Analyse de la formation continue « Initiation à la logique »

Sommaire

Depuis 2010, l'IREM de Paris propose dans le cadre de la formation continue des enseignants un stage « Initiation à la logique » [1]. René Cori a été l'initiateur de cette formation, je l'ai rejoint dès la première édition du stage en janvier 2010. À la suite de cette première édition, nous avons proposé la constitution d'un groupe de travail, « le groupe Logique », à l'IREM de Paris, et d'autres membres de ce groupe, notamment professeurs du secondaire, sont intervenus dans les éditions suivantes de la formation.

Les besoins de formation mis en évidence montrent la nécessité d'un double apport théorique et pratique dans une formation d'enseignants à la logique. Le choix fait pour cette formation est de ne pas aborder le contenu disciplinaire sous la forme d'un cours de logique mathématique, mais de le faire à travers l'étude du langage mathématique, la logique mathématique servant de référence pour expliciter les nombreuses façons de dire des mathématiciens, qui ne sont pas toujours entendues par les élèves comme nous le souhaiterions (et qui comportent parfois des ambiguïtés malheureuses). Ces apports théoriques ont donc également un aspect pratique puisqu'ils s'appuient sur le langage, notamment celui utilisé dans la classe de mathématiques. Présentations d'activités proposées en classe, analyses des programmes et des manuels viennent compléter l'apport pratique en préparant le travail de transposition dans la classe.

Dans un premier temps je présente le scénario de la formation 2013, qui correspond au projet complet de la formation et inclut :
– les objectifs de la formation, présentés dans leurs grandes lignes, et tels qu'annoncés aux stagiaires,
– les modalités de la formation,
– le contenu et l'organisation.
Je compare ensuite ce scénario aux besoins de formation concernant l'enseignement de notions de logique, et propose ainsi une analyse *a priori* de la formation. J'analyse ensuite la formation effectivement proposée, à la manière d'une analyse *a posteriori* qui permet de confronter la réalisation aux prévisions.

Le planning général du stage est donné en annexe page 545. Nous pouvons y voir la mise en place effective de différentes séquences alternant exposés théoriques, présentations d'activités, comme cela est décrit dans le scénario.

La première journée du stage est représentative de cette alternance puisqu'elle comporte trois séquences (en plus du moment d'accueil et d'un test de début de stage) : un exposé théorique de R. Cori sur l'analyse du langage mathématique, un exposé théorique de T. Joly sur la dialectique démonstrateur/utilisateur dans le raisonnement mathématique, des présentations d'activités par G. Notter et C. Huet. Elle commence par un moment d'accueil dans lequel nous pouvons voir comment la formation est présentée aux stagiaires

1. Ce stage a eu lieu pour la première fois en 2010, après l'apparition de notions de logique dans les nouveaux programmes de Seconde. L'inexistence de la logique dans la formation initiale des enseignants justifierait une telle formation indépendamment du contenu des programmes.

et les motivations de ceux-ci pour s'y inscrire. Il y a ensuite un test que j'ai analysé notamment pour les renseignements qu'il donne sur les connaissances des stagiaires.

Je présenterai une analyse détaillée du premier exposé. J'y cherche d'éventuelles traces de la constitution d'un savoir de référence : quelles sont les notions étudiées ? Qu'est-ce qui est institutionnalisé et comment ? Je cherche également à évaluer la pertinence du choix de l'entrée dans la logique par l'étude du langage mathématique. Je regarde donc comment les formateurs amènent les stagiaires à s'intéresser à ce pilier de la logique, qui est peut-être pour eux moins évident que le pilier raisonnement. Je présenterai également une analyse des autres séquences de cette première journée, essentiellement pour montrer la mise en œuvre du scénario de la formation. Cette analyse est également guidée par une attention aux connaissances en logique qui sont en jeu, et aux effets du choix de privilégier le langage. Je considère que la représentativité de cette première journée est suffisante pour qu'il ne soit pas nécessaire de présenter ce même travail d'analyse sur les autres journées, qui s'en différencient essentiellement par les contenus abordés.

L'analyse s'appuie sur les vidéos du stage. L'intégralité des échanges de l'exposé de R. Cori et des extraits des autres séquences de la journée sont retranscrites en annexe K.1 page 549.

8.1 Le scénario de la formation

8.1.1 Objectifs

Le stage est publié chaque année depuis 2010 aux Plans Académiques de Formation des académies de Paris (sauf en 2013), Créteil et Versailles. Voici la façon dont il est annoncé :

Objectifs :
Familiariser les participants avec quelques notions de base de logique ne figurant que rarement dans les cursus des universités françaises. Initiation prenant en compte les nouveaux programmes de lycée, où des éléments de logique figurent explicitement.
Contenu du stage :
Langage mathématique naïf. Variables muettes/parlantes. Mutifications explicites/implicites. Connecteurs, quantificateurs. Syntaxe/sémantique. Théories axiomatiques. Preuves. Cardinalité. Logique et pratique des mathématiques en classe.
Méthodes :
Exposés théoriques et exercices d'application. Étude de manuels, de productions d'enseignants et d'élèves. Réflexion sur la manière de présenter à des élèves de lycée quelques outils utiles à une meilleure appréhension du langage et du raisonnement mathématiques. Élaboration avec les stagiaires de scénarios qu'ils pourront expérimenter dans leurs classes avant la dernière journée bilan.

Dans cette annonce, l'accent mis sur le langage apparaît dans le contenu et non dans les objectifs. La place qui lui est accordée dans le stage, nous verrons cela dans l'analyse du contenu, permet pourtant de dire qu'à côté de cet objectif affiché de transmettre des connaissances en logique mathématique, il y a un objectif directement lié aux pratiques des enseignants : faire prendre conscience de nos façons de nous exprimer en mathématiques (les pratiques langagières de la communauté) qui sont complexes, des ambiguïtés et des implicites qui sont de nature à gêner la communication avec les élèves.

8.1.2 Modalités de la formation

Le stage se déroule en présentiel sur trois journées de six heures de formation. C'est une durée qui semble nécessaire pour qu'il y ait place à la fois pour les apports théoriques et pour des propositions pratiques. Les deux premiers jours du stage sont consécutifs, et ont lieu au mois de janvier. Un temps long est ensuite volontairement laissé pour que les stagiaires puissent tester une activité dans leurs classes, et en faire le récit lors de la troisième journée qui a lieu en mars.

Huit formateurs interviennent dans le stage et il y en a souvent trois ou quatre présents en même temps. Ainsi, chaque séquence du stage est prise en charge par l'un d'entre eux, mais avec des interventions des autres présents.

L'organisation globale des différentes séquences est décidée à l'avance, et pour chaque séquence, des grandes lignes du contenu sont fixées. S'y ajoutent des commentaires plus « improvisés » et les réponses à des questions des stagiaires.

8.1.3 Contenu

Dans cette section 8.1.3, pour la description du contenu du stage, ma position de formatrice me permet de rendre compte des intentions de l'équipe des formateurs, à laquelle le texte a été soumis, sans avoir recours à un entretien.

Des éléments de logique mathématique à partir de l'analyse du langage mathématique

Dans ce stage, la logique mathématique est abordée à travers l'analyse du langage mathématique. Il s'agit d'une approche que l'on peut qualifier de « naïve » au sens où certains objets et certaines relations n'y sont pas mathématiquement définis, contrairement à ce qui est fait dans un cours de logique mathématique (et qui est exposé dans l'annexe A page 445). Une des ambitions du stage est de rendre les stagiaires sensibles à certains points dans leur façon de s'exprimer. Le choix de ses concepteurs est donc de consacrer un temps conséquent à cette analyse du langage mathématique, et notamment de lui consacrer la première demi-journée du stage. À partir de phrases qui leur sont familières, les stagiaires sont amenés à analyser certaines formulations à partir d'idées intuitives. Un itinéraire est conçu pour rencontrer différentes notions de logique mathématique qui permettront de reformuler ces intuitions dans des termes plus précis :

- dans un premier temps, les stagiaires sont amenés à prendre conscience de la quantification universelle implicitement associée à l'implication. Cet exemple a une fonction de sensibilisation : il montre qu'il y a lieu de s'interroger sur une formulation dont nous usons très fréquemment sans y faire attention, et crée le besoin d'éléments d'analyse pour expliciter ce phénomène.
- La notion de proposition est ensuite abordée. L'objectif n'est pas d'en donner une définition mathématique, mais d'arriver à circonscrire la notion de proposition aux énoncés qui ne concernent que les objets mathématiques, et d'exclure les énoncés qui mettent en jeu un locuteur. Les propositions constituent une catégorie des expressions mathématiques, l'autre catégorie étant constituée par les noms des objets mathématiques.
- Les connecteurs logiques sont d'abord présentés sous leur aspect syntaxique : ils permettent de construire une nouvelle proposition à partir d'une ou plusieurs autres pro-

positions. Cet aspect syntaxique est moins connu que l'aspect sémantique qui est vu à travers les tables de vérité
– Les variables sont considérées comme la caractéristique du langage mathématique, qui le différencie ainsi du langage courant. Le point essentiel est la distinction entre variable libre et variable liée. Les signes mutificateurs sont ensuite présentés comme des indicateurs infaillibles du fait qu'une variable est liée.
– Les quantificateurs sont vus comme des mutificateurs. Dans plusieurs expressions mathématiques, les quantifications sont implicites, signalées par d'autres mots que les quantificateurs (un, avec...), ou même pas signalées du tout (dans les formulations en *si..., alors...*).
– Un temps spécifique est consacré à l'implication : table de vérité du connecteur, différence entre implication et déduction.

Le langage des prédicats est utilisé comme référence pour exhiber la structure logique des propositions. Quelques tâches de type « thème » sont proposées aux stagiaires sur des formulations à traduire dans ce langage (par exemple, écrire l'expression « il existe exactement un x tel que ... », en utilisant les quantificateurs universel et existentiel), ainsi que quelques tâches de « manipulation » du langage des propositions (sont alors définies les notions de propositions logiquement équivalentes et de tautologie) et du langage des prédicats (distributivité ou non des quantificateurs sur les connecteurs ET et OU par exemple).

Une partie pratique : analyse de manuels et tâches pour les élèves

Les considérations sur le langage mathématique ne sont pas propres à l'activité d'enseignement. Les formateurs les ancrent dans le terrain de la classe en prenant en exemples des formulations possiblement utilisées par les professeurs. Ils laissent aussi la place à des interventions ou questions des stagiaires sur des façons de dire d'eux mêmes ou de leurs élèves.

Un autre lien est fait avec la classe par l'utilisation d'extraits de manuels, dont il est fait une lecture critique. Les notions de logique exposées à travers l'étude du langage mathématique sont utilisées pour l'analyse de ces extraits (par exemple pour expliciter les quantifications dans des énoncés de théorèmes, ou signaler certaines confusions dans des exercices comme celles mises en évidence dans l'analyse des manuels).

La conception de tâches pour les élèves est également abordée dans le stage. Des tâches élaborées dans le groupe Logique de l'IREM de Paris sont présentées. Les formateurs (des professeurs qui ont testé l'activité dans leur classe) exposent aux stagiaires l'historique de l'élaboration de la tâche, ce qui permet d'en faire une sorte d'analyse *a priori*, puis le déroulement en classe, parfois accompagné de réponses d'élèves, et enfin les éventuelles modifications envisagées après un premier essai.

Lors de la deuxième journée de formation, il est proposé aux stagiaires d'élaborer des tâches (ou de reprendre une tâche présentée, ou de partir d'une tâche proposée dans un manuel), de les donner à faire à leur élèves et d'en faire une présentation le dernier jour du stage. Les formateurs indiquent leur disponibilité pour échanger entre les journées de stage sur la conception de ces tâches, ou même pour venir assister à leur réalisation en classe. Rien n'est imposé sur le sujet (quelles notions de logique en jeu) ni sur la nature des tâches (petit exercice ou longue séquence), il s'agit surtout de proposer aux stagiaires d'expérimenter en profitant d'un retour sur cette expérimentation. Les activités exposées viennent aussi augmenter la quantité d'exemples d'activités possibles.

Le(s) raisonnement(s)

Même si c'est un choix délibéré d'axer le stage sur le langage, les concepteurs de la formation n'excluent pas pour autant ce qui concerne le raisonnement. La logique mathématique sert ici aussi d'outil d'analyse, cette fois-ci des démonstrations.

Deux séquences d'apports théoriques sont proposées par des logiciens de l'Université Paris Diderot :
– La présentation d'un système de déduction (la déduction naturelle) pour montrer aux stagiaires comment sont modélisées les démonstrations. Les pas de déduction dans les démonstrations sont ainsi reliés à des règles de déduction.
– La dialectique entre la position de démonstrateur et la position d'utilisateur d'une proposition.

Par rapport aux types de raisonnement évoqués dans les programmes, le choix est fait de ne pas revenir sur chacun d'eux mais seulement de travailler sur les points suivants :
– La distinction entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée.
– Le raisonnement par récurrence, et notamment la gestion de la quantification universelle dans la démonstration de l'hérédité.

Une partie plus culturelle

Deux séquences du stage ont un aspect plus culturel : un bref historique de la logique et une présentation de la place de la logique dans les programmes, notamment de lycée, depuis 1960.

Commentaire

Avant d'entrer dans une analyse plus méthodique de ce contenu, je propose ici un rapide commentaire sur ce qui me paraît être les deux principaux choix qui orientent le stage : une approche naïve et l'accent sur le langage.

Le choix d'une approche naïve des notions de logique a pour but d'essayer d'éviter une rupture entre les connaissances théoriques et les connaissances nécessitées par l'action didactique. On peut penser qu'il permet ainsi une amorce de la transposition didactique des notions de logique au lycée en accord avec les préconisations de l'institution de présenter la logique comme outil pour l'activité mathématique : même s'il n'est en aucun cas suggéré de reproduire avec des élèves la formation proposée aux professeurs, cette approche de la logique mathématique à partir de réflexions sur le langage mathématique est conçue par les formateurs pour être adaptable en classe (les stagiaires peuvent par exemple s'approprier certaines questions récurrentes du stage : quel est le statut des variables ? Quels sont les mutificateurs des variables liées ? Peut-on donner une expression synonyme ? L'adaptation de la formulation de ces questions, le choix des moments pertinents pour les poser, restent par contre à leur charge).

Le choix d'une initiation à la logique prenant comme porte d'entrée le langage est cohérent avec ce que nous avons vu dans la première partie de cette thèse concernant différents systèmes logiques : ceux-ci proposaient une étude, une description, une catégorisation du langage avant d'aborder les schémas de raisonnement. Cependant, l'étude des raisonnements et de leur validité était bien le but ultime de ces systèmes, et dans l'esprit commun la logique est plutôt associée au pilier raisonnement qu'au pilier langage. Dans le stage, le temps occupé par des séquences sur les démonstrations reste faible. Au vu de ce qui précède, il s'agit d'un choix qui révèle une position peu courante, qui risque d'être en porte-à-faux avec les attentes des stagiaires. D'où une contrainte : il ne s'agit pas seulement d'exposer des considérations sur le langage, mais aussi de montrer l'intérêt didactique de ces considérations et de les éclairer en invoquant la logique mathématique, ce qui demande forcément plus de temps. Ainsi, le choix, épistémologiquement pertinent, de l'entrée par le langage est coûteux en temps. Par ailleurs, si certaines notions de logique mathématique utilisées pour l'étude du langage sont familières aux professeurs de mathématiques, ce n'est pas le cas des notions de la théorie de la démonstration nécessaires pour l'étude des preuves. Une initiation à la façon dont la logique mathématique traite de ces questions de raisonnement prendrait donc beaucoup plus de temps.

8.1.4 Comparaison des choix de contenu de la formation et des besoins de formation

Globalement, nous pouvons dire que les choix de contenu du stage répondent à un double besoin théorique et pratique. Regardons maintenant chaque besoin de formation repéré en page 316 :

1. *Absence de savoir de référence.* Les notions de logique mathématique sont utilisées dans la formation. Comme déjà dit, ces notions ne font pas l'objet d'une définition mathématique mais sont précisées à travers une approche naïve. La logique ma-

thématique constitue un savoir savant auquel se réfèrent les formateurs, mais qui n'est pas forcément constitué comme tel pour les stagiaires. Ce qui est proposé est donc bien un intermédiaire entre savoir savant et savoir à enseigner, permettant des amorces pour le travail interne de la transposition didactique.

2. *Savoir à enseigner mal défini.* Les programmes sont étudiés avec une perspective historique qui peut donner des éléments pour l'interprétation de ceux actuellement en vigueur. La formation n'a pas pour but de remédier aux imprécisions du programme, et ne passe pas en revue tout ce qui aurait besoin d'être commenté dans les manuels, cela serait évidemment trop long et fastidieux. Le traitement de quelques exemples montre comment mobiliser les connaissances théoriques pour critiquer les propositions des manuels, et suggérer des alternatives.
3. *Contrainte sur l'organisation de l'enseignement.* Les notions de logique sont abordées dans les présentations d'activités pour les élèves. Celles-ci sont faites par des professeurs les ayant testées dans leurs classes, qui apportent ainsi leurs témoignages.
4. *Hétérogénéité des connaissances des professeurs.* La formation est conçue pour que chacun reparte avec un minimum commun de connaissances, notamment sur l'étude du langage qui est un contenu original. Elle comble l'absence totale de formation en logique pour certains stagiaires, et complète la formation que certains ont pu avoir, grâce à une initiation à la logique au début du supérieur, ou parce qu'ils ont été élèves au temps des mathématiques modernes, en reliant des connaissances théoriques, qu'ils avaient déjà en grande partie, à l'activité mathématique.
5. *Instabilité de la place de la logique dans les programmes.* Elle est l'objet d'une séquence, qui permet de la mettre au jour, d'en commenter les conséquences. Cela ne permet cependant pas de remédier au manque de ressources, au manque d'habitudes dus à l'absence de la logique dans les programmes entre 1981 et 2009.

Dans sa conception, le stage semble donc prendre en compte la plupart des besoins de formation précisés ci-dessus en permettant que chacun reparte avec quelques outils et des exemples types pour pouvoir poursuivre individuellement la réflexion sur l'enseignement de notions de logique.

8.2 Déroulement et analyse de la première journée du stage de 2013

8.2.1 Présentation de la formation

Après avoir rappelé des détails pratiques (horaires, salles ...), R. Cori demande aux stagiaires qui veulent s'exprimer de dire pourquoi ils se sont inscrits à ce stage (détail des réponses en annexe page 549, dialogue 0.1).

Nous retrouvons dans les échanges plusieurs points déjà mis en évidence dans l'analyse du questionnaire : la double demande de connaissances théoriques et d'activités pratiques, le malaise par rapport aux injonctions de faire de la logique une préoccupation constante, mais sans faire de cours, par rapport au contenu des manuels, la réaction par rapport aux nouveaux programmes. Comme on pouvait s'y attendre, le raisonnement est évoqué dans plusieurs réponses, mais pas le langage.

R. Cori demande ensuite qui a eu une formation en logique mathématique : sur 18 stagiaires présents, un seul a fait de la logique à l'université, une autre suit actuellement un cours de logique, une troisième évoque une initiation en classe préparatoire. Deux autres ont fait de la logique au lycée au moment des mathématiques modernes.

Nous avons vu que prendre la logique mathématique comme référence pour parler de logique dans la classe de mathématiques au lycée n'est pas forcément un choix consensuel, et qu'axer une formation à la logique sur le langage peut être inattendu. R. Cori prend le temps dans cette séquence de présentation de la formation de rappeler ces deux points (voir comment en annexe page 552, dialogue 0.4).

Finalement, cette introduction a pour but de partager la responsabilité du contenu de la formation. Celui-ci a beau être en grande partie fixé à l'avance, interroger les stagiaires sur leurs motivations permet de vérifier qu'il n'y aura pas trop de décalage avec leurs attentes ; ré-annoncer les axes du stage permet d'en faire une référence partagée.

À la suite de cette séquence d'introduction, un test est distribué aux stagiaires, destiné à mettre en jeu certaines de leurs connaissances en logique. Ces exercices serviront ensuite de base de discussion. Lors de la session 2013, il a aussi été distribué aux stagiaires un test sur la façon d'entendre certaines formulations de propositions quantifiées (préparé dans le cadre d'un travail de T. Joly qui intervient dans le stage) et une version allégée du questionnaire utilisé dans cette thèse (que les stagiaires pouvaient remplir ultérieurement).

8.2.2 Test de début de stage

Présentation

Le test comporte 3 exercices (il se trouve dans son intégralité en annexe page 557). Le premier porte sur la quantification universelle implicite associée à l'implication, le deuxième met en jeu des implications avec une prémisse fausse, le troisième concerne négation et réciproque. Ces exercices seront repris collectivement à différents moments du stage, le test a pour but que chaque stagiaire ait pris le temps d'y réfléchir. Dans le premier et le troisième exercice, il n'y a rien qui permette aux stagiaires de contrôler leurs réponses, c'est la confrontation des réponses les unes avec les autres lors de phases de collectivisation qui pourra amorcer des rétroactions. Dans le deuxième, le fait de trouver une solution constitue une rétroaction qui valide la démarche.

J'ai réalisé pour chaque exercice une analyse a priori et une analyse des réponses des stagiaires (18 réponses collectées). Je présente ici ce qui concerne le premier exercice que nous retrouverons par la suite ; les autres se trouvent en annexe page 557.

Analyse du premier exercice

Exercice 1.
Pouvez-vous vous prononcer sur chacun des énoncés suivants (dans lesquels la variable n est astreinte à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels) ?

(1) n est un carré parfait et n est impair.

(2) n est impair $\Rightarrow$ n est premier.

(3) n est divisible par 5 ou n n'est pas divisible par 4.

Figure 8.1 – Premier exercice du test de début de stage

Analyse a priori :

Cet exercice a été conçu par les formateurs qui ont délibérément choisi de ne pas faire apparaître les termes « vrai » et « faux » dans la consigne de l'exercice. Il n'est pas possible de demander « les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? » puisque nous ne pouvons pas savoir s'ils sont vrais ou faux par manque d'information sur l'individu n. Il aurait été possible de laisser la question ouverte : « pouvez-vous dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux ? », ou « pourriez-vous vous prononcer sur la vérité de chacun des énoncés suivants ? », mais cela aurait restreint les réponses possibles, en empêchant celles qui ne parlent pas de vérité. La consigne (« pouvez-vous vous prononcer sur ») est donc volontairement très ouverte, ce qui a cependant l'inconvénient d'amener un éventuel malaise quant à la tâche à réaliser.

La flèche d'implication est volontairement utilisée plutôt que la formulation en *si..., alors...* pour faire ressortir la structure commune aux trois énoncés (de la forme $P_1 \alpha P_2$, où P_1 et P_2 sont des propositions dans lesquelles la variable n est libre, et α un connecteur binaire). Pour accentuer cette similitude, il aurait été possible d'utiliser dans les trois énoncés les mêmes propositions élémentaires (par exemple « n est impair » et « n est premier »). Dans ce cas, la ressemblance plus frappante entre les trois énoncés pourrait agir rétroactivement en amenant davantage les stagiaires à les considérer globalement. Ici, chaque énoncé va sans doute être traité pour lui-même, et la réflexion se porter plus sur le contenu mathématique de chacun plutôt que sur la structure commune aux trois énoncés. Ceci d'autant plus qu'une analyse de la structure d'une proposition n'est pas du tout un exercice habituel en mathématiques.

L'expression « astreinte à » ne fait pas partie du vocabulaire courant en mathématiques, mais est abondamment utilisée par les formateurs. Sa présence ici dénote leur volonté de la faire connaître. Il faudra peut-être l'expliquer, bien que l'exercice puisse se faire sans vraiment la comprendre, puisqu'il est habituel que la lettre n désigne une variable de type entier naturel.

L'énoncé (2) est d'une forme tout à fait courante : lu avec une quantification universelle implicite, il est de la même forme que de nombreux théorèmes ou propriétés rencontrés en mathématiques. Et dans les manuels plusieurs exercices estampillés *Logique* demandent de se prononcer sur la valeur de vérité d'une implication, la quantification universelle étant presque systématiquement implicite. Nous pouvons donc nous attendre à une quasi unanimité des réactions : se demander si c'est vrai ou faux, puis dire que c'est faux en exhibant un contre-exemple.

La situation est toute différente pour les énoncés (1) et (3). Ceux-ci ne sont jamais rencontrés tels quels. Nous pouvons donc nous attendre à des réactions beaucoup plus variées :
– considérer qu'on ne peut rien dire sur ces énoncés,
– les lire également comme universellement quantifiés, et conclure qu'ils sont faux,
– dire qu'ils peuvent être parfois vrais, parfois faux, selon la valeur attribuée à la variable n (en donnant éventuellement des valeurs), ce qui est une autre manière de répondre sur la valeur de vérité de l'énoncé,
– dire qu'ils sont parfois vrais (en donnant éventuellement des valeurs), ce qui est une façon de se prononcer sur la « consistance » de l'énoncé,
– chercher une proposition équivalente (par exemple « n est le carré d'un nombre impair » pour le premier énoncé ; il n'y a pas de proposition équivalente plus simple pour le troisième, mais il peut par contre être mis sous le forme d'une implication « n est divisible par $4 \Rightarrow n$ est divisible par 5 »).

Le réel enjeu de cet exercice est la mise au jour de la quantification universelle associée à l'implication, éclairée ici par le contraste entre les réactions face aux énoncés (1) et (3) et la réaction face à l'énoncé (2), mais il n'est pas vraiment perceptible dans cette seule version écrite de l'exercice à laquelle les stagiaires répondent individuellement. L'analyse des réponses écrites présentée ci-dessous permet de montrer qu'il y a effectivement des réactions contrastées. Nous verrons ensuite comment le formateur reprend cet exercice pour arriver à cette mise au jour.

Réponses des stagiaires :[2]

R. Cori suscite lui-même le questionnement autour du terme « astreinte à » (voir dialogue 0.5 en annexe page 553), qu'il se contente d'abord de reformuler : « ça veut dire que lorsque vous la [la variable n] rencontrerez dans le discours qui suit, et bien elle ne pourra désigner que des entiers naturels, c'est une sorte d'ensemble de référence. » Un stagiaire

2. Un stagiaire n'a pas répondu à cet exercice, il y a donc 17 réponses.

demande pourquoi on ne dit pas « n appartient à $\mathbb{N}$ », ce qui amène le formateur à préciser la distinction entre la lettre de variable et l'élément qu'elle représente :

> [...] je tiens à faire la différence entre la variable en tant que symbole, la lettre, et puis l'élément qu'elle représente, entre ce qu'on appelle le signifiant et le signifié. Vous avez des éléments, les entiers, et puis vous utilisez des lettres, des variables pour les nommer. Quand je dis la variable n, je ne parle pas d'un élément, je parle de cette lettre là, et quand je dis elle est astreinte ça veut dire que les éléments qu'elle est appelée à désigner dans ce qui suit seront des éléments qui appartiennent à $\mathbb{N}$.

– Réponses pour l'énoncé (1) [3] :

Réponse	Nombre de stagiaires ayant donné une telle réponse
Ne se prononcent pas	1
C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres	4 (2 donnent des valeurs)
C'est vrai pour certaines valeurs	5 (en donnant des valeurs)
C'est faux	2
Proposition équivalente	3
Reformulation	3
Réponse non catégorisée	1

J'ai compté comme *Reformulation* les réponses qui étaient seulement des traductions dans un autre registre que celui de l'énoncé, par exemple « $(\exists k \in \mathbb{N} \mid n = k^2)$ et $(\exists k' \in \mathbb{N} \mid n = 2k' + 1)$ », et j'ai compté comme *Proposition équivalente* les réponses dans lesquelles le stagiaire a utilisé des connaissances mathématiques pour finalement aboutir à la proposition équivalente « n est le carré d'un nombre impair ». Par exemple, une réponse telle que « $n = q^2 = 2p+1$. n est le carré d'un nombre impair » est comptée dans les deux catégories car la première partie est un simple changement de registre, alors que la deuxième nécessite la mise en œuvre de connaissances mathématiques.

– Pour l'énoncé (2), tous les stagiaires sauf un répondent qu'il est faux puisqu'ils le lisent comme universellement quantifié, 13 disent explicitement qu'il est faux en donnant un contre-exemple, 3 donnent seulement un contre-exemple. Seul un stagiaire répond qu'il n'est « pas toujours vrai », ce qui à nos yeux est sans doute la réponse la plus correcte du point de vue de ce qui est réellement écrit (c'est-à-dire une implication sans quantification). Notons que face aux deux autres énoncés, ce stagiaire ne réagit pas de la même façon, mais se demande si « c'est une condition ? »

– Réponses pour l'énoncé (3) [4] :

3. Un stagiaire n'a pas répondu à cette question, mais seulement aux deux autres.
4. Deux stagiaires n'ont pas répondu à cette question, mais seulement aux deux autres.

Réponse	Nombre de stagiaires ayant donné une telle réponse
Ne se prononcent pas	1
C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres	1 (donne « la liste » des éléments la vérifiant, quelques uns ne la vérifiant pas
C'est vrai pour certaines valeurs	4 (3 en donnant des valeurs)
C'est faux	3
Proposition équivalente	0
Refomulation	3
Réponse non catégorisée	3

La réponse comptée dans « C'est vrai pour certaines valeurs, faux pour d'autres » se présente sous la forme d'une liste des éléments vérifiant l'énoncé, la précision de valeurs ne le vérifiant pas, et finalement une « description » de l'ensemble des valeurs le vérifiant en disant que c'est « $\mathbb{N} \setminus$ les multiples de 4 qui ne sont pas multiples de 5 ».

Nous retrouvons dans les réponses écrites des stagiaires la diversité de réactions face aux énoncés (1) et (3) qui contraste avec la réaction unanime face à l'énoncé (2). Par contre, rien n'indique dans les réponses individuelles que les stagiaires questionnent cette différence de réaction. Ce sera au formateur d'amorcer cette réflexion dans la discussion collective qui suit immédiatement.

Synthèse sur le test

Ce test de début de stage met les professeurs en activité, amorce une réflexion même si nous avons vu qu'elle était limitée par le fait que la résolution individuelle des exercices n'amène sans doute pas les questionnements attendus qui en sont les véritables enjeux. L'analyse des réponses montre globalement un manque de connaissances en logique chez les stagiaires.

D'une certaine façon ces exercices ont pour but de déstabiliser les stagiaires en les mettant, lors de la reprise collective, face à des réponses éventuellement contradictoires entre elles.

8.2.3 Méthodologie d'analyse de l'exposé théorique sur l'étude du langage

L'exposé théorique de R. Cori, qui suit le test et prend toute la fin de la matinée, est consacré à l'analyse du langage mathématique. J'ai réalisé une analyse de cette partie du stage en suivant deux axes :
- d'une part analyser l'activité du formateur,
- d'autre part, analyser la mise en jeu des connaissances sur les notions de logique, et la constitution d'un savoir de référence.

L'exposé vise donc à montrer une analyse du discours mathématique, à partir de l'exemple de certaines expressions. Cette analyse met au jour ce qui est dit, ou pas, ce qui peut être entendu, ou pas. Elle est donc importante pour la clarté de la communication avec les élèves, qui est bien sûr un souci des enseignants. À l'instar de ce que j'ai présenté dans la deuxième partie de cette thèse, elle utilise des notions de logique mathématique (voir description du contenu page 326), qui sont introduites dans leur dimension d'outils d'analyse du langage. Il y a là une utilisation sans doute inhabituelle pour les enseignants. Mais la dimension objet de ces notions est nécessaire pour que se constitue un savoir de référence, nous serons ainsi attentifs à la dialectique outil/objet (voir page 99) dans cet exposé.

Il y a une intention didactique dans la formation, ce qui justifie de l'analyser à l'aide de la théorie des situations didactiques. Il n'est pas question d'assimiler le formateur à un professeur, les stagiaires à des élèves, la formation à un cours de mathématiques, mais d'utiliser des outils ayant fait leurs preuves dans le contexte de la classe de mathématiques dans un contexte qui présente une forte analogie.

Ainsi, je m'appuie tout d'abord sur les travaux de M. Hersant et M.J Perrin-Glorian sur l'analyse des séquences ordinaires. En particulier, l'analyse de cette matinée reprend des éléments présentés dans l'article *Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué* (Hersant, 2004). En effet, le cours dialogué m'a paru une pratique d'enseignement proche du « style » adopté par R. Cori dans la formation.

M. Hersant caractérise cette pratique de la façon suivante :

> Le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif mais il n'effectue pas réellement la dévolution du problème à ses élèves puisque la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation n'est laissée aux élèves qu'à de rares moments et que le professeur privilégie une résolution collective et guidée du problème, en s'appuyant sur quelques élèves de la classe.
>
> Par ailleurs, dans cette facon de procéder l'institutionnalisation est très diluée tout au long de l'enseignement et s'effectue uniquement au moment de la correction d'exercices : il n'y a pas de moment d'institutionnalisation formelle, comme on peut l'observer dans la classe de l'autre professeur lorsque l'enseignant fait ce qu'il appelle une « lecon ». (Hersant, 2004, p. 24)

Je m'appuie également sur la structuration du milieu qui vise à rendre compte des actions sur le milieu qui font évoluer la situation. C'est une grille de lecture des actions du formateur et des stagiaires. J'adapte le modèle de structuration du milieu de C. Margolinas présenté dans *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations* (Margolinas, 1995, p. 7) :

M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	a-didactique
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant		S-2: situation de référence	
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage	
M0: **M-d'apprentissage**	**E0:** **Elève**	**P0:** **Professeur**	**S0:** **situation didactique**	
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	surdidactique
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction	
M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne	

FIGURE 8.2 – La structuration du milieu

Pour C. Margolinas, une analyse ascendante des niveaux -3 à 0 permet d'étudier les actions possibles et effectives des élèves (ici les stagiaires) et les connaissances mises en jeu. Une analyse descendante des niveaux +3 à 0 permet d'étudier l'activité du professeur (ici le formateur), de la préparation à la gestion effective de la situation dans la classe (ici dans la formation).

Les séquences d'exposé que j'analyse ont souvent comme point de départ une question posée par le formateur, à laquelle les stagiaires ont à répondre individuellement par écrit ou collectivement à main levée. À partir de ces réponses, le formateur guide l'évolution du milieu vers la connaissance visée. Je m'intéresse aux échanges qui ont lieu pendant le stage et je me concentre sur l'analyse de la situation didactique et du milieu d'apprentissage.

Selon C. Margolinas, ce milieu M_0 est déterminé par les niveaux inférieurs et les niveaux supérieurs :
– Pour le professeur, il est un milieu d'observation. Son action est déterminée par le résultat de sa position d'observateur au niveau S_{-1}, et par son projet au niveau S_{+1} : il régule alors les réponses proposées par les élèves, valide et institutionnalise les conclusions.
– Pour l'élève, il est milieu d'apprentissage. Il a mis en œuvre des connaissances au niveau S_{-1}, et son action est influencée par la volonté d'être en position réflexive par rapport à ces connaissances au niveau S_{+1}.

Cette double détermination est résumée dans le schéma suivant, issu de la thèse de S. Clivaz *Des mathématiques pour enseigner, Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*[5] (Clivaz, 2011, p. 57) :

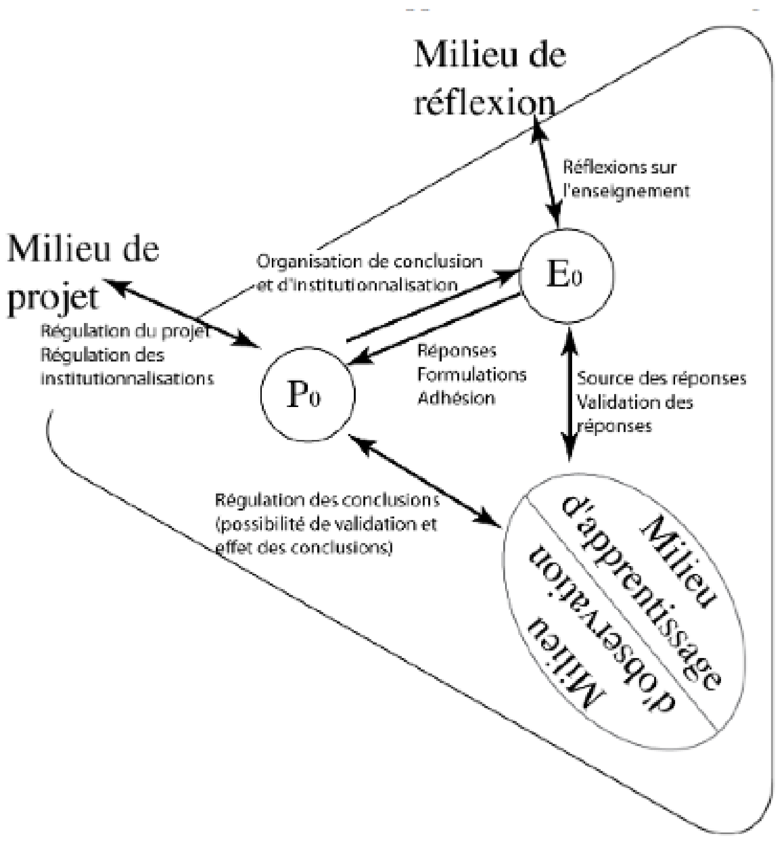

FIGURE 8.3 – Structuration du milieu autour du milieu M_0

Je cherche précisément à mettre en évidence ces régulations. Dans la mesure où je m'intéresse à la pertinence d'une formation à la logique prenant comme porte d'entrée l'analyse

5. Il reprend le schéma proposé par C. Margolinas, mais sa présentation montre les trois éléments milieu, élève, professeur dans une présentation triangulaire de la situation.

du langage mathématique, je cherche à identifier ce que les stagiaires comprennent sans difficulté, et les leviers utilisés par les formateurs pour dépasser certaines résistances.

J'ai utilisé le découpage en trois niveaux proposé par M. Hersant pour organiser les données :
– chaque *séquence* présente une unité dans l'objectif d'enseignement ;
– chaque *phase* présente une unité dans l'activité du formateur et des stagiaires,
– chaque *épisode* présente une unité d'objet d'interaction.
Les séquences ont été délimitées à partir de l'observation de la formation et du contenu prévu dans le scénario. Il y a 6 séquences dans la matinée (les phases sont celles listées dans le tableau ci-après) :

1. Sur la quantification universelle implicite des implications (Phases 1 et 2).
2. Sur la notion de proposition, et plus généralement d'expression mathématique (Phase 3).
3. Sur l'activité mathématique consistant à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques (Phases 4 et 5).
4. Sur la présence de variables comme distinction fondamentale entre langue usuelle et langage mathématique (Phase 6 à 10).
5. Sur le statut muette/parlante des variables (Phases 11 à 15).
6. Sur la différence entre *si A alors B* et *A donc B* (Phases 16 et 17).

J'ai réparti les phases en trois catégories différentes en fonction de l'activité du formateur et des stagiaires :
– Des situations : dans ces phases, une tâche est proposée par le formateur, les stagiaires essaient de la résoudre. Il y a une connaissance visée, d'où l'analyse de ces phases comme des situations didactiques. Le formateur propose la tâche (dévolution), guide sa résolution (par son action sur le milieu), conclut (institutionnalisation).
– Des sollicitations : ces phases sont initiées par une question du formateur. Les stagiaires proposent diverses réponses, le formateur les commente, les valide ou les infirme.
– Des exposés : ce sont des phases dans lesquelles le formateur parle et les stagiaires écoutent. Il peut y avoir à l'intérieur des phases d'exposé des sollicitations très ponctuelles.

S1, phase 1	La quantification universelle implicite des implications : prise de conscience.	Situation
S1, phase 2	La quantification universelle implicite des implications : les problèmes que cela peut poser.	Exposé
S2, phase 3	La notion de proposition.	Situation
S3, phase 4	En quoi consiste l'activité mathématique ?	Sollicitation
S3, phase 5	Dans l'activité mathématique, on cherche à avoir le maximum d'informations sur des objets mathématiques.	Exposé
S4, phase 6	Y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?	Sollicitation
S4, phase 7	Différence syntaxe/sémantique.	Exposé
S4, phase 8	Y a t-il une différence entre la langue usuelle et le langage mathématique ?	Sollicitation
S4, phase 9	Les symboles ne sont pas une distinction fondamentale.	Exposé
S4, phase 10	Présence de variables dans le langage mathématique.	Exposé
S5, phase 11	Importance des variables muettes en mathématiques.	Exposé
S5, phase 12	Exemple d'une proposition mathématique avec une variable muette.	Sollicitation
S5, phase 13	Synonymie.	Exposé
S5, phase 14	Identification de signes mutificateurs.	Sollicitation
S5, phase 15	Retour sur les énoncés « n est premier et n est impair » et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair ».	Exposé
S6, phase 16	Table de vérité de l'implication.	Exposé
S6, phase 17	Différence entre *si A alors B* et *A donc B*.	Exposé

FIGURE 8.4 – Les différentes phases de l'exposé théorique sur l'analyse du langage mathématique

Je présente ci-après une analyse détaillée des deux premières séquences dans lesquelles sont déjà présentes plusieurs notions de logique mathématique : proposition, variable, connecteur, quantificateur. Les séquences suivantes seront présentées plus rapidement dans le but surtout de rendre compte du déroulement effectif du stage et du cheminement choisi par le formateur. Des encadrés résument les observations sur chaque séquence.

8.2.4 Analyse de la séquence 1 : sur la quantification universelle implicite des implications

Phase 1 : la quantification universelle implicite des implications : prise de conscience

La première situation didactique mise en place dans le stage a pour but de mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication. Les notions de logique nécessaires pour agir dans cette situation sont celles de variable, proposition, connecteur, quantificateur universel. Les formateurs font l'hypothèse qu'elles sont insuffisamment identifiées comme objets par les stagiaires pour que ceux-ci les utilisent spontanément pour expliquer ce qui se passe. Au-delà de l'utilisation de ces notions de logique, le rôle de cette situation est donc aussi d'être un moment crucial pour d'une part faire prendre conscience aux stagiaires de l'existence d'implicites dans les pratiques langagières de la communauté mathématique, et des problèmes qu'ils peuvent susciter, d'autre part montrer comment la logique mathématique fournit des outils adéquats pour analyser ces phénomènes langagiers.

Cette situation commence avec l'exercice 1 du test de début de stage, il n'y a initialement dans le milieu que l'énoncé de l'exercice. La tâche qui est alors proposée aux stagiaires n'est pas le réel enjeu de la situation, son but est seulement de constituer le *milieu de référence* (voir tableau de la structuration du milieu page 337) puisque l'enjeu réel, expliquer la différence de réactions face aux trois énoncés, ne sera dévoilé qu'une fois les réponses mises en commun.

J'ai découpé le déroulement de la phase 1 en 10 épisodes E_0 à E_9, présentés dans le tableau ci-après, caractérisés chacun par une action du formateur modifiant la situation.

Épisode	Ce qui est visé	Action du formateur	Ajouts dans le milieu
E_0	Les stagiaires répondent individuellement à l'exercice.	Soulève le questionnement sur le terme « astreinte à ».	Explication du terme « astreinte à », réponses individuelles.
E_1	Mise en commun des réponses.	Note les réponses, compte en particulier les réponses « faux » dans chaque cas.	L'ensemble des réponses.
E_2	La différence de réactions face à ces énoncés est due à la présence de l'implication dans l'énoncé (2).	Pointe que ce qui est intéressant c'est la différence de réactions et demande pourquoi.	La conscience de la différence de réactions et son lien avec l'implication.
E_3	Mise en évidence de la structure $P_1 \alpha P_2$ commune aux trois énoncés.	Introduit le terme « proposition mathématique », pointe l'aspect syntaxique en utilisant l'idée de « fabrication ».	Structure logique de chaque énoncé, termes pour les décrire (proposition, connecteur, fabrication).
E_4	Analyse des propositions élémentaires utilisées pour fabriquer les trois énoncés.	Pointe le statut de variable libre de la variable n, mais sans utiliser cette terminologie, avec l'idée que ces propositions « parlent d'un objet qui s'appelle n ».	Similitude des propositions élémentaires : des affirmations sur un objet qui s'appelle n.
E_5	Relance sur la différence des réactions.	En pointant la construction similaire maintenant établie, relance le questionnement sur la différence des réactions.	
E_6	Amener l'idée de la quantification.	Relance le questionnement en interrogeant ceux qui ont répondu « faux » pour les trois énoncés.	Reformulation universellement quantifiée de l'énoncé (2) : « tous les nombres impairs sont des nombres premiers ».
E_7	Montrer l'implicite de la quantification universelle.	Demande de dire ce qui dit « tous ».	Perception de l'implicite.
E_8	Le *si… alors* est porteur de quantification universelle.	Reprise des éléments précédents.	
E_9	Commentaire sur « astreinte à ».	Répond à une question sur « astreinte à ».	

FIGURE 8.5 – Les épisodes de la première phase sur la quantification universelle implicite

Dans l'épisode E_1 (voir dialogue 1.1 en annexe page 565), le formateur se contente de noter les réponses. Il n'a aucune action particulière en direction des stagiaires, mais il note le nombre de personnes qui ont répondu « faux » pour chaque énoncé.

À la fin de l'épisode E_1, les réponses ont été collectivisées et constituent des éléments matériels du milieu. Ces éléments pourraient être suffisants pour créer une rétroaction du milieu amenant les stagiaires à s'interroger sur le pourquoi de cette différence de réactions, et donc à se lancer dans la résolution d'une nouvelle tâche d'explication. Mais le formateur prend en charge lui-même de faire évoluer la situation vers son enjeu réel, achevant ainsi dans l'épisode E_2 la dévolution de la situation :

> R. Cori : Bon alors ce qui est intéressant c'est de comparer les réactions à 1 et 2, d'accord ? Dans un cas il y a une quasi unanimité pour dire « c'est faux » et dans l'autre cas il y a des hésitations, des « on ne sait pas », des « c'est ambigu », « est-ce que c'est complet », « j'ai un contre-exemple », « ça existe », enfin bon. Alors qu'est-ce qui provoque cette différence de réactions ? [extrait du dialogue 1.2 en annexe page 566]

L'identification de l'implication comme étant la source de la différence de réactions est faite par un stagiaire. Mais pour que l'étrangeté de cette différence apparaisse, il faut qu'elle contraste avec la similitude des structures logiques. Or, nous avons déjà dit que cet élément ne serait sans doute pas perçu facilement car ceci demande une analyse de type « analyse grammaticale » qu'il n'est pas du tout habituel de faire en mathématiques. De plus, nous avons déjà vu que le fait que les propositions élémentaires utilisées pour construire les énoncés ne soient pas les mêmes participe à rendre difficilement accessible cette identification [6]. Nous voyons ici qu'il y a une connaissance nécessaire (« les énoncés ont la même structure logique ») pour que la situation puisse évoluer pour les stagiaires du niveau -1 au niveau 0 qui est celui de l'apprentissage.

Le formateur décide de ne pas les relancer sur le pourquoi de cette différence sans plus d'éléments à leur disposition. C'est sa position de P-projeteur, au niveau S_{+1}, qui influence son action. Il enrichit alors le milieu de deux éléments dans les épisodes E_3 (il s'agit de propositions de la forme $P_1 \alpha P_2$ où α est un connecteur binaire) et E_4 (la variable n est libre dans les propositions P_1 et P_2). Il choisit ainsi d'apporter les connaissances nécessaires à l'évolution de la situation. Les notions de logique utilisées ne sont pas définies : le mot « proposition » est utilisé par le formateur qui demande juste l'accord des stagiaires sur le fait qu'il puisse l'utiliser à propos des énoncés de l'exercice, le mot « connecteurs » est utilisé par un stagiaire en réponse à une question du formateur et le mot « variable » n'est pas utilisé. Cependant, il y a tout de même une certaine décontextualisation qui amène une dimension objet de ces notions : nous pouvons identifier un processus d'ins-

6. Une possibilité que nous utilisons souvent est de projeter alternativement deux diapositives « n est premier et n est impair » et « n est premier $\Rightarrow$ n est impair », on voit alors très bien que le changement est minime, mais cela n'amène pas forcément un questionnement sur le contraste entre ce changement minime et le changement de réactions.

titutionnalisation qui se fait notamment à travers l'utilisation répétée de certains termes ou expressions : *propositions*, *fabriquées*, *affirmations qui concernent un objet qui s'appelle n*. L'aspect syntaxique des connecteurs est explicitement mentionné : « à partir de propositions on en fabrique d'autres en utilisant ce qu'on appelle les connecteurs ».

Dans l'épisode E_5, le formateur reprend les éléments mis en place : les énoncés sont construits de manière similaire, pourtant les réactions sont différentes. Il relance le questionnement, mais aucun stagiaire ne répond.

R. Cori utilise alors le levier suivant dans l'épisode E_6 : s'appuyer sur les stagiaires qui ont répondu « faux » pour les trois énoncés, ceux-ci les ayant vraisemblablement lus tous trois comme universellement quantifiés. De fait, un vocabulaire exprimant la quantification apparaît tout de suite dans la première réponse d'un stagiaire, même si celle-ci est un peu embrouillée : « c'était faux tout le temps enfin c'était pas faux tout le temps mais c'était faux une fois ». Finalement un échange entre R. Cori et une stagiaire se conclut par une reformulation de l'énoncé (2) (l'implication) avec une quantification explicite : « Ben la deuxième elle dit que tous les nombres impairs sont des nombres premiers » (voir dialogue 1.6 en annexe page 568).

Cette idée de reformulation est un autre levier possible : l'énoncé (1) est équivalent à « n est le carré d'un entier impair », reformulation qui pourrait être trouvée par les stagiaires, et dans laquelle la variable n est toujours présente. Il est très probable qu'en demandant une reformulation de l'énoncé (2), la proposition obtenue ne comporte plus la variable n, ce qui est une autre manière de voir que nous ne lisons pas les deux énoncés de la même façon.

La reformulation avec quantification universelle explicite de l'énoncé (2) est finalement le but recherché. Dans l'épisode E_7 le formateur demande ce qui permet d'interpréter l'énoncé (2) comme une proposition universellement quantifiée, et un stagiaire mentionne alors l'implicite associé à l'implication : « Implicitement, quand il y a une implication, c'est que [...] ça doit être vrai pour tout n ».

L'épisode E_8 peut être assimilé à un temps d'institutionnalisation de cette nouvelle connaissance, ce que fait le formateur sur le mode de la métaphore :

> R. Cori : vous avez des yeux de mathématiciens, ce qui n'est pas étonnant puisque vous êtes professeurs de mathématiques. Et dans les yeux des mathématiciens, c'est comme ça qu'on sélectionne les mathématiciens : on leur fait subir un examen ophtalmologique et on regarde si leurs yeux sont configurés comme il faut ; et la configuration d'un œil de mathématicien, c'est que quand il voit ça *(montre l'implication)*, en réalité il voit quelque chose que les yeux des êtres humains normaux ne voient pas, et ce qu'il voit et que les yeux des êtres humains ne voient pas c'est ça *(écrit le quantificateur universel devant l'implication)*. [extrait du dialogue 1.8 en annexe page 569]

Dans cet extrait le quantificateur universel n'est pas nommé pour faire ressortir le fait qu'il est considéré comme présent mais sans l'être effectivement. Le terme « quantification universelle » n'est utilisé par le formateur qu'à la fin de l'épisode E_8 : la conclusion est ainsi que « le *si... alors* est porteur de quantification universelle ».

Le dernier épisode E_9 est relancé par la question d'un stagiaire : « Ce qui était écrit dans l'énoncé au-dessus entre parenthèses, n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels, est-ce que c'est pas équivalent à ça [à quantifier universellement la proposition] ? » Cette question n'est pas surprenante : nous avons déjà dit que l'expression « n est astreinte à » n'est pas une expression connue des stagiaires. Ainsi, le caractère « méta » de la phrase « n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels » n'est pas perçu par ce stagiaire. En substituant « n est astreinte à » au quantificateur universel supposé placé devant le deuxième énoncé, nous obtenons la phrase « n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels, n est impair $\Rightarrow n$ est premier ». Cette phrase n'est pas une proposition mathématique, et donc *a fortiori* n'est pas équivalente à la proposition « pour tout entier naturel n, n est impair $\Rightarrow n$ est premier ». Le formateur ne reprend pas cette distinction, car la notion de proposition est encore trop imprécise à ce moment du stage, il se contente de souligner que si cela était équivalent, il y aurait similitude des réactions pour chaque énoncé puisque cette précision portait sur les trois énoncés.

Phase 2 : la quantification universelle implicite des implications : les problèmes que cela peut poser

La situation visant à mettre au jour la quantification implicite des implications est suivie d'un exposé de R. Cori (Phase 2, épisode 1) dans lequel il expose l'importance de la quantification en mathématiques, qui contraste avec son absence dans le discours mathématique scolaire :

> R. Cori : [...] la quantification n'est jamais explicite pour une raison très simple, c'est que nous sortons d'une période, j'espère que nous sommes en train d'en sortir, où les quantificateurs ont été totalement bannis de l'enseignement secondaire. Je me souviens à une époque c'était presque interdit. Je ne parle pas des symboles, les symboles ont été interdits assez rapidement. C'était même interdit de faire état de la quantification. Pourquoi ? Parce que c'est difficile. Très bien, c'est difficile. Sauf que les mathématiques sans quantification, ça n'existe pas. [extrait du dialogue 2.1 en annexe page 571]

Dans cet épisode, les termes « quantification, quantificateur, quantifié » sont utilisés 12 fois, ils sont ainsi rajoutés au lexique du vocabulaire logique utilisé dans le stage.

Le discours tenu par le formateur dans cet épisode a un côté militant. Il peut convaincre, éveiller la conscience, mais il ne montre pas, au sens de donner des arguments pour, l'intérêt d'expliciter la quantification. Pour cette monstration, R. Cori utilise ensuite un exemple concret d'une définition et de la formulation de sa négation (Phase 2, épisode 3, voir dialogue 2.3 en annexe page 573). Il met en scène un étudiant fictif, un bon étudiant, qui connaît bien la définition qui lui a été donnée dans son cours de « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ » :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

mais qui est en difficulté pour en formuler la négation, puisqu'il faut alors penser à la quantification universelle implicite sur la variable n pour rétablir une quantification existentielle dans la négation. Dans ce passage, le formateur laisse les stagiaires formuler eux-mêmes la négation de la proposition, et quand il demande ce qu'est la négation de « A implique B », plusieurs stagiaires répondent « A et NON B ». L'analyse des réponses à la question 2 de l'exercice 3 du test de début de stage, où il était demandé de donner la négation du théorème de Pythagore formulé avec un *si...alors*, a montré qu'une bonne moitié des stagiaires ne savaient pas écrire la négation d'une implication (très peu donnaient une proposition quantifiée existentiellement, et la moitié donnaient une proposition en *si...alors*, voir en annexe page 562). Il aurait d'ailleurs été possible de s'appuyer sur cet exercice pour montrer l'intérêt d'expliciter la quantification. Est-ce que les quelques stagiaires qui répondent ici oralement sont ceux qui ont su répondre correctement au test ? Nous pouvons aussi faire l'hypothèse que certains ont une connaissance d'un résultat « formel » (la négation de « A implique B » c'est « A et NON B »), mais qu'ils n'ont pas su l'appliquer dans le cas du théorème de Pythagore.

Bien qu'ayant montré un inconvénient possible de cet implicite, le formateur précise qu'il ne s'agit pas d'adopter une position dogmatique pour l'explicitation à tout prix des quantifications, mais d'être conscient que nos façons de les dire ne sont pas toujours claires pour les élèves :

> R. Cori : Bon on ne va pas changer ça. Tout ce qu'on peut faire c'est informer, attirer l'attention sur, et dire « attention c'est comme ça que les gens l'interprètent ». Et le fait d'être conscient de ça, ben le jour où vous serez devant des élèves dans une situation où ça pourra intervenir, et bien vous serez mieux armés pour éviter des malentendus, des ambiguïtés. [extrait du dialogue 2.3 en annexe page 573]

Ce que dit le formateur à propos des pratiques des mathématiciens, qu'« on ne va pas changer » peut-être entendu à un autre niveau par rapport aux pratiques des enseignants. Elles ne sont pas stigmatisées dans le discours du formateur, mais amenées à leur conscience et mises en relation avec d'éventuels effets sur les élèves.

Il sera de nouveau question des difficultés que peut amener cette quantification universelle implicite lors de récits d'expérimentations menées en classe qui montrent que certains élèves ne la perçoivent pas : le deuxième jour, C. Hache présente une activité expérimentée dans une classe de Première, pendant laquelle l'implicite de la quantification universelle a amené des désaccords entre les élèves, et le troisième jour je présente rapidement l'activité *Labyrinthe* (décrite dans cette thèse page 82).

Analyse globale de la première séquence

Le but de cette séquence est donc de mettre au jour la quantification universelle implicite associée à l'implication en s'appuyant sur les 3 énoncés « n est un carré parfait et n est impair », « n est impair $\Rightarrow$ n est premier », « n est divisible par 5 ou n n'est pas divisible par 4 ».
Dans cette séquence, le formateur sollicite plusieurs fois les stagiaires, ce qui atténue l'aspect magistral de l'exposé. Mais il suit une progression préalablement décidée (constat de la différence de réactions, constat de la similitude des structures logiques, explicitation de la quantification universelle implicite, difficultés que cela peut amener), et il n'y a pas de réactions de stagiaires qui le poussent à des adaptations de ce déroulement prévu. C'est plutôt l'absence de réponses qui l'amène, dans l'épisode E_6 de la phase 1, à utiliser un nouveau levier pour que la quantification émerge dans le discours des stagiaires. Le milieu n'a pas complètement joué son rôle pour identifier la similitude des structures logiques des trois énoncés, mais même enrichi des éléments nécessaires à cette identification, il ne suffit pas pour que les stagiaires sachent expliquer la différence de réactions face aux trois énoncés.
L'idée de la quantification universelle arrive dans l'épisode E_6 de la phase 1. Il a fallu du temps et plusieurs actions du formateur pour qu'elle émerge. Dans le discours des stagiaires, cette quantification est présente à travers le terme « tous », ou juste après dans l'épisode E_7, lorsqu'un stagiaire soulève le fait de l'implicite : « implicitement, quand il y a une implication, [...] ça doit être vrai pour tout n ». Elle est donc identifiée comme étant présente, mais les stagiaires n'utilisent pas le terme « quantificateur universel ». Ainsi, ils repèrent son rôle sémantique dans l'énoncé, mais n'adoptent pas un point de vue d'analyse syntaxique, dont nous avons déjà dit qu'il n'était effectivement pas fréquent dans l'activité mathématique.
Dans la phase 2, l'implicite de la quantification universelle n'est plus vue seulement sous l'angle de l'analyse du langage, mais sous l'angle didactique en montrant les problèmes que peut poser cet implicite dans la communication avec les élèves (par exemple pour la formulation de la négation, problème classique et levier efficace pour mettre en cause cette pratique de quantification implicite). Le formateur joue ainsi sur les deux tableaux de la formation théorique en logique mathématique et de la formation pratique en lien avec la classe.

Nous voyons aussi dans cette séquence comment le vocabulaire de la logique mathématique est introduit pour permettre une analyse du langage mathématique. À ce moment du stage, ce vocabulaire est employé presque uniquement par le formateur (quelques mots seulement, *connecteur* et *implication*, sont utilisés par les stagiaires). Un processus d'institutionnalisation se fait à travers la répétition de certaines expressions, des décontextualisations ponctuelles amènent la dimension objet des notions de proposition, connecteur, variable.
Certains stagiaires semblent posséder quelques notions de logique mathématique, mais ces notions ne sont manifestement pas disponibles en tant qu'outils pour l'analyse du langage, tâche qu'ils avaient sans doute rarement rencontrée. Par ailleurs, ce savoir n'est pas vraiment sollicité sauf dans l'épisode 3 de la phase 2 quand il faut formuler une négation. Les réponses au test écrit montrent que les quelques stagiaires donnant alors la bonne réponse ne sont sans doute pas représentatifs de l'ensemble des stagiaires présents.
Les données recueillies ne permettent pas de savoir si cette première séquence du stage joue son rôle d'expérience cruciale permettant la prise de conscience de l'existence d'implicites et d'ambiguïtés dans le langage mathématique, et de la pertinence des notions de logique pour les expliciter. Elle est en tout cas conçue pour justifier le travail d'analyse du langage qui va être continué, et gagner l'adhésion des stagiaires pour qui la nécessité de ce travail n'avait peut-être rien d'évident.

8.2.5 Analyse de la séquence 2 : sur la notion de proposition, et plus généralement d'expression mathématique

La notion de proposition a été utilisée pour l'instant dans le stage sans être du tout discutée. Le fait d'appeler « proposition mathématique » des expressions qui étaient effectivement des propositions semble ne pas avoir posé de problèmes aux stagiaires. Cependant, vue l'absence de la logique dans la formation des enseignants, les formateurs ne peuvent pas compter sur une connaissance de l'objet mathématique *proposition* chez les stagiaires. Et nous avons vu plusieurs éléments qui peuvent venir faire obstacle à une conception intuitive en adéquation avec la définition mathématique, notamment la non-distinction entre les propositions, qui ne concernent que les objets mathématiques, et les phrases qui mettent en jeu un locuteur qui fait des mathématiques, ou encore l'idée que ne sont des propositions que les propositions closes, pour lesquelles seul un manque de connaissances mathématiques peut éventuellement empêcher de conclure quant à leur valeur de vérité.

Dans la suite de cette première matinée de formation, R. Cori propose aux stagiaires une situation qui vise à préciser la notion de proposition. Il s'agit, pour plusieurs assemblages de signes, de répondre à la question « est-ce que c'est une proposition mathématique ? » Pour le choix des assemblages, on peut jouer sur les variables suivantes qui font apparaître tel ou tel aspect de la notion de proposition :

- V_1 : Mettre des expressions bien formées et d'autres non, pour aborder l'aspect syntaxique des propositions (et plus généralement des expressions mathématiques) qui sont des assemblages « bien formés ».
- V_2 : Mettre des noms et des propositions pour pouvoir aborder cette distinction dans l'ensemble des expressions mathématiques (voir le paragraphe sur les expressions mathématiques page 110).
- V_3 : Mettre un énoncé avec « donc » et un avec une implication. Nous avons vu, par exemple dans des manuels, qu'il était courant que ces deux types de phrases soient, à tort, lues comme synonymes.
- V_4 : Plus généralement, mettre des énoncés qui relèvent du *langage mathématique* (qui concernent les objets mathématiques seulement), et d'autres qui n'en relèvent pas, mais qui appartiennent au *discours mathématique* (qui mettent en jeu, explicitement ou non, deux interlocuteurs qui communiquent, voir page 110).
- V_5 : Mettre des énoncés comportant des variables parlantes et des énoncés dont toutes les variables sont muettes (voir page 113), et jouer sur la valeur de vérité de ces énoncés (il y a 5 possibilités : proposition close vraie, proposition close fausse, proposition ouverte vraie pour certaines valeurs des variables libres, fausse pour d'autres, proposition ouverte vraie quelles que soient les valeurs attribuées aux variables libres, proposition ouverte fausse quelles que soient les valeurs attribuées aux variables libres).

Le premier tableau ci-après donne les assemblages présentés en 2013 et les réponses des 18 stagiaires (réponses données oralement dans le cadre d'un échange formateur-stagiaires). Cette liste n'est pas préparée à l'avance, elle est « improvisée » par le formateur, qui sait cependant quels éléments doivent y être présents (et qui a, d'expérience, une idée des réactions possibles). Les assemblages choisis sont tous « bien formés » : les signes qui les composent sont correctement utilisés et il est possible de donner un sens à chacune de ces expressions. Il n'y a donc pas de jeu sur la variable V_1. Ce n'est pas un manque par rapport au but visé, car le jeu sur cette variable n'amènerait sans doute pas de divisions dans les réponses. En effet, les connaissances des stagiaires sur l'utilisation des signes mathématiques sont suffisantes pour qu'ils repèrent une expression mal formée, et essayer de donner une définition d'une expression bien formée demande d'adopter une approche formelle qui n'est pas celle retenue dans le stage.

Le deuxième tableau donne le découpage de la séquence.

1)	$\int_0^1 x dx$	Les stagiaires que l'on entend s'exprimer se prononcent plutôt pour « non », « parce qu'il n'y a pas de verbe, c'est pas une phrase », « on ne peut pas dire si c'est vrai ou faux », « c'est un nombre »
2)	$\cos^2 x + \sin^2 x = 3$	Les stagiaires que l'on entend s'exprimer se prononcent plutôt pour « oui », mais une remarque : Stagiaire : « il n'y a pas de quantificateur sur x », R. Cori : « est-ce que ça change votre position, du coup vous diriez que ça n'est pas une proposition ? », Stagiaire : « oui »
3)	$n \in \mathbb{N}$	Unanimité pour « oui », mais un stagiaire posera une objection après avoir réfléchi à la sixième expression
4)	$n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$	Unanimité pour « oui ».
5)	$(n \geqslant 3$ et n premier$) \Rightarrow n$ impair	Unanimité pour « oui ».
6)	Soit x un réel positif	D'abord plutôt des réponses « oui », mais pas unanimité. Finalement, 11 objections comptées à partir des mains levées.
7)	Le théorème 3.5.2 est évident	5 stagiaires se prononcent pour « oui », une douzaine pour « non » (mains levées)
8)	$\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$	2 stagiaires se prononcent pour « oui », le reste pour « non » : « c'est un ensemble », « il n'y a pas de verbe » (remis en cause par le formateur).

FIGURE 8.6 – Les assemblages proposés dans la situation sur la notion de proposition

J'ai découpé le déroulement de la phase en 6 épisodes E'_1 à E'_6 listés dans le tableau suivant :

Moments	Ce qui est visé	Action du formateur	Ajouts dans le milieu
E'_1	Mise en commun des réponses.	Note les réponses, deux interventions qui « guident » les réponses.	L'ensemble des réponses.
E'_2	Différence entre *si… alors* et *donc* : premier argument : valeur de vérité de l'assemblage.	Demande la valeur de vérité de l'assemblage avec « donc ».	Une proposition a une valeur de vérité
E'_3	Différence entre *si… alors* et *donc* : deuxième argument : négation de l'assemblage.	Demande la négation de l'assemblage avec « donc ».	Une proposition a une négation
E'_4	Différence entre *si… alors* et *donc* : troisième argument : négation de la négation.	Demande la négation de la négation.	La négation de la négation de l'assemblage 4 ne donne pas l'assemblage 4.
E'_5	Insister sur la différence entre *si… alors* et *donc* suite à une question d'une stagiaire pas convaincue.	Institutionnalise le fait que *si* A *alors* B est une proposition, mais pas A *donc* B.	
E'_6	Institutionnalisation de certains aspects de la notion de proposition.	Corrige la tâche demandée en insistant sur les aspects de la notion de proposition à retenir.	Une terminologie pour parler des expressions mathématiques : « être susceptible d'être vraie ou fausse », « négation d'une proposition », « nom d'un objet mathématique ».

FIGURE 8.7 – Les épisodes de la phase 3 sur la notion de proposition

Les points suivants apparaissent spontanément dans les réponses des stagiaires données dans l'épisode E'_1 (voir dialogue 3.1 en annexe page 575) :

– L'idée qu'à une proposition on peut associer une valeur de vérité, « dire si c'est vrai ou si c'est faux ». Un stagiaire hésite pour le deuxième assemblage car il n'y a pas de quantificateur [7]. Nous retrouvons là une conception de la notion de proposition qui n'inclut pas les propositions contenant des variables libres. Cette conception n'est donc exprimée que par un stagiaire, ce qui est peu, mais notons que les assemblages qui sont des propositions ouvertes ne présentent pas toutes les variations possibles par rapport à la variable V_5 : la proposition 2 est toujours fausse, la proposition 5 est toujours vraie (et de plus c'est une implication, donc certainement lue comme universellement quantifiée), la proposition 3 « paraît » toujours vraie tant nous sommes habitués à ce que la variable n prenne ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, bien qu'étant des propositions contenant des variables libres, ces assemblages ne présentent pas l'aspect « parfois vrai, parfois faux, on ne peut pas savoir » qui fait hésiter certaines personnes à les appeler des propositions.
– La distinction nom/proposition est facilement perçue. Elle se traduit ici par « phrase » d'une part, « nombre », « ensemble » de l'autre. Pour l'assemblage 1, un stagiaire donne comme argument l'absence de verbe pour dire que ça n'est pas une proposition. R. Cori demande ce qu'est le verbe dans l'assemblage 3 que les stagiaires ont unanimement classé comme proposition, « appartient » est correctement identifié. L'argument est également utilisé pour l'assemblage 8, mais là il y a une difficulté qui est pointée par le formateur : une stagiaire dit qu'il n'y a pas de verbe, R. Cori fait remarquer que si, au moins le même que pour l'assemblage 3, « appartient » (il y a aussi « est égal », comme dans l'assemblage 2. Regarder s'il y en a un verbe ou non n'est pas un argument suffisant pour conclure si l'assemblage est ou non une proposition : les propositions contiennent des verbes, donc l'absence de verbe permet de conclure (encore que parfois les verbes sont omis, par exemple ici dans l'assemblage 5, le verbe n'apparaît pas explicitement dans « n premier »), mais certains noms, construits à l'aide de propositions, contiennent également des verbes. Il y a une question de « position » du verbe dans la construction de l'expression qui permet de distinguer nom et proposition, mais il n'est pas possible d'en donner une description sans rentrer dans des considérations plus formelles, en donnant des outils plus précis d'analyse de la structure des expressions, comme par exemple un arbre de décomposition. Les stagiaires semblent cependant ne pas faire de confusion.
– Il y a par contre confusion entre l'implication et le « donc », et plus généralement, nous le voyons par exemple dans les hésitations autour de l'assemblage 6, des confusions entre ce qui relève du *langage mathématique* et ce qui n'en relève pas tout en faisant partie du *discours mathématique*.

7. Alors que dans cette phase de mise en commun des réponses R. Cori garde une position neutre, face à cette réponse il réagit tout de suite, et affirme, mais sans donner de raison, que l'assemblage 2) est une proposition.

Comme dans la phase 1 de la première séquence, ce premier moment sert à installer le milieu M_0 de la situation didactique. Les seules rétroactions possibles du milieu au niveau de la situation S_{-1} durant cet épisode E'_1 pourraient être produites par les réponses des autres stagiaires pouvant faire changer d'avis certains d'entre eux. Aucun d'entre eux cependant ne semble posséder une connaissance suffisamment sûre de la notion de proposition pour l'utiliser de manière catégorique (ou alors, ceux possédant une telle connaissance jouent le jeu du contrat didactique et ne s'en servent pas pour faire autorité, laissant le formateur mener la situation dans laquelle les hésitations et erreurs sont prévues).

L'assemblage 4 est immédiatement remis au cœur de la discussion dans l'épisode E'_2. La distinction entre *si... alors* et *donc* est un point essentiel du stage et le formateur sait que l'idée intuitive la plus courante est que les assemblages 4 et 5 sont l'un comme l'autre des propositions. Il ne fait ici que suivre le déroulement prévu, et sait quel levier utiliser pour faire évoluer la situation :

> R. Cori : Alors par quoi on commence ? On va commencer par vous décevoir, parce que le seul endroit où il y ait unanimité complète c'est l'endroit où c'est non (*rires*). Donc on va s'attaquer peut-être direct à ça (*entoure l'assemblage 4*). Ça ce n'est pas une proposition mathématique. Je voudrais quand même attirer l'attention de ceux d'entre vous qui m'ont donné ici (*montre l'assemblage 1)*) comme argument « on ne peut pas dire si c'est vrai ou c'est faux », j'aimerais bien qu'ils me disent là si on peut dire si c'est vrai ou c'est faux. [extrait du dialogue 3.2 en annexe page 577]

Les stagiaires savent maintenant qu'ils se sont trompés, mais ne font pas le lien avec la question de la valeur de vérité, et répondent unanimement que c'est vrai. Ils ne font donc pas de distinction entre vérité et validité : une phrase avec « donc » exprime un raisonnement énoncé par quelqu'un, ce raisonnement peut être valide, correct, juste (ou non), mais les adjectifs « vrai, faux » ne s'y appliquent pas. Une brève hésitation, suite à cette réponse unanime des stagiaires donne à penser que le formateur comptait sans doute sur le fait que cette distinction serait perçue, ou en tout cas que cette question de la valeur de vérité amènerait au moins un doute permettant de poursuivre la discussion.

Il faut donc un autre argument pour convaincre que l'assemblage 4 n'est pas une proposition, et le formateur utilise un autre levier dans l'épisode E'_3 en demandant la négation de cette « proposition ». Cela ne déconcerte pas plus les stagiaires qui proposent : (*R. Cori écrit au tableau*) « il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 0$ ». D'où l'utilisation d'un troisième levier (épisode E'_4) par le formateur qui demande alors la négation de la négation proposée :

> — R. Cori : On va faire le jeu suivant : je pars de cette proposition et je vous demande la négation, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ? (*en montrant l'assemblage 4*).
>
> *Murmures.*

— R. Cori : Quand je vous demande la négation de ça, quelle est la probabilité que j'obtienne ça ?

Rires

— R. Cori : Ayez le courage de dire zéro parce que la probabilité que j'obtienne ça c'est zéro. Partant de ça personne ne va me dire ça comme négation. [dialogue 3.4 en annexe page 578]

Finalement, dans ces épisodes E'_2, E'_3, E'_4, le formateur apporte à chaque fois de nouveaux éléments dans le milieu. Ce ne sont pas des éléments « matériels », mais les stagiaires sont incités à les utiliser comme tels. Le formateur « tend » la question de la valeur de vérité (ou de la négation) aux stagiaires, comme il pourrait leur tendre une règle pour vérifier l'alignement de trois points. Sauf que ceux-ci ne savent pas « se servir » (pour continuer la comparaison avec un élément matériel tel qu'une règle) de ces outils, il n'y a donc pas de rétroaction du milieu sur les réponses des stagiaires.

Les rires font entendre que l'argument de la double négation semble faire mouche, en tout cas pour faire sentir qu'il y a un problème. Mais le doute persiste chez les stagiaires, comme en témoigne cette intervention dans l'épisode E'_5 :

— S : Est-ce qu'on ne peut pas interpréter le donc comme une implication, et dans ce cas on retombe comme tout-à-l'heure ?

— R. Cori : C'est une très bonne question et je vous rassure tout de suite il y a au moins la moitié des manuels qui interprètent le donc comme une implication [. . .] le donc ça n'est pas la même chose que l'implication et je vais essayer de m'employer à vous convaincre que le donc ça n'est pas la même chose que l'implication. [extrait du dialogue 3.5 en annexe page 578]

L'évocation des manuels montre que cette distinction est méconnue, et qu'il est donc « normal » qu'elle le soit des stagiaires. Maintenant que le milieu a joué son rôle d'élément perturbateur de la conception des stagiaires sur l'assemblage 4), le formateur insiste sur cette distinction :

R. Cori : Quand vous dites « A donc B », ça n'a rien à voir, ou très peu à voir, et en tout cas vous dites quelque chose de complètement différent que quand vous dites « si A alors B ». « Si A alors B » et « A donc B » sont deux choses différentes et j'ajoute que « si A alors B » est une proposition mathématique, pour peu que A et B soient des propositions mathématiques elles-mêmes bien sûr, alors que « A donc B » n'est pas une proposition mathématique. Je reviendrai là dessus en détail. [extrait du dialogue 3.5 en annexe page 578]

Mais il n'en dit finalement pas plus que ce qu'il avait annoncé dès le début de la discussion sur l'assemblage 4, à savoir que « A donc B » n'est pas une proposition mathématique. Il manque pour l'instant des éléments importants pour pouvoir expliquer clairement la distinction entre *si. . . alors* et *donc*, notamment des éléments sur l'implication en tant que connecteur propositionnel. R. Cori prévient que les explications sur cette distinction ne sont pas finies, mais choisit pour l'instant de continuer sur la notion de proposition en corrigeant les réponses pour les autres assemblages. La discussion autour de l'assemblage 4) a institutionnalisé deux éléments importants pour la notion de proposition, qui seront repris pour les autres assemblages : on peut se poser la question de la valeur de vérité d'une proposition, on peut en formuler la négation.

Dans l'épisode E'_6 (correction des autres assemblages) la répétition de certains termes ou expressions contribue de nouveau à l'insitutionnalisation. Plusieurs éléments importants de l'analyse du langage sont introduits dans ce temps de correction :

- La notion de « nom d'un objet » à propos des assemblages 1 et 8.
- La distinction proposition ouverte/proposition close à propos de l'assemblage 2, sans utiliser cependant cette terminologie :

  > R. Cori : Parmi les propositions, il y en a qui parlent de certains objets qui ne sont pas précisés, où il y a des variables qui apparaissent comme ça. Et il y en a d'autres où les variables sont toutes quantifiées par exemple, ou alors où il n'y a pas de variables du tout. Ça fait deux catégories mais ça reste quand même des propositions. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

- Le double statut possible de certaines phrases, à propos de l'assemblage 3, qui sont des propositions mais qui peuvent être utilisées pour introduire une variable, et qui sont dans ce contexte au niveau du *discours mathématique*, et non du *langage mathématique* :

  > R. Cori : Dans ce problème, dans ce chapitre, dans ce paragraphe, dans tout ce livre n désignera un entier naturel, bon, ça c'est une annonce d'une convention, et effectivement pas une proposition mathématique. Seulement ça ne prend ce caractère là que parce qu'on le met dans le contexte en question [...] « n appartient à $\mathbb{N}$ » tout seul, c'est une proposition mathématique : c'est susceptible d'être vrai ou faux suivant qui est n, ça a une négation qui est « n n'appartient pas à $\mathbb{N}$ », il n'y a aucun doute que c'est une proposition mathématique. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

- Le caractère « méta » des phrases mettant en jeu un locuteur, à propos de l'assemblage 6 :

  > R. Cori : On ne peut pas dire « c'est vrai ou c'est faux », on ne peut pas dire « qu'est-ce que c'est la négation de "soit x un réel positif" ». Ça n'est pas une affirmation concernant des objets mathématiques qui est susceptible d'être vraie ou fausse. C'est à un autre niveau, « soit x un réel positif » c'est au niveau de la communication entre deux personnes qui sont en train de causer mathématiques et il y en a une qui dit à l'autre : « et bien je prends un nombre réel positif x, je prends un nombre réel positif je l'appelle x ».

> C'est pas du tout du niveau du discours mathématique [8], c'est à un autre niveau donc c'est non. [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

De la même manière que dans l'épisode E'_5, une intervention d'un stagiaire montre que les connaissances que cherche à transmettre le formateur ne sont pas triviales pour les stagiaires :

> — S10 : Vous voulez dire que toute proposition mathématique a une négation sinon ça n'en est pas une ?
>
> — R. Cori : Euh est-ce que je veux dire ça ? En tout cas c'est vrai que toute proposition mathématique a une négation.
>
> — S10 : Et si il n'y a pas de négation ça n'en est pas une ?
>
> — R. Cori : S'il n'y a pas de négation ? On reviendra là dessus parce qu'on va parler de la négation des propositions on reviendra là dessus on peut dire ça mais c'est… [extrait du dialogue 3.6 en annexe page 578]

Là encore, le formateur renvoie à un moment ultérieur dans le stage, conscient du fait que toutes ces notions de logique abordées ne sont pas encore complètement claires pour les stagiaires.

8. Le terme est utilisé ici à tort, cette expression relève bien du *discours mathématique*, mais par contre pas du *langage mathématique*.

Analyse globale de la deuxième séquence

Le but de cette séquence est d'amener à une conception de la notion de proposition en adéquation avec la définition de la logique mathématique.
Au début de la séquence, le milieu de la situation ne comporte que les assemblages proposés et les réponses des stagiaires. Le principal élément pouvant amener des rétroactions est donc le désaccord qui apparaît pour certains énoncés. Mais le formateur ne s'appuie pas sur cet élément et choisit plutôt de commencer par regarder un assemblage pour lequel il y a unanimité, celui qui comporte un *donc*. Il n'est pas surpris qu'il faille d'autres éléments pour convaincre les stagiaires qu'une phrase de type « A donc B » n'est pas une proposition mathématique, et il enrichit le milieu avec des outils pour pouvoir trancher la question de « est-ce ou non une proposition mathématique ? » (avoir une valeur de vérité, avoir une négation, pas de locuteur en jeu). Là encore il suit le déroulement prévu et continue à constituer un vocabulaire spécifique (une proposition est *susceptible* d'être vraie ou fausse, elle *parle* ou non d'une certaine variable).
Le formateur ne propose pas de définition de la notion de *proposition*, mais la répétition de l'expression « être susceptible d'être vraie ou fausse » participe d'un processus d'institutionnalisation et donne aux stagiaires la possibilité de l'adopter comme définition naïve. Dans cette séquence, la notion de proposition est présente dans sa dimension objet, puisque la séquence vise à préciser cette notion, alors que dans la séquence 1 elle était essentiellement présente dans sa dimension outil. Il y a donc travail de la dialectique outil/objet dans le passage d'une dimension à l'autre.
L'approche non formelle de ces notions de logique choisie a l'avantage d'être sans doute plus facilement transposable en classe, et qui peut se faire dans le temps limité de la formation, mais elle contraint le formateur à rester parfois assez imprécis parce qu'il ne peut pas s'appuyer sur la rigueur d'une définition mathématique. Il choisit également de ne pas donner de définition non mathématique de la notion de proposition, qui n'aurait de toute façon pas cette rigueur.
Au delà de la notion de proposition, cette séquence amène une prise de conscience collective du fait qu'il y a matière à se poser des questions là où les stagiaires ne s'y attendaient peut-être pas, et qu'une notion apparemment aussi simple que celle de proposition peut poser problème. Comme dans la première séquence, c'est en confrontant les stagiaires avec leur réactions spontanées, et en montrant en quoi elles sont problématiques, qu'est justifié le travail d'analyse du langage mathématique qui va ensuite être poursuivi de manière plus magistrale.