudiants de première année d'université dans le cours *Langage mathématique*.

T. Joly expose la structure modulaire du raisonnement mathématique : dans une démonstration, nous ne re-démontrons pas tout à partir des axiomes, nous utilisons des boîtes, des théorèmes, qui sont isolables au sein de la démonstration, et qui permettent d'avoir des preuves plus faciles à suivre et à vérifier. Cette modularité a pour conséquence que, dans la rédaction d'une démonstration, nous nous retrouvons tour à tour dans la position d'un démonstrateur et dans la position d'un utilisateur, ce que T. Joly appelle la dialectique démonstrateur/utilisateur¹¹. Cette dialectique a à son tour pour conséquence que nous adoptons alternativement deux positions différentes par rapport aux variables dans une démonstration. T. Joly les exprime à travers les termes « choisir » et « subir » et propose le tableau suivant :

	Démonstrateur	Utilisateur
de $\forall x P[x]$	doit envisager tous les x possibles <u>subit</u> x	<u>choisit</u> le x qu'il veut
de $\exists x P[x]$	<u>choisit</u> un x pour lequel il prouve $P[x]$	<u>subit</u> un x arbitraire, dont il sait seulement $P[x]$
$\forall x \exists y P[x, y]$	subit un x arbitraire, en fonction duquel il choisit le y pour lequel il démontre $P[x, y]$	choisit le x qu'il veut et subit en retour un y pour lequel il dispose de $P[x, y]$
$\exists y \forall x P[x, y]$	choisit y librement, puis subit n'importe quel x pour lequel il démontre $P[x, y]$	subit un y , puis choisit $x, x' \dots$ pour lequel il dispose de $P[x, y],$ $P[x', y] \dots$

FIGURE 8.8 – Tableau de manipulation des quantificateurs

À la suite de cet exposé, de courts échanges, qui partent de remarques des stagiaires ou des formateurs qui sont présents, permettent de faire intervenir des éléments qui ne sont pas essentiels dans cette formation, mais que les formateurs ont à l'esprit, et qu'ils glissent dans le contenu du stage si l'occasion se présente (ce qui, par exemple pour le principe du maximum d'information, se produit très souvent) :

- Dans son exposé T. Joly a utilisé la définition de « f a pour limite ℓ en a » et précise que « en première année on n'arrive plus à faire utiliser cette définition aux étudiants. » Une stagiaire raconte que dans sa classe de Terminale, elle donne la définition « avec des mots : tout intervalle contient toutes les valeurs pour f assez proche de machin », mais qu'après elle écrit la définition avec « des epsilon et des intervalles et des pour tout et des il existe », et constate qu'en fait les élèves la comprennent mieux. R. Cori souligne que c'est une position, en faveur de laquelle il prend parti, qui va quelque peu

11. Cette dialectique se retrouve dans le fait que, dans certains systèmes logiques, comme par exemple la déduction naturelle (voir page 157), il y a pour chaque connecteur et chaque quantificateur une règle d'introduction (utile quand on veut démontrer) et une règle d'élimination (utile quand on veut utiliser).

à l'encontre des préconisations actuelles en faveur d'énoncés le moins formels possibles. Je souligne alors le fait qu'exprimer les quantifications avec les quantificateurs, même écrits en mots, est déjà une formalisation, et que la symbolisation n'est qu'une étape supplémentaire, pas forcément la plus compliquée.

- C. Hache, maître de conférence à l'Université Paris Diderot en didactique des mathématiques, présent également en tant que formateur dans ce stage, reprend quant à lui le tableau des manipulations des quantificateurs pour dire qu'il y est bien visible que l'on démontre parfois en choisissant un exemple, notamment dans la technique du contre-exemple, ce qui peut laisser les élèves perplexes car ces derniers étant la plupart du temps en présence d'énoncés universels, on leur dit plus souvent le contraire.
- Une stagiaire raconte que si elle écrit $2 \leq 3$, la plupart de ses élèves de Terminale considèrent que c'est faux, ce qui permet à R. Cori de parler du principe du maximum d'information (voir page 120) : « d'une façon générale on est réticent à écrire quelque chose qui est restrictif par rapport à l'information dont on dispose ».

Analyse globale de l'exposé sur la structure modulaire du raisonnement mathématique

Les stagiaires ont moins participé dans cette séquence (notamment parce qu'ils ont été moins sollicités), l'exposé est présenté de façon assez magistrale. La dialectique démonstrateur/utilisateur peut être une façon d'expliquer une difficulté des élèves qui ont à changer de position au sein d'une même démonstration. Mais cet ancrage dans la classe n'est pas exploité par le formateur. Le vocabulaire et les expressions employées (*position de démonstrateur, position d'utilisateur, subir, choisir une variable*) sont encore une fois relativement imagés, mais ils sont plus complexes que les expressions utilisées dans l'exposé de la matinée, et donc moins facilement utilisables en classe. Ainsi, cette séquence semble moins opérationnelle en terme de liens avec la pratique.

Présentations d'activités par des professeurs du secondaire du groupe Logique de l'IREM de Paris

La séquence qui suit, et termine la première journée de formation, est une phase de présentation d'activités proposées en classe. G. Notter, professeur au Lycée de la Maison d'Éducation de la Légion d'Honneur à Saint Denis, et C. Huet, professeur au collège et au lycée Jean-Baptiste Say à Paris, présentent des activités sur les connecteurs ET et OU et une activité sur les théorèmes de Thalès et Pythagore.

Activités sur les connecteurs ET et OU au collège

La première activité présentée (voir annexe page 604), sur les connecteurs ET et OU, n'a en fait pas encore été testée dans une classe dans sa version finale. Elle a été élaborée à partir d'un exercice proposé par une collègue du groupe dans une classe de Sixième. Elle est présentée par G. Notter. Plusieurs points sur les connecteurs ET et OU sont abordés avec les stagiaires :

- quelques points sensibles autour du langage, par exemple le fait qu'il peut y avoir ambiguïté sur la façon d'entendre « les entiers dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou 5 » (formulation qui peut paraître bizarre, obtenue par mise à la forme négative de « les entiers dont le chiffre des unités est 0 ou 5 »), qui veut sans doute signifier « les entiers dont le chiffre des unités n'est ni 0 ni 5 » mais qui peut être entendue comme « les entiers dont le chiffre des unités n'est pas 0 ou n'est pas 5 », auquel cas tous les entiers conviennent.
- Leurs tables de vérité, qui ne sont pas explicitement données, mais évoquées comme un savoir partagé.
- Les lois de Morgan, qui sont explicitement écrites.

C. Huet présente ensuite un exercice qu'elle a proposé à ses élèves de Sixième également sur les connecteurs ET et OU (voir en annexe page 609). Elle indique que cet exercice n'était pas planifié à l'avance dans sa progression, mais lui a été suggéré par des discussions avec les élèves autour du ET utilisé dans des exercices de géométrie pour relier deux conditions portant sur un objet. Dans l'exercice qu'elle présente, elle demande aux élèves de « dire [pour chaque phrase] si elle est vraie ou fausse », et la phrase n° 3 est : « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 ». C. Huet est membre du groupe logique depuis 3 ans, a suivi des cours de logique mathématique dans sa formation universitaire, et est donc parfaitement consciente de la différence entre *si... alors* et *donc*. Aussi commente-t-elle elle-même l'utilisation de phrases avec *donc*, en expliquant qu'elle préfère éviter les phrases en *si... alors...* en Sixième, et en arguant que le *donc* est finalement ce qu'on utilise le plus souvent en mathématiques. Cette position est en contradiction avec l'importance donnée dans la matinée par R. Cori à cette différence. Le choix de C. Huet montre une difficulté à prendre en compte cette différence dans la pratique, avec des élèves. C'est donc avec une suggestion pratique que je reprends cette question : je suggère aux stagiaires d'utiliser un vocabulaire différent, ce qui oblige à des énoncés d'exercices différents, pour ne pas entretenir la confusion : les propositions, par exemple celles en *si... alors...*, sont *vraies* ou *fausses*, les raisonnements exprimés par de phrases avec *donc* sont *corrects* ou *incorrects*.

Dans la présentation de la première activité, l'accent est plutôt mis sur le contenu en jeu, en expliquant notamment le pourquoi des changements par rapport à l'activité initiale. Dans la présentation de la deuxième activité, l'accent est plutôt mis sur le déroulement, comment elle est venue à l'idée du professeur, comment s'est passée la séance, ce qu'ont pu

finalement faire les élèves. Finalement elles se complètent bien, le contenu de la première activité se retrouvant dans la deuxième.

Les stagiaires restent silencieux pendant tout cet exposé. Ici encore ils sont moins sollicités que dans l'exposé de la matinée, puisqu'aucune question ne leur est posée. Sans doute aussi n'ont-ils pas eu assez de temps pour rentrer dans les activités qui sont finalement présentées sans qu'ils aient pu les faire eux même et donc identifier clairement le contenu mathématique en jeu, les différentes réponses possibles.

Activités sur les théorèmes de Thalès et de Pythagore

La présentation se poursuit avec une activité sur les théorèmes de Pythagore et de Thalès que C. Huet a proposée dans sa classe de Troisième (voir en annexe page 614). Elle explique d'abord comment elle introduit les termes *théorème direct*, *contraposée*, *réciproque* dans une séance d'une heure avant d'attaquer la géométrie, puis comment dans l'activité proposée les élèves sont invités à d'abord se questionner sur la forme du théorème qu'ils vont utiliser (forme directe, réciproque, contraposée).

C. Huet prend explicitement position en faveur de l'utilisation du terme *contraposée* dans sa classe de Troisième. J'évoque alors les instructions officielles qui n'encouragent pas à l'utiliser, et je les commente en allant plutôt dans le sens de C. Huet.

Cela suscite des réactions chez les stagiaires, la discussion s'engage sur la question de la présentation sous forme de deux implications ou d'une équivalence, des erreurs de rédaction des élèves qui confondent les deux connecteurs... En choisissant de présenter cette activité, les formateurs savent qu'ils vont tomber sur ces questions polémiques. C. Huet indique que dans sa classe elle sépare partie directe et réciproque. Sans prendre position, je commente en revenant encore une fois sur la distinction entre implication et déduction et en insistant sur le fait que l'équivalence est un outil puissant puisqu'une seule équivalence permet de conclure dans quatre situations différentes.

Activités sur les connecteurs ET et OU en classe de Seconde

G. Notter explique ensuite où et comment elle aborde les connecteurs ET et OU dans sa classe de Seconde, avec l'idée de montrer une progression tout au long de l'année (voir en annexe page 618).

Elle explique comment le deuxième exercice, extrait d'un manuel, ne lui convient pas à cause de l'énoncé. Par ailleurs, elle ne le propose plus, même en modifiant l'énoncé, car il a amené trop de discussions dans la classe, qu'elle a trouvées intéressantes mais très chronophages. L'enjeu de ces discussions est le principe du maximum d'information qui amène à considérer qu'il est faux d'affirmer « $A \text{ OU } B$ » si l'on sait que « $A \text{ ET } B$ » est vraie. Elle précise qu'elle continue cependant à aborder cette question en cours, et que cela amène souvent les élèves à poser dans les jours suivants des questions à chaque occurrence d'un « et » ou d'un « ou ».

Elle raconte ensuite comment elle a laissé les élèves mener une résolution d'inéquation produit en manipulant des connecteurs ET et OU, avant de proposer d'utiliser un tableau de signes qui est alors apparu comme un outil évitant une résolution fastidieuse.

Dans son récit de ces moments de classe, G. Notter décrit d'une part une réflexion par rapport à des exercices spécifiques sur les connecteurs ET et OU et par rapport à des propositions de manuels, d'autre part la manière dont elle se saisit de certains autres exercices pour travailler sur ces connecteurs.

R. Cori fait ensuite deux remarques sur l'utilisation des variables :

- Dans l'expression « déterminez le signe de $(x - 3)(3x + 2)$ », rien ne signifie que x est muette¹².
- Dans le premier exercice (où il faut compléter un tableau : dans la première colonne il faut écrire des inégalités avec x , dans la seconde l'appartenance de x à un certain intervalle, dans la troisième représenter une droite graduée avec une partie colorée), il y a une variable dans les deux premières colonnes du tableau mais pas dans la troisième.

Un commentaire que je fais sur le premier exercice nous amène à faire un peu de calcul propositionnel, à parler de tautologie (terme que les stagiaires ne connaissent pas tous), et notamment de la tautologie « $(A \Rightarrow B) \text{ OU } (B \Rightarrow A)$ » et de la confusion possible entre les deux propositions « $(\forall x (A[x] \Rightarrow B[x])) \text{ OU } (\forall x (B[x] \Rightarrow A[x]))$ », qui n'est pas toujours vraie, et « $\forall x ((A[x] \Rightarrow B[x]) \text{ OU } (B[x] \Rightarrow A[x]))$ » qui est toujours vraie. Ce court moment qui s'apparente à des résolutions d'exercices de logique mathématique semble ne pas être évident pour les stagiaires qui demandent plusieurs fois de répéter certaines explications. C'est une des difficultés dans l'organisation du stage : les connaissances en logique mathématique qui interviennent dans certaines remarques à propos d'activités pour la classe ne sont pas disponibles pour tous les stagiaires.

12. Bien que cette expression ne soit pas une proposition, on peut par extrapolation donner un sens au fait que la variable x y est muette.

Analyse globale de la séquence de présentation d'activités

Nous avons vu que le contexte institutionnel actuel concernant l'enseignement des notions de logique pouvait amener des difficultés, d'une part du fait du manque de précision des objectifs du programme sur ces notions, d'autre part parce que l'enseignement de ces notions doit se faire au fil des autres chapitres.

En présentant des activités qu'elles ont elles-mêmes expérimentées dans leurs classes, G. Notter et C. Huet montrent ce qu'elles ont proposé, et comment cela s'est déroulé. Nous voyons notamment comment elles se saisissent de certains moments pour aborder des questions de logique, comment l'expérience permet des réajustements et une plus grande réactivité. Elles ne proposent pas des activités clés en main, mais donnent à voir la réflexion qu'elles mènent depuis plusieurs années sur l'enseignement de la logique. Dans cette réflexion, elles font référence à la logique mathématique. Elles montrent aussi la complexité de la mise en œuvre dans la classe, par des hésitations (par exemple G. Notter sur un exercice qu'elle choisit de ne plus faire) ou des choix pratiques décalés par rapport à des considérations théoriques (par exemple C. Huet qui choisit dans un exercice Vrai/Faux pour des sixièmes de proposer des phrases avec *donc* plutôt qu'avec *si... alors*).

Des éléments théoriques, éventuellement des rappels de ce qui a été exposé dans la matinée, viennent compléter cette réflexion. Il s'agit d'avantage d'éléments pour les professeurs, pour l'analyse des activités, pour développer une certaine habileté de manipulation de ces notions de logique, que d'éléments directement destinés aux élèves. La présence de plusieurs formateurs favorise ces interventions : à côté de celui qui parle, plusieurs autres formateurs sont présents, qui peuvent alors saisir un élément du discours sur lequel ils pensent qu'il est intéressant de revenir. Cependant, nous avons vu que des remarques nécessitant des connaissances en logique sont abordées peut-être trop rapidement pour être bien comprises par tous les stagiaires.

Finalement, comme dans la matinée, les activités présentées servent surtout d'exemples pour montrer les questions à se poser quant à l'enseignement de notions de logique. En particulier, le langage est toujours au cœur de plusieurs remarques qui sont faites sur la rédaction des textes des activités. Ces textes sont porteurs de nos pratiques langagières et de leurs implicites, mais avec parfois des effets de contrat qui les mettent en porte-à-faux avec la logique (quand par exemple un texte d'exercice peut amener à penser que « A ET B » peut être vraie sans que « A OU B » le soit, ou que dans la gestion des variables, des propositions avec une variable libre sont données comme équivalentes à des propositions sans variable libre).

8.2.9 Analyse globale de la première journée

La première journée du stage répond à la nécessité d'un double apport théorique et pratique pour l'enseignement des notions de logique, puisqu'elle contient, à l'instar des autres journées du stage, deux séquences d'exposés théoriques et une séquence de présentation

d'activités pour la classe. Cependant, la séparation n'est pas aussi nette : des allusions à la classe sont régulièrement présentes dans les exposés théoriques et des commentaires théoriques sont présents dans la présentation d'activités. Sans que cela soit explicitement dit aux stagiaires, cette imbrication est aussi une source d'inspiration pour un enseignement de notions de logique qui respecte la contrainte d'être présent de façon transversale.

Par exemple, à l'occasion de la présentation des activités, les formateurs présents font des commentaires qui soulignent des propriétés des notions de logique en jeu. Ces commentaires sont autant de digressions qu'un professeur peut faire dans sa classe. Les formateurs se heurtent par contre à deux difficultés auxquelles un enseignant est également confronté :

- l'aspect chronophage de ces commentaires,
- certains commentaires s'appuient sur des présentations parfois assez formelles de propriétés des notions de logique en jeu. Il y a donc un équilibre délicat à trouver entre approche naïve et discours formalisé.

Ces commentaires sont l'occasion d'un réinvestissement des connaissances décontextualisées à partir d'autres situations (par exemple, après avoir caractérisé le statut – muette ou parlante – des variables, à l'occasion de la présentation d'une activité, les stagiaires sont invités à se demander quel est le statut de la variable x dans la phrase « déterminez le signe de $(x - 3)(3x + 2)$ », ce qui permet de pointer que rien, à part un effet de contrat associé à ce type d'énoncé d'exercice, ne signale qu'il faut envisager toutes les valeurs possibles de la variable x).

Les questions que les formateurs posent sur des formulations courantes en mathématiques, et auxquelles ils répondent par une analyse utilisant des notions de logique, sont une autre façon de rendre la logique partout présente. C'est une entrée plus inhabituelle que les commentaires accompagnant la résolution d'exercices. En effet, d'une certaine façon, les commentaires lors de la résolution d'un exercice peuvent s'apparenter à des « compléments mathématiques » et, que les stagiaires aient ou non l'habitude de cette pratique dans leur classe, c'est en tout cas une démarche qu'ils peuvent facilement concevoir. Bien sûr, se poser des questions sur la façon de formuler un théorème, essayer de comprendre ce qu'a dit un élève et l'aider à le reformuler, sont également des pratiques courantes. Mais il est rare d'y répondre en adoptant l'angle proposé dans le stage (se poser la question de la structure logique d'une proposition pour en évaluer la complexité, du statut des variables, des éventuelles ambiguïtés qui peuvent amener différentes interprétations d'un énoncé). La première séquence montre bien cela : il faut plusieurs interventions du formateur pour que les stagiaires identifient la raison pour laquelle ils ne réagissent pas de la même façon face à la proposition « n est un carré parfait et n est impair » et face à la proposition « n est impair $\Rightarrow n$ est premier », et la formulent en termes de quantification universelle implicite.

Cette approche naïve des notions de logique à travers l'étude du discours mathématique n'exclut pas que certaines propriétés soient données de façon plus formelle. Les formateurs donnent par exemple les tables de vérité des connecteurs et proposent à cette occasion un exercice classique des cours de logique propositionnelle (écrire les 16 connecteurs binaires à l'aide des connecteurs usuels NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À), parlent de tautologies, étudient l'équivalence entre certaines propositions¹³. Les éléments qui sont proposés pour cette étude sont d'abord utilisés comme outils dans le cas d'une situation particulière (comme la comparaison des propositions de l'exercice 1 du test rappelées ci-dessus), puis sont décontextualisés et prennent ainsi le statut d'objets. Cette décontextualisation est faite dans le fil du discours des formateurs, il n'y a pas un temps bien délimité d'institutionnalisation avec des définitions et des propriétés.

Nous pouvons identifier dans la formation plusieurs moments différents qui s'apparentent aux différentes phases de la dialectique outil/objet décrite par R. Douady (les parties entre guillemets sont extraites de Douady, 1986, pp. 14 à 20) :

- *Phase « Ancien »* : dans la résolution des exercices du test de début de stage, « des concepts mathématiques sont mis en œuvre [par les stagiaires] comme outils explicites pour résoudre au moins partiellement le problème ».
- *Phase « Recherche nouveau implicite »* : mais les stagiaires « rencontrent des difficultés pour résoudre complètement le problème ». Nous avons vu que dans l'exposé sur l'analyse du langage, cette phase de recherche est très pilotée par le formateur qui enrichit le milieu des connaissances nécessaires à l'évolution de la situation, pratique que j'ai apparentée au cours dialogué de M. Hersant.
- *Phase « Explicitation et institutionnalisation locale »* : « certains éléments ont joué un rôle important dans la phase précédente et peuvent être appropriés par les élèves [ici les stagiaires]. Ils sont formulés soit en termes d'objet, soit en terme de pratique avec leurs conditions d'emploi du moment ». Dans l'exposé sur l'analyse du langage, l'institutionnalisation se fait surtout à travers la répétition de certaines phrases, et il se dessine ainsi des caractéristiques des objets. Par exemple :
 - l'aspect syntaxique des connecteurs est associé au mot fabrique : *à partir de propositions, on en fabrique d'autres en utilisant ce qu'on appelle les connecteurs.*
 - Une proposition mathématique est une *affirmation concernant des objets mathématiques, qui est susceptible d'être vraie ou fausse.*
 - Certaines propositions *parlent d'un objet qui s'appelle n* (la variable n est parlante), d'autres non (la variable n est muette).
- *Phase « Institutionnalisation-statut d'objets »* : « l'enseignant [ici le formateur] expose ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en usage ». Il n'y a que peu de moments dans la formation qui pourraient s'apparenter à une telle phase, les formateurs choisissent de rester dans une approche naïve des notions de logique.

13. Pour des propositions du langage propositionnel ou du langage des prédicats, en s'appuyant sur une idée intuitive de « être vraie » dans le deuxième cas, sans faire appel à la notion de modèle.

– Phases « *Familiarisation - réinvestissement* » et « *complexification de la tâche et nouveau problème* » : dans l'exposé sur l'analyse du discours mathématique, le formateur invite les stagiaires à réinvestir tout de suite certaines notions, par exemple à classer certaines expressions mathématiques en nom ou proposition. L'utilisation des connaissances sur les notions de logique pour l'analyse des activités proposées en classe peut être vue comme une complexification de la tâche des stagiaires : il ne s'agit plus seulement de regarder comment parlent les mathématiciens, mais de prendre également la position de l'enseignant soucieux de l'apprentissage de ses élèves, et d'examiner son propre langage.

Nous pouvons donc dire qu'il se constitue un *savoir de référence*, à l'échelle du stage (c'est-à-dire qu'au niveau de la communauté de la formation, il est constitué sur un temps long, les trois jours, et il est partagé par l'ensemble des acteurs), ancré dans la pratique d'enseignant. Mais d'une certaine façon la constitution de ce savoir n'est pas menée à terme. En effet, beaucoup d'informations données aux stagiaires ne sont que verbalisées, il y a finalement assez peu de choses écrites, et il n'y a pas vraiment mise en forme d'un corpus au sens matériel¹⁴.

Dans les données analysées jusqu'ici, il y a peu d'interventions des stagiaires qui pourraient nous renseigner sur la façon dont ils reçoivent tout ce qui est dit dans le stage, notamment sur leur adhésion ou non à l'entrée dans la logique par l'étude du langage, et sur la façon dont ils s'approprient les connaissances. Je vais donc maintenant présenter l'analyse de deux corpus de données dans lesquels ils ont beaucoup plus la parole. Tout d'abord l'analyse d'une séquence pendant laquelle certains stagiaires viennent présenter eux-mêmes des activités, ensuite l'analyse d'un questionnaire-bilan qu'ils ont eu à remplir à la fin du stage.

8.3 Les activités présentées par les stagiaires

Le troisième jour de stage a lieu deux mois après les deux premiers. Il est suggéré aux stagiaires d'expérimenter une activité sur des notions de logique dans leur classe dans cette période et de la présenter aux autres stagiaires lors de la dernière journée. Il n'y a aucun caractère d'obligation¹⁵. Les formateurs proposent aux stagiaires de les accompagner dans la conception de leur activité, et de venir assister à la classe. Lors de la session 2013, 5 stagiaires ont présenté des activités, dont un groupe de 2 collègues. Ces 2 collègues

14. Dans cette thèse, je me suis concentrée sur l'analyse du discours du formateur. Une autre piste intéressante pour cerner le *savoir de référence* qui se constitue serait d'étudier ce qui est écrit par les formateurs, et les notes prises par les stagiaires.

15. Voici le texte d'un courriel envoyé aux stagiaires un mois avant la dernière journée : « Je vous rappelle que nous avons prévu lors de la dernière journée de stage un temps d'échange autour d'activités proposées dans vos classes. Afin de préparer au mieux ce temps, je vous demande de bien vouloir m'informer si vous souhaitez participer, et dans ce cas de me dire de quelle activité il s'agit (même de l'envoyer par mail si possible). »

animaient déjà avant le stage un atelier « Logique » en Sixième, ils étaient venus au stage dans l'idée de l'enrichir, d'avoir des outils théoriques pour y réfléchir. Nous étions convenus à la fin des deux premiers jours de stage que j'irais assister à l'une des séances d'atelier. Il n'y a pas eu d'autres sollicitations des stagiaires qui ont présenté une activité cette année là.

J'analyse ces présentations comme des indicateurs de l'influence des deux premiers jours de stage. Il ne s'agit pas d'une évaluation méthodique de leur effet, mais d'une lecture orientée.

Je présente d'abord les activités proposées par les stagiaires, puis une analyse détaillée d'une d'entre elles (les autres se trouvent en annexe), avant d'exposer quelques conclusions globales.

8.3.1 Les activités présentées

Vrai/Faux en Sixième

(Analyse en annexe page 622)

Activité de type Vrai/Faux (avec possibilité de répondre « je ne sais pas »), essentiellement autour d'implications (il y a en tout 10 affirmations dont 7 sont, ou sous-entendent, des implications). Il est d'abord prévu un temps de travail individuel, puis un temps de travail par groupe.

Les énoncés sont appelés des affirmations. Les formulations utilisées sont très diverses (une seule utilisation de la formulation « si... , alors... »).

Il y a un mélange de propositions et de déductions (affirmation 10 : « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 »).

Vrai/Faux en Troisième

(Analyse en annexe page 627)

Activité de type Vrai/Faux sur 4 propositions explicitement universellement quantifiées.

Là encore les énoncés sont appelés des affirmations. Le premier est de la forme « il n'existe pas... », les trois autres de la forme « pour tout... ».

Dans leur présentation, les professeurs qui ont proposé cet exercice soulignent qu'ils n'auraient peut-être pas pensé à quantifier aussi explicitement les énoncés avant les deux premiers jours du stage.

Atelier logique en Sixième

(Analyse en annexe page 629)

L'atelier est proposé sur 4 séances à tous les sixièmes de l'établissement, par groupe de demi-classe, dans le cadre d'ateliers pour développer des compétences transdisciplinaires.

Les élèves ont à résoudre, individuellement ou en groupe, plusieurs séries d'exercices de quatre types. Les exercices se présentent comme des « jeux logiques », qui nécessitent de raisonner, mais qui ne font pas directement travailler les élèves sur des notions de logique mathématique.

Les professeurs qui présentent ces activités disent qu'ils sont venus au stage parce qu'ils ressentaient un manque de connaissances théoriques permettant de comprendre ce qui était réellement travaillé dans ces exercices.

Activité circuit en Seconde

(Analyse ci-après)

Activité de type Vrai/Faux sur des implications. Le cadre est non mathématique (il s'agit d'affirmations sur un circuit électrique). Les énoncés sont appelées conjectures. Les élèves votent puis débattent. Certaines phases se concluent par une institutionnalisation sur la démonstration de la vérité ou de la fausseté d'une conjecture en « Si A alors B », qui est la forme commune à toutes les conjectures proposées dans l'activité.

Vrai/Faux en Seconde

(Analyse en annexe page 647)

Exercice de type Vrai/Faux sur des implications et leur réciproque, puis sur des équivalences.

Les énoncés sont appelés implications ou équivalences, elles sont formulées avec les flèches, et ne sont pas explicitement universellement quantifiées.

8.3.2 Activité circuit en Seconde

(L'intégralité des échanges est donnée en annexe page 638)

La stagiaire qui présente l'activité a connu cette activité lors de sa formation d'enseignante à Grenoble. Il s'agit d'une activité présentée dans la brochure *Le vrai et le faux au collège et au lycée* de M. Gandit et M.C. Masses-Demongeot (Gandit & Masse-Demongeot, 2001). L'activité est analysée dans cette brochure. J'en reprends le propos dans l'analyse présentée ci-après, en insistant plus sur les aspects liés à la quantification.

Analyse a priori

On distribue aux élèves le schéma du circuit électrique ci-dessous :

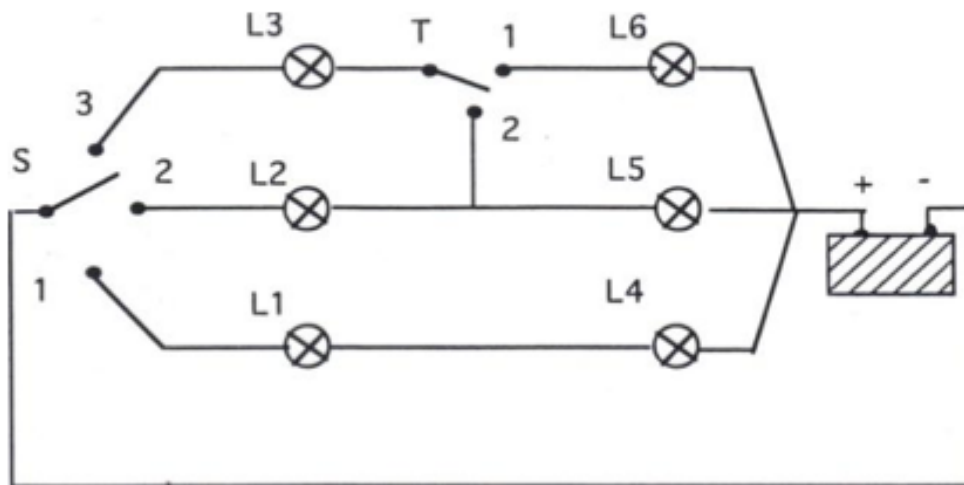


FIGURE 8.9 – Schéma de l'activité *Circuit* présentée par une stagiaire

On leur propose ensuite des conjectures, et ils doivent se demander si elles sont vraies ou fausses. Pour chaque conjecture, après un moment de réflexion, on procède à un vote dans lequel les élèves doivent se prononcer pour VRAI, FAUX ou AUTRE. Ce vote est suivi d'une phase de débat, éventuellement d'un deuxième vote si l'on sent que des positions ont bougé de manière significative. Un moment d'institutionnalisation clôt parfois la discussion à propos d'une conjecture.

La première conjecture est **si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi**. Dans cette conjecture, il n'est pas seulement question du circuit et des lampes, mais aussi d'un locuteur qui raisonne. Un tel raisonnement, nous l'avons déjà dit, n'est pas vrai ou faux mais plutôt correct ou non. Ainsi, se prononcer sur la valeur de vérité de cette conjecture, c'est, d'une certaine façon, rentrer dans le contrat qui demande, derrière cette mise en scène, de se prononcer sur la proposition « si la lampe 4 brille, alors la lampe 1 brille aussi » qui est sous-jacente au raisonnement. L'utilisation de l'expression *je suis certain que* renforce l'idée qu'on ne regarde pas une position particulière des interrupteurs, mais bien tous les cas possibles, ce qui signifie que l'on s'intéresse à l'implication universellement quantifiée sur toutes les positions possibles des interrupteurs. L'utilisation du terme *brille* amène un autre élément sujet à discussion : est-ce qu'une ampoule qui est faiblement allumée brille ? Toutes ces nuances sont voulues par les concepteurs de l'activité, car le but de l'étude de cette première conjecture est de faire sentir la nécessité de mettre en place un *modèle*, ce qui permet d'être d'accord sur le sens des mots, et donc de se prononcer sur la véracité de la même conjecture.

La deuxième conjecture est ensuite proposée dans un langage plus formalisé : **si non L2 alors non L5**, Li signifiant « le courant passe dans la lampe n° i ». J'utilise les termes

suiuants pour analyser les réponses possibles :

- je parle de l'implication pour désigner la conjecture avec une quantification universelle portant sur les cas possibles (la valeur de vérité de chaque proposition L_i dépend de la variable « position des interrupteurs », même si celle-ci n'apparaît pas dans sa formulation).
- je parle d'une instanciation de l'implication¹⁶ pour désigner l'implication pour une position particulière des interrupteurs (pour chaque position des interrupteurs, on a une instanciation de la proposition L_i qui est soit vraie soit fausse).

Pour la première conjecture, l'implication¹⁷ était vraie, et donc toutes les instanciations de l'implication également. Le fait de considérer l'implication ou une instanciation de l'implication n'amenait donc pas de différence dans les réponses. Au contraire, pour la conjecture 2, l'implication est fausse, et les instanciations de l'implication sont majoritairement vraies (la seule instanciation fausse est le cas de la position (S3, T2)). Le but de l'étude de cette conjecture est l'institutionnalisation d'une méthode pour décider de la vérité de propositions de la forme *Si A alors B*, en s'appuyant sur la notion de contre-exemple¹⁸ :

- une conjecture est dite fausse si elle admet un contre exemple : c'est-à-dire que l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion.
- Une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fausse, c'est-à-dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Notons que dans cette institutionnalisation, il n'est pas fait mention de quantification. À l'issue de l'étude des deux premières conjectures, tout a été explicité de façon à ce que chacun se prononce effectivement sur la même proposition : une implication universellement quantifiée, dans le cas d'un fonctionnement normalisé du circuit.

La troisième conjecture est **Si L3 alors L2**. Cette fois-ci, il n'y a aucune instanciation de l'implication pour laquelle prémisse et conclusion sont vraies toutes les deux, ce qui signifie que l'implication « Si L3 alors non L2 » est vraie. Mais il n'est pas valide de conclure de l'un de ces deux arguments que la conjecture 3 est fausse, car cela ne démontre pas l'existence d'un contre-exemple. La conjecture 3 ne permet cependant pas de montrer qu'un tel raisonnement n'est pas correct puisqu'il amène à la bonne conclusion.

C'est finalement l'étude de la quatrième conjecture, **Si L1 et L3, alors L2 et non L5**, qui va invalider un tel raisonnement. En effet, ici encore, il n'y a aucune instanciation de l'implication pour laquelle prémisse et conclusion sont vraies toutes les deux. Mais par contre, il n'y a aucun contre-exemple puisqu'il n'y a aucune instanciation de l'implication

16. Ce terme n'est utilisé ni par M. Gandit et M.C. Demongeot, ni par P3. Je ne suggère pas de l'utiliser avec des élèves et je suis même sceptique sur son utilisation avec les professeurs, mais par contre il m'a paru nécessaire dans cette analyse.

17. Celle sous-jacente à la conjecture 1.

18. Je me sers ici du texte proposé par P3 qui reprend celui de la brochure de M. Gandit et M.C. Masse-Demongeot

pour laquelle la prémisse soit vraie. Pour clarifier les différents statuts des instanciations de l'implication, trois termes sont institutionnalisés¹⁹ :

- un exemple est un cas qui vérifie l'hypothèse et la conclusion.
- Un contre exemple est un cas pour lequel l'hypothèse est vraie alors que la conclusion est fausse.
- Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée.

Il n'est pas explicitement dit qu'une instanciation de l'implication avec un exemple ou un hors-sujet est vraie. Finalement, en se ramenant à ce qui a été institutionnalisé suite à la conjecture 2, seuls les contre-exemples sont importants : soit il y en a au moins un, soit on montre qu'il ne peut pas y en avoir. Distinguer exemple et hors-sujet ne sert donc pas directement pour statuer sur la vérité ou non de la conjecture, mais plutôt pour distinguer deux erreurs que les élèves peuvent faire :

- conclure à la vérité de l'implication à partir d'une instanciation pour laquelle prémisse et conclusion sont vraies,
- conclure à la fausseté d'une implication à partir d'une instanciation pour laquelle la prémisse est fautive (les élèves pensent souvent que dans ce cas l'instanciation est fautive).

Pour la quatrième conjecture, tous les cas sont des hors-sujet. Dresser la liste exhaustive de tous ces cas, ce qui est possible puisqu'il n'y en a que 6, constitue ici une preuve de l'absence de contre-exemple.

Présentation de l'activité

P3 est la troisième stagiaire qui présente une activité proposée dans sa classe. Lors des deux premières présentations, des difficultés liées à la quantification universelle implicite associée aux implications, et la distinction entre *si... alors* et *donc* ont été rappelées.

P3 a proposé cette activité dans une classe de Seconde. Les élèves ont travaillé par groupes de 4 ou 5 pour les phases de réflexion sur les conjectures. Elle présente le déroulement de l'activité, des tableaux résumant les résultats des votes, et quelques arguments d'élèves en s'appuyant sur le document ci-après qui a été distribué aux autres stagiaires.

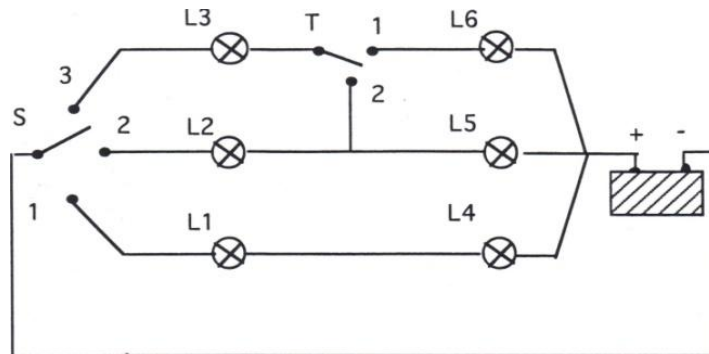
19. Je me sers ici encore du texte proposé par P3 qui reprend celui de la brochure de M. Gandit et M.C. Demongeot

Initiation à la logique

Séance extraite de « le vrai et le faux au collège et au lycée »
par Michèle Gandit, IREM de Grenoble.

Description de la séance :

La séance a été présentée devant une classe de seconde de 33 élèves répartis par groupes de 4/5.
On distribue à chacun le circuit électrique suivant :



Plusieurs phrases sont proposées. On les appelle des conjectures car à priori, on ne connaît pas leur valeur de vérité. Pour chaque conjecture, on demande aux élèves si elles sont justes ou fausses. Après un moment de réflexion, on effectue un vote suivie d'une phase de discussions. A l'issue de ce débat, un deuxième vote sera réalisé si besoin suivi d'un moment d'institutionnalisation.

Voici les résultats des votes obtenus ainsi que les remarques/ arguments présentés par les élèves.

Conjecture n°1 :

Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi.

	VRAI	FAUX	AUTRE
Vote 1	27	2	4
Vote 2	26	6	1

« C'est vrai car si la lampe 4 brille, alors il y a du courant qui circule dans le fil relié à la lampe 1 »

« C'est faux car il est possible que l'ampoule ne marche pas »

« C'est vrai dans certains cas, faux dans d'autres cas : Si on a S2 alors la lampe 1 ne brille pas ... »

«... Dans ce cas la, la lampe 4 ne brille pas non plus »

« On ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur »

« Peut-être que le courant passe mais que la lampe ne brille pas »

Mise en place du modèle mathématique :

On se met d'accord pour se situer dans le modèle suivant :

- Voir briller = le courant passe
- On suppose que les lampes et la batterie fonctionnent parfaitement.
- On suppose que les lampes sont de même puissance.

Dans ce cadre, il n'y a plus de doutes possible et tout le monde se met d'accord sur le fait que la conjecture n°1 est vraie.

Dans la suite, pour signifier que le courant passe dans la lampe n°i, nous écrivons Li .

Conjecture n°2 :

Si non L2 alors non L5 .

VRAI	FAUX	AUTRE
10	15	8

« Si on a S3 et T1 alors la lampe 1 ne brille pas et la lampe 5 non plus »

« Oui mais dans d'autres cas on peut avoir la lampe 2 qui brille mais pas la 5 »

« Donc des fois c'est vrai, des fois c'est faux »

Le contre-exemple :

- Une conjecture est dite fautive si elle admet un contre exemple : c'est-à-dire que l'hypothèse est vérifiée mais pas la conclusion.
- Une conjecture est dite vraie s'il est impossible qu'elle soit fautive, c'est-à-dire si l'on démontre qu'elle ne peut pas avoir de contre-exemple.

Conjecture n°3

Si L3 alors L2.

VRAI	FAUX	AUTRE
5	25	3

« On a un contre-exemple »

« Si la lampe 3 brille, alors on a S3 et pour que la lampe 2 brille, il faut S2 »

Conjecture n°4 :

Si L1 et L3 alors L2 et non L5

VRAI	FAUX	AUTRE
4	22	7

« C'est pas possible alors c'est faux »

« Du coup on ne pas dire si c'est juste ou faux... »

« Si c'est pas possible, alors on ne peut pas dire que c'est faux »

Qu'est ce qu'une conjecture vraie ? C'est une conjecture qui n'a pas de contre-exemple. Quel contre-exemple peut-on donner ici ?

On considère la conjecture suivante : Si A, alors B

- Un exemple est un cas qui vérifie l'hypothèse A et la conclusion B.
- Un contre exemple est un cas pour lequel l'hypothèse est vraie alors que la conclusion est fautive
- Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée.

La conjecture 4 n'admet donc aucun contre-exemple elle est donc vraie. A noter qu'elle n'admet aucun exemple non plus mais que des hors-sujet.

Pour la conjecture 2 :

	Hypothèse « non L2 »	Conclusion « non L5 »	Ce cas est un...
S1 et T1	V	V	EX
S1 et T2	V	V	EX
S2 et T1	F		HS
S2 et T2	F		HS
S3 et T1	V	V	EX
S3 et T2	V	F	CE

La première conjecture (« Si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi ») est distribuée sans aucun rappel sur les circuits électriques, ce qui amène certains élèves à dire AUTRE pour la première conjecture parce qu'ils ne se rappellent plus de ces notions d'électricité. La plupart des élèves répondent VRAI pour cette conjecture, en argumentant : « il y a du courant dans le fil relié à la lampe 1 », les quelques qui répondent FAUX donnent des arguments sur la qualité du matériel qui pourrait modifier les résultats : « il est possible que l'ampoule ne marche pas ». Finalement, après la phase de débat, lors d'un nouveau vote, plusieurs élèves basculent vers la réponse FAUX car ils sont convaincus par ces arguments de possibles problèmes matériels.

Les réponses AUTRE ne sont pas commentées par P3. Elles témoignent pourtant de difficultés d'ordre logique. Par exemple, un élève argumente « c'est vrai dans certains cas, faux dans d'autres cas : si on a S2 alors la lampe 1 ne brille pas », ce qui témoigne d'une conception erronée de l'implication. En effet, ici seule la vérité de la conclusion est prise en compte. Un élève corrige d'ailleurs cet argument : « dans ce cas la lampe 4 ne brille pas non plus ». Une autre réponse est reliée à l'implicite de la quantification universelle : « on ne sait pas puisqu'on ne connaît pas la position de l'interrupteur ».

Sur la conjecture n° 2 (« si non L2 alors non L5 »), les votes sont assez partagés. P3 met en relation les hésitations des élèves exprimées dans le débat et ce qui a été vu dans le stage sur la quantification universelle implicite. Dans les réponses des élèves citées (« Si on a S3 et T1 alors la lampe 2 ne brille pas et la lampe 5 non plus », « Oui mais dans d'autres cas on peut avoir la lampe 2 qui brille mais pas la 5 »), aucune ne permet de conclure ni à la vérité ni à la fausseté de la conjecture, et elles sont en fait toutes les deux des instanciations vraies de l'implication (la première car prémisses et conclusion sont vraies, la deuxième car la prémisse est fausse). Dans le premier cas, il s'agit donc d'un élève qui conclut que l'implication est vraie à partir d'une instanciación vraie (prémises et conclusion vraies), dans l'autre cas, il s'agit d'un élève qui conclut que l'implication est fausse à partir d'une instanciación vraie, mais qu'il considère sans doute fausse (prémisse fausse). Nous retrouvons les deux erreurs évoquées page 382. Là non plus P3 ne commente pas cet aspect logique des réponses, elles sont données simplement pour montrer que les élèves ne sont pas d'accord sur la vérité ou non de la conjecture. Nous ne savons pas si certains élèves ont correctement cité un contre-exemple pour infirmer la proposition.

Pour la conjecture n° 3 (« si L3 alors L2 ») il n'y a aucune position des interrupteurs qui rende vraie la prémisse et la conclusion (ce qui se traduit dans le langage de P3 par « cette fois-ci on n'a aucun exemple possible »). Tout le monde se met assez facilement d'accord.

Pour la conjecture n° 4 (« Si L1 et L3 alors L2 et non L5 »), la prémisse est toujours fausse (P3 traduit : « dans ce cas là [ce qui se passe] c'est qu'on ne peut pas avoir L1 et L3 en même temps »). C'est un cas qui embête les élèves, et une grande majorité d'entre eux vote pour FAUX ou AUTRE. En s'appuyant sur ce qui a été institutionnalisé suite à

la conjecture n° 2, la conjecture est déclarée vraie car elle n'admet aucun contre-exemple. Mais cet argument ne semble pas convaincre tous les élèves. P3 définit alors les termes *exemple*, *contre-exemple*²⁰, *hors-sujet*. Elle présente ensuite un tableau dans lequel toutes les positions possibles des interrupteurs sont listées, et le complète avec les élèves pour la conjecture n° 2 en donnant la valeur de vérité de la prémisse, celle de la conclusion, et le statut de chaque cas. Ils n'ont pas eu le temps de faire un tel tableau pour la conjecture n° 4 qui posait problème.

Dans sa présentation, P3 parle essentiellement du déroulement de l'activité dans sa classe. Elle utilise quelques éléments de logique pour commenter l'activité (lien avec la quantification universelle implicite dans la phase sur la conjecture n° 2, la conjecture n° 4 est une implication vraie car l'hypothèse est toujours fausse). Les réponses des élèves servent à illustrer les différentes positions, elles ne sont pas commentées du point de vue de la logique mise en œuvre.

Discussion qui suit la présentation

Un stagiaire (S13) réagit tout de suite sur la notion de hors-sujet. Dans la discussion, il y a une certaine confusion due à l'absence de deux termes distincts pour l'implication et pour une instanciation de l'implication :

— S13 : Hors-sujet ça veut dire que l'implication est quand même vraie de toute façon.

(ici S13 parle de ce que j'ai appelé instanciation de l'implication)

— P3 : Hors-sujet oui ça veut dire que c'est vrai. Ça veut dire que l'hypothèse n'est pas vérifiée donc il n'y a forcément aucun contre-exemple donc c'est vrai.

(ici par contre le premier « c'est » désigne une instanciation de l'implication, mais le deuxième désigne l'implication universellement quantifiée, la quantification universelle étant signifiée par « forcément »)

— Z. Mesnil : un hors-sujet c'est quelque chose qui ne peut pas permettre d'infirmer la conjecture. C'est dans ce sens là je pense que c'est hors-sujet, c'est-à-dire que ça ne peut pas être quelque chose qui dit que c'est vrai ou qui dit que c'est faux.

(« c'est » renvoie ici à « conjecture », donc à l'implication, mais l'utilisation de ce terme imprécis contribue à la confusion dans l'échange)

— S13 : Pour le...

— Z. Mesnil : Un hors-sujet est un cas pour lequel l'hypothèse n'est pas vérifiée parce que...

— S13 : Si L2 est vraie...

— P3 : L2 là est forcément fausse puisqu'on a trouvé un contre-exemple.

20. En fait déjà défini suite à la conjecture 2.

(P3 confond L2 et conjecture n° 2)

— Z. Mesnil : Oui mais du coup si L2 est vraie...

— S13 : Donc l'implication est vraie.

— Z. Mesnil : Oui mais du coup on ne peut pas savoir, elle est vraie...

— S13 : Du point de vue d'un élève oui je comprends.

— Z. Mesnil : C'est pas l'implication qui est vraie, c'est l'implication instanciée à ce cas là.

(La distinction entre implication et instanciation de l'implication est introduite par une formatrice)

— S13 : Oui voilà c'est ça.

— Z. Mesnil : Donc ça ne dit pas...

— S14 : S'il n'y avait que des exemples et des hors-sujet, alors ça serait vrai.

(Ici « ça » désigne l'implication)

Dans la matinée, le mot « implication » a été utilisé indifféremment pour désigner l'implication universellement quantifiée et l'implication sans quantification. Les stagiaires n'ont donc pas à leur disposition de vocabulaire pour distinguer entre les deux.

P3 a utilisé l'expression « table de vérité » pour présenter le tableau dressé suite aux hésitations sur la conjecture n° 4 (dernier tableau du document présenté par P3, voir page 638). S13 conteste cette dénomination car ce qui est dans la dernière colonne n'est pas une valeur de vérité. P3 reconnaît l'utilisation abusive de ce terme, mais ne revient pas sur le but d'un tel tableau. Il me semble cependant important de souligner que son but n'est pas de faire une table de vérité, et qu'il n'est pas question pour elle d'aborder avec les élèves la vérité de chaque instanciation et donc la délicate question de la table de vérité du connecteur IMPLIQUE. Ce tableau sert uniquement à présenter la liste de tous les cas, à les catégoriser, puis à conclure sur l'existence ou non de contre-exemple et donc sur la vérité ou la fausseté de la conjecture.

S13 intervient encore une fois car il a l'impression que la notion de hors-sujet confond un peu implication et raisonnement, ce qui est repris par C. Hache : « Oui. On peut dire ça. C'est non L2 donc non L5, c'est hors-sujet de regarder un cas où L2 est vraie. C'est hors-sujet pour le donc, pas forcément pour le implique. » Là encore ces discussions témoignent de la complexité des notions en jeu. Dans la première discussion sur la notion de hors-sujet (ci-dessus), j'avais amené l'idée de la distinction entre implication et instanciation de l'implication, qui expliquait la confusion dans la discussion. Ici, S13 et C. Hache ont exprimé un point de vue, je signale un désaccord, mais l'échange n'est pas conclu en l'absence d'éléments suffisamment précis (il faudrait préciser ce que veut dire « hors-sujet pour le donc », et « hors-sujet pour le implique ») pour trancher.

J'insiste ensuite sur le fait qu'être dans une situation où il n'y a qu'un nombre fini de cas permet de conclure à la non-existence de contre-exemple par un simple examen de tous les cas possibles.

Je reviens également sur l'implicite de la quantification universelle des implications proposées en conjecture. Cet implicite est l'objet du débat autour de la conjecture n° 2. P3 a d'ailleurs relié dans sa présentation les hésitations autour de cette conjecture à « ce dont on parle depuis le début du stage », et je fais l'hypothèse que c'est bien à la quantification universelle implicite qu'elle pense, même si elle ne la nomme pas directement. Dans l'institutionnalisation proposée, qui indique comment se prononcer sur une conjecture, la quantification universelle n'est pas mentionnée. Je cherche à savoir dans quelle mesure elle est tout-de-même présente, par exemple dans des interventions orales :

— Z. Mesnil : Ces implications elles sont quantifiées sur tous les cas possibles finalement, alors là il y en a 6, mais c'est vraiment complètement implicite. Est-ce que toi dans ta discussion ça t'est arrivé de dire « est-ce que dans tous les cas ? », « est-ce que pour tous les cas ? »

— P3 : Ben oui forcément. Quand on arrive à la première qui est fausse, quand ils disent des fois c'est vrai des fois c'est faux, ah oui mais il faudrait montrer justement est-ce que c'est vrai dans tous les cas ou est-ce qu'il existe un moment où c'est faux.

— Z. Mesnil : Et c'est vrai que moi je trouve que dans la manière dont c'est rédigé là, ça reste très implicite dans ce qui est écrit. Mais comme tu dis ça vient forcément à l'oral.

C. Hache souligne l'importance d'associer contre-exemple et quantification universelle, ce qui, nous l'avons vu, n'est que très rarement fait dans les manuels, et n'est pas vraiment fait ici non plus.

Je fais aussi un commentaire sur la formulation de la première conjecture, qui est présentée sous forme d'un raisonnement, pas d'une proposition. S13 conteste : « La première aussi c'est bien une proposition conditionnelle. Si je vois L1 alors, le "alors" est juste implicite mais c'est bien... » Là non plus nous n'avons finalement pas à notre disposition une définition qui permet de trancher, et finalement ma réponse est, une fois encore, plus un point de vue qu'une véritable contre-argumentation :

Moi je sais que la conjecture 1 quand je la lis j'ai plus envie de répondre « oui » ou « non » que « vrai » ou « faux ». Quelqu'un qui dit « je vois la lampe n° 4 briller ah ben je suis certain que la lampe 1 brille aussi » je lui dis « tu as raison » ou « tu as tort ». Il se met en jeu puisqu'il dit je, du coup on lui répond par rapport à ce qu'il est en train d'élaborer comme raisonnement. Alors évidemment derrière son raisonnement il y a une implication, il y a une proposition qu'il considère comme vraie, nous on la voit cette proposition,

mais ce qui est écrit ça n'est pas la proposition, c'est la personne en train de raisonner.

P3 rappelle que cette façon de présenter les choses est délibérée, pour amener des désaccords et la nécessité de la mise en place d'un modèle. Je signale alors cette importance, dans des situations qu'on appelle *de la vie courante*, de fixer certains aspects pour pouvoir se mettre d'accord, ce qui finalement est un peu en contradiction avec l'aspect *vie courante*.

P3 conclut en signalant que cette activité a servi à ses élèves comme situation emblématique, notamment pour la notion de contre-exemple.

Analyse globale de la séquence

Dans l'activité présentée par P3, il s'agit d'évaluer la vérité de conjectures de la forme « si A alors B ». On n'est pas dans un contexte mathématique. Une première étape est donc de « normaliser » ce contexte pour pouvoir traiter mathématiquement la situation. Il est ensuite institutionnalisé le fait que de telles conjectures sont fausses lorsqu'elles admettent un contre-exemple, et vraies lorsqu'on peut démontrer qu'elles n'en admettent pas. Les conjectures proposées présentent différentes combinaisons des valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion (conjecture fausse mais Vrai/Vrai dans la majorité des cas, conjecture vraie mais aucun cas Vrai/Vrai, conjecture vraie car aucun cas avec prémisse vraie).

L'activité aborde la notion de contre-exemple, et propose de définir celles d'exemple et de hors-sujet. Elle traite également de la façon de prouver qu'une conjecture de la forme *si A alors B* est vraie ou fausse. Même si cela est sous-jacent, elle ne parle pas explicitement de quantification universelle, ni directement de la table de vérité de l'implication (pour le premier point, cela peut-être considéré comme regrettable par rapport à ce qui est dit dans le stage, pour le deuxième point, les formateurs ne suggèrent pas d'aborder cette table de vérité au lycée).

Dans sa présentation, P3 commente peu les aspects logiques de l'activité, qu'elle semble cependant avoir bien en tête. Les exemples de réponses d'élèves ne sont pas commentées non plus sous l'angle de la logique. Ces manques viennent peut-être en partie du peu d'explication de ce qui est attendu dans ces présentations d'activités. Il est seulement demandé aux stagiaires qui le souhaitent de « présenter une activité », pas d'en faire une analyse du point de vue de la logique. Ceci pourrait peut-être être amélioré en guidant plus ces présentations, en proposant aux stagiaires une grille d'analyse de l'activité et des réponses des élèves. Cependant, un autre élément sans doute tout aussi important que ce défaut de cadrage est le manque d'habitude des stagiaires de faire de telles analyses.

Plusieurs notions de logique sont présentes dans l'activité, sa présentation, les discussions qui suivent :

- La quantification universelle implicite des conjectures formulées sous la forme *si A alors B* : P3 met en relation les hésitations des élèves au moment de la conjecture n° 2 et la quantification universelle implicite des conjectures, mais elle n'utilise pas cette terminologie (elle évoque « ce dont on parle depuis le début du stage »). Ce point ne revient pas dans les discussions qui suivent l'activité. Cela ne signifie pas pour autant qu'il ne soit pas identifié comme un point important par les stagiaires, et deux raisons peuvent expliquer qu'il soit ici si brièvement évoqué : d'une part, il a déjà été longuement question de ce point dans la présentation qui a précédé celle de P3, d'autre part, c'est l'objet explicite de la discussion sur la conjecture n° 2, et même si le terme « quantification universelle » n'est pas employé, l'enjeu présenté tourne bien autour de la question « dans tous les cas ou pas ».
- La notion de proposition : elle est évoquée à propos de la conjecture n° 1 (si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi) sur laquelle il y a désaccord entre une formatrice, qui souligne que ça n'est pas une proposition mais plutôt le récit d'un raisonnement, et un stagiaire qui la considère comme une proposition conditionnelle. Rien n'indique que ce stagiaire ait été convaincu par les arguments de la formatrice, rien n'indique l'opinion des autres stagiaires. Cette formulation pose des problèmes délicats. D'une part, l'utilisation de la première personne du singulier est un artifice de formulation, lié à la volonté d'introduire la nécessité de se placer dans un modèle pour se mettre d'accord. Le mathématicien voit facilement la proposition cachée derrière cet artifice. D'autre part la conjecture ne parle pas d'objets mathématiques, nous sommes donc en dehors de ce qui a été discuté lors de la première journée de stage. Et c'est finalement comme cela que peut s'expliquer la confusion ; d'un côté la formatrice se rapporte à une définition naïve de la notion de proposition mathématique (mais qui n'a pas été explicitement donnée aux stagiaires, nous l'avons vu dans l'analyse de la première journée du stage), d'un autre côté le stagiaire se rapporte à une autre définition valide hors du domaine mathématique.

- La distinction entre implication universellement quantifiée et instanciation d’une telle implication : les conjectures sont des implications universellement quantifiées, mais exemple, hors-sujet, contre-exemple nous ramènent à des instanciations. Dans le stage, il n’a pas été proposé de vocabulaire pour différencier ces deux objets. Dans les discussions, il y a donc une certaine confusion : des stagiaires utilisent l’expression « c’est vrai/faux », mais ce « c’est » renvoie parfois à l’implication, parfois à une instanciation. Nous voyons à travers les quelques réponses d’élèves citées qu’il en est de même pour eux. La confusion est levée avec les élèves par l’utilisation d’expressions signifiant la quantification : « c’est vrai dans tous les cas », « dans certains cas », « ce cas est un exemple » . . .
- La table de vérité de l’implication : elle est sous-jacente à l’activité (puisqu’il est dit que seul un contre-exemple permet de montrer qu’une conjecture est fausse, et non un hors-sujet) et est mentionnée dans les discussions qui suivent, les stagiaires semblent l’avoir bien en tête. Mais elle n’est pas un objectif de l’activité, ce que mentionne bien P3 dans une discussion autour du tableau présenté à la fin de l’activité. Dans ce tableau figurent pour chaque cas la valeur de vérité de l’hypothèse, de la conclusion, mais pour en déduire le statut de ce cas (exemple, hors-sujet, contre-exemple) et non une valeur de vérité de l’instanciation de l’implication.

8.3.3 Analyse globale des quatre présentations

(Dans ce qui suit, P1 désigne la professeure qui a présenté l’activité Vrai/Faux en Sixième, P2 et P’2 les professeurs qui ont présenté l’activité Vrai/Faux en Troisième et les ateliers logique en Sixième, P3 la professeure qui a présenté l’activité circuit, et P4 la professeure qui a présenté l’activité Vrai/Faux en Seconde).

Les activités présentées par les stagiaires sont essentiellement des exercices du type Vrai/Faux. Nous avons vu que ce type d’exercice était également très présent avec le logo « logique » dans les manuels. Ce sont des exercices en apparence faciles à rédiger pour un enseignant (nous verrons plus loin quelques difficultés retrouvées dans les exercices proposés par les stagiaires) et faciles à adapter au contenu du chapitre en cours, et donc bien adaptés pour faire de la logique de manière transversale comme le préconise le programme. Le discours de P4 illustre bien ce point :

— P4 : Et du coup après quand j’ai commencé les vecteurs, ben justement, comme j’en étais arrivée aux propriétés du parallélogramme, je me suis dit « tiens, ça serait peut-être intéressant qu’ils voient la différence entre quand on écrit avec des vecteurs on a des équivalences, quand on écrit avec des longueurs on n’en a pas », pour qu’ils voient aussi la puissance des vecteurs. Donc du coup voilà, c’est sorti de ma tête comme ça, ça ne nous a pas pris très longtemps.

Derrière ces exercices Vrai/Faux il y a l'enjeu des techniques de démonstration : comment on démontre qu'une proposition universellement quantifiée (et particulièrement une implication) est vraie, comment on utilise un contre-exemple pour démontrer qu'une proposition universellement quantifiée (et particulièrement une implication) est fausse. Seule P3 propose un exemple d'institutionnalisation, mais qui n'est pas sa propre production (c'est l'institutionnalisation proposée dans la brochure de l'IREM de Grenoble (Gandit & Masse-Demongeot, 2001)). P4 évoque « des choses mises noir sur blanc », mais sans préciser quoi. Les professeurs de collège (P1, P2 et P'2) ne semblent pas viser une institutionnalisation, mais seulement la pratique de ce genre de tâche, qui donne l'occasion de travailler sur des conceptions fausses des élèves, ou tout simplement sur du contenu mathématique. D'autres stagiaires soulignent cet intérêt, comme on le voit dans ce dialogue à propos de l'affirmation n° 6 du Vrai/Faux en Sixième (« étant donné que les longueurs PA et PB sont égales, le point P est le milieu de $[AB]$ ») :

— S1 : C'est vrai que cette question là elle ressort souvent quand on fait la médiatrice.

— S2 : Mais c'est intéressant aussi de le faire avant d'avoir fait la médiatrice pour voir justement les idées fausses.

— S1 : Oui, oui, je suis d'accord.

— P1 : Mais moi toutes les affirmations qui parlent de multiples de diviseurs, ça a été bien traité, j'étais assez contente.

— S1 : C'est vrai que c'est intéressant de leur poser la question avant parce que quand tu le vois ils s'en rappellent.

Par contre, même sans institutionnalisation, le but est bien d'instaurer une pratique. Les exercices proposés donnent lieu à des discussions, des précisions de la part des professeurs, notamment sur la quantification universelle implicite, et ces activités servent d'exemple emblématique auquel élèves et professeur peuvent se référer.

Dans leurs présentations, les professeurs témoignent de difficultés chez leurs élèves qu'ils associent aux quantifications universelles implicites. P1 et P4 ont utilisé des expressions signifiant cette quantification universelle telles que « forcément », « obligatoirement », « nécessairement ». Seuls P2 et P'2 ont explicité les quantifications en utilisant le quantificateur universel *Pour tout* (mais il ne s'agit pas d'implications, or c'est vraiment pour ce type de proposition que la pratique de la quantification implicite est la plus courante). P4 fait part de son impression que les élèves comprennent mieux cette quantification quand elle est soulignée par des termes du langage courant (comme ceux listés ci-dessus) que quand elle est explicitée avec le quantificateur *Pour tout*. Tout se passe comme si les professeurs adoptaient une position conciliant nécessité d'explicitation des quantifications et méfiance vis-à-vis d'un langage trop formel en trouvant des expressions du langage courant pour signifier les quantifications.

Les stagiaires semblent également bien conscients que leurs élèves parlent parfois de ce que j'ai appelé instanciation de l'implication (mais sans forcément « appliquer » correctement la table de vérité de l'implication, que les élèves ne connaissent bien sûr pas, pour conclure sur la vérité ou non de ces instanciations), et parfois de l'implication universellement quantifiée. Mais les stagiaires n'ont pas à leur disposition (et les formateurs n'ont pas proposé) de termes pour signifier cette distinction et les termes utilisés dans les échanges restent confus (voir par exemple l'échange analysé page 387).

Le dernier point que je voudrais souligner dans ces présentations concerne la notion de proposition, et la question de la vérité. À plusieurs reprises lors des deux premières journées, les formateurs avaient suggéré de faire attention à ne poser la question de la valeur de vérité qu'à propos de propositions mathématiques. Pourtant, dans son activité Vrai/Faux, P1 a mélangé des propositions et des déductions (la dernière phrase est « 204 est divisible par 4 et par 6 donc par 24 »). Et il y a une discussion entre une formatrice et un stagiaire pour savoir si la première conjecture dans l'activité circuit (« si je vois la lampe 4 briller, je suis certain que la lampe 1 brille aussi ») est ou non une proposition mathématique. Cette notion ne semble donc pas encore très claire pour certains stagiaires. Nous touchons sans doute là aux limites d'une approche naïve. De plus, pour la quantification universelle implicite par exemple, les formateurs ont pu montrer, et les stagiaires ont pu vérifier, qu'elle amenait des difficultés, alors que la distinction implication/déduction a été moins abordée sous l'angle des problèmes qu'elle pouvait amener dans la classe.

8.4 Bilan de la formation 2013

Un questionnaire-bilan a été proposé lors de la dernière journée de stage en mars 2013. J'ai également envoyé ce questionnaire-bilan par courriel aux participants des stages des trois années précédentes.

Ce questionnaire-bilan me sert à mesurer l'impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique. Je parle d'impact potentiel car je ne récolte que des intentions, que les stagiaires n'ont pas vraiment eu le temps de confronter à leur mise en œuvre dans la classe. Celles-ci pourraient être revues à la baisse sous l'influence du manque de temps, ou de la réaction éventuellement peu enthousiaste des élèves.

8.4.1 Analyse *a priori* du questionnaire

Question 1 : sur ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

1) Cochez la case adaptée, et complétez la colonne du milieu pour les points attendus :

En vous inscrivant à ce stage vous étiez venu chercher :	Essentiellement	en partie	Si ce point était attendu, le stage a-t-il répondu à vos attentes ? Mettre une note de 1(non pas du tout) à 4 (oui tout-à-fait)	pas vraiment	pas du tout
Des activités toutes prêtes pour les élèves.					
Une élaboration collective d'activités pour les élèves.					
Des outils pour une analyse critique des propositions des manuels sur la logique (pages de cours ou exercices).					
Des connaissances théoriques en logique mathématique.					
Des éléments culturels pour alimenter votre réflexion sur l'enseignement de la logique.					
Des outils pour aider les élèves à mieux maîtriser l'expression en mathématiques.					
Des outils pour aider les élèves pour l'apprentissage de la démonstration.					
Autres :					

FIGURE 8.10 – Ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

Les réponses à cette question me renseignent sur les besoins ressentis des professeurs qui suivent le stage. Les propositions de réponses ont été élaborées pour pouvoir être comparées aux besoins supposés par les formateurs, mais aussi en fonction de réponses données lorsque cette question a été posée oralement en début de stage. Dans les 5 premières lignes

je prends en compte 3 dimensions de l'activité du professeur en amont de la classe :

- la conception d'activités pour les élèves. Les stagiaires peuvent être en attente de « matériel » pour la classe, avec deux positions différentes quant aux apports d'un stage : attendre qu'il livre des outils clés en main, ou qu'il soit un lieu d'élaboration collective d'outils. Les gradations dans les réponses permettent que les deux attentes co-existent. La question sur une éventuelle attente concernant les manuels résulte de l'étude qui a montré qu'ils ne sont pas des ressources très lisibles pour les enseignants.
- Les connaissances mathématiques de l'enseignant. Les stagiaires les ressentent-ils comme suffisantes pour enseigner des notions de logique? Nous avons vu que la formation en logique mathématique pouvait être très différente d'un enseignant à l'autre, selon son âge et son cursus scolaire.
- Un aspect plus culturel des connaissances de l'enseignant. Moins directement lié à l'activité en classe, il peut cependant contribuer à la réflexion sur l'enseignement de notions de logique.

Les 2 lignes suivantes sont consacrées à l'aide que peut apporter le professeur à ses élèves. Nous retrouvons dans les deux types d'aide proposés les deux piliers langage et raisonnement de la logique. J'ai préféré le terme « démonstration » au terme « raisonnement » parce qu'il revient plus souvent dans les commentaires des stagiaires (notamment des professeurs de collège, peut-être parce que la démonstration est plus facilement identifiée comme un objet dont ils peuvent enseigner certaines caractéristiques).

Questions 2 et 3 : sur l'importance accordée au contenu théorique en logique mathématique et l'approche par l'analyse du langage mathématique

2) Ce stage vous semble t-il suffisant comme formation théorique en logique mathématique?

OUI [...]

NON [...]

Commentaires (en particulier si vous avez répondu non) :

FIGURE 8.11 – Satisfaction des stagiaires relativement au contenu théorique

La question des apports théoriques est un élément important des choix de contenu du stage. Il est indiqué aux stagiaires au début du stage que l'absence de la logique mathématique dans la formation initiale des professeurs explique la part non négligeable des apports théoriques dans le stage. Cependant, des questions de temps limitent ce contenu, et il est réduit à quelques éléments que les formateurs jugent essentiels. Ce choix exclut des développements tels que, par exemple, la notion de théorie, de conséquence logique, de modèle... (un temps de la troisième journée de stage est généralement consacrée au

développement d'une question traitée par la logique mathématique. En 2013, R. Cori a présenté les axiomes de la théorie des ensembles et exposé quelques questions de consistance de la théorie). Bien sûr, la satisfaction d'un stagiaire sur ce point dépend du contenu proposé mais aussi de ses attentes.

3) La stratégie choisie dans cette formation pour introduire ces notions de logique est une approche naïve (les notions de variables, expressions mathématique, proposition, sont prises dans leur sens intuitif et non pas définies formellement) basée sur l'étude du langage utilisé dans la pratique des mathématiciens. Cela vous paraît-il adapté à une formation pour les professeurs :

OUI [...]

NON [...]

Commentaires (en particulier si vous avez répondu non) :

FIGURE 8.12 – Adhésion des stagiaires à l'approche de la logique à travers l'étude du discours mathématique

Pour les concepteurs de la formation, l'entrée formelle dans la logique mathématique, telle qu'elle se fait dans un cours de logique mathématique à l'université, serait inadaptée à un tel stage, surtout sur un temps aussi court. L'objectif d'une telle formation est de privilégier une approche plus « pratique », directement en lien avec l'activité de l'enseignant, à partir d'un matériau issu de la classe. Ici, le matériau choisi est le langage mathématique et la logique mathématique est abordée à travers son utilisation pour étudier ce langage. Ces deux questions visent donc à soumettre à l'appréciation des stagiaires les choix de contenu qui résultent d'une réflexion *a priori* des formateurs.

Question 4 : sur les connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

4) Dans la formation, plusieurs notions de logique mathématique ont été abordées. Pour chaque aspect de ces notions, notez de 1 (non pas du tout) à 4 (oui tout-à-fait) :

	Vos connaissances sur cette notion avant le stage étaient-elles suffisantes pour votre enseignement ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il personnellement intéressé ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique ?	L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru directement exploitable dans vos classes ?
variable				
proposition				
connecteur ET/OU				
négation				
implication				
équivalence				
quantificateur				
Le raisonnement en général				
Le raisonnement par récurrence				
Le raisonnement par contraposée				
Le raisonnement par l'absurde				

FIGURE 8.13 – Sentiment des stagiaires sur leurs connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Cette question vise à pouvoir comparer l'avant et l'après stage sur chacune des notions. Pour l'avant, seul l'aspect « connaissances pour l'enseignement » est mentionné. Cela reste assez vague mais le but est surtout d'évaluer l'impact du stage. Bien sûr, il y a un biais : c'est une question qui porte sur un sentiment sur ce qui se passait avant le stage, mais ce sentiment a pu être modifié par ce qui a été vu dans le stage. Pour l'après stage, trois aspects sont distingués : l'intérêt personnel des stagiaires, l'utilité pour réfléchir à l'enseignement de notions de logique, l'exploitabilité en classe. À travers ces trois aspects, nous suivons en quelque sorte l'activité du professeur de la conception de ses séquences de classe à leur réalisation.

Question 5 : sur l'impact potentiel sur les pratiques en matière d'enseignement de notions de logique

5) Cochez les cases adaptées :

	Avant la formation, vous aviez l'habitude de :				La formation vous a apporté des éléments pour :	
	Souvent	Assez souvent	Rarement	Jamais	Oui	Non
Faire des commentaires relevant de la logique lorsque l'occasion se présente (écriture d'une propriété, correction d'un exercice...)						
Prendre un temps pour discuter une formulation d'élève.						
Concevoir des activités portant sur la logique.						
Utiliser directement les exercices estampillés « logique » des manuels.						
Utiliser en les modifiant les exercices estampillés « logique » des manuels.						
Rédiger des synthèses à destination des élèves sur des notions de logique.						
Utiliser ce que proposent les manuels dans les pages sur la logique.						
Expliciter les quantifications dans les énoncés des propriétés.						

FIGURE 8.14 – Impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique

Cette question vise à évaluer l'impact potentiel du stage non plus avec une entrée par notion au niveau des connaissances, mais plutôt au niveau des pratiques.

Les deux premières propositions portent sur des commentaires « improvisés » faisant appel à des notions de logique. Les trois propositions suivantes concernent la conception d'activités. Puis deux propositions concernent l'institutionnalisation de connaissances sur des notions de logique. Enfin, la dernière proposition est liée à un point de vue défendu dans

le stage : l'explicitation des quantifications est nécessaire pour une bonne compréhension des énoncés par les élèves.

Question 6 : sur l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

6) Les éléments historiques sur la logique et son enseignement vous ont-il paru avoir leur place dans ce stage ?

FIGURE 8.15 – Satisfaction des stagiaires à propos de l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

Là encore il s'agit d'évaluer un choix de contenu, choix argumenté par le fait que la logique est une branche méconnue des mathématiques, et que sa place dans les programmes de lycée a connu une histoire mouvementée.

Questions 7, 8, 9, 10, 11 : sur l'impact de la formation sur les pratiques en classe

Ces questions sont formulées sous la forme « la formation a-t-elle eu un impact...? », ou « est-ce que ce stage a modifié...? » Dans le cas d'une réponse notifiant un changement, je demande un exemple précis, pour essayer justement d'être au plus proche des pratiques, et pas seulement des intentions.

7) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques en matière d'enseignement de notions de logique ?

OUI [...]

NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

8) Est-ce que ce stage a modifié votre façon de vous exprimer dans vos classes (à l'oral, dans la rédaction du cours, dans les énoncés d'exercices...) ?

OUI [...]

NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

9) Est-ce que ce stage a modifié votre prise en compte de la façon dont les élèves s'expriment (en vous donnant des outils pour expliquer leurs erreurs, pour comprendre des malentendus dus à des ambiguïtés...) ?

OUI [...]

NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

10) Est-ce que ce stage a modifié votre façon d'envisager le raisonnement (en apportant un éclairage sur les différents types de raisonnement, sur les règles qui justifient les inférences, en vous donnant des outils d'analyse des raisonnements de vos élèves...) ?

OUI [...]

NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

11) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques de manière plus générale ?

OUI [...]

NON [...]

Si oui, donnez au moins un exemple précis :

FIGURE 8.16 – Impact de la formation sur les pratiques en classe

La question 7) porte sur l'enseignement de notions de logique d'une façon générale. Les questions 8) et 9) portent plus précisément sur l'expression, celle du professeur d'abord, puis sur sa prise en compte de l'expression des élèves. Le travail sur le langage occupe une place très importante dans le stage, un objectif étant de faire prendre conscience aux stagiaires de la complexité des pratiques langagières de la communauté mathématique, et de la nécessité d'adapter ces pratiques à un contexte d'enseignement avec des élèves qui ne les partagent pas *a priori*. La question 10) complète les deux précédentes, en portant cette fois-ci sur le pilier raisonnement de la logique. La question 11) porte sur les pratiques en général. D'une certaine façon, elle double les questions précédentes : dans le stage il

est essentiellement question d'expression et de raisonnement, c'est donc là-dessus que l'on peut s'attendre à des modifications des pratiques. Mais elle permet aussi d'ouvrir sur d'autres éléments des pratiques qui n'étaient pas directement visés par le stage.

8.4.2 Résultats

Ces résultats sont obtenus à partir de l'analyse de 25 bilans :

- 20 bilans ont été remplis à la fin du stage par les stagiaires de 2013 (11 professeurs de collège, et 9 professeurs de lycée).
- 5 anciens stagiaires m'ont renvoyé un bilan par courriel (4 de la session 2012 et 1 de la session 2011, 2 professeurs de collège et 3 professeurs de lycée).

Les professeurs n'ont pas toujours répondu à toutes les questions, d'où de possibles variations dans les effectifs d'une question à l'autre.

Je n'ai pas distingué dans les réponses celles des stagiaires de 2013 et celles des stagiaires des années précédentes, d'une part parce que je n'ai eu que peu de réponses de stagiaires d'avant 2013, d'autre part parce qu'il n'y avait pas de différence significative dans les réponses.

Question 1 : sur ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

« En vous inscrivant à ce stage vous étiez venu chercher » : J'ai gradué numériquement les réponses de 1 (pas du tout attendu) à 4 (essentiellement attendu), puis fait la moyenne.

Des activités toutes prêtes pour les élèves.	2,64
Une élaboration collective d'activités pour les élèves.	2,52
Des outils pour une analyse critique des propositions des manuels sur la logique (pages de cours ou exercices).	2,83
Des connaissances théoriques en logique mathématique.	3,12
Des éléments culturels pour alimenter votre réflexion sur l'enseignement de la logique.	3,29
Des outils pour aider les élèves à mieux maîtriser l'expression en mathématiques.	3,04
Des outils pour aider les élèves pour l'apprentissage de la démonstration.	2,92

FIGURE 8.17 – Ce que les stagiaires sont venus chercher en s'inscrivant à ce stage

Nous retrouvons dans les éléments les plus attendus des connaissances théoriques en logique mathématique, attente dont nous pouvions faire l'hypothèse au vu de l'absence de logique mathématique dans la formation initiale.

L'élément le plus attendu, un apport culturel pour alimenter la réflexion sur l'enseignement de la logique, est également d'une certaine façon une connaissance « du contenu », une connaissance qui ne serait pas mathématique mais plutôt épistémologique, historique, philosophique. Cependant, dans l'intitulé de la question, cette connaissance est orientée vers son utilisation pour la préparation de la classe, ce qui la situe également en partie du côté d'une connaissance « didactique ».

L'élément le plus attendu par les professeurs de lycée concerne les propositions des manuels. La présence d'exercices ou de pages spécifiquement consacrés à la logique et au raisonnement est une nouveauté, et ne se fait qu'au lycée. Il n'est donc pas étonnant que la demande sur ce sujet soit plus importante et, au vu de l'étude de ces exercices ou de ces pages, que les enseignants soient perplexes quant à leur utilisation.

Les éléments les moins attendus concernent les activités pour les élèves, même si elles restent une attente mentionnée par une majorité de professeurs.

J'envisage deux façons de lire cette différence d'attente entre connaissances pour l'enseignant et activités pour les élèves. On peut tout d'abord faire l'hypothèse que les professeurs donnent priorité aux connaissances du contenu, surtout dans un domaine où ils sentent qu'ils en manquent. Une autre hypothèse envisageable est que les professeurs gardent « à leur charge » la conception d'activités, ce qui est une façon d'exercer une certaine liberté pédagogique.

Questions 2 et 3 : sur l'importance accordée au contenu théorique en logique mathématique et l'approche par l'analyse du langage mathématique

Les réponses à la question 2 sont également partagées entre les stagiaires qui trouvent que le stage est suffisant comme formation théorique en logique mathématique (12) et ceux qui pensent qu'il n'est pas suffisant (13).

Il était demandé des commentaires en particulier en cas de réponse négative, et la plupart soulignent qu'il s'agit seulement d'une initiation, permettant éventuellement de remobiliser certaines connaissances pour les stagiaires ayant déjà eu un enseignement de logique, et regrettent qu'il ne s'agisse pas d'un enseignement plus approfondi et mieux structuré comme un réel cours de logique. Certains mentionnent qu'un tel cours est impossible dans un temps aussi réduit. Ils suggèrent alors qu'il soit plutôt proposé en complément du stage, dont ça n'est pas l'unique but.

Pour ce qui est de la question 3, les stagiaires approuvent unanimement la stratégie choisie dans la formation (introduire les notions de logique à travers une approche naïve basée sur l'étude du langage mathématique).

Question 4 : sur les connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Les stagiaires devaient eux-mêmes donner une évaluation chiffrée entre 1 (non pas du tout) et 4 (oui tout à fait). Je donne ici les moyennes des réponses, en indiquant à chaque fois celles des professeurs de collège (C), de lycée (L) et le total (T).

	Vos connaissances sur cette notion avant le stage étaient-elles suffisantes pour votre enseignement ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il personnellement intéressé ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique ?			L'apport du stage sur cette notion vous a-t-il paru directement exploitable dans vos classes ?		
	C	L	T	C	L	T	C	L	T	C	L	T
Variable	3,08	3,4	3,22	3,23	3,11	3,18	3,38	3,13	3,29	2,15	2,22	2,18
Proposition	2,77	2,56	2,68	3,77	3,63	3,71	3,46	3,13	3,33	2,77	2,75	2,76
Connecteurs ET et OU	3,46	3,2	3,35	3,77	3,44	3,64	3,62	3,22	3,45	3,08	3	3,05
Négation	2,77	3,2	2,96	3,77	3,56	3,68	3,62	3,33	3,5	3	3	3
Implication	3,08	3,3	3,17	3,69	3,33	3,55	3,38	3,22	3,32	2,69	3,11	2,86
Équivalence	3,31	3,3	3,3	3,62	3,33	3,5	3,38	3	3,23	2,5	2,8	2,63
Quantificateur	2,73	3,2	2,95	3,85	3,67	3,77	3,69	3,67	3,68	2,93	3,13	3
Le raisonnement en général	2,77	3,1	2,91	3,46	3	3,27	3,38	2,67	3,09	3	2,13	2,67
Le raisonnement par récurrence	3,31	3,67	3,45	2,9	2,13	2,56	2,91	1,75	2,42	1,78	1,5	1,65
Le raisonnement par contraposée	3	3,5	3,22	3,14	2,89	3,04	3,38	2,44	3	2,54	2,11	2,36
Le raisonnement par l'absurde	3,23	3,56	3,36	3,08	2,5	2,85	3,45	2	2,84	2,1	2	2,06

FIGURE 8.18 – Sentiment des stagiaires sur leurs connaissances avant et après le stage sur des notions de logique

Il y a chez les professeurs de lycée un sentiment assez homogène de bonne connaissance des notions de connecteur ET et OU, négation, implication, équivalence, quantificateur, qui

sont mentionnées dans le programme. Ils ont ce même sentiment de bonne connaissance de la notion de variable, qui n'est pas mentionnée dans les objectifs concernant les notations et le raisonnement mathématiques, mais qui est évidemment une notion présente dans d'autres domaines (algèbre et analyse notamment). Ce sentiment contraste alors avec celui concernant la notion de proposition, dont aucun stagiaire professeur de lycée ne déclare avoir une connaissance tout à fait suffisante avant le stage.

Dans les réponses des professeurs de collège, il y a moins d'homogénéité sur ces notions : les connecteurs ET et OU sont ceux que les stagiaires déclarent le mieux connaître (sans doute de par leur « proximité » avec l'utilisation de ces mêmes mots dans le langage courant, dont nous avons vu qu'il fallait se méfier), et il y a un certain écart avec les notions de négation ou de quantificateur. Cette hétérogénéité peut s'expliquer par le fait que ces notions de logique ne sont pas explicitement présentes dans les programmes du collège, et selon la classe où ils enseignent, les professeurs de collège ne les rencontrent pas toutes (par exemple, les quantificateurs n'étant presque jamais présents explicitement au collège, il n'est pas étonnant que cette notion soit celle qu'ils déclarent la moins bien connaître).

Nous pouvons aussi relever dans ces réponses la bonne connaissance déclarée des types de raisonnement, un peu plus chez les professeurs du lycée (là aussi cela peut se lire en relation avec les contenus des programmes). Le raisonnement le mieux connu est le raisonnement par récurrence, qui, plus que les autres types de raisonnement, est l'objet d'un enseignement spécifique. Les stagiaires déclarent par contre une moins bonne connaissance du raisonnement en général, que de types particuliers de raisonnement, ce que l'on peut associer à une absence de connaissances théoriques concernant l'objet *démonstration*.

Les professeurs de collège déclarent des connaissances avant le stage un petit peu moins bonnes que les professeurs de lycée, et inversement, ils déclarent un intérêt personnel pour l'apport du stage sur ces notions légèrement supérieur : le stage semble alors vu comme apportant réellement des connaissances manquantes. Mais globalement, les stagiaires déclarent avoir été intéressés par l'apport du stage sur les éléments du langage mathématique, particulièrement sur la notion de proposition et sur les quantificateurs. Ce qui concerne le raisonnement a moins intéressé les stagiaires, avec notamment peu d'intérêt pour l'apport du stage sur le raisonnement par récurrence, qui n'a en fait pas été explicitement évoqué dans le stage, si ce n'est à titre d'exemple de type de raisonnement²¹.

Les professeurs trouvent également en moyenne que l'apport du stage sur ces notions de logique est utile pour réfléchir à l'enseignement de la logique. Nous pouvons noter ici

21. Dans d'autres éditions du stage, le raisonnement par récurrence avait été évoqué à propos de l'implication et de la quantification universelle. Il avait notamment été suggéré de changer le nom de la variable dans l'étape d'hérédité (pour montrer « pour tout n , $P[n]$ », on montre notamment l'hérédité de la propriété, c'est-à-dire « pour tout k , $(P[k] \Rightarrow P[k + 1])$ »).

aussi une plus grande satisfaction sur l'apport du stage à propos des éléments du langage mathématique, et notamment des quantificateurs, et au contraire moins de satisfaction sur le raisonnement, et notamment le raisonnement par récurrence.

L'exploitabilité en classe de l'apport du stage est par contre moins bien notée par les stagiaires. Sur les notions de connecteur ET et OU, de négation, d'implication, de quantificateur, qui sont beaucoup étudiées dans le stage²², l'apport de celui-ci est déclaré exploitable en classe, mais avec une moins grande satisfaction que l'apport sur le plan de l'intérêt personnel ou de la réflexion sur l'enseignement de la logique. Par contre, tout le travail fait sur la notion de variable, et dans une moindre mesure celui fait sur la notion de proposition, n'est pas vraiment déclaré exploitable en classe. Ici encore, nous retrouvons une moins grande satisfaction pour ce qui concerne le raisonnement.

Question 5 : sur l'impact potentiel sur les pratiques en matière d'enseignement de notions de logique

Pour cette question, je n'ai pas distingué les réponses des professeurs de collège et des professeurs de lycée. Les chiffres correspondent au nombre de professeurs ayant donné chaque réponse, avec encore une fois des variations dans les effectifs dues à certains bilans incomplets.

Pour les lignes 4 à 7, qui portent sur les manuels et sur la rédaction de synthèses, je n'ai gardé que les réponses des professeurs de lycée, car les exercices estampillés logique sont surtout présents dans les manuels de lycée. La rédaction de synthèses sur des notions de logique me semblait également relever plutôt du lycée (d'ailleurs, plusieurs professeurs de collège ont de manière spontanée expliqué que ça n'avait pas de sens pour eux de répondre pour ces lignes).

22. La moins grande satisfaction concernant la notion d'équivalence peut s'expliquer par le fait qu'elle est moins étudiée dans le stage.

	Avant la formation, vous aviez l'habitude de :				La formation vous a apporté des éléments pour :	
	Souvent	Assez souvent	Rarement	Jamais	Oui	Non
Faire des commentaires relevant de la logique lorsque l'occasion se présente (écriture d'une propriété, correction d'un exercice)	8	9	7	0	21	1
Prendre un temps pour discuter une formulation d'élève	6	10	7	1	20	1
Concevoir des activités portant sur la logique	0	3	15	6	17	5
Utiliser directement les exercices estampillés « logique » des manuels	0	5	3	3	5	5
Utiliser en les modifiant les exercices estampillés « logique » des manuels	0	0	5	6	8	2
Rédiger des synthèses à destination des élèves sur des notions de logique	0	3	1	7	4	5
Utiliser ce que proposent les manuels dans les pages sur la logique	0	2	5	4	5	4
Expliciter les quantifications dans les énoncés des propriétés	5	6	10	3	20	1

FIGURE 8.19 – Impact potentiel du stage sur les pratiques des enseignants en matière d'enseignement de notions de logique

Regardons les deux premières et la dernière lignes. Sur ces points, les stagiaires déclarent que la formation leur a apporté des éléments. Cependant, les deux premiers points, faire des commentaires relevant de la logique et prendre un temps pour discuter une formulation d'élève, sont déclarés déjà présents dans les pratiques de plusieurs stagiaires. L'apport du stage peut donc être vu plutôt comme un soutien de certaines pratiques déjà présentes que comme une réelle modification. Nous pouvons cependant parler de modification potentielle en ce qui concerne l'explicitation des quantifications.

Finalement, c'est sur les deux éléments « concevoir des activités portant sur la logique » et « utiliser en les modifiant les exercices estampillés des manuels » que l'apport du stage peut amener de réelles modifications des pratiques. Ces résultats peuvent sembler en contradiction avec les résultats à la question précédente, qui montraient que c'était sur la question de l'exploitabilité en classe de l'apport du stage que les stagiaires étaient le

moins satisfaits. Une explication possible est que le détail par notion dans la question 4 « refroidit » les stagiaires : il est plus facile de se projeter concepteur d'activités sur la logique, éventuellement en modifiant des exercices des manuels, car on reste d'une certaine façon du côté de savoir-faire. Concevoir un travail spécifique sur une notion précise est plus délicat car se pose alors la question de ce qu'il y a à institutionnaliser, des savoirs associés à cette notion. Cette explication est cohérente avec les réponses à la question 5 sur l'élément « rédiger des synthèses sur des notions de logique » qui montrent que ça n'est pas quelque chose qui est déjà dans les pratiques des professeurs, et pour lequel la moitié des professeurs disent que le stage n'a rien apporté.²³

Question 6 : sur l'éclairage historique sur la logique et son enseignement

Un seul stagiaire donne un réponse mitigée à la question « Les éléments historiques sur la logique et son enseignement vous ont-il paru avoir leur place dans ce stage? », en ajoutant en commentaire que ça ne lui paraissait pas une priorité dans un stage sur un temps court. Tous les autres répondent que ces éléments sont intéressants, et plusieurs mentionnent l'intérêt que ce point de vue historique peut avoir pour aborder des notions de logique avec les élèves.

23. Je rappelle que les formateurs ne prennent pas position sur cette question de la rédaction ou non de synthèses, et n'ont pas proposé lors du stage 2013 d'exemples de telles synthèses.

Questions 7, 8, 9, 10, 11 : sur l'impact de la formation sur les pratiques en classe

	Professeurs de collège		Professeurs de lycée		Total	
	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non
7) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques en matière d'enseignement de notions de logique ?	9	3	6	5	15	8
8) Est-ce que ce stage a modifié votre façon de vous exprimer dans vos classes (à l'oral, dans la rédaction du cours, dans les énoncés d'exercices) ?	10	3	8	3	18	6
9) Est-ce que ce stage a modifié votre prise en compte de la façon dont les élèves s'expriment (en vous donnant des outils pour expliquer leurs erreurs, pour comprendre des malentendus dus à des ambiguïtés) ?	7	5	5	6	12	11
10) Est-ce que ce stage a modifié votre façon d'envisager le raisonnement (en apportant un éclairage sur les différents types de raisonnement, sur les règles qui justifient les inférences, en vous donnant des outils d'analyse des raisonnements de vos élèves) ?	2	10	1	8	3	18
11) Cette formation a-t-elle eu un impact sur vos pratiques de manière plus générale ?	8	6	4	3	12	9

FIGURE 8.20 – Impact de la formation sur les pratiques en classe

Dans leurs commentaires pour la question 7, 3 stagiaires de 2013 répondent que la formation n'a pas encore eu d'impact mais qu'ils espèrent que ça sera le cas.

Dans les exemples donnés (pour chaque question il était demandé un exemple précis en cas de réponse positive), les stagiaires mentionnent dès la question 7 une attention particulière à ce qu'ils disent ou écrivent (ils se « surveillent », sont « plus rigoureux »...). Ceci est repris dans les réponses à la question 8, dans lesquelles les quantificateurs sont mentionnés dans 13 réponses, avec des nuances dans leur utilisation qu'illustrent les exemples de réponses ci-dessous :

- question 7 : « Lorsque je prépare moi même une activité, je propose des énoncés avec quantificateurs et sans quantificateurs (mes élèves n'auront pas toujours des enseignants ayant suivi la formation, je préfère qu'ils s'habituent aux deux types d'énoncés). », « Je parle volontiers des quantificateurs (lorsqu'ils sont implicites). », « Précédemment, j'intervenais sur l'utilisation des quantificateurs essentiellement pour les classes scientifiques. Maintenant, je le fais avec toutes mes classes. »
- question 8 : « Expliciter parfois les quantificateurs dans certains énoncés d'exercices (vrai/faux). », « Toujours les quantificateurs ! Je les écris presque systématiquement et en parle absolument tout le temps à l'oral (même pour des résolutions d'équations en Seconde). »

Pour la question 7, certains stagiaires mentionnent également une modification de la place donnée à la logique dans leur enseignement : « Utilisation d'activités de réflexion sur la logique des énoncés. », « Faire des séances spécifiquement de logique. », « Je fais plus facilement des digressions sur des notions de logique. »

En ce qui concerne la prise en compte de l'expression des élèves, une moitié seulement des stagiaires déclarent que la formation a eu un impact. Cela est cohérent avec des observations déjà évoquées dans l'analyse des résultats des autres questions : le stage semble avoir d'abord une influence sur la façon dont les professeurs présentent les mathématiques à leurs élèves, plutôt que sur ce qu'ils peuvent faire en lien avec des productions d'élèves (en proposer, les guider, les corriger. . .) Là encore, les exemples donnés vont dans le sens d'une plus grande attention aux implicites ou malentendus possibles.

La question 10 confirme que l'impact du stage en ce qui concerne le raisonnement est faible.

La dernière question n'apporte pas vraiment d'éléments nouveaux, les exemples sont essentiellement ceux déjà donnés pour les questions 7 et 8.

8.4.3 Analyse globale du questionnaire

Dans leurs réponses à ce questionnaire-bilan, les stagiaires déclarent un impact important du stage sur leur façon de dire, de rédiger des mathématiques avec leurs élèves, notamment sur la quantification.

L'apport théorique du stage est apprécié, même si les avis sont partagés sur la suffisance ou non de cet apport. Le choix de l'entrée dans la logique par l'étude du langage mathématique est unanimement approuvé.

Plusieurs réponses montrent que les stagiaires sont plus satisfaits de l'apport du stage en ce qui concerne justement ces connaissances théoriques, que de l'apport pratique du stage (activités pour la classe). Cependant, les stagiaires semblent prendre conscience des implicites et ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, qu'ils adoptent dans leur classe, et une bonne majorité d'entre eux déclarent une modification de ces pratiques, ce qui est un apport du stage qui se situe bien du côté de l'activité du professeur en classe.

Les stagiaires enseignant en lycée ont une attente pour ce qui concerne la logique dans les manuels, et ils disent en majorité que le stage apporte des éléments pour développer une analyse critique de ce qu'ils y trouvent.

Dans plusieurs réponses il y a un déséquilibre manifeste entre l'apport du stage du côté du langage et l'apport du côté du raisonnement, qui satisfait moins les stagiaires.

Notons enfin que l'apport du stage sur la notion de variable, qui a une place importante dans le stage, ne semble pas non plus convaincre les stagiaires, qui ont notamment du mal à voir une exploitation possible en classe du travail fait sur cette notion. Nous pouvons cependant considérer que l'adhésion au travail fait sur les quantifications implicites est en relation étroite avec le discours sur les variables : la quantification est une opération sur des variables, qui est une particularité du langage mathématique et qui s'apprend. L'expliciter permet notamment de rendre visible le statut muet des variables quantifiées. Le travail sur la notion de proposition, autre élément important du stage, est jugé plus positivement.