Analyse des manuels

Sommaire

L'étude des programmes nous a permis de voir les grandes lignes des instructions officielles concernant l'enseignement de notions de logique. À partir de ces grandes lignes, les auteurs des manuels scolaires, par ailleurs soumis à des contraintes d'écriture, vont proposer une matière plus directement utilisable par l'enseignant, comme le souligne L. Ravel dans sa thèse [1] :

> Ces grandes lignes sont ensuite mises en texte dans les manuels scolaires. Les auteurs de manuels, sujets de l'institution scolaire, vont apprêter les objets de savoir à enseigner afin de les rendre "utilisables" par les enseignants et les élèves. [...] Ils vont donc faire des choix pour mettre en texte les directives du programme et proposer à leurs sujets des activités préparatoires, un cours et des exercices. Ils vont alors construire des organisations mathématiques autour de ces objets de savoir pour pouvoir les mettre en place. (Ravel, 2003, pp. 39-40)

L'étude des manuels, dans laquelle je porterai une attention particulière à la conception de la logique et de son lien avec les mathématiques, est guidée par les questions suivantes :
- quel investissement de la niche langage ? de la niche raisonnement ?
- Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont-ils présents tous les deux ?
- Quelle position prise par rapport à la formalisation des notions ?
- Comment sont pris en compte les points sensibles identifiés dans la deuxième partie de la thèse ?
- L'organisation des activités permet-elle que la logique soit effectivement « présente partout » ?

Elle se fera en deux temps :
- tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique. Pour cette étude, j'ai choisi de regarder l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que 3 manuels de Seconde publiés en 1969 (nous avons vu que nous pouvions faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels de 1969, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque ; ceux choisis étaient d'ailleurs très largement utilisés). Pendant la période des mathématiques modernes, la logique avait une place importante, et pouvoir comparer ce qui est proposé aujourd'hui et ce qui a été proposé à cette époque permet de mieux identifier les particularités actuelles en les mettant en parallèle avec d'autres choix faits dans un autre contexte. Je commencerai par une description globale de la présentation des notions dans les pages logiques, puis je proposerai une étude notion par notion.

1. Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique.

– Ensuite une étude des tâches proposées dans les manuels actuels, complément indispensable de l'étude des pages logiques car c'est dans la résolution des tâches que sont construites ou utilisées les connaissances. Je ne proposerai pas d'étude complète des praxéologies. L'étude des types de tâches, qui donne un panorama des exercices, me suffit pour répondre aux questions listées ci-dessus.

La liste des manuels utilisés est donnée page 438. Dans ce chapitre, chaque manuel est appelé par son nom, noté en italique.

6.1 Analyse des pages « Logique » des manuels de Seconde

6.1.1 Présentation de l'organisation des pages consacrées à la logique dans les manuels de 1969 et de 2010

Les sommaires des pages concernant la logique sont donnés pour chaque manuel en annexe page 521.

Dans les manuels de 1969

Conformément au programme, les trois manuels de 1969 analysés traitent des notions de logique à part, dans un premier chapitre. *Queysanne-Revuz* justifie ainsi de commencer par là :

> À partir de résultats considérés comme acquis le **raisonnement mathématique** permet d'en démontrer d'autres. Ce raisonnement s'effectue à l'aide de certaines règles que vous utilisez consciemment ou non depuis plusieurs années et qui sont les **règles de la logique.** Il nous faut donc commencer, en utilisant des exemples mathématiques que vous connaissez, par mettre en évidence certaines de ces règles.

Queysanne-Revuz est le plus complet et le plus rigoureux. Il présente les notions de logique en lien avec l'activité mathématique, elles sont illustrées par de nombreux exemples, et des commentaires relevant de la logique sont présents en dehors de ce chapitre.

Aleph 0 propose une introduction plus axée sur le langage, qui n'est pas sans rappeler certaines préoccupations de Frege. Mais s'il met en garde contre les ambiguïtés du langage courant, il n'en défend pas pour autant un symbolisme total :

> L'étude d'un problème de Mathématiques nécessite une réflexion, préalable à toute recherche, sur le contenu de l'énoncé. Il convient d'abord de discerner avec précision quelle est la question posée, puis quels sont les renseignements qui permettront d'aborder le problème. Ensuite, il conviendra de mettre en jeu

> un certain nombre de mécanismes de déduction qui permettront de démontrer le résultat cherché à partir des hypothèses données.
>
> Ces renseignements sont donnés à l'aide de mots, et, en Mathématiques, on emploie des mots techniques que l'on a soigneusement définis comme *exposant, proportion, bissectrice,* etc., et des mots ou expressions du langage courant. [...]
>
> Mais les mots du langage courant présentent souvent des ambiguïtés ou des obscurités. Ainsi, dans le proverbe « un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire », le premier article *un* veut dire un [sot] *quel qu'il soit* (et non pas *un seul* sot, ni *un certain* sot) ; on pourrait remplacer cet article par l'adjectif indéfini *tout.* Le second article *un* signifie *au moins un* (pas nécessairement *un seul*, mais pas *n'importe lequel.*
>
> En Mathématiques, il convient de distinguer entre ces acceptions de l'article *un* et, plus généralement, entre les diverses significations des mots-outils.
>
> Pour éviter ces ambiguïtés et obscurités du langage courant, on précise la rédaction des raisonnements à l'aide de quelques symboles et termes logiques spécialisés.

Ce manuel a une approche beaucoup moins formelle de la logique (nous n'y trouvons pas les tables de vérité, par exemple), ici aussi mise en relation avec l'activité mathématique globale. Par contre, la logique est cantonnée à ce chapitre initial.

Lespinard, quant à lui, donne l'impression de suivre le programme à la lettre, sans qu'il y ait de réflexion sur les enjeux de la présence de ces notions dans ce programme. La logique y est moins reliée au reste des mathématiques.

Dans les trois manuels est d'abord présentée la notion de proposition. Ils proposent également une étude de tous les connecteurs, et des quantificateurs. Ils présentent les notions ensemblistes en lien avec ces notions, à travers l'association entre une proposition contenant une variable libre et l'ensemble des éléments d'un ensemble E vérifiant cette proposition. *Queysanne-Revuz* et *Aleph 0* parlent également de divers types de raisonnement.

Dans les manuels de 2010

La plupart des manuels de 2010 (sauf *Pixel*) ont choisi de consacrer quelques pages aux notions de logique, mais pas comme un chapitre (ils font de même pour l'algorithmique apparue également dans ces programmes), au début ou à la fin du manuel, ou de manière disséminée. Le tableau de la page suivante résume les caractéristiques pour chaque manuel.

Manuel	Titre des pages consacrées aux notions de logique	Combien et où	Avec les notions sur les ensembles	Traitent des connecteur ET et OU	Traitent de la négation	Traitent de l'implication	Traitent des quantificateurs	Traitent des différents types de raisonnement
Transmath	Le vocabulaire de la logique	6 pages à la fin	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Math'x	Raisonnement logique	4 pages à la fin + 1 page d'exercices	OUI, mais deux titres différents	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Hyperbole	Vocabulaire de la logique	4 pages à la fin	NON	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Symbole	Notations et raisonnement	4 pages à la fin	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Indice	Ensembles - Raisonnement logique	6 pages au début + 1 page d'exercices	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	NON
Odyssée	Le raisonnement logique	3 pages au début	NON	OUI	NON	OUI	OUI	OUI
Travailler en confiance	Notations et raisonnements mathématiques	9 pages au début	OUI	NON	OUI	OUI	OUI	OUI
Repères	Pages raisonnement et logique	8 pages disséminées	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Déclic	Notations et logique	1 page à la fin	OUI	OUI	NON	NON	NON	NON

Nous voyons que le mot « logique » apparaît dans presque tous les titres, hormis dans deux manuels qui reprennent le titre « Notations et raisonnement mathématiques » du tableau des objectifs du programme (voir page 200). Les manuels se démarquent ainsi du programme qui ne mentionnait pas la logique dans un titre de paragraphe, mais seulement dans le corps du texte.

Tous les manuels ne traitent pas de toutes les notions, qui sont pourtant toutes présentes dans le tableau des objectifs.

La lecture de ce tableau montre déjà des différences d'un manuel à l'autre qui seront précisées avec une analyse plus fine.

6.1.2 Proposition et variable

Proposition et variable dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Les manuels de 1969 commencent effectivement tous leurs pages consacrées à la logique par une définition de la notion de proposition, mais il n'y a pas accord sur cette définition :

- *Lespinard* appelle *assertion* un « énoncé tel qu'il soit possible de dire s'il est vrai ou s'il est faux », puis « proposition » un énoncé qui « peut être vrai dans certains cas, faux dans d'autres ». Ainsi, « une assertion est une proposition **toujours** vraie ou **toujours** fausse. »
- *Queysanne-Revuz* fait cette même disctinction [2]. Il commence par définir les notions de « termes » et « énoncés » comme des assemblages cohérents (auxquels on peut donner un sens mathématique) de mots du langage courant et de signes mathématiques. Puis plus loin il appelle « **assertion** tout énoncé pour lequel on répondra sans ambiguïté et sans renseignement complémentaire à la question *est-il vrai ou bien est-il faux ?* » Un énoncé tel que $x < 2$ n'est ainsi pas une assertion. Il est dit que « les logiciens appellent un tel énoncé un **prédicat** ou une **fonction propositionnelle** ; il nous arrivera de dire **proposition** à la place de fonction propositionnelle, bien que certains emploient proposition avec le sens que nous avons donné au mot assertion »
- *Aleph 0* appelle « **proposition** tout affirmation concernant un ou plusieurs objets. Une telle affirmation peut avoir ou non une signification. » Dans les exemples, il y a une proposition contenant des variables libres. Plus loin, il est précisé qu'« une proposition peut être **vraie** ou **fausse** selon les objets auxquels elle s'applique, et selon la théorie dans laquelle elle s'insère. »

2. Il ne s'agit pas de la distinction proposition/assertion que j'ai faite dans la deuxième partie de la thèse, voir page 112, mais de la distinction entre propositions closes (ce que ces manuels appellent *assertion*), et propositions ouvertes, voir page 114 (ce que ces manuels appellent *proposition*).

Aucun des trois manuels ne se contentent de parler des propositions closes, c'est-à-dire sans variables, ou dans lesquelles les variables sont mutifiées. Seul *Queysanne-Revuz* parle des variables, qui sont « des lettres qui représentent des objets à la place de chacun desquels on peut substituer un symbole représentant un objet spécifié ». Mais même si ces manuels n'évoquent pas la distinction entre variable parlante et variable muette, des exemples de propositions sont donnés pour les deux cas. Ces manuels ancrent ainsi l'étude de la logique dans l'étude du fonctionnement du langage mathématique : la proposition, élément de base de ce langage, est posée avant toute chose.

Proposition et variable dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Les cases vides des tableaux récapitulatifs ci-après le montrent bien : les notions de proposition et de variable sont quasiment absentes des manuels actuels. Seuls quatre manuels (*Math'x, Hyperbole, Symbole, Transmath*) définissent la proposition : c'est une phrase qui est soit vraie, soit fausse. Et seuls *Math'x* et *Hyperbole* utilisent le terme « variable ». Nous ne trouvons une proposition ouverte que dans *Math'x*, qui donne « $x > y$ » comme exemple de proposition, en précisant qu'elle « dépend de variables », et est « vraie ou fausse selon les valeurs données à ces variables, jamais vraie et fausse en même temps. » Cela montre qu'à la différence de 1969, l'étude du fonctionnement du langage mathématique n'est pas un objectif visé.

Tableaux récapitulatifs de l'analyse sur proposition et variable

Dans les tableaux récapitulatifs, un OUI signale un aspect présent dans le manuel, une case vide signale une absence.

Pour la notion de variable : J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique

(1) Caractérisation du statut libre ou liée d'une variable dû à la présence d'un signe mutificateur.

(2) La variable comme marque-place dans une proposition

– Aspect sémantique

(1) Notion de substitution d'un objet déterminé à la variable

(2) La variable comme représentant d'un élément quelconque d'un ensemble

(3) Pas de valeur de vérité déterminée pour une proposition comportant des variables libres, elle dépend des valeurs attribuées aux variables

(4) distinction entre le statut libre et liée d'une variable selon la dépendance ou l'indépendance de la valeur de vérité de la proposition par rapport à cette variable

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique			
	1 : statut de la variable	2 : marque-place	1 : Substitution	2 : représentant un élément quelconque	3 : pas de valeur de vérité déterminée s'il y a des variables libres	4 : statut des variables selon la dépendance de la valeur de vérité
Aleph0					OUI*	
Queysanne Revuz	OUI**	OUI	OUI	OUI	OUI	
Lespinard					OUI ***	
Déclic						
Hyperbole						
Indice						
Math'x					OUI	
Odyssée						
Pixel						
Repères						
Symbole						
Transmath						
Travailler en confiance						

* Parle des « objets », pas des « variables », ** statut de variable muette quand elle est dans le champ d'un quantificateur, *** Sans utiliser le terme « variable », par des exemples.

Pour la notion de proposition : J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique de cette notion ou de l'aspect sémantique :

– Aspect syntaxique :
  (1) Une proposition est un assemblage de signes bien formé (respectant certaines règles syntaxiques)
  (2) Utilisation de variables propositionnelles pour identifier la structure logique des propositions
– Aspect sémantique :
  (1) Une proposition a une valeur de vérité vraie ou fausse (éventuellement distinction entre proposition close et proposition ouverte)
  (2) Si le terme « proposition » n'est pas ou peu employé, termes synonymes employés
  (3) Lien avec les ensembles par la définition en compréhension de l'ensemble des éléments vérifiant $P[x]$

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique		
	1 : assemblage de signes	2 : utilisation de variables propsitionnelles	1 : a une valeur de vérité	2 : synonymes	3 : lien avec les ensembles
Aleph0		OUI	OUI		OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI		OUI
Lespinard		OUI	OUI		OUI
Déclic				affirmation, énoncé	
Hyperbole		OUI	OUI		
Indice		OUI *		phrase, énoncé	
Math'x		OUI	OUI		
Odyssée		OUI**		phrase, propriété	
Pixel		OUI (une fois)		affirmation	
Repères		OUI			
Symbole		OUI	OUI		
Transmath		OUI	OUI		
Travailler en confiance		OUI			

* Seulement dans les paragraphes sur l'implication et la négation. ** Seulement dans le paragraphe sur l'implication.

6.1.3 Connecteurs ET et OU

Les connecteurs ET et OU dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Seul *Queysanne-Revuz* présente la notion générale de connecteur, sous ses deux aspects syntaxique et sémantique :

> Considérons simultanément une assertion p et une assertion q, nous allons leur associer d'autres assertions dont la valeur logique (V ou F) est liée à celle de p et à celle de q.
>
> Ce procédé est appelé un **connecteur logique** à *deux places*.

Les trois manuels de 1969, *Queysanne-Revuz, Aleph 0* et *Lespinard* proposent chacun deux sections, l'une intitulée « conjonction » sur le connecteur ET, l'autre intitulée « disjonction » sur le connecteur OU. Dans la présentation de *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* les deux aspects syntaxique et sémantique sont présents et imbriqués : il y a l'idée d'obtention d'une nouvelle proposition à partir de deux propositions données, et la détermination de la valeur de vérité de la proposition ainsi obtenue en fonction des valeurs de vérité des propositions qui la composent, récapitulée dans une table de vérité. Par exemple dans *Queysanne-Revuz* nous trouvons la définition suivante :

> On appelle **conjonction** de l'assertion p et de l'assertion q l'assertion notée *(p et q)* vraie uniquement si p et q le sont.

Ces deux aspects syntaxique et sémantique sont également présents dans *Aleph 0*, mais sans table de vérité[3].

Concernant la conjonction, *Lespinard* et *Aleph 0* font un lien avec le « et » du langage courant, le premier en donnant un exemple situé dans un contexte de vie courante, le deuxième en disant explicitement que la notion de conjonction ainsi définie « coïncide parfaitement avec le sens intuitif attribué à la conjonction **“et”** ». *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* évoquent des propriétés de la conjonction : commutativité et associativité dans le premier, principe de non-contradiction (quelle que soit la proposition P, la proposition (P ET NON P) est fausse) dans les deux.

Concernant la disjonction, les trois manuels distinguent à partir d'exemples situés dans un contexte de vie courante un sens inclusif et un sens exclusif du mot « ou ». *Queysanne-Revuz* et *Lespinard* précisent qu'en mathématiques, le « ou » est toujours utilisé dans le sens inclusif. *Queysanne-Revuz* évoque aussi les propriétés de commutativité et d'associativité de la disjonction.

3. Notons que dans le manuel d'analyse de 1973 de la collection Aleph 1 chez le même éditeur que la collection Aleph 0, les tables de vérité des connecteurs ET et OU sont données.

Les lois de Morgan (négation d'une conjonction, d'une disjonction), sont proposées en exercice dans *Lespinard*. *Aleph 0* les évoque en donnant des exemples. *Queysanne-Revuz* les donne dans une section *Lois logiques* qui suit les sections sur les connecteurs logiques, et où figurent aussi les propriétés de distributivité des connecteurs ET et OU l'un par rapport à l'autre.

Les connecteurs ET et OU dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Parmi les manuels de 2010, seuls *Hyperbole* et *Symbole* utilisent les termes « conjonction » et « disjonction ». *Symbole* est le seul à présenter les connecteurs ET et OU en écrivant explicitement une définition :

> Définition 6
>
> Soient P et Q deux propositions :
> – **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
> – **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).
>
> *Exemple :* « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » **et** « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » **ou** « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

FIGURE 6.1 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Symbole

Je voudrais souligner ici le manque de rigueur dans les exemples donnés. Alors que le manuel s'applique à définir la conjonction et la disjonction de deux propositions, ce qui est donné en exemple mélange allègrement proposition (« le triangle ABC est rectangle et isocèle »), prédicat (« être rectangle », qui n'est pas une proposition), et adjectif (« isocèle », qui n'en est pas une non plus).

La présentation dans *Hyperbole* est très semblable, mais l'appellation « définition » n'est pas utilisée. La différence n'est peut-être pas anodine dans la mesure où les indications du programme, ainsi que l'éventuelle crainte d'un formalisme comme celui qui avait cours pendant les mathématiques modernes, agissent comme pressions fortes pour que les notions de logique ne soient pas présentées comme dans un cours, format auquel peut faire penser le fait d'utiliser des définitions. Dans ces présentations, l'utilisation des termes « conjonction » et « disjonction » m'amène à considérer que l'aspect syntaxique de construction d'une nouvelle proposition est présent.

Dans deux autres manuels, *Repères* et *Math'x*, cet aspect syntaxique de construction d'une nouvelle proposition n'est pas présent, on y trouve seulement l'aspect sémantique de comportement par rapport aux valeurs de vérité. Par exemple, dans *Math'x* :

En mathématiques, « **OU** » et « **ET** » ont des significations très précises !
« *A* ET *B* » est vraie quand *A* et *B* sont toutes les deux vraies et uniquement dans ce cas.
« *A* OU *B* » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie (l'une ou l'autre, voire les deux)

FIGURE 6.2 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Math'x

Notons que ce manuel est le seul à utiliser une typographie différente pour les connecteurs logiques ET et OU qu'il note en majuscule, ce qui permet de les identifier. Dans ces quatre manuels, des lettres majuscules sont utilisées pour désigner les propositions. Cette présentation est finalement assez proche de la présentation dans les manuels de 1969. Mais aucun manuel de 2010 ne donne de table de vérité, celles-ci ne constituant pourtant qu'une manière de récapituler le comportement par rapport aux valeurs de vérité. Cette absence est sans doute liée ici aussi aux contraintes du programme de ne pas être trop formel, comme si les tables de vérité étaient un ostensif symbole d'un trop grand formalisme. Je qualifierai cette présentation de « propositionnelle ».

Trois autres manuels, *Indice, Odyssée, Transmath*, présentent les connecteurs ET et OU en occultant l'aspect syntaxique. Ils situent seulement le sens des mots « et » et « ou » en mathématiques par rapport à leur sens dans le langage usuel. Par exemple dans *Indice* :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :
- « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
- « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :
- « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.
- « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».
  Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».
Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».
Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)
« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)
La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

FIGURE 6.3 – Connecteurs ET et OU dans le manuel Indice

Je qualifierai cette présentation de « naturelle » dans le sens où elle ne distingue pas du tout l'aspect syntaxique spécifique des connecteurs, c'est-à-dire ne prend pas en compte un objet « connecteur ». Il n'y a pas d'idée de construction d'un langage mathématique. On se contente de donner les précisions nécessaire pour garantir l'univocité du sens des mots employés. Remarquons que, dans l'extrait ci-dessus, les exemples donnés servent à illustrer le comportement par rapport aux valeurs de vérité. Mais toute la dimension qui concerne la structure des propositions est implicite. La mise en facteur dans la proposition « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3 » est passée sous silence, et les auteurs la présentent sans souci d'explication comme conjonction des deux propositions « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 ». Admettons qu'ici cela ne présente pas une difficulté majeure pour les élèves de reconstituer ces deux propositions. Mais il n'en va pas de même pour la proposition $(*)$ « 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3 ». Ici, il y a utilisation de virgules à la place de conjonctions « et », ce qui est regrettable dans un paragraphe consacré au connecteurs ET et OU. Par ailleurs, il y a une ambiguïté sur la lecture possible de cette proposition. D'une part comme :

Proposition 1 :

(0 est un nombre pair OU 0 est un multiple de 3)

ET (2 est un nombre pair OU 2 est un multiple de 3)

ET (3 est un nombre pair OU 3 est un multiple de 3)

ET (6 est un nombre pair OU 6 est un multiple de 3)

et d'autre part comme :

Proposition 2 :

(0 est un nombre pair ET 2 est un nombre pair ET 3 est un nombre pair ET 6 est un nombre pair)

OU

(0 est un multiple de 3 ET 2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3)

Ces propositions ne sont pas équivalentes : la proposition 1 est vraie, la proposition 2 est fausse. Rien ne permet de dire qu'une lecture est plus correcte que l'autre, même si dans la pratique c'est très majoritairement comme équivalente à la proposition 1 que la proposition $(*)$ va être lue.

Pixel et *Travailler en confiance* n'abordent que le fait que le « ou » a un caractère inclusif en mathématiques, le premier dans le cadre d'un exercice corrigé, le deuxième à l'occasion d'une section *Logique mathématique et logique du langage courant* qui clôt les pages *Notations et raisonnements mathématiques*.

Enfin, *Déclic* propose dans son unique page consacrée à *Notations et logique* un très court descriptif :

> "et" entre deux propositions, deux événements : les deux doivent être simultanément vraies ; les événements réalisés tous les deux.
>
> "ou" entre deux propositions, deux événements : au moins l'un(e) des propositions, des événements (et peut-être les deux) doit être vraie (réalisé).

Je considère que cet extrait veut donner le comportement par rapport aux valeurs de vérité des connecteurs ET et OU, même si cela est fait de manière très ambiguë, en mélangeant propositions et événements, c'est-à-dire propositions et ensembles. Par ailleurs, il y a un écrasement entre les propositions et l'affirmation de leur vérité : les propositions « doivent »prendre une certaine valeur de vérité, sous-entendu pour que la disjonction ou la conjonction soit vraie.

La relation avec intersection et réunion donne aussi lieu à deux approches. Dans certains manuels, le lien est explicite. Par exemple, *Math'x* dit que :

> Du point de vue des **ensembles** :
> – ET est associé à l'intersection : « $x \in I$ ET $x \in J$ » signifie « $x \in I \cap J$ »
> – OU est associé à la réunion : « $x \in I$ OU $x \in J$ » signifie « $x \in I \cup J$ »

D'autres manuels associent intersection et réunion aux termes « et », « ou », mais pas vraiment aux connecteurs, comme par exemple *Déclic* dans lequel ces mots ne sont pas placés entre deux propositions :

> – **L'intersection de** I **et** J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **et** à J.
> – **La réunion de** I **et** J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des éléments appartenant à I **ou** à J.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur les connecteurs ET et OU

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :

(1) Ces connecteurs permettent de construire, à partir de deux propositions, une nouvelle proposition

(2) Lois de Morgan [4]

(3) Lois de distributivité

– Aspect sémantique :

(1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité

(2) Lien avec les ensembles : intersection et réunion (indiqué seulement quand il est vraiment explicite)

(3) Commentaires sur les similitudes et les différences avec l'utilisation des termes « et » et « ou » dans le langage courant (je précise quand cela ne concerne que le caractère inclusif du connecteur OU)

4. Dans ces tableaux récapitulatifs sur les connecteurs et les quantificateurs, je classe le fait de donner des règles qui énoncent l'équivalence de certaines propositions comme un aspect syntaxique. En effet, bien que justifiées de façon sémantique, je veux souligner que de telles règles permettent ensuite une manipulation des propositions indépendante de leur sens.

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Lois de Morgan	Distributivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Lien avec intersection et réunion	Commentaires sur similitudes et différences avec le langage courant
Aleph0	OUI	OUI*		OUI	OUI	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI (ou inclusif)
Lespinard	OUI	OUI**		OUI	OUI	OUI (ou inclusif)
Déclic				OUI		
Hyperbole	OUI	OUI***		OUI		OUI
Indice					OUI	OUI
Math'x		OUI		OUI	OUI	OUI
Odyssée					OUI	OUI****
Pixel						OUI (ou inclusif)
Repères				OUI	OUI	OUI
Symbole	OUI			OUI		
Transmath		OUI			OUI	OUI
Travailler en confiance						OUI (ou inclusif)

* Avec des exemples, ** En exercice, *** En préambule d'un exercice

6.1.4 Négation

La négation dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Les trois manuels de 1969 ont une présentation très différente de la notion de négation :

– Dans *Queysanne-Revuz*, la négation est présentée comme un connecteur, sous les deux aspects syntaxique et sémantique : « à toute assertion p nous pouvons associer une nouvelle assertion appelée **négation** de p qui s'écrit *(non p)* et qui est *fausse* quand p est *vraie* et *vraie* si p est *fausse.* » La table de vérité est ensuite donnée, puis deux exemples qui sont commentés par ce qui peut s'apparenter à des règles de formation de la négation de propositions élémentaires (ne comportant qu'une relation) :

> 1. La négation de l'assertion vraie « $4 = 2+2$ » est l'assertion fausse « $4 \neq 2+2$ »
>
> 2. La négation de l'assertion fausse « $5 < 3$ » est l'assertion vraie « $5 \geqslant 3$ »
>
> Comme dans le premier exemple ci-dessus si l'assertion p s'écrit avec un certain signe (ici $=$) la négation de p s'obtient en remplaçant ce signe par le même signe barré (ici $\neq$) ; nous en verrons des exemples ($\in$ et $\notin$).
>
> Il peut arriver comme dans le deuxième exemple ci-dessus qu'au signe utilisé par p (ici $<$) soit associé un signe pour la négation de p (ici $\geqslant$).

Plusieurs lois logiques associées à la négation sont données : équivalence entre p et *non*(*non p*), tiers-exclu, principe de non-contradiction. Le lien avec le complémentaire est fait :

> Et si $\mathscr{A}$ est une propriété caractéristique de la partie A de E on a :
>
> $$\complement_E A = \{x \in E \,|\, \mathrm{non}\mathscr{A}(x)\}$$

– *Aleph 0* donne une définition pour le moins compliquée tout en disant qu'elle correspond à l'idée intuitive de négation :

> Soit une proposition P ne faisant pas intervenir plusieurs objets simultanément (une telle proposition sera appelée *proposition simple*). Les objets qui rendent P *fausse* sont, par définition, les objets qui rendent vraie la proposition *nonP* (que nous noterons $\overline{P}$). Nous n'insisterons pas sur cette première opération logique qui coïncide avec la notion intuitive de négation d'une propriété, et dont une propriété est :
>
> *La négation de la négation de P ($\overline{\overline{P}}$) coïncide avec P.*

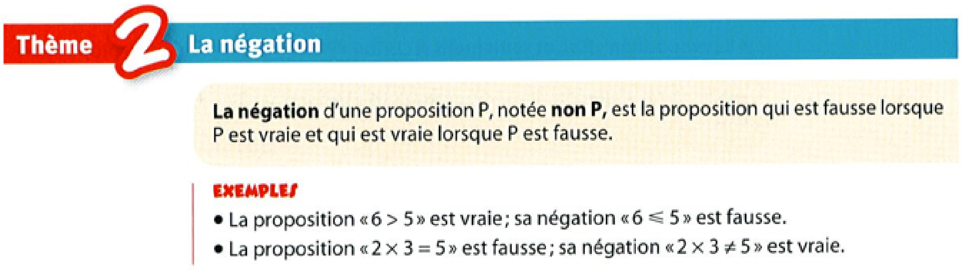
– *Lespinard* donne aussi un définition étrange dans laquelle l'aspect syntaxique ne vient qu'après une sémantique incomplète :

> Si nous voulons exprimer que la proposition p est fausse, on écrit « non p », ou $\neg p$. $\neg$ est le symbole de la négation. On dit que « non p » est la **négation** de la proposition p.

La négation dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

La plupart des manuels donnent comme caractéristique de la négation d'une proposition son comportement par rapport aux valeurs de vérité, et notent « non P » cette négation (seul *Math'x* parle de « négation de P »). Plusieurs d'entre eux utilisent le terme « contraire » associé à la négation. Nous avons pourtant vu une distinction entre ces deux notions (voir page 125), dont la confusion pouvait être à l'origine d'erreurs d'élèves.

C'est essentiellement dans les exemples qui illustrent la notion que les manuels diffèrent. Par exemple, dans *Hyperbole* :



Thème 2 La négation

La négation d'une proposition P, notée **non P,** est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et qui est vraie lorsque P est fausse.

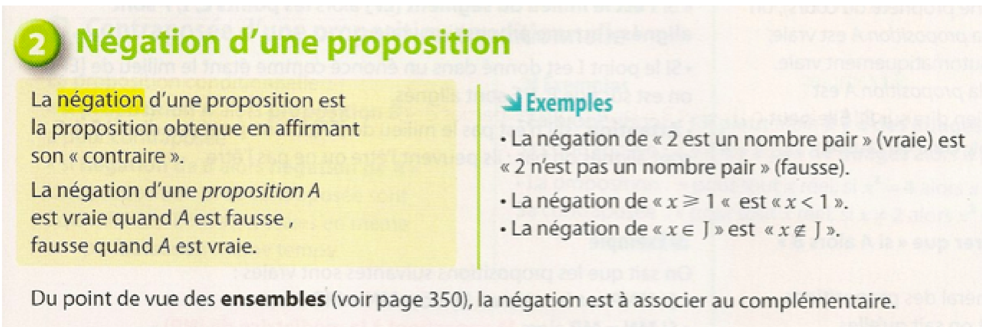
EXEMPLES

- La proposition « 6 > 5 » est vraie ; sa négation « 6 ⩽ 5 » est fausse.
- La proposition « 2 × 3 = 5 » est fausse ; sa négation « 2 × 3 ≠ 5 » est vraie.

Figure 6.4 – Négation dans le manuel Hyperbole

Dans la définition donnée ici, il est implicitement dit que chaque proposition ne possède qu'une négation. Or, si la seule caractéristique de la négation est le comportement par rapport aux valeurs de vérité, alors la négation d'une proposition close vraie pourrait être n'importe quelle proposition close fausse. Ici, les exemples sont dans le domaine mathématique, et ce sont deux propositions closes. Mais en fait, il faut plutôt les voir comme des propositions contenant des variables libres, auxquelles on a attribué des valeurs. Par exemple, le premier exemple concerne la proposition $x > y$ dans laquelle on a attribué la valeur 6 à la variable x et la valeur 5 à la variable y. La négation de cette proposition est $x \leqslant y$, et on obtient la négation de la proposition close en attribuant les mêmes valeurs aux variables libres. Tout ce processus est implicite et si un élève proposait comme négation de la deuxième proposition « $2 \times 3 = 6$ », son professeur serait bien en peine de le contredire avec la seule définition, et sans rendre explicite le processus sous-jacent décrit précédemment.

Math'x donne des exemples de négation de propositions élémentaires :



2 Négation d'une proposition

La négation d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son « contraire ».

La négation d'une *proposition A* est vraie quand *A* est fausse, fausse quand *A* est vraie.

Exemples

- La négation de « 2 est un nombre pair » (vraie) est « 2 n'est pas un nombre pair » (fausse).
- La négation de « $x \geqslant 1$ « est « $x < 1$ ».
- La négation de « $x \in J$ » est « $x \notin J$ ».

Du point de vue des **ensembles** (voir page 350), la négation est à associer au complémentaire.

Figure 6.5 – Négation dans le manuel Math'x

Ici, les propositions ne sont pas toutes closes. Trois cas sont évoqués pour la négation d'une proposition élémentaire :
– la négation est formulée par la langue en utilisant « ne ... pas »
– la négation est formulée de manière symbolique en utilisant un autre symbole adéquat
– la négation est formulée de manière symbolique en utilisant le même symbole barré
Mais les différences ne sont pas commentées, et le fait que ça soit parfois possible de donner plusieurs formulations de la négation n'est pas précisé (on aurait pu pour le premier exemple donner aussi « 2 est impair »).

Indice donne des exemples de négation de propositions closes quantifiées :

Si la proposition P est vraie, alors sa négation non P est fausse et si P est fausse, non P est vraie.

Exemples :
• « La racine carrée d'un entier positif est un entier » est une proposition fausse.
Sa négation est « Il existe un entier positif dont la racine carrée n'est pas un entier ».
Cette proposition est vraie.
• « Il existe un entier n tel que $n^2 = n$ » est une proposition vraie.
Sa négation est « Pour tout entier n, $n^2 \neq n$ ».
C'est une proposition fausse.

FIGURE 6.6 – Négation dans le manuel Indice

Les règles concernant la négation d'énoncés quantifiés doivent sans doute, pour les auteurs, se déduire de cet exemple. Mais il est alors malvenu d'utiliser pour le cas d'un énoncé universellement quantifié une proposition dans laquelle la quantification est implicite !

Nous avons vu que les lois de Morgan étaient données dans deux manuels, *Math'x* et *Transmath*. Les règles concernant la négation de propositions quantifiées sont évoquées plus ou moins précisément dans trois manuels, *Pixel, Odyssée* et *Transmath*, nous le verrons dans la partie sur les quantificateurs.

Le lien avec le complémentaire d'un ensemble n'est vraiment explicite que dans *Indice* : « si les éléments d'un sous-ensemble A d'un ensemble E sont caractérisés par la propriété P, les éléments de $\overline{A}$ sont caractérisés par la propriété non$P$. » Dans *Math'x* et *Repères*, le lien est évoqué, mais moins explicitement.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur négation

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :

(1) Ce connecteur permet de construire, à partir d'une proposition, une nouvelle proposition

(2) Règles de « fabrication » de la négation d'une proposition élémentaire (symbole de relation barré ou autre symbole exprimant la négation du symbole initial) [5]

– Aspect sémantique :

(1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité

(2) Principe du tiers-exclu (P OU NON P)

(3) Principe de non-contradiction (NON(P ET NON P))

(4) Équivalence entre NON(NON P) et P

(5) Lien avec les ensembles : complémentaire

5. La présence ou non des lois de Morgan figure dans le tableau sur les connecteurs ET et OU, la présence des règles concernant négation et quantificateurs sera vue dans le tableau sur les quantificateurs.

	Dimension syntaxique		Dimension sémantique				
	Permet de construire une nouvelle proposition	« Règles de fabrication » de la négation	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Tiers exclu	Non-contra-diction	Équivalence entre NON-(NON P) et P	Lien avec le complémentaire d'un ensemble
Aleph0	OUI		OUI			OUI	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
Lespinard				OUI	OUI	OUI	OUI
Déclic							
Hyperbole			OUI				
Indice			OUI				OUI
Math'x			OUI				OUI*
Odyssée							
Pixel							
Repères							**
Symbole			OUI				
Transmath			OUI				
Travailler en confiance			***				

* : il est juste précisé que « du point de vue des ensembles, la négation est à associer au complémentaire. »

** : la négation est associée à la notion d'événement contraire dans le titre d'un encadré.

*** : la négation d'une proposition « dit le contraire » de cette proposition.

6.1.5 L'implication

L'implication dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Là encore les présentations des trois manuels sont très différentes :

– Dans *Queysanne-Revuz*, l'implication est présentée comme un connecteur, défini par sa table de vérité. Il donne des exemples d'implication entre propositions closes qui n'ont pas de lien sémantique (par exemple « (4 est un nombre premier) ⇒ (6 est pair) » ou « (4 est un nombre premier) ⇒ (Lyon est la capitale de la France) ») pour montrer que « dans la définition de l'implication logique, considérée seule, il n'y a aucune idée de déduction ». Il fait cependant ensuite le lien avec la déduction en s'appuyant sur les tables de vérité pour conclure :

> Si l'on sait que $(p \Rightarrow q)$ est vraie et si l'on sait que p est vraie, on peut affirmer que q est vraie.
>
> Si l'on sait que $(p \Rightarrow q)$ est vraie et si l'on sait que q est fausse, on peut affirmer que p est fausse.

Puis plus loin :

> Pour démontrer que $p \Rightarrow q$ est vraie il suffit de démontrer que p étant vraie, alors q est vraie.

La forme disjonctive[6] et la transitivité[7] sont ensuite établies.

– *Alpeh 0* propose une approche à partir d'exemples :

> Les opérations précédentes [conjonction et disjonction] faisaient intervenir deux propositions de façon symétrique. Mais il peut se faire que la valeur de vérité attribuée à l'une des deux propositions puisse influer sur le jugement de vérité que l'on peut être amené à émettre sur l'autre.
>
> « S'il pleut sur mon jardin, mon gazon est arrosé »
> « Pour $x = 1$, le nombre $x^2 - 3x + 2$ est nul »
>
> Le simple bon sens pour la première, une vérification pour la seconde, montrent que les phrases précédentes expriment des vérités.
>
> Bien que ces phrases diffèrent par leur contenu, on reconnaît qu'elles sont coulées dans le même moule. Nous écrirons :
>
> Il pleut sur le jardin ⇒ le gazon est arrosé
> $$x = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$
>
> Le signe ⇒ traduit *une implication au sens courant.*
>
> D'une façon générale, désignons par h et t deux affirmations qui peuvent, selon le cas, se réaliser ou non, être vraies ou fausses.

6. $p \Rightarrow q$ est équivalent à NON(p) OU q.
7. $((p \Rightarrow q \text{ ET } q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ est une tautologie.

> Écrire $h \Rightarrow t$, c'est dire que, quand h se produit (quand h est vrai), t se produit (t est vrai)

L'implication dont il est question ici est en fait l'implication universellement quantifiée, puisqu'il y a l'idée que les valeurs de vérité de la prémisse et de la conclusion peuvent changer.

– La présentation de *Lespinard* est plus proche de celle de *Queysanne-Revuz*. L'implication des propositions p et q y est définie comme étant la disjonction $\neg p$ OU q, la table de vérité est donnée. La possibilité de déduire la vérité de la conclusion à partir de la vérité de l'implication et de la prémisse est également déduite de la table de vérité, et illustrée par l'exemple suivant :

> Considérons l'implication vraie : Les hommes sont mortels. Si nous avons la proposition vraie p : Jean est un homme, on peut en déduire que la proposition q : Jean est mortel, est vraie.

Dans cet exemple, non seulement la formulation n'est pas explicitement une implication, mais en plus il s'agit d'une implication universellement quantifiée. Dans le raisonnement décrit, il n'y a pas seulement l'application du *modus ponens* mais également une instanciation de l'implication universellement quantifiée par l'élément particulier « Jean. » Ce manuel donne aussi des exemples d'implications entre propositions closes sans lien sémantique (« (Paris est en Allemagne) $\Rightarrow$ (4 est un nombre pair) » et « (Paris est en Allemagne) $\Rightarrow$ (4 est un nombre impair) »), mais uniquement pour dire « qu'une proposition fausse implique une proposition vraie ou fausse par une implication vraie ». Les auteurs font la remarque classique : « on dit en logique que du faux on peut déduire n'importe quoi. », sur laquelle j'ai déjà proposé un commentaire page 132)

Les trois manuels traduisent l'inclusion par une implication, qui n'est universellement quantifiée que dans *Queysanne-Revuz*.

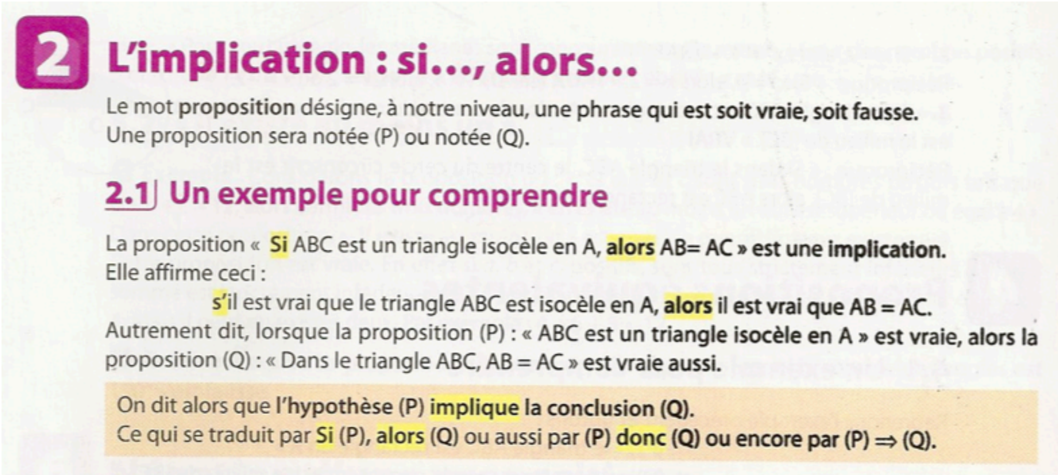
L'implication dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Dans les manuels de 2010, l'implication [8] est essentiellement une proposition de la forme « si A alors B », et non un connecteur comme c'était le cas en 1969. Le terme « implique » est également présent dans tous les manuels sauf un. Puisqu'il ne s'agit pas d'un connecteur, il n'est pas question de donner son comportement par rapport aux valeurs de vérité. Pourtant, les valeurs de vérités sont présentes dans certains manuels, à travers l'idée que l'on affirme « si A alors B » pour signifier que « si A est vraie alors B est vraie » (*Repères, Transmath, Symbole* utilisent la même expression « si… alors … », *Math'x* et *Travailler en confiance* utilisent l'expression « lorsque »). Ces présentations ne prennent en compte

8. C'est essentiellement ce terme qui est utilisé dans les manuels, seuls 2 manuels utilisent le terme « proposition conditionnelle » du programme

que les cas où la prémisse est vraie. *Repères* précise dans son encadré sur la contraposée que la proposition $A \Rightarrow B$ est fausse lorsque A est vraie et B est fausse.

La plupart des manuels partent d'un exemple, comme dans *Transmath* :



2 L'implication : si..., alors...

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase **qui est soit vraie, soit fausse.**
Une proposition sera notée (P) ou notée (Q).

2.1 Un exemple pour comprendre

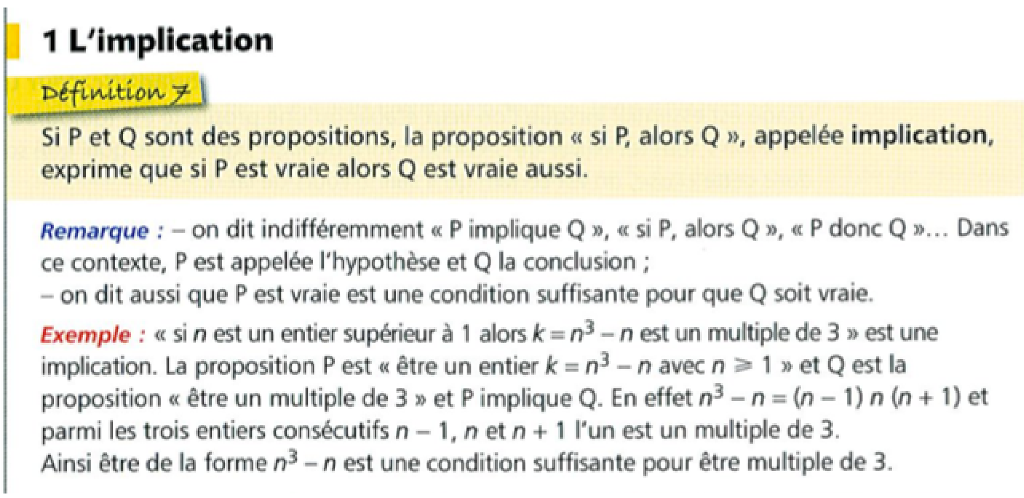
La proposition « **Si** ABC est un triangle isocèle en A, **alors** AB= AC » est une **implication.**
Elle affirme ceci :
s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, **alors** il est vrai que AB = AC.
Autrement dit, lorsque la proposition (P) : « **ABC est un triangle isocèle en A** » est vraie, alors la proposition (Q) : « Dans le triangle ABC, AB = AC » est vraie aussi.

On dit alors que **l'hypothèse (P) implique la conclusion (Q).**
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou aussi par **(P) donc (Q)** ou encore par **(P) ⇒ (Q).**

Figure 6.7 – L'implication dans le manuel Transmath

Comme dans les autres manuels présentant l'implication de cette façon, l'exemple donné est une implication universellement quantifiée dans laquelle la quantification universelle est implicite. Cependant, c'est la présence de variables qui permet de considérer différentes valeurs de vérité de la prémisse « ABC est isocèle en A », mais cela n'est pas signalé. Nous voyons ici qu'implication et déduction sont mises sur le même plan, et que « si A alors B » et « A donc B » sont considérées comme des formulations équivalentes. Là encore, il s'agit d'une distinction délicate que nous avons vue dans la deuxième partie de la thèse (voir page 163), la confusion pouvant conduire à des erreurs d'élèves. Les mots « hypothèse » et « conclusion » sont les plus souvent utilisés (*Repères* utilise les termes « condition » et « conséquence »).

D'autres manuels ont une approche plus formelle, qui laisse entrevoir le connecteur IMPLIQUE permettant de construire une nouvelle proposition $A \Rightarrow B$ à partir de deux propositions A et B, comme par exemple *Symbole* :



1 L'implication

Définition 7

Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q », appelée **implication,** exprime que si P est vraie alors Q est vraie aussi.

Remarque : – on dit indifféremment « P implique Q », « si P, alors Q », « P donc Q »... Dans ce contexte, P est appelée l'hypothèse et Q la conclusion ;
– on dit aussi que P est vraie est une condition suffisante pour que Q soit vraie.

Exemple : « si n est un entier supérieur à 1 alors $k = n^3 - n$ est un multiple de 3 » est une implication. La proposition P est « être un entier $k = n^3 - n$ avec $n \geqslant 1$ » et Q est la proposition « être un multiple de 3 » et P implique Q. En effet $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$ et parmi les trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ l'un est un multiple de 3.
Ainsi être de la forme $n^3 - n$ est une condition suffisante pour être multiple de 3.

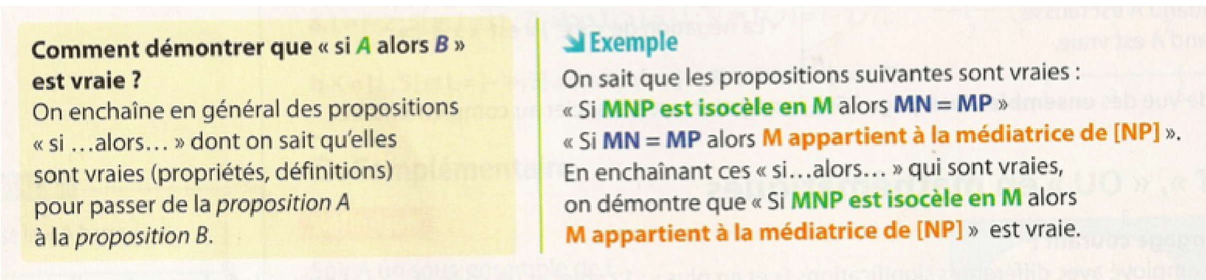
Figure 6.8 – L'implication dans le manuel Symbole

Malheureusement, ce manuel confond *si...*, *alors...* et *donc* et les exemples sont également des implications implicitement universellement quantifiées.

Les manuels qui précisent que $A \Rightarrow B$[9] signifie que lorsque A est vraie, B est vraie font ainsi le lien entre implication et déduction. Mais ils ne donnent pas de schémas de déduction, qui correspondraient aux règles du *modus ponens* et du *modus tollens*. Seul *Math'x* précise que « lorsque la proposition A est fausse, on ne peut rien dire sur B ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse ».

Certains manuels posent ensuite la question de la démonstration de la vérité d'une implication $A \Rightarrow B$. Plusieurs techniques sont données :

1. simplement montrer B sous hypothèse A. Par exemple dans *Repères* il est dit que « pour démontrer que l'implication « $A \Rightarrow B$ » est vraie, on suppose que A est vraie et on montre que B est alors vraie. » Dans une telle présentation, le premier pas de la démonstration, supposer que A est vrai, est explicite. Nous avons vu (page 164) que ce premier pas n'est pas forcément facile pour des élèves de lycée, car au collège ceux-ci ont surtout été en position d'utiliser une implication, ce qui ne demande pas de prendre soi même l'initiative de se « placer sous hypothèse ».
2. Utiliser des implications successives. Par exemple dans *Math'x* :



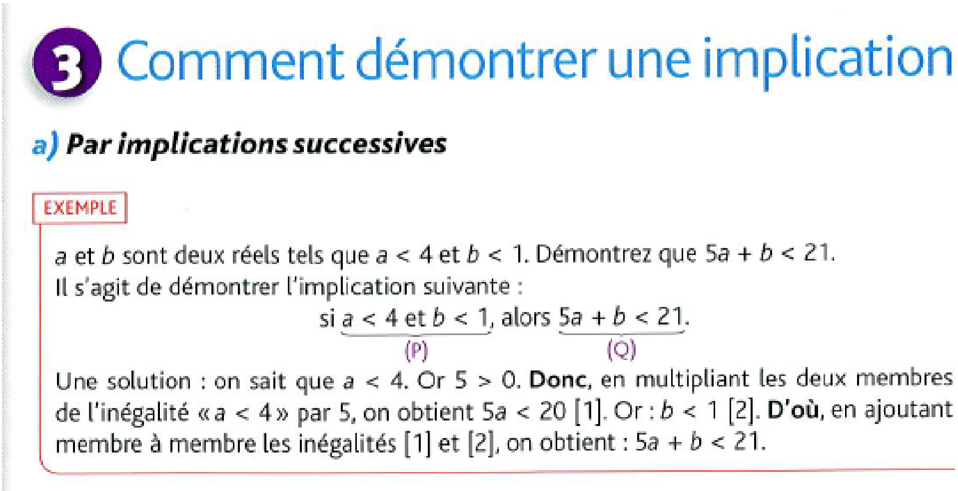
Comment démontrer que « si *A* alors *B* » est vraie ?
On enchaîne en général des propositions « si ...alors... » dont on sait qu'elles sont vraies (propriétés, définitions) pour passer de la *proposition A* à la *proposition B*.

Exemple
On sait que les propositions suivantes sont vraies :
« Si **MNP est isocèle en M** alors **MN = MP** »
« Si **MN = MP** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** ».
En enchaînant ces « si...alors... » qui sont vraies,
on démontre que « Si **MNP est isocèle en M** alors **M appartient à la médiatrice de [NP]** » est vraie.

FIGURE 6.9 – L'implication dans le manuel Math'x

9. il faudrait rigoureusement dire, comme c'est le cas dans certains manuels, que l'affirmation de $A \Rightarrow B$ signifie ...

La transitivité de l'implication est ici sous-jacente, mais une démonstration n'est généralement pas rédigée comme une succession d'implications, en utilisant la transitivité, mais plutôt comme une succession de déductions, comme le propose *Travailler en confiance* :



3 Comment démontrer une implication

a) Par implications successives

EXEMPLE

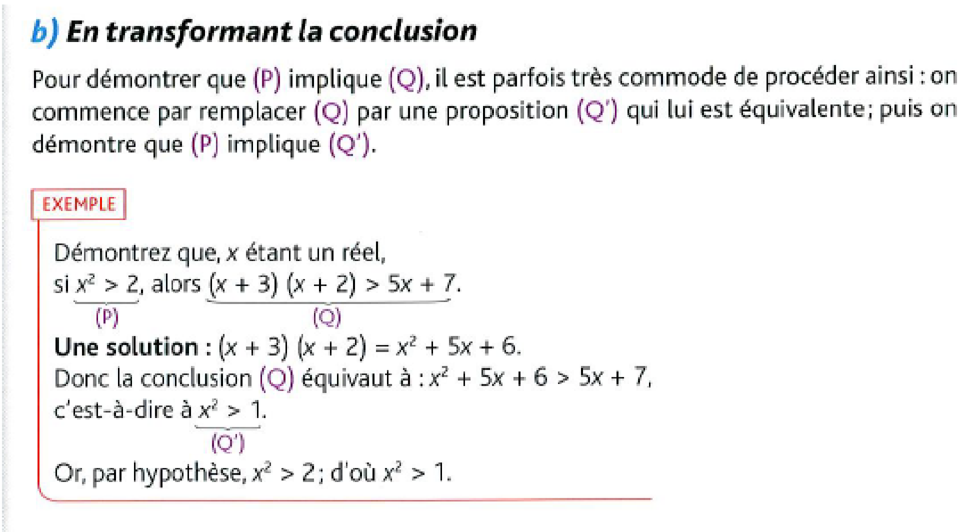
a et b sont deux réels tels que $a < 4$ et $b < 1$. Démontrez que $5a + b < 21$.
Il s'agit de démontrer l'implication suivante :

si $\underbrace{a < 4 \text{ et } b < 1}_{(P)}$, alors $\underbrace{5a + b < 21}_{(Q)}$.

Une solution : on sait que $a < 4$. Or $5 > 0$. **Donc**, en multipliant les deux membres de l'inégalité « $a < 4$ » par 5, on obtient $5a < 20$ [1]. Or : $b < 1$ [2]. **D'où**, en ajoutant membre à membre les inégalités [1] et [2], on obtient : $5a + b < 21$.

FIGURE 6.10 – L'implication dans le manuel Travailler en confiance (1)

3. Montrer une conclusion équivalente. Seul *Travailler en confiance* propose cette technique :



b) En transformant la conclusion

Pour démontrer que (P) implique (Q), il est parfois très commode de procéder ainsi : on commence par remplacer (Q) par une proposition (Q') qui lui est équivalente ; puis on démontre que (P) implique (Q').

EXEMPLE

Démontrez que, x étant un réel,
si $\underbrace{x^2 > 2}_{(P)}$, alors $\underbrace{(x + 3)(x + 2) > 5x + 7}_{(Q)}$.

Une solution : $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$.
Donc la conclusion (Q) équivaut à : $x^2 + 5x + 6 > 5x + 7$,
c'est-à-dire à $\underbrace{x^2 > 1}_{(Q')}$.
Or, par hypothèse, $x^2 > 2$; d'où $x^2 > 1$.

FIGURE 6.11 – L'implication dans le manuel Travailler en confiance (2)

Enfin, *Math'x, Repères* et *Indice* précisent qu'on utilise un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fausse, c'est-à-dire un élément pour lequel A est vraie et B est fausse. Là encore, le fait qu'un élément suffise montre que ces manuels considèrent le cas d'implications universellement quantifiées.

Je ne détaillerai pas ici ce qui est dit dans les manuels à propos de notions liées à l'implication (réciproque, contraposée, équivalence, condition nécessaire, condition suffisante). Notons seulement que tous les manuels donnent l'équivalence entre une implication et sa contraposée, mais que seuls trois d'entre eux donnent une justification : si B est fausse, A ne peut pas être vraie sinon on aurait B vraie.

Tableaux récapitulatifs de l'analyse sur l'implication

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :
  (1) Ce connecteur permet de construire, à partir de deux propositions, une nouvelle proposition
  (2) Forme disjonctive de l'implication
  (3) Transitivité de l'implication

– Aspect sémantique :
  (1) Comportement par rapport aux valeurs de vérité
  (2) Termes utilisés
  (3) Lien avec les ensembles : inclusion

J'ai également regardé le lien fait entre implication et déduction en retenant les critères suivants :

(1) Confusion entre *si... alors* et *donc* (cette information est déjà donnée dans les différents termes utilisés, mais elle me paraît suffisamment importante pour faire l'objet d'une colonne particulière dans ce tableau)
(2) $A \Rightarrow B$ signifie que lorsque A est vraie, B est vraie (ceci aurait pu se trouver dans la partie « aspect sémantique », mais dans les manuels cette donnée est souvent reliée à la possibilité de pouvoir faire une déduction)
(3) Schéma de déduction correspondant au *modus ponens*
(4) Schéma de déduction correspondant au *modus tollens*
(5) Techniques pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie
(6) Techniques pour montrer que $A \Rightarrow B$ est fausse

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Forme disjonctive	Transitivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Termes utilisés	Lien avec inclusion
Aleph0		OUI*			si...	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	Si ... alors, implique, entraîne	OUI
Lespinard	OUI	OUI**	OUI	OUI	Implique, entraîne	OUI
Déclic						
Hyperbole	OUI				Si ... alors	
Indice					Si ... alors, implique, donc, conséquence, entraîne	
Math'x					Si ... alors, donc, formulations implicites	

	Dimension syntaxique			Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Forme disjonctive	Transitivité	Comportement par rapport aux valeurs de vérité	Termes utilisés	Lien avec inclusion
Odyssée					Si … alors, implique, entraîne	
Pixel						
Repères					Si … alors, implique	
Symbole	OUI				Si … alors, implique, donc	
Transmath					Si … alors, formulations implicites	
Travailler en confiance					Si … alors, implique, donc	

* en exercice, ** par définition

	Liens avec la démonstration					
	Confusion avec donc	Signifie que « si A est vraie alors B est vraie »	Schéma *modus ponens*	Schéma *modus tollens*	Montrer que $A \Rightarrow B$ est vraie	Montrer que $A \Rightarrow B$ est fausse
Aleph0			OUI	OUI		
Queysanne Revuz			OUI	OUI	Montrer B sous hypothèse A	
Lespinard			OUI			
Déclic						
Hyperbole					Montrer B sous hypothèse A	
Indice	OUI			*	Montrer B sous hypothèse A	Contre-exemple
Math'x		OUI			Passer de A à B par des implications successives	Contre-exemple
Odyssée						
Pixel						
Repères		OUI			Montrer B sous hypothèse A	Contre-exemple
Symbole	OUI				Montrer B sous hypothèse A	
Transmath	OUI					
Travailler en confiance		OUI			Passer de A à B par des implications successives, Montrer une conclusion équivalente	

* Sous entendu, sans parler de « vrai ».

6.1.6 Les quantificateurs

Les quantificateurs dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Dans *Aleph 0*, chaque quantificateur est introduit par des exemples. Le manuel propose plusieurs énoncés, dont il souligne la structure commune, et présente les quantificateurs comme un moyen d'exprimer cette structure. Par exemple pour le quantificateur universel :

> Voici des énoncés relevant de domaines divers :
> « Les cétacés sont adaptés à la vie aquatique. »
> « Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment. »
> « Chaque partie de cet ouvrage peut-être lue indépendamment des autres. »
> « L'homme est mortel. »
> Le quantificateur universel. - Au moyen d'expressions grammaticales différentes, chacune de ces propositions affirme que les objets d'une certaine théorie possèdent **tous** une certaine propriété. On pourrait uniformiser ces énoncés en adoptant une formulation du type : « Quel que soit x, s'il appartient à la théorie T, il possède la propriété $\mathscr{P}$ ». L'abréviation consacrée pour noter ce *quel que soit* est :
> $$\forall x[(x \text{ appartient à } T) \Rightarrow (x \text{ possède } \mathscr{P})].$$
> Le signe $\forall$ se lit : *quel que soit* ou *pour tout* (x).
> On l'appelle le **quantificateur universel.**

Queysanne-Revuz et *Lespinard* présentent tous deux les quantificateurs après les notions ensemblistes car ils le font à partir du lien entre une proposition $\mathscr{A}(x)$ et l'ensemble A des éléments x d'un ensemble E vérifiant $\mathscr{A}(x)$. Par exemple, dans *Queysanne-Revuz* :

> Considérons l'énoncé suivant :
> $$\textit{« pour tout élément } x \textit{ de } E \textit{ on a } \mathscr{A}(x) \textit{ »}$$
> Si on a $A = E$ cet énoncé est *vrai.*
> Si on a $A \neq E$ cet énoncé est *faux.*

Dans ce manuel, la construction d'un énoncé quantifié (l'aspect syntaxique) est préalable au sens qu'on lui donne (l'aspect sémantique). Il précise ensuite que la valeur de vérité de cet énoncé « ne dépend pas de la valeur attribuée à la variable x », et qu'il est équivalent au même énoncé dans lequel on a remplacé la variable x par la variable y (sans préciser comme il faudrait le faire que la variable y ne doit pas être libre dans $\mathscr{A}$, mais les auteurs considérent sans doute que $\mathscr{A}$ n'a pas d'autres variables libres que x). Les auteurs introduisent le terme de « lettre muette ».

Lespinard emploie des termes sensiblement différents :

> Si $A = E$, tous les éléments de E possèdent la propriété. On exprime cela en disant « **pour tout x, la propriété $\mathscr{A}$ est vérifiée.** »

Dans ce manuel, comme dans *Aleph 0*, la formulation avec les quantificateurs est d'abord vue sous l'aspect sémantique, c'est une façon de reformuler certaines propositions, et l'aspect syntaxique n'est pas présent.

Les trois manuels donnent les règles de négation des propositions quantifiées. À la différence des deux autres, *Aleph 0* le fait sans utiliser le connecteur NON :

> Pour qu'une affirmation universelle soit fausse, il suffit qu'il existe un cas où elle est en défaut.
>
> La négation de l'énoncé :
>
> $$(\forall x \text{ de } A),\ x \text{ possède la propriété } \mathscr{P}$$
>
> est donc :
>
> $$(\exists x \text{ de } A),\ x \text{ ne possède pas la propriété } \mathscr{P}$$

Aleph 0 est le seul à proposer un paragraphe sur la distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$.

Les quantificateurs dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Dans les huit manuels de 2010 qui traitent des quantificateurs, ceux-ci sont introduits par des exemples. Sept de ces huit manuels ne donnent que des exemples de propositions quantifiées vraies, comme ci-dessous dans *Indice* :

III. Quel que soit – Pour tout – Il existe

Dans le **langage usuel**, quand on dit « Tous les Français sont européens », on veut exprimer le fait que **tout** Français, **quel qu'il soit**, est un Européen.
Quand on dit qu'un Français est daltonien, on veut exprimer le fait qu'il existe au moins un Français qui est daltonien.
En mathématiques, on utilise souvent les expressions « quel que soit » ou « il existe », appelées quantificateurs. Ces expressions sont parfois implicites.

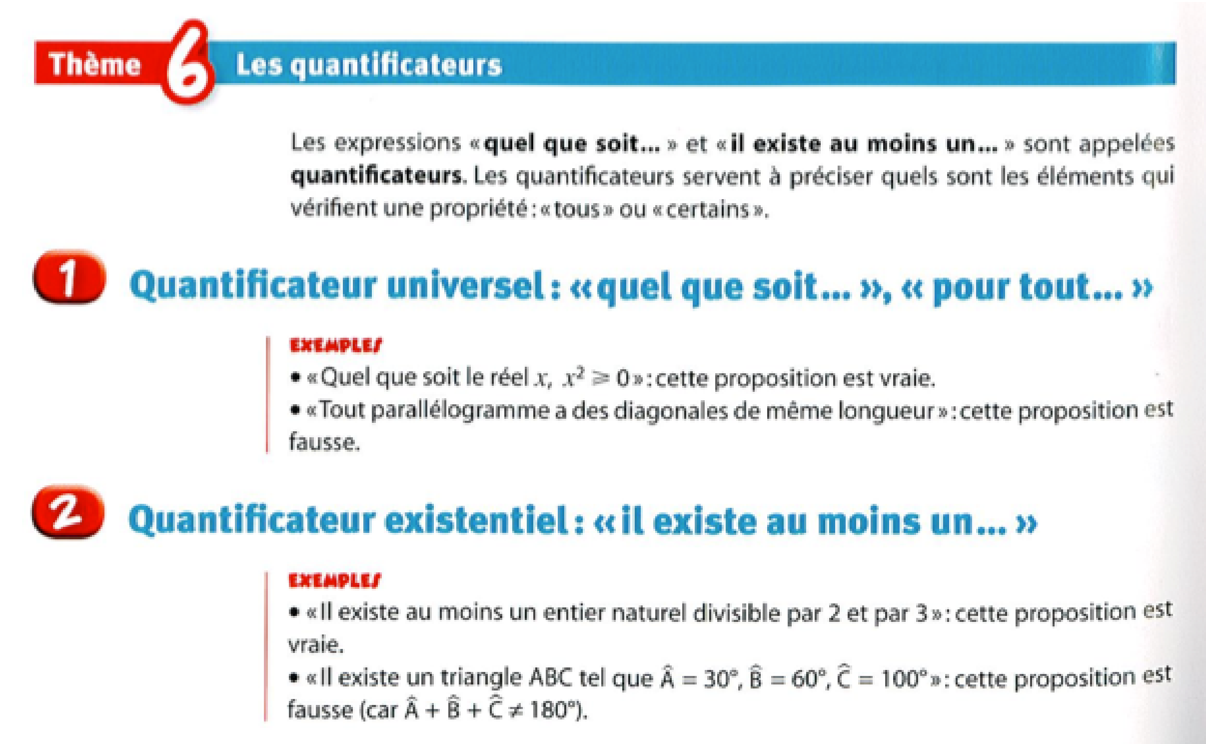
Par exemple :
- **Quels que soient** les réels a et b, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- « Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » signifie que **tous** les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires.
- Le carré d'un réel est positif : cette proposition est vraie **quel que soit le** nombre réel.
- **Il existe** un nombre entier pair supérieur à 1 000 000.
- **Il existe** deux réels x vérifiant l'égalité $x(x-3) = 0$.
- **Pour tout** réel x, on a $x(x-3) = x^2 - 3x$.
- **Quel que soit** le triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

FIGURE 6.12 – Les quantificateurs dans le manuel Indice

Dans une telle présentation, l'aspect syntaxique des quantificateurs n'est pas du tout présent. On ne se sert des quantificateurs que pour affirmer quelque chose, il n'y a pas du tout l'idée d'une proposition construite avec un quantificateur dont on peut se demander si elle est vraie ou fausse. Les auteurs comptent sur la compréhension des expressions utilisées pour signifier la quantification à partir de leur utilisation dans le langage courant.

Par ailleurs, il y a dans ces exemples un mélange de propositions où la quantification porte sur une variable et de propositions quantifiées sans variable. Cela montre que l'objet quantificateur n'est pas bien identifié, et est confondu avec l'idée de quantification (voir distinction page 140), ce qui renforce l'absence de référence à un langage mathématique ayant ses spécificités. Dans l'exemple « il existe deux réels x vérifiant l'égalité $x(x-3)=0$ », s'il y a bien quantification, il ne s'agit pas d'une simple utilisation du quantificateur existentiel. En effet (en interprétant « il existe deux » comme « il existe au moins deux »), en se contentant du quantificateur existentiel, on doit reformuler ainsi la proposition, en introduisant deux variables : « il existe un réel x, il existe un réel y tels que $(x(x-3)=0 \text{ ET } y(y-3)=0 \text{ ET } x \neq y)$ ». Nous avons finalement une proposition d'une structure assez complexe.

Hyperbole est le seul qui donne pour chaque quantificateur un exemple d'une proposition vraie et un exemple d'une proposition fausse :



Thème 6 Les quantificateurs

Les expressions « **quel que soit...** » et « **il existe au moins un...** » sont appelées **quantificateurs**. Les quantificateurs servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété : « tous » ou « certains ».

1 Quantificateur universel : « quel que soit... », « pour tout... »

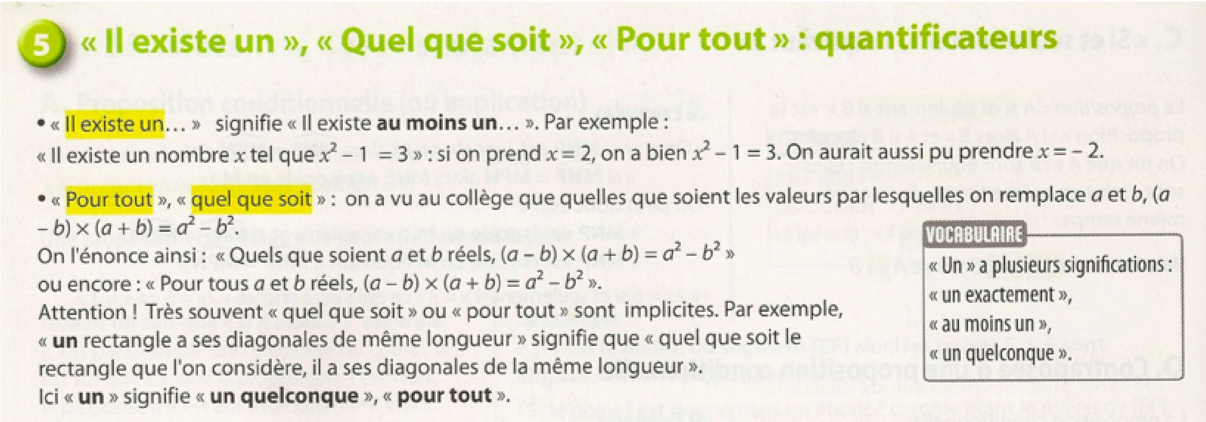
EXEMPLES
- « Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$ » : cette proposition est vraie.
- « Tout parallélogramme a des diagonales de même longueur » : cette proposition est fausse.

2 Quantificateur existentiel : « il existe au moins un... »

EXEMPLES
- « Il existe au moins un entier naturel divisible par 2 et par 3 » : cette proposition est vraie.
- « Il existe un triangle ABC tel que $\hat{A}=30°$, $\hat{B}=60°$, $\hat{C}=100°$ » : cette proposition est fausse (car $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}\neq 180°$).

Figure 6.13 – Les quantificateurs dans le manuel Hyperbole

Seule la fausseté de la dernière proposition est justifiée. Globalement, les manuels justifient peu la vérité des propositions quantifiées. En particulier, seuls *Symbole* et *Math'x* (extrait ci-dessous) justifient la vérité d'une proposition existentielle en exhibant une valeur qui convient :



5 « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

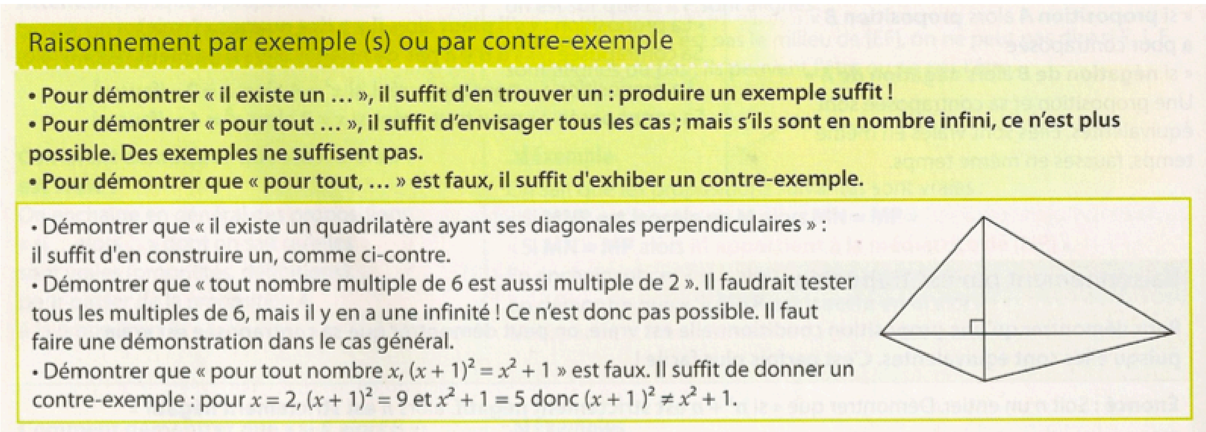
• « Il existe un… » signifie « Il existe **au moins un**… ». Par exemple :
« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 1 = 3$ » : si on prend $x = 2$, on a bien $x^2 - 1 = 3$. On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

• « Pour tout », « quel que soit » : on a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ »
ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ ».
Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites. Par exemple, « **un** rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que « quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».
Ici « **un** » signifie « **un quelconque** », « **pour tout** ».

VOCABULAIRE
« Un » a plusieurs significations :
« un exactement »,
« au moins un »,
« un quelconque ».

Figure 6.14 – Les quantificateurs dans le manuel Math'x

Cet extrait est suivi d'un encadré intitulé « raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple » :



Raisonnement par exemple (s) ou par contre-exemple

• **Pour démontrer « il existe un … », il suffit d'en trouver un : produire un exemple suffit !**
• **Pour démontrer « pour tout … », il suffit d'envisager tous les cas ; mais s'ils sont en nombre infini, ce n'est plus possible. Des exemples ne suffisent pas.**
• **Pour démontrer que « pour tout, … » est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple.**

• Démontrer que « il existe un quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires » : il suffit d'en construire un, comme ci-contre.
• Démontrer que « tout nombre multiple de 6 est aussi multiple de 2 ». Il faudrait tester tous les multiples de 6, mais il y en a une infinité ! Ce n'est donc pas possible. Il faut faire une démonstration dans le cas général.
• Démontrer que « pour tout nombre x, $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ » est faux. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.

Figure 6.15 – Exemple et contre-exemple dans le manuel Math'x

Ici, chaque cas est présenté comme une technique isolée et la façon dont elles sont reliées grâce à la négation n'est pas expliquée (j'entends par là l'explicitation du fait que montrer qu'une proposition universelle est fausse et montrer qu'une proposition existentielle est vraie relèvent de la même technique car la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle, c'est-à-dire l'explicitation du lien entre ce qui est appelé « exemple » et ce qui est appelé « contre-exemple », qui ici semblent n'avoir rien en commun). Ainsi, le cas de la démonstration de la fausseté d'une proposition existentielle ne semble relever d'aucune de ces techniques, alors que cela revient à montrer la vérité d'une proposition universelle, telle qu'envisagée dans le deuxième point.

Le seul cas qui est présent dans tous les manuels est celui de la technique du contre-exemple pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, mais dans la plupart des manuels, cette technique n'est pas reliée à la négation. Elle l'est seulement dans deux manuels : *Transmath*, dont nous verrons un extrait ci-après, et *Indice*, qui propose le paragraphe suivant :

IV. Exemples – Contre-exemples

On veut savoir si les deux énoncés suivants sont vrais ou faux.
(1) L'expression $x^2 + 2x - 3$ est égale à $(x - 1)(x + 3)$.
(2) Tout entier impair est premier.

Pour démontrer que l'énoncé (1) est vrai, un élève dit :
« Pour $x = 1$, les deux expressions sont égales à 0. Donc elles sont égales. »
Cet exemple ne prouve pas que l'énoncé (1) est vrai. Pour cela, il faudrait tester l'égalité pour toutes les valeurs de x. En développant, $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$.
Ce calcul prouve que l'égalité (1) est vraie pour toute valeur de x.

Pour démontrer que l'énoncé (2) est faux, un élève dit :
« 9 est impair et il n'est pas premier. »
La donnée d'un exemple suffit dans ce cas pour prouver le résultat.
L'énoncé « 9 est impair et il n'est pas premier » est vrai. Il existe donc un entier impair non premier. La phrase dite par l'élève est la négation de l'énoncé (2). Celui-ci est donc faux.

Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai, mais on peut utiliser un exemple pour montrer qu'un énoncé est faux : on peut alors trouver un cas qui le met en défaut, c'est un **contre-exemple**.

FIGURE 6.16 – Exemple et contre-exemple dans le manuel Indice

Ce manuel veut aussi mettre en garde les élèves contre une erreur courante : démontrer une proposition universelle avec un exemple. Il est regrettable que la quantification universelle soit implicite dans l'exemple 1. Cela peut-être vu comme une simple maladresse didactique, montrant un manque d'identification de la difficulté des quantifications implicites. Mais nous pouvons également relever dans cet extrait une erreur par rapport aux notions de logique : la proposition « 9 est impair et il n'est pas premier » n'est pas la négation de la proposition « tout entier impair est premier » (même si sa vérité prouve la vérité de cette négation). La rigueur généralement de mise quand on parle d'objets mathématiques n'est pas du tout appliquée ici, nous pouvons en voir un autre exemple dans le récapitulatif : la conclusion « un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai » ne s'applique qu'à des énoncés universels, ce qui n'est pas précisé.

Les règles de négation de propositions quantifiées ne sont présentes que dans trois manuels. *Pixel* les évoque de manière très imprécise : « de façon générale, la négation de « pour tout x » est « il existe x », et réciproquement », ce qui est largement incomplet. *Odyssée* se contente de dire que « les deux quantificateurs « tout » et « il existe » sont souvent liés lorsqu'il s'agit d'énoncer le contraire d'une proposition. » Il y a identification des notions de contraire et de négation, notions pourtant distinctes, mais que les élèves ont tendance à confondre, et là encore le vocabulaire manque de précision : que signifie « être liés » pour les quantificateurs ?

Transmath propose quant à lui un passage assez long sur ces règles, et relie la notion de contre-exemple à la négation d'une proposition universelle :

6.4 Négation d'une proposition universelle. Démonstration par contre-exemple

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemples. 1. Considérons la proposition proverbiale (P) : « la nuit, tous les chats sont gris ». Sa négation, (non P), s'énonce : « la nuit, **il existe au moins** un chat qui n'est pas gris ».
2. La négation de la proposition (P) : « **pour tout** nombre x, $x^2 > x$ » est « **il existe au moins** un nombre x tel que $x^2 \leqslant x$ ».
Notez que, dans ce cas, la proposition (P) est fausse car $x^2 > x$ n'est vraie que pour $x > 1$. Donc la proposition (non P) est vraie.

Cas général. Notons (P) la proposition : « pour tout élément x d'un ensemble E, x satisfait à une condition C ». Alors la négation de P est :

« il existe au moins un élément x de E qui ne satisfait pas la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple

À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » est fausse.
Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie. Or (non P) est :

« **il existe au moins un nombre** x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leqslant 1$ ».

Il s'agit donc de trouver un tel nombre x. On cherche au plus simple : on voit que zéro convient, car $0 > -1$ et $0^2 \leqslant 1$. Donc (P) est fausse.

6.5 Négation d'une proposition existentielle

Exemples

1. La négation de la proposition P : « **il existe** un nombre x tel que $x^2 + 1 = 0$ » est : « **pour tout** nombre x, $x^2 + 1 \neq 0$ ». À noter que (non P) est vraie car pour tout x, $x^2 + 1 \geqslant 1$, donc $x^2 + 1$ est non nul (et donc (P) est fausse).
2. La négation de la proposition (P) : « **il existe au moins** un triangle dont l'orthocentre est à l'extérieur du triangle » est : « **pour tout** triangle, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ».
Ici, (P) est vraie (voir la figure), et donc (non P) est fausse.

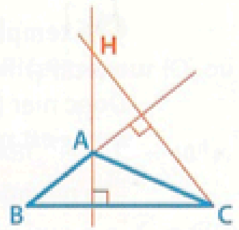


Figure 6.17 – Négation des propositions quantifiées dans le manuel Transmath

La négation d'une proposition universelle est d'abord illustrée par un énoncé de la vie courante, « la nuit tous les chats sont gris ». Mais dans cet énoncé, il y a deux quantifications universelles : celle mise en évidence sur les chats, mais aussi une quantification universelle implicite sur les nuits. La négation devrait donc comporter deux quantifications existentielles : « il existe une nuit pendant laquelle il existe au moins un chat qui n'est pas gris. » Le recours à un énoncé de la vie courante, sans doute vu comme plus facilement compréhensible pour une première approche, est ici utilisé de façon incorrecte du point de vue de la logique mathématique. Par ailleurs, une règle est énoncée pour la négation d'une proposition universelle (et avant elle deux règles pour les connecteurs ET et OU), mais pas pour la négation d'une proposition existentielle. Ici encore, propositions universelles et existentielles ne sont pas mises sur le même plan, car il ne s'agit pas d'étudier un langage, mais de donner des techniques pour l'activité mathématique.

Les règles de négation des propositions quantifiées sont ainsi évoquées dans ces trois manuels, mais pas données d'une façon formelle permettant un traitement syntaxique (c'est-à-dire une application qui ne se réfère plus au sens des propositions).

Conformément aux indications du programme et du document ressource, plusieurs manuels évoquent les formulations dans lesquelles les quantifications sont implicites (essentiellement l'utilisation du mot « un »), mais seul *Travailler en confiance* évoque la quantification universelle implicite dans les propositions en *si…, alors…*.

Tableau récapitulatif de l'analyse sur les quantificateurs

J'ai retenu pour l'analyse les critères suivants, classés selon qu'ils relèvent de l'aspect syntaxique ou de l'aspect sémantique de cette notion :

– Aspect syntaxique :
  (1) Les quantificateurs permettent de construire, à partir d'une proposition, une nouvelle proposition
  (2) Aspect mutificateur
  (3) Règles par rapport à la négation
  (4) Utilisation des symboles
– Aspect sémantique :
  (1) Valeur de vérité des propositions quantifiées donnée par l'approche ensembliste ou par des exemples
  (2) Expressions dans lesquelles des quantifications implicites sont signalées
  (3) Distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$

	Dimension syntaxique				Dimension sémantique		
	Permet de construire une nouvelle proposition	Aspect mutificateur	Règles par rapport à la négation	Utilisation des symboles	Valeur de vérité	Formulations implicites	Distinction entre $\forall\exists$ et $\exists\forall$
Aleph0			OUI	OUI	Exemples	OUI*	OUI
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI	OUI	Approche ensembliste		
Lespinard			OUI	OUI	Approche ensembliste	un (pour $\forall$)	
Déclic							
Hyperbole					Exemples		
Indice					Exemples		
Math'x					Exemples	un (pour $\forall$, $\exists$)	
Odyssée			*		Exemples	un (pour $\forall$, $\exists$)	
Pixel			*				
Repères					Exemples		
Symbole					Exemples		
Transmath			*		Exemples	un, des (pour $\forall$)	
Travailler en confiance				OUI	Exemples	si... alors	

* Les règles sont évoquées dans ces trois manuels, mais pas de façon suffisamment précise pour que l'on puisse y voir un aspect syntaxique.

6.1.7 Les différents types de raisonnement

Les différents types de raisonnement dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 1969

Il n'y a rien concernant les différents types de raisonnement dans *Lespinard*.

Dans *Aleph 0*, une partie est consacrée à la déduction, avec trois sous-parties :

1. la déduction directe : le *modus ponens* est illustré par un exemple et parallèlement schématisé, puis décrit sans utiliser de variable propositionnelle :

   > a) S'il pleut sur mon jardin, le gazon est arrosé. a) $p \Rightarrow q$
   > b) Or, il pleut. b) p
   > c) Donc mon gazon est arrosé. c) $\overline{\quad\quad q}$
   >
   > D'une implication juste dont le premier membre, l'hypothèse, est vrai, nous pouvons *détacher* une *conclusion* : la vérité de la thèse.
   >
   > Nous appellerons un tel raisonnement un *raisonnement élémentaire direct*.

   Ce schéma est relié à la tautologie suivante donnée en théorème en conclusion de cette partie : $[p \text{ et } p \Rightarrow q] \Rightarrow q$

2. La contraposition est illustrée par un exemple. Puis un premier théorème est donné, sans démonstration : $[h \Rightarrow t] \Rightarrow [\overline{t} \Rightarrow \overline{h}]$, dont une conséquence qui « traduit un nouveau mode de raisonnement » est la tautologie $[(h \Rightarrow t) \text{ et } \overline{t}] \Rightarrow \overline{h}$.

3. La déduction par exclusion logique (réduction à l'absurde) est illustrée par deux exemples, puis décrite sans variable propositionnelle, puis reliée à la tautologie $\Big[[\overline{h} \text{ ou } t] \text{ et } h\Big] \Rightarrow t$.

Dans *Queysanne-Revuz*, il y a deux parties sur le raisonnement :

1. d'abord une partie sur les énoncés, introduite par les quelques lignes :

   > Le raisonnement mathématique est l'ensemble des méthodes permettant de tirer d'énoncés considérés comme vrais d'autres énoncés vrais ; autrement dit le raisonnement mathématique est l'art de démontrer la vérité de certains résultats. Il nous faut d'abord expliquer les divers types d'énoncés que l'on peut rencontrer en mathématique.

   Sont alors différenciés : les axiomes, les phrases exprimant des définitions, les théorèmes qui sont des plusieurs sortes :
   – les théorèmes d'existence et d'unicité,
   – les théorèmes s'exprimant par une implication,
   – les théorèmes s'exprimant par une équivalence.

2. Puis une partie sur les méthodes de démonstration qui sont basées sur des schémas de raisonnement justifiés par les tables de vérité. Sont présentés :
   - le raisonnement par déduction : basé sur le schéma déjà énoncé dans le manuel : « si (p est *vraie*) *et* si ($p \Rightarrow q$) est *vraie* alors q est *vraie.* » (implication et déduction étaient déjà reliées dans le paragraphe sur l'implication dans lequel étaient donnés les deux schémas du *modus ponens* et du *modus tollens*, voir page 241).
   - La démonstration par négation, avec le contre-exemple qui est associé au fait que la négation de « $(\forall x \in E) \quad \mathscr{P}(x)$ » est « $(\exists x \in E) \quad \text{non}\mathscr{P}(x)$ ».
   - La démonstration par disjonction des cas, basée sur le schéma : « si ($p \Rightarrow q$) est *vraie* et si ($\text{non}p$) $\Rightarrow q$ est *vraie* alors q est *vraie* », démontrée par les tables de vérité.
   - La démonstration par l'absurde, décrite comme suit :

     > Le cas le plus simple est le suivant : on veut démontrer que p est vraie, on considère une assertion q *fausse* telle que [(non p)$\Rightarrow q$] soit *vraie.*

     Elle est justifiée par le schéma « si [(non p)$\Rightarrow q$] est *vraie et* si q est *fausse* alors (non p) est *fausse* donc p est *vraie* ».

Ce manuel précise bien que les schémas de raisonnement sont en général plus compliqués car ils font intervenir à différents moments différentes propositions.

Les différents types de raisonnement dans les pages spécifiquement consacrées à la logique dans les manuels de 2010

Notons tout d'abord que ce que *Aleph 0* et *Queysanne-Revuz* appellent déduction directe, ou raisonnement par déduction, et qui correspond à une utilisation du *modus ponens*, n'est pas présent dans les manuels de 2010.

Le raisonnement par contraposée, par contraposition

Je rappelle la distinction que j'ai déjà faite entre le raisonnement par contraposée (qui consiste à montrer une implication en montrant sa contraposée) et le raisonnement par contraposition (qui est une utilisation du *modus tollens*).

Hormis *Déclic*, tous les manuels de 2010 définissent ce qu'est la contraposée d'une implication, mais seuls *Odyssée, Pixel, Transmath*, et *Travailler en confiance* justifient qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, le premier sur un exemple :

Supposons que la propriété P suivante soit toujours vraie : « Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux. »

• **La contraposée** de la propriété P est : « Si je ne suis pas heureux alors je ne suis pas habillé en bleu. »
Cette propriété est nécessairement vraie, car si j'étais habillé en bleu, je serais heureux, or je ne suis pas heureux, donc je ne peux pas être habillé en bleu.

FIGURE 6.18 – La contraposée dans le manuel Odyssée

Les trois autres manuels proposent un raisonnement sur des variables propositionnelles, comme nous le verrons dans l'extrait de *Travailler en confiance* ci-après.

Repères, Math'x, Travailler en confiance et *Odyssée* décrivent le principe du raisonnement par contraposée, basé sur le fait qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, par exemple dans *Math'x*[10] :

Raisonnement par contraposition

Pour démontrer qu'une proposition conditionnelle est vraie, on peut démontrer que sa contraposée est vraie puisqu'elles sont équivalentes. C'est parfois plus facile !

Énoncé : Soit n un entier. Démontrer que « si **$n^2 + n$ est strictement négatif**, alors **n est strictement négatif** »

Démonstration : Ceci revient à démontrer la contraposée :
« si **n est positif ou nul** alors **$n^2 + n$ est positif ou nul** ».
La contraposée se démontre facilement : en effet si n est positif ou nul, comme n^2 est toujours positif ou nul, $n^2 + n$ est une somme de deux nombres positifs ou nuls, donc $n^2 + n$ est positif ou nul.

Figure 6.19 – La démonstration par contraposée dans le manuel Math'x

Dans sa description, *Travailler en confiance* utilise des variables propositionnelles, et il justifie la validité de ce raisonnement (en justifiant en fait l'équivalence entre une implication et sa contraposée) :

b) Notion de contraposée

DÉFINITION

On appelle **contraposée** de l'implication « (P) ⇒ (Q) » l'implication « (non Q) ⇒ (non P) ».

Pour démontrer l'implication « (P) ⇒ (Q) », il suffit de démontrer sa contraposée « (non Q) ⇒ (non P) ».
En effet, supposons que (non Q) implique (non P). Alors, si (P) est vraie, (Q) est vraie, car, sinon, (non Q) serait vraie et donc (non P). D'où une contradiction.

Note
En réalité, les implications « (P) ⇒ (Q) » et « (non Q) ⇒ (non P) » sont équivalentes.

Figure 6.20 – La démonstration par contraposée dans le manuel Travailler en confiance

Indice, Pixel et *Symbole* disent simplement qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes, mais ne parlent pas du raisonnement par contraposée.

Seul *Transmath* parle de « démonstration par utilisation de la contraposée », qui correspond au raisonnement par contraposition :

Démonstration par utilisation de la contraposée. Exemples

1. Le théorème de Pythagore est vrai :
Si (P) : « un triangle ABC est rectangle en A », alors (Q) : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».
Donc sa contraposée est vraie. Or sa contraposée s'énonce :
Si (non Q) : « Dans un triangle ABC, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ », alors (non P) : « ABC n'est pas rectangle en A ».
Cette contraposée permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

Figure 6.21 – La démonstration par utilisation de la contraposée dans le manuel Transmath

10. Ce manuel appelle *raisonnement par contraposition* ce que j'ai appelé *raisonnement par contraposée.*

Le raisonnement par l'absurde

Transmath, Repères et *Symbole* présentent le raisonnement par l'absurde seulement dans le cas d'une implication, et proposent une description de ce type de raisonnement dans laquelle sont utilisées des variables propositionnelles pour marquer la prémisse et la conclusion. *Transmath* propose l'exemple suivant pour illustrer le raisonnement par l'absurde :

8.2 Démonstration par l'absurde

« Absurde » signifie « contraire à la raison, au bon sens ».

Exemple. Démontrer que pour tout entier n, la proposition (P) : « n^2 est un entier pair » implique la proposition (Q) : « n est un entier pair ».
Démontrons par l'absurde cette implication. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que n^2 soit pair et n soit non pair, c'est-à-dire tel que n soit impair. Alors, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. D'où $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi, $n^2 = 2k + 1$, avec $k = 2p^2 + 2p$, entier.
Donc n^2 est impair, ce qui contredit « n^2 est pair ».
Donc : Si « n^2 est pair » implique « n est pair ».

Cas général. Pour démontrer par l'absurde une implication : « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et on ajoute à cette hypothèse, **l'hypothèse supplémentaire : (non Q)** (négation de la conclusion).
Puis à partir de (P) et (non Q), on déroule un raisonnement qui aboutit à **une contradiction**. Il en résulte alors que l'hypothèse (non Q) est fausse, donc que (Q) est vraie, lorsque (P) est vraie.

FIGURE 6.22 – La démonstration par l'absurde dans le manuel Transmath

Nous retrouvons dans l'exemple donné la confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée évoquée page 168 (d'ailleurs, ce même exemple est donné pour illustrer le raisonnement par contraposée dans *Hyperbole*).

Odyssée, Math'x, Hyperbole proposent une description de la démarche du raisonnement par l'absurde dans le cas général, par exemple dans *Odyssée*[11] :

b. Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à émettre comme hypothèse le contraire du résultat escompté.
Si cela conduit à un résultat absurde (ou faux) alors on aura démontré que le résultat attendu était juste.

EXEMPLE

S'il existe un nombre x solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ alors $x^2 = -1$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif.
Donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution.

FIGURE 6.23 – La démonstration par l'absurde dans le manuel Odyssée

Dans cet extrait, le début de la démonstration, qui consiste, comme c'est indiqué, à prendre la négation de la proposition, n'apparaît pas comme étape explicite.

11. Le mot « contraire » est encore une fois utilisé comme synonyme de négation.

Le raisonnement par disjonction des cas

Il est traité de manière sensiblement identique dans tous les manuels, par exemple dans *Repères* :

3. La démonstration par disjonction des cas

Lorsque l'on ne peut pas démontrer tous les cas de figure en même temps, on procède à une démonstration par **disjonction des cas**. Pour cela, on démontre la propriété dans chacun des cas créés afin de reconstituer l'ensemble des cas possibles. (Voir page 176.)

FIGURE 6.24 – La démonstration par disjonction des cas dans le manuel Repères

Hyperbole et *Transmath* ne donnent que des exemples, et pas de description de ce type de raisonnement.

Seul *Symbole* associe ce type de raisonnement au fait de formuler l'hypothèse sous la forme d'une disjonction :

Ce raisonnement est utilisé lorsque l'hypothèse P apparaît comme la réunion de plusieurs cas : on se retrouve avec le mot « **ou** » et l'on est amené à présenter une démonstration envisageant plusieurs cas. C'est donc fréquent si l'hypothèse est une disjonction de propositions.

FIGURE 6.25 – La démonstration par disjonction des cas dans le manuel Symbole (extrait)

Aucun manuel de 2010 ne propose de justification de la validité du raisonnement par disjonction des cas.

Le raisonnement par contre-exemple

La notion de contre-exemple est présente dans presque tous les manuels de 2010, hormis *Déclic* et *Symbole*, et sept des huit manuels qui évoquent cette notion proposent un paragraphe sur le « raisonnement par contre-exemple » (*Pixel* ne mentionne ce terme que dans un exercice corrigé). Ces paragraphes ont déjà été commentés dans le paragraphe sur les quantificateurs (voir page 253).

Récapitulatif de l'analyse sur les différents type de raisonnement

La distinction aspect syntaxique/aspect sémantique n'a pas de sens pour les types de raisonnement ; je me contente donc de mentionner les types de raisonnement qui sont présents dans les manuels.

	Modus ponens	Raisonnement par contraposition	Raisonnement par contraposée	Raisonnement par l'absurde	Raisonnement par disjonction des cas	Raisonnement par contre-exemple
Aleph0	OUI	OUI		OUI		OUI****
Queysanne Revuz	OUI	OUI	OUI*	OUI	OUI	OUI****
Lespinard						
Déclic						
Hyperbole			OUI***	OUI	OUI***	OUI
Indice						OUI
Math'x			OUI	OUI	OUI	OUI
Odyssée			OUI*	OUI	OUI	OUI
Pixel						
Repères			OUI	OUI**	OUI	OUI
Symbole				OUI**	OUI	
Transmath		OUI		OUI**	OUI***	OUI****
Travailler en confiance			OUI*	OUI	OUI***	OUI

* : l'équivalence entre une implication et sa contraposée est justifiée.

** : le raisonnement par l'absurde est présenté seulement dans le cas d'une implication.

*** : le manuel propose seulement un exemple

**** : la validité de la démonstration par contre-exemple est liée à la négation des propositions universelles.