
Analyse d'un problème

Le domaine électromagnétique des hyperfréquences est un vaste domaine qui recouvre une large bande de fréquence — typiquement de 1 GHz à 100 GHz — et qui trouve de nombreux types d'applications.

Aussi, il est important d'être capable de modéliser avec précision les dispositifs hyperfréquences et leurs interactions dans l'environnement de façon à parvenir à une mise au point rapide de ces systèmes.

Il existe une grande variété de méthodes car il n'existe pas de méthode universelle capable de résoudre l'ensemble des problèmes électromagnétiques. Dans ce contexte, il est essentiel de considérer attentivement le problème à résoudre avant d'envisager un quelconque processus de résolution : *un problème bien posé est un problème à moitié résolu*. Le choix d'une méthode plus qu'une autre nécessite donc une bonne connaissance des différents choix possibles et une bonne analyse du problème afin d'en définir clairement les contours. De plus, ce choix est intimement lié à la géométrie de la structure étudiée.

De nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre des problèmes électromagnétiques. Elles se justifient par un certain nombre de critères qui doivent permettre d'identifier et de formuler clairement le problème posé :

- type de structure \Rightarrow antenne, circuit, cavité, guide d'onde, ...
- type de régime \Rightarrow statique, quasi-statique, dynamique
- structure ouverte ou fermée
- géométrie de la structure :
 - simple \Rightarrow formes parallélépipédiques, polygonales (arêtes, coins)
 - complexe \Rightarrow formes polygonales, courbes
- rayonnement en zone de champ proche / lointain, CEM, ...
- type de milieu \Rightarrow linéaire, dispersif, à pertes, anisotrope, ...
- domaine d'analyse \Rightarrow temporel ou fréquentiel

Toutes ces questions doivent permettre de choisir une voire plusieurs méthodes, c'est-à-dire celle(s) la (les) mieux adaptée(s) pour résoudre le problème à traiter.

Une méthode repose sur deux notions fondamentales, la formulation d'une part et le domaine d'analyse d'autre part. La formulation est une étape incontournable dans l'application de la méthode de résolution tandis que le domaine d'analyse constitue le domaine de résolution du problème. L'ensemble de la démarche doit reposer sur une

définition rigoureuse des concepts et fournir une méthodologie pour construire un modèle de phénomènes naturels, et en ce qui nous concerne, la modélisation de phénomènes électromagnétiques.

1.1 Formulation

La formulation d'un problème permet de déterminer les caractéristiques d'une méthode, à savoir ses avantages, ses inconvénients, ses limitations et la procédure qui devra ensuite être appliquée pour résoudre le problème posé. En électromagnétisme, nous cherchons principalement à déterminer les champs électromagnétiques dans un milieu ou les courants circulant à la surface d'un objet. La géométrie va donc avoir un rôle quant au choix et au type de formulation.

Cette formulation est issue d'un ensemble d'hypothèses et d'une manipulation des équations de Maxwell menant à une forme, généralement simplifiée, et appropriée à certains types de problèmes. Elle peut également porter sur un certain nombre de concepts tels que celui des *rayons* et non plus sur une résolution numérique des équations de Maxwell.

Les formulations les plus courantes sont :

- les approches numériques basées sur
 - . les équations de Maxwell sous forme intégrale (fonction de Green)
 - . les équations de Maxwell sous forme différentielle
- les approches asymptotiques basées sur
 - . la théorie géométrique
 - . la théorie physique
- les approches hybrides et le couplage de méthodes

Aussi, la formulation d'un problème est définie dans un certain domaine d'analyse, domaine dans lequel le problème va être résolu.

1.2 Domaine d'analyse

Le domaine d'analyse est le domaine de résolution du problème. Il peut être classé en deux domaines, temporel ou fréquentiel, chacun ayant ses « propres » caractéristiques.

Il existe un lien étroit entre ces deux domaines, le passage de l'un à l'autre s'effectuant par une transformation de Fourier ; ils possèdent donc des caractéristiques communes. Cependant, ces deux domaines temps-fréquence sont à la fois distincts et duals, les avantages de l'un sont souvent les inconvénients de l'autre. Ceci a pour conséquence de conditionner les phénomènes électromagnétiques observables.

L'analyse fréquentielle fut la première à se développer pour une raison simple, il est très difficile d'interpréter et d'exploiter les informations provenant d'un signal temporel avant d'en avoir effectué une transformée de Fourier.

Aussi, l'analyse dans l'un ou l'autre des domaines permet de recouvrir l'ensemble des phénomènes électromagnétiques et ainsi d'en cerner les différents aspects ce qui en fait une parfaite complémentarité pour l'analyse électromagnétique de dispositifs hyperfréquences. C'est pour cette raison que généralement la plupart des méthodes développées possèdent une formulation dans ces deux domaines bien que certaines soit mieux adaptées à l'un ou à l'autre.

La dualité temps-fréquence est une des raisons principales pour lesquelles il n'y a pas de méthode universelle capable de modéliser l'ensemble des phénomènes électromagnétiques.

1.2.1 Les méthodes fréquentielles

Les méthodes basées sur l'analyse fréquentielle sont plus efficaces pour analyser des milieux dispersifs ou à pertes, c'est-à-dire des milieux dont les paramètres dépendent de la fréquence. Elles sont aussi mieux adaptées à la caractérisation sur une bande étroite. Cependant elles sont peu efficaces pour la caractérisation sur une large bande de fréquences, ce qui nécessiterait plusieurs exécutions pour compléter le domaine spectral. De plus, elles ne sont pas adaptées aux problèmes non-linéaires et non-stationnaires.

1.2.2 Les méthodes temporelles

Contrairement aux méthodes fréquentielles, les méthodes temporelles sont particulièrement bien adaptées à la caractérisation sur une large bande de fréquences, et aussi pour les problèmes non-linéaires et non-stationnaires. Cependant, il devient plus compliqué de tenir compte de milieux dont les paramètres dépendent de la fréquence. En effet, ceci nécessite l'application de convolutions ou de techniques de filtrage qui peuvent s'avérer assez complexes à mettre en œuvre et coûteuses en terme de ressources informatiques. De plus ces méthodes peuvent nécessiter un nombre d'itérations prohibitif si le maillage est très fin (dans le cas de méthodes numériques). Il faut ajouter également que les résultats obtenus par ce type de méthodes ne sont pas interprétables avant d'en avoir effectué une transformée de Fourier, opération peu coûteuse.

Les différents avantages et inconvénients propres à chacun de ces deux domaines d'analyse mettent bien en évidence leurs spécificités et leur complémentarité pour traiter de problèmes électromagnétiques.

Il est temps maintenant de rappeler quelques équations de l'électromagnétisme, à savoir les équations de Maxwell, sur lesquelles reposent les différentes formulations des méthodes de modélisation que nous verrons dans les chapitres suivants.

1.3 Les équations de l'électromagnétisme

Les phénomènes électromagnétiques et leur nature ondulatoire sont décrits par les équations de Maxwell [Max73]. Ces équations relient les champs électrique \vec{E} et magné-

tique \vec{B} aux sources de champs, à la densité de charge ρ et à la densité de courant \vec{J} . Par la suite nous omettrons les termes de sources et considérerons des milieux linéaires, homogènes et isotropes (hypothèse de milieux LHI).

La dualité de ces équations permet de déterminer le champ électromagnétique, caractérisé par le couple (\vec{E}, \vec{H}) , à partir de l'un ou l'autre de ces champs vectoriels. Connaissant le champ électrique \vec{E} (respectivement magnétique \vec{H}), on peut en déduire le champ magnétique \vec{H} (respectivement électrique \vec{E}).

Dans les équations de Maxwell qui vont être établies dans les Tab. 1.1 et 1.2, ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide.

1.3.1 Les équations de Maxwell sous forme *locale* ou *différentielle*

Sous la forme différentielle (Tab. 1.1), ces équations expriment des relations entre des variations spatiales et temporelles de champ électromagnétique. En tout point de l'espace qui n'est pas situé sur une surface de séparation entre deux milieux, ces équations s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.3.4)$$

TABLE 1.1 – Forme différentielle des équations de Maxwell.

1.3.2 Les équations de Maxwell sous forme *globale* ou *intégrale*

Sous la forme intégrale (1.2), elles expriment les champs électromagnétiques dans des volumes, sur des surfaces et le long de contours, *cf.* Fig. 1.1, et décrivent les relations entre les champs vectoriels et les densités de courant et de charge dans une région de l'espace [Gar96]. Ces équations s'obtiennent à partir de leur forme différentielle en utilisant les théorèmes de Stokes¹ et d'Ostrogradski².

1. La circulation d'un champ vectoriel \vec{A} le long d'un contour fermé C est égale au flux de son rotationnel à travers la surface S s'appuyant sur le contour C , si \vec{A} est continu sur S :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

2. Le flux d'un champ vectoriel \vec{A} à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale sur le volume V délimité par S de sa divergence, si \vec{A} est continu sur V :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \cdot dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.3.5)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.3.6)$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dV \quad (1.3.7)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.3.8)$$

TABLE 1.2 – Forme intégrale des équations de Maxwell.

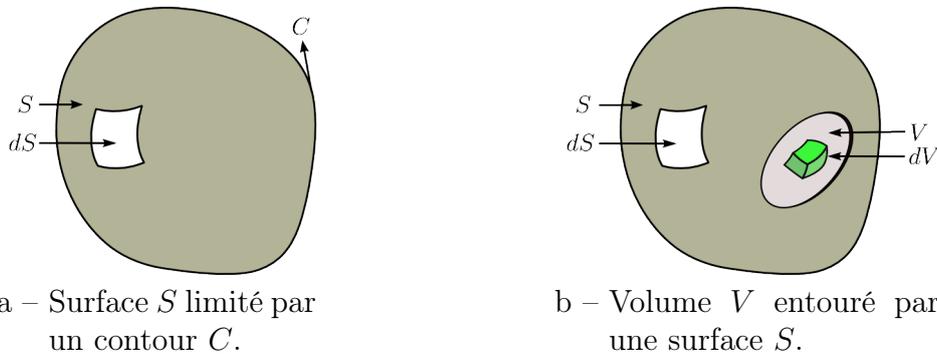


FIGURE 1.1 – Définition des surfaces, volumes et contours d'intégration des équations de Maxwell sous forme intégrale.

1.4 Méthodes de résolution

Les équations de Maxwell sont définies sur une partie de l'espace, appelé domaine d'étude, fini et donc limité par des frontières. Il convient donc de préciser ce domaine d'étude et de définir des conditions aux limites que les champs doivent satisfaire sur ses frontières.

Ces équations associées aux conditions aux limites étant posées, il est nécessaire d'ajouter, pour que le modèle soit complet, une relation qui permet de tenir compte du comportement des matériaux composant le système étudié.

La résolution analytique du modèle mathématique ainsi défini est souvent impossible. La solution analytique n'est accessible que dans des cas très simples. On a alors recours à une méthode de discrétisation de ces équations qui consiste à rechercher une solution dans un espace de dimension finie. Ce dernier doit être choisi de manière à limiter les erreurs de discrétisation. On aboutit alors à un modèle numérique qui génère un système matriciel souvent de grande taille que l'on construit et résout à l'aide d'un ordinateur. On appelle ces méthodes, les méthodes rigoureuses, *cf.* Chap. 2. Cependant, ces méthodes par échantillonnage sont limitées à l'analyse de structures électriquement petites.

D'autres méthodes basées sur un développement asymptotique de ces équations permettent l'analyse de structures électriquement grandes, ce sont les méthodes asymptotiques, *cf.* Chap. 3.

Enfin, il existe un autre type de méthodes basées sur des couplages de méthodes et qui permettent l'analyse « multi-échelle » de problèmes électromagnétiques. On les appelle les méthodes hybrides, *cf.* Chap. 4.

Chapitre 2

Méthodes rigoureuses

Les méthodes basées sur la théorie rigoureuse de l'électromagnétisme reposent sur les équations de Maxwell [JH03]. Elles sont qualifiées de rigoureuses car elles résolvent les équations de Maxwell — sous forme intégrale ou différentielle — sans introduire d'approximation sur celles-ci. Elles sont destinées à l'analyse de dispositifs hyperfréquences ayant pour dimensions quelque fois voire quelques dizaines de fois la longueur d'onde de travail.

La complexité de ces équations ne permet pas, en général de fournir une solution analytique pour un problème donné. On a alors recours à des méthodes numériques [Pol07] permettant de résoudre les formulations intégrales, ou différentielles par un échantillonnage de l'espace, et du temps dans le cas des méthodes temporelles. Pour atteindre un niveau de convergence suffisant, cet échantillonnage doit s'effectuer avec un pas spatial et temporel suffisamment fin (dans le cas des méthodes temporelles), ce qui limite rapidement la dimension spatiale des structures pouvant être analysées de cette manière, car le volume de calcul augmente de manière exponentielle. La résolution numérique doit donc s'effectuer dans un domaine borné qui nécessite de définir des conditions aux limites (aux frontières). Par conséquent, ces méthodes sont bien adaptées à la résolution de problèmes en zone de champ proche et à des structures électriquement petites. Lorsque l'on doit traiter de structures électriquement grandes, on est alors obligé de se tourner vers des solutions alternatives, et en particulier vers des méthodes dites asymptotiques ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Deux approches fondamentales peuvent être utilisées pour résoudre les équations de Maxwell.

D'une part, si l'opérateur est différentiel, la procédure numérique s'applique alors aux champs qui existent dans tout l'espace de calcul ; on parle alors de méthode volumique. On voit ici poindre la difficulté avec ce type de formulation lorsqu'elle s'appliquera aux problèmes ouverts sur l'espace libre dans lequel les champs s'étendent théoriquement jusqu'à l'infini. En effet, le domaine de validité des méthodes basées sur un échantillonnage, ne peut être considéré que pour une région finie de l'espace. On aborde les structures ouvertes en introduisant des conditions aux limites absorbantes qui simulent l'espace libre. D'autres part, si l'opérateur est intégral, la procédure numérique s'applique aux champs qui existent à la surface de la structure étudiée ; on parle ici de méthode surfacique. Le champ en tout point de l'espace pourra être déduit à partir de la connaissance des champs de surface.

La première approche et la plus utilisée consiste à partir des équations de Maxwell sous forme différentielle. La seconde consiste à utiliser la forme intégrale de ces équations.

Ces deux approches trouvent leurs équivalents dans les domaines temporel et fréquentiel. Le choix des inconnues impose le type d'échantillonnage. Si ce sont les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{H} respectivement les courants \vec{J} , l'échantillonnage sera volumique respectivement surfacique. La procédure numérique s'applique uniquement sur le domaine de calcul.

Ces méthodes fournissent un système d'équations linéaires qu'il s'agit de résoudre et dont le nombre d'équations augmente lorsque la structure est de grande dimension. De plus les méthodes temporelles nécessitent de diminuer le pas temporel pour satisfaire leur condition de stabilité, ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul¹.

2.1 Les équations intégrales — la méthode des moments (MoM)

La méthode des équations intégrales est basée sur la résolution des équations de Maxwell — dans les domaines temporel ou fréquentiel — sous forme intégrale, dont l'inconnue est la densité de courant [Wei77], et échantillonnée par des éléments finis de frontières. C'est une formulation surfacique. Il s'agit de déterminer les champs à partir des charges et des courants. Dans la formulation intégrale, le champ électrique produit par les courants de surface est remplacé par son expression en termes de fonctions de Green, celles-ci n'étant autre que les solutions de la densité de courant.

Cette méthode consiste à déterminer les distributions de courant induit à la surface d'une structure illuminée par une source connue, en mettant sous la forme d'une équation intégrale, la relation entre les courants induits, la fonction de Green et la source. Elle implique donc de connaître la (ou les) source(s) de champ pour déterminer les distributions de courants à la surface de l'objet. Une procédure numérique, basée généralement sur la méthode des moments (MoM²) doit ensuite être appliquée pour déterminer la solution des équations intégrales.

Une des caractéristiques principales de cette méthode est de réduire d'un degré la dimension (spatiale) d'un problème. L'étude d'une structure volumique se résout par une approche surfacique ce qui rend cette méthode particulièrement bien adaptée aux domaines finis en milieu infini. Déterminer le champ électromagnétique rayonné par un objet dans un certain volume de calcul revient à échantillonner la surface de cet objet et à déterminer les courants circulant sur cette surface, ce qui permet ensuite de trouver le champ électromagnétique rayonné par la structure dans tout l'espace [Zho93]. Une formulation portant non plus sur les surfaces mais sur les interfaces de la structure peut être établie, c'est la méthode des éléments de frontière (BEM³) [Bon95].

Par rapport aux méthodes volumiques, ce type de formulation ne rencontre pas de problème de troncature du domaine ni de conditions aux limites d'espace ouvert. Ces méthodes sont donc mieux adaptées aux problèmes de propagation en milieu infini. Cepen-

1. Plus le pas temporel diminue et plus la dimension des cellules diminue. Il faut donc plus de cellules pour échantillonner le domaine d'analyse d'où un coût de calcul plus important.

2. Method of Moments.

3. Boundary Element Method.

tant elles nécessitent un traitement de résolution plus lourd que les méthodes volumiques car elles génèrent des systèmes d'équations linéaires complexes et pleins *a contrario* des méthodes volumiques dont les systèmes sont relativement creux.

La méthode des moments

La MoM est une méthode générale qui transforme une fonctionnelle⁴ — équation différentielle ou intégrale — en un système d'équations linéaires que l'on peut résoudre par des techniques matricielles [Har93]. La fonction inconnue f est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de base (ou test) connues f_n , pondérées par des coefficients inconnus α_n , cf. Eq. (2.1.1). La procédure de la MoM consiste à minimiser l'erreur résiduelle sur les fonctions de base. C'est une procédure générale, relativement facile à mettre en œuvre.

$$f = \sum \alpha_n f_n \tag{2.1.1}$$

Un des inconvénients majeurs de cette méthode est le choix des fonctions bases f_n qui doivent être appropriées pour exprimer la solution et approcher au mieux la fonction inconnue f à déterminer. Le choix de ces fonctions de base doit satisfaire certains critères ; elles doivent se trouver dans le domaine des opérateurs et sont généralement définies sur des sous-domaines de la solution [CS00]. Ceci augmente la taille des matrices contre une simplification des calculs. Un choix judicieux des fonctions de base peut rapidement donner une solution tandis qu'un mauvais choix peut considérablement compliquer le problème voire ne pas le résoudre. On peut donner ici quelques fonctions de base de type sous-domaine, cf. Fig. 2.1.

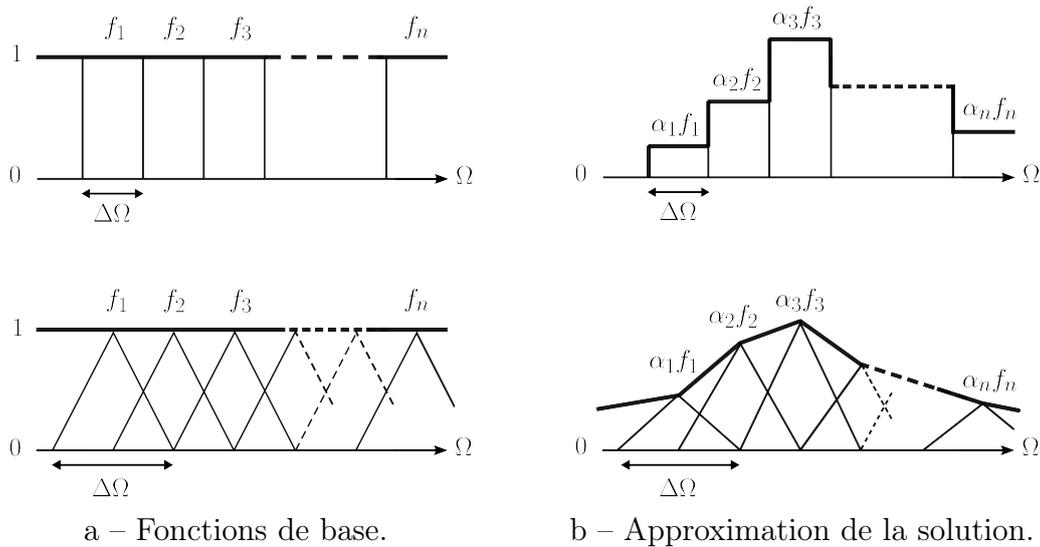


FIGURE 2.1 – Exemple de fonctions de base de type sous-domaine (définies sur $\Delta\Omega$) et approximation de la solution correspondante sur le domaine Ω .

4. Équation dont les inconnues sont des fonctions.

2.2 La forme variationnelle – la méthode des éléments finis (FEM)

Un problème physique peut être formulé de façon équivalente en un système d'équations différentielles ou sous une formulation variationnelle. Le principe de cette méthode consiste à rendre stationnaire une fonctionnelle associée à l'équation du problème original. Cette fonctionnelle est souvent assez compliquée à déterminer. Cependant, les formes variationnelles des équations des problèmes les plus connus peuvent se trouver dans de nombreux ouvrages [SF96], [GF63]. Notons que la fonctionnelle associée dépend des conditions aux limites imposées par l'opérateur.

Si le problème est simple, c'est-à-dire si on peut décomposer la solution en fonctions de base définies sur la totalité du domaine de calcul, on applique la méthode de Rayleigh-Ritz [Gar96]. Cependant, dans la plupart des cas, il n'est pas possible de définir des fonctions de base sur l'ensemble du domaine de calcul. On décompose alors le domaine de calcul en sous-domaines, appelés éléments finis. À l'intérieur de chaque sous-domaine, l'inconnue est approchée généralement par une fonction de type polynomiale, dont les coefficients sont les inconnues à déterminer. Le choix des fonctions polynomiales tient dans leur facilité d'intégration lorsqu'elles sont introduites dans les fonctionnelles [VCK98]. La différence fondamentale avec la méthode de Rayleigh-Ritz se situe donc dans le choix des fonctions de base.

Afin d'assurer la continuité d'un élément à un autre, on préfère utiliser la valeur de la fonction interpolatrice en certains points seulement, appelés éléments nodaux, comme paramètres variationnels.

La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM⁵) est une approche variationnelle des équations de Maxwell dont la solution est trouvée numériquement par la décomposition en éléments finis sur des sous-domaines du volume de calcul.

Dans la plupart des applications, il n'est pas possible d'utiliser des fonctions définies sur le domaine entier. Une solution consiste alors à approcher le domaine de calcul par morceaux, ces morceaux pouvant prendre des formes variées. Les triangles (2D) ou tétraèdres (3D) sont des éléments simples qui optimisent l'approximation d'éléments complexes (courbes), *cf.* Fig. 2.2. Elle permet d'étudier le comportement d'objets à géométrie complexe et de tenir compte de lois de comportement de matériaux complexes (matériaux inhomogènes, anisotropes), notamment pour une modélisation fine des interactions proches et des phénomènes locaux statiques et dynamiques.

Il existe de nombreux ouvrages sur cette méthode, tant sur les aspects mathématiques que du calcul [Ste87] et des techniques variationnelles [Mik64].

Comme toute méthode numérique, le volume de calcul doit être limité par des conditions aux limites absorbantes (CLA⁶, PML⁷) pour tenir compte du domaine extérieur et

5. Finite Element Method.

6. Couches aux Limites Absorbantes.

7. Perfect Match Layer.

simuler l'espace libre dans le cas de problèmes ouverts.

Tout comme la méthode des moments, il n'existe pas de critère sur la dimension maximale des cellules du maillage. Cette dimension conditionne simplement la précision sur les résultats obtenus. Typiquement, on choisira $\Delta l < \lambda$. De plus c'est une méthode dédiée à l'analyse fréquentielle bien qu'elle ait aussi été développée dans le domaine temporel [PJ06].

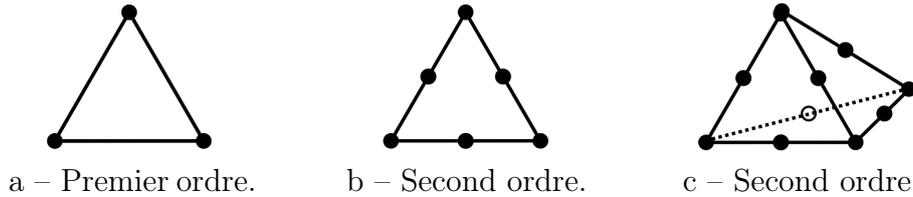


FIGURE 2.2 – Exemple d'éléments finis nodaux 2D (triangle) et 3D (tétraèdre).

D'autres approches se basent sur une résolution des équations de Maxwell sous forme différentielle et dont les inconnues ne sont plus les courants circulant à la surface d'un objet mais les champs électromagnétiques du milieu. Ce sont donc des méthodes typiquement volumiques.

2.3 Les équations différentielles – la méthode des différences finies (FD)

La méthode des différences finies (FD⁸) [Rao99] est une méthode classique de résolution des équations aux dérivées partielles. Son succès est principalement dû à sa simplicité d'implémentation qui consiste à remplacer une équation aux dérivées partielles par son approximation aux différences finies, échantillonnée dans un espace cartésien. Les opérateurs différentiels sont remplacés et approchés par des différences finies centrées, c'est-à-dire dire un développement de Taylor à l'ordre 1 voire à des ordres supérieurs, *cf.* Eqs. (2.3.1) et (2.3.2). Seulement plus l'ordre du développement augmente et plus le nombre de termes aussi.

$$\text{ordre 1 : } \frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \quad (2.3.1)$$

$$\text{ordre 2 : } \frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.3.2)$$

TABLE 2.1 – Approximation des opérateurs différentiels par des différences finies centrées.

En électromagnétisme, cette méthode repose sur la mise en forme discrète des équations de Maxwell et nécessite un échantillonnage spatial de l'espace d'analyse auquel s'ajoute un échantillonnage temporel dans le cas des méthodes temporelles. C'est donc

8. Finite Difference.

une méthode volumique dont les inconnues sont les composantes de champ électromagnétique \vec{E} et \vec{H} .

Cette méthode s'applique aussi bien dans le domaine temporel FDTD⁹ [Gar96] que dans le domaine fréquentiel FDFD¹⁰ [Zho93]. La solution de la première se trouve en utilisant une procédure itérative tandis que pour la seconde, la solution se trouve par inversion de matrice.

L'analyse dans le domaine temporel s'appuie sur un schéma du second ordre — dans le temps et dans l'espace — de la cellule de Yee [Yee66], cf. Fig. 2.3. Elle permet d'étudier des régimes transitoires, des systèmes non-linéaires, voire même des structures qui varient dans le temps et l'espace. Notons que les différentes composantes de champs sont déterminées en des endroits différents et à des temps décalés. Ceci peut poser certaines difficultés pour la définition des conditions aux limites.

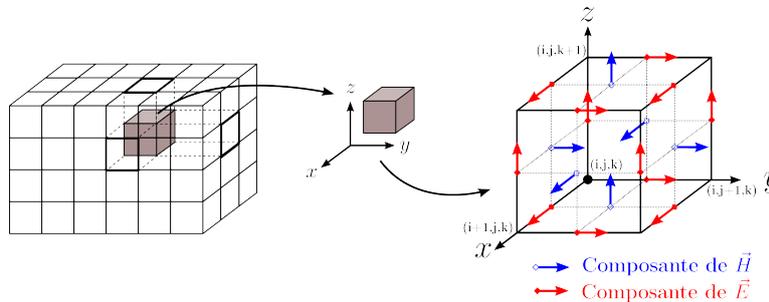


FIGURE 2.3 – Cellule de Yee FDTD (3D).

Aussi, l'échantillonnage de l'équation de propagation des ondes introduit de la dispersion numérique, c'est-à-dire que la vitesse de propagation d'une onde dépend de l'échantillonnage spatial et temporel, d'où des erreurs numériques sur la vitesse de propagation. Ceci a pour conséquence de limiter en bande de fréquence le domaine de validité du modèle. De plus, le pas temporel doit être choisi de façon à assurer la stabilité numérique du modèle. Typiquement, l'ordre de grandeur de ce pas temporel est :

$$\Delta t \lesssim \frac{\Delta l}{c} \quad (2.3.3)$$

où

- . Δt est le pas temporel.
- . Δl est la dimension d'une cellule de type cubique.
- . c est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

La FDTD a connu de nombreux développements [TB75], [Wei77]. C'est une méthode qui nécessite un échantillonnage de toute la structure et s'applique donc naturellement à des structures fermées (guides d'ondes, cavités). Pour pouvoir étudier des structures ouvertes, on introduit des frontières absorbantes qui simulent un milieu infini (adaptation sans réflexion).

Un autre schéma de la FDTD, nommée la FIT¹¹ [SSW05] utilise la forme intégrale des équations de Maxwell.

9. Finite Difference Time Domain.

10. Finite Difference Frequency Domain.

11. Finite Integral Technique.

2.4 La décomposition en ondes locales – la méthode des lignes de transmission (TLM)

La méthode TLM¹² [JB85], [Hoe87], [Sag89] est basée sur l’analogie entre la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu et la propagation des tensions et courants dans un réseau de lignes de transmission. Elle peut être considérée comme un modèle numérisé du principe d’Huygens, c’est à dire une superposition d’ondes locales matérialisée par un réseau de lignes de transmission.

Cette méthode présente une grande similitude avec la méthode FDTD, bien que les principes de base soient fondamentalement différents. Ces deux méthodes échantillonnent l’espace et le temps de façon similaire. Tout comme la méthode FDTD, la méthode TLM repose sur un échantillonnage spatial et temporel du volume d’analyse. La résolution dans le domaine temporel permet une caractérisation de la structure étudiée sur une large bande de fréquence en une seule simulation. Le domaine d’analyse doit aussi être borné par des conditions aux limites telles que des PML [Bér94], [Tra97], [MN01] pour limiter le domaine de calcul.

De nombreux nœuds ont été développés en TLM que l’on retrouvera dans [Mag98], et dont la topologie est similaire à celle de la cellule de Yee FDTD, *cf.* Section 2.3. Cependant, en TLM les composantes des champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{H} sont déterminés aux mêmes instants contrairement à la FDTD où elles sont déterminées à des endroits et des temps décalés.

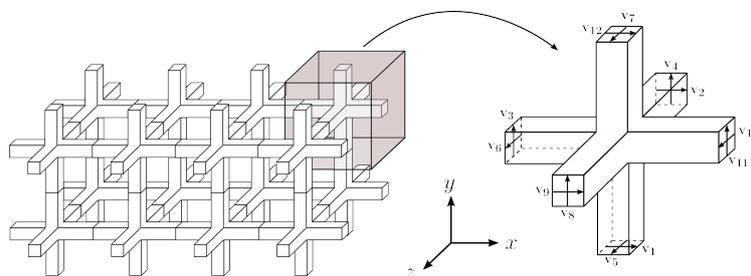


FIGURE 2.4 – Exemple de cellule TLM, le nœud symétrique condensé (SCN) 3D.

Un des inconvénients majeurs des méthodes temporelles concerne la fenêtre temporelle d’observation qui se doit d’être relativement grande. En effet, la durée temporelle T de la simulation engendre une erreur de troncature du signal qui se répercute dans le domaine fréquentiel par une résolution plus ou moins fine du spectre. Typiquement, la relation — issue de la transformée de Fourier — entre cette durée temporelle T et la fréquence d’échantillonnage f_e du spectre est définie telle que : $f_e = \frac{1}{T}$.

De plus, ces méthodes par échantillonnage du domaine d’analyse nécessitent un raffinement local coûteux¹³ au voisinage de singularités telles que les arêtes.

12. Transmission Line Matrix.

13. En temps de calcul et place mémoire.

2.5 Les méthodes pseudo-analytiques

Les méthodes pseudo-analytique (ou semi-analytique) sont des méthodes qui allient une solution partielle analytique complétée par une approche purement numérique. On peut citer quelques-unes des méthodes basées sur ce concept telles que le raccordement modal (MM¹⁴) [Wex67], la SDA¹⁵ [Han85], ou bien encore la méthode des lignes (ML¹⁶) [WP84].

Ces techniques utilisent généralement une décomposition modale, somme de modes pondérés par des coefficients à calculer, pour approcher les champs ou les potentiels à déterminer. L'application des conditions aux limites permet ensuite d'exprimer un système d'équations linéaires qui une fois résolu fournit les coefficients de pondération des modes. Le domaine de résolution de ces méthodes est typiquement fréquentiel.

Aussi, ces méthodes ne sont pas adaptées à des structures à géométrie quelconque ce qui limite leur utilisation. Elles sont mieux adaptées à l'analyse de structures stratifiées (structures planaires multicouches, lignes microruban par exemple) que les méthodes volumiques¹⁷ et présentent l'avantage de converger relativement rapidement, et aussi d'avoir un coût de calcul assez faible.

Ces méthodes dites « rigoureuses » ne sont en principe pas limitées par les dimensions du domaine. Ce sont les capacités de calcul informatique — et la dispersion numérique de certaines méthodes telles que la FDTD ou TLM par exemple — qui limitent en pratique leurs applications. En effet, pour atteindre un niveau de convergence suffisant, l'échantillonnage spatial et temporel doit être suffisamment fin. Malgré les apports fait à ces méthodes en termes d'optimisation (parallélisation notamment), celles-ci sont limitées à des objets de l'ordre voire de quelques ordres de grandeurs de la longueur d'onde d'analyse (structures électriquement petites) ce qui limite considérablement leur domaine d'analyse.

Outre les contraintes numériques de convergence, les méthodes temporelles sont également soumises à un critère de stabilité qui fixe le pas temporel maximal de la simulation. Il dépend généralement de la dimension des cellules du maillage et de la vitesse de propagation dans le milieu considéré. Sans ce critère de stabilité, on peut observer une divergence des calculs qui entraîne des solutions numériques non-physiques. De plus, ces méthodes produisent de la dispersion numérique.

On a alors recours à d'autres types de méthodes pour décrire les interactions des ondes électromagnétiques avec des objets de grande dimension (objets électriquement grands), ce sont les méthodes dites « asymptotiques ».

14. Mode Matching.

15. Spectral Domain Approach.

16. Method of Line.

17. Le nombre d'inconnues n'est pas proportionnel au volume de calcul mais à la surface et au nombre d'interface.

Chapitre 3

Méthodes asymptotiques

Les méthodes dites « asymptotiques » sont basées sur une analyse haute fréquence des équations de Maxwell en espace libre et pour un milieu supposé LHI¹ [BM94]. Ces méthodes fournissent une solution approchée des équations de Maxwell qui tend vers la solution exacte lorsque la fréquence tend vers l'infini, ou de manière équivalente, lorsque la longueur d'onde tend vers 0.

Contrairement aux méthodes rigoureuses, les méthodes asymptotiques permettent d'obtenir, non pas la solution, mais son développement asymptotique. Ce développement est souvent limité au premier terme du nombre d'onde k .

Deux théories permettent de construire des solutions asymptotiques. La première consiste à résoudre de façon rigoureuse les équations de Maxwell et de faire une étude limite de la solution lorsque la fréquence tend vers l'infini. La seconde consiste à injecter dans les équations de Maxwell des développements des champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{H} , asymptotiquement valides lorsque la fréquence tend vers l'infini.

Parmi elles, deux approches se distinguent pour construire des solutions asymptotiques :

- Les méthodes basées sur les champs, ce sont les approches géométriques telles que la GO², la GTD³, l'UTD⁴ ou bien encore l'ITD⁵.
- Les méthodes basées sur les courants, ce sont les approches physiques telles que la PO⁶, la PTD⁷, l'ECM⁸ ou bien encore la STD⁹.

Les approches géométriques sont issues du concept de « rayons » de l'optique géométrique tandis que les approches physiques sont basées sur les courants surfaciques créés à la surface d'une structure illuminée par une onde électromagnétique.

Ces méthodes sont dédiées à l'étude de structures électriquement grandes, c'est-à-dire dont les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde de travail. Typiquement, cela correspond à des problèmes électromagnétiques de rayonnement d'antennes placées à proximité de grands réflecteurs ou du rayonnement en milieu urbain par exemple.

1. Linéaire, Homogène et Isotrope.
2. Geometrical Optic.
3. Geometrical Theory of Diffraction.
4. Uniform Theory of Diffraction.
5. Incremental Theory of Diffraction.
6. Physical Optic.
7. Physical Theory of Diffraction.
8. Equivalent Current Method.
9. Spectral Theory of Diffraction.

3.1 Méthodes basées sur les champs – Théories et approches géométriques

Le domaine de validité des méthodes asymptotiques basées sur les champs électromagnétiques est associé à celui des approches géométriques et des champs de rayons. Un champ électromagnétique est qualifié de champ de rayons lorsque l'onde qui y est associée peut être assimilée à une onde plane le long d'un rayon : son amplitude et sa phase varient perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde et donc du rayon. Dans cette hypothèse, l'étude du champ électromagnétique consiste à déterminer les rayons et à en calculer les champs électromagnétiques qui lui sont associés. Cette approche repose donc sur une approche assez intuitive des phénomènes électromagnétiques.

Parmi ces techniques basées sur des approches géométriques, on distingue différentes méthodes plus ou moins complètes capables de rendre compte des aspects et des phénomènes électromagnétiques.

3.1.1 Optique géométrique (GO)

L'optique géométrique est la première méthode asymptotique développée pour décrire les interactions des ondes électromagnétiques avec des objets. Elle a été établie bien avant les équations de Maxwell et est fondée sur la notion et le concept, très intuitif physiquement, de front d'onde¹⁰ et de rayons. Ce concept est utilisé pour décrire la propagation des ondes électromagnétiques. Le principe d'Huygens permet de comprendre la propagation d'un tel front d'onde.

Le principe d'Huygens (1818)

Ce principe, très intuitif, permet de retrouver facilement les lois de l'optique géométrique et permet aussi de décrire les phénomènes de diffraction et d'interférence. Chaque point du front d'onde se comporte comme une source secondaire et émet une onde sphérique. Le nouveau front d'onde est l'enveloppe de ces ondes sphériques, *cf.* Fig.3.1.

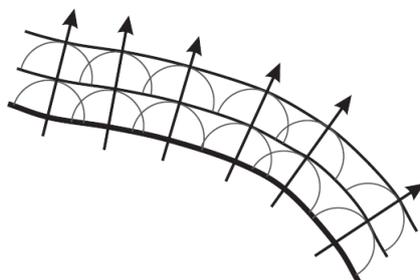


FIGURE 3.1 – Propagation d'un front d'onde selon le principe d'Huygens.

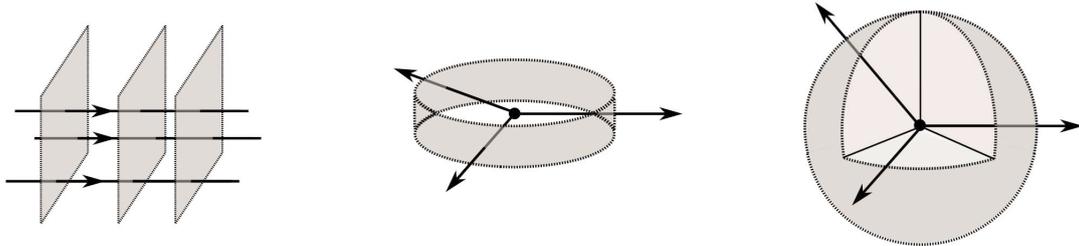
Un rayon représente physiquement la direction de propagation de l'énergie. Sa direction et son sens sont portés par le vecteur de Poynting. La notion de rayon est indissociable de celle de front d'onde comme l'énonce le théorème de Malus (*cf.* Fig. 3.2) :

Les chemins lumineux sont orthogonaux aux surfaces équi-phases (surfaces d'onde).

10. Un front d'onde est une surface sur laquelle l'onde a une phase constante (surface équi-phase).

Tout rayon peut être défini par un front d'onde, la surface orthogonale au rayon ; et réciproquement, tout front d'onde détermine localement un rayon, le « trait » orthogonal à la surface.

On considère en général un faisceau ou un tube de rayons — constitué d'un rayon axial et d'un ensemble de rayons paraxiaux — afin de décrire le transport de l'énergie.



a – Onde plane (1D) b – Onde cylindrique (2D) c – Onde sphérique (3D)

FIGURE 3.2 – Surfaces d'onde et rayons de différents fronts d'onde.

L'optique géométrique repose sur trois principes fondamentaux :

- la variation linéaire de la phase le long d'un rayon.
- la conservation de la puissance dans un tube de rayons.
- la conservation de la polarisation.

Ces rayons sont déterminés suivant les lois de Snell-Descartes¹¹, qui découlent du principe de Fermat.

Le principe de Fermat (1657)

Le principe de Fermat — valable dans les milieux isotropes — sert de fondement à l'optique géométrique. Il permet de décrire la forme du chemin optique d'un rayon lumineux et peut s'énoncer de deux façons :

- du point de vue du temps de parcours
« *La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit stationnaire*¹². »
- du point de vue du chemin optique
« *La lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que le chemin optique suivi le long du trajet soit stationnaire*¹². »

Cette théorie permet de décrire de manière satisfaisante la propagation de rayons en espace libre mais prévoit des champs nuls dans les zones d'ombre géométrique (en présence d'un obstacle), où ne pénètre aucun rayon, ce qui contredit l'expérience. Par ailleurs, elle ne s'applique qu'à des champs de rayons. De plus, dans certaines zones,

11. Lois de bases de l'optique géométrique à savoir les lois de propagation (rectiligne), réflexion et réfraction dans un milieu isotrope.

12. extrême(e) *i.e.* minimal(e) ou maximal(e).

cette hypothèse n'est plus vérifiée et elle prédit des champs infinis, ce qui n'est physiquement pas acceptable. Par analogie avec la mécanique des fluides, ces zones sont appelées « couches limites ». Ces zones se situent au voisinage des surfaces des objets, des limites ombre-lumière ou encore des caustiques¹³.

Aussi, elle ne permet de décrire que deux types d'interaction, la réflexion et la réfraction. Elle néglige *a priori* le phénomène de diffraction.

La théorie géométrique de la diffraction (GTD), que nous allons voir à la section suivante, vient compléter la théorie de l'optique géométrique en introduisant des rayons diffractés qui vont permettre de décrire avec précision (sans être exact pour autant car il s'agit d'une méthode asymptotique et par conséquent valide aux hautes fréquences) les champs électromagnétiques qui sont présents dans les zones d'ombre.

3.1.2 Théorie géométrique de la diffraction (GTD)

La théorie géométrique de la diffraction a été introduite par J.B. Keller dans les années 60 [Kel62] pour pallier le défaut des zones d'ombre (LOI¹⁴ et LOR¹⁵) de l'optique géométrique, *cf.* Figure 3.3. Elle se place dans la continuité de l'optique géométrique en introduisant deux nouveaux types de rayons, les rayons diffractés et les rayons rampants (*cf.* Figure 3.4), qui s'ajoutent aux rayons incidents, réfléchis et transmis de l'optique géométrique. La particularité de ces nouveaux rayons est de pénétrer dans les zones d'ombre de l'optique géométrique :

- Les rayons diffractés apparaissent lorsqu'un rayon incident rencontre un coin ou une arête d'un objet.
- les rayons rampants apparaissent à la surface des objets. Ces rayons de surface sont peu propagatifs et s'atténuent très rapidement. Par la suite, nous supposons que les zones d'observation sont suffisamment éloignées des surfaces des objets pour les négliger.

Aussi, l'application du principe de Fermat amène à considérer un faisceau de rayons (ou tube de rayons) diffractés qui forment un cône autour de l'arête, appelé cône de Keller *cf.* Fig. 3.5.

Lorsque l'obstacle est constitué par une surface régulière (sans arêtes), la théorie montre que la zone d'ombre est atteinte par des rayons dit « rampants » sur la surface diffractante, à partir du point illuminé le plus proche.

Cette théorie a été largement développée depuis [KP74], [Hol00] et étayée dans de nombreux ouvrages [MAB08], [Bal89], [BK94] pour ne faire référence qu'à quelques-uns d'entre-eux. Les rayons diffractés sont déterminés par le principe de Fermat généralisé [BM94] et obéissent aux mêmes lois que celles de l'optique géométrique.

La GTD conserve l'aspect intuitif de la GO. La phase varie linéairement le long d'un

13. En effet, dans le facteur de divergence géométrique A (*cf.* Eq. (7.4.2), p. 99), si le point P se trouve sur une des caustiques (c'est-à-dire pour $s = -\rho_1$ ou $s = -\rho_2$), le champ prédit par l'optique géométrique devient infini.

14. Limite d'Ombre Incidente, en anglais *ISB* pour *Incident Shadow Boundary*.

15. Limite d'Ombre Réfléchie, en anglais *RSB* pour *Reflected Shadow Boundary*.

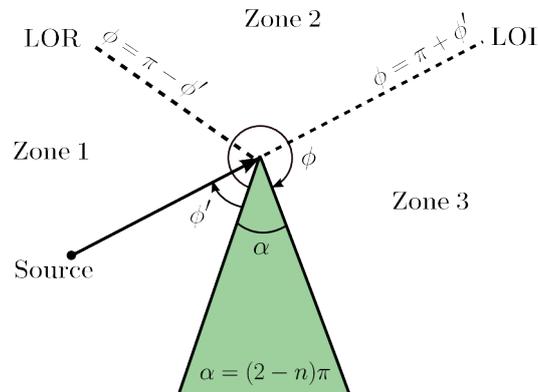
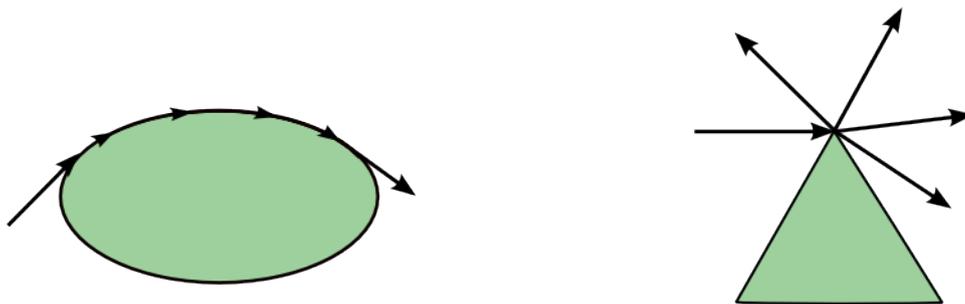


FIGURE 3.3 – Frontières ombre-lumière.

rayon et la puissance se conserve dans un tube de rayon. Le champ diffracté ne dépend que des propriétés locales du champ incident et de la géométrie de l'objet diffractant.



a – Rayon rampant à la surface d'un objet.

b – Rayon diffracté par une pointe.

FIGURE 3.4 – Rayons supplémentaires de la GTD par rapport à la GO.

Keller postule qu'aux hautes fréquences, la diffraction peut être considérée comme un phénomène local, et qu'elle ne dépend que de la forme de l'objet diffractant au voisinage du point de diffraction.

Principe de localité

Aux hautes fréquences, le champ diffracté¹⁶ par un objet ne dépend pas du champ en tout point de l'objet mais uniquement du champ au voisinage de certains points particuliers que l'on appellera points de diffraction. De ce principe de localité découle la notion de rayon qui représente la trajectoire suivie par l'onde [Con05].

D'après ce principe de localité, on détermine le champ diffracté en remplaçant l'objet réel par un objet canonique de forme voisine et dont la solution asymptotique est connue [Jam86]. Ces solutions sont déterminées pour quelques structures élémentaires telles que des pointes, arêtes, cylindres ou cônes par exemple. Cette approche permet de

16. On entend ici par champ diffracté, le champ total rayonné lors l'interaction avec un objet.

calculer le champ diffracté dans la plupart des cas. De plus, elle offre une interprétation physique très utile du résultat en terme de rayons. Cependant, cette méthode ne suffit pas pour déterminer correctement les champs de l'ensemble des régions de l'espace. L'inconvénient de la GTD est de prédire des champs infinis ou discontinus dans certaines zones de l'espace et notamment aux différentes frontières ombre-lumière de ces régions. Ces erreurs proviennent simplement d'un mauvais choix du développement asymptotique. Une autre théorie plus complète a été élaborée pour pallier ce problème, la théorie uniforme de la diffraction *cf.* Section 3.1.3.

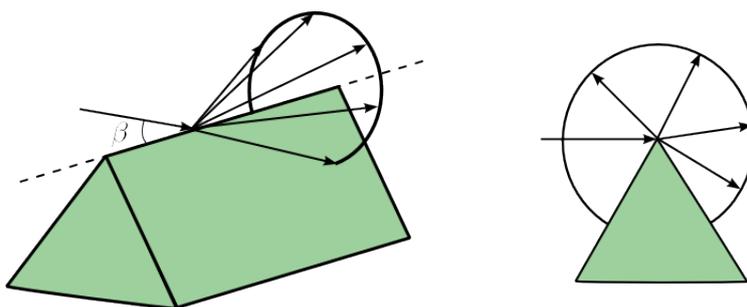


FIGURE 3.5 – Diffraction par une arête : Cône de Keller.

3.1.3 Théorie uniforme de la diffraction (UTD)

La théorie uniforme de la diffraction [MPM90] est une extension de la théorie géométrique de la diffraction dans les zones où celle-ci est mise en défaut. L'UTD est basée sur les mêmes principes que ceux de la GO et de la GTD, et associés à ceux de la méthode de la couche limite [BM94]. En effet, la GO et la GTD ne permettent pas de rendre compte des champs aux frontières ombre-lumière et on peut définir ces frontières comme des couches limites. On appelle généralement une couche limite, une couche mince à l'intérieure de laquelle la solution varie rapidement, ici l'amplitude du champ. Pour compenser la divergence de la GTD sur les frontières des zones d'ombre, l'UTD introduit une fonction de transition de Fresnel (*cf.* Section 7.4.2 du Chap. 7) dans le coefficient de diffraction [Bal89], [Siz05].

Cette méthode permet de déterminer les coefficients de diffraction de structures simples — arêtes, coins — pour des matériaux conducteurs et diélectriques avec ou sans pertes [ESRV02].

La théorie uniforme asymptotique (UAT¹⁷) est une autre technique pour déterminer les coefficients de diffraction [Jam86]. L'UTD et l'UAT diffèrent dans leur approche du développement asymptotique effectué sur la solution canonique. L'UTD utilise l'approche de Pauli-Clemmow tandis que l'UAT utilise la méthode de Van der Waerden pour traiter les singularités dues aux pôles de la solution canonique [VJ95], [RSM78], [BM94]. Ces deux théories uniformes assurent une continuité des champs électromagnétiques aux frontières ombre-lumière.

Ces méthodes fournissent des résultats satisfaisants dans le cas de géométries relativement simples. Cependant, dans le cas de géométries particulières — un réflecteur

17. Uniform Asymptotic Theory.

parabolique par exemple — il existe des points et des directions qui sont atteints par une infinité de rayons, ce sont les caustiques. Malgré les apports des corrections uniformes, le problème du traitement des caustiques est inhérents aux méthodes de rayons. Une autre technique également basée sur les champs et similaire à l'UTD permet de pallier ce défaut, la théorie incrémentale de la diffraction.

3.1.4 Théorie incrémentale de la diffraction (ITD)

La théorie incrémentale de la diffraction [TM94], [TMT95] est une extension de la théorie uniforme de la diffraction. En utilisant simplement un contour d'intégration, cette théorie introduit le concept des « contributions incrémentales » pour calculer les champs diffractés par des points le long du contour de l'obstacle [ECHA08]. Cette technique donne dans la plupart des cas des résultats similaires à ceux de l'UTD. Les seuls cas où les résultats diffèrent sont pour les caustiques où l'ITD donne des résultats corrects contrairement à l'UTD. De plus, elle est facile à mettre en œuvre dans le cas de contours complexes.

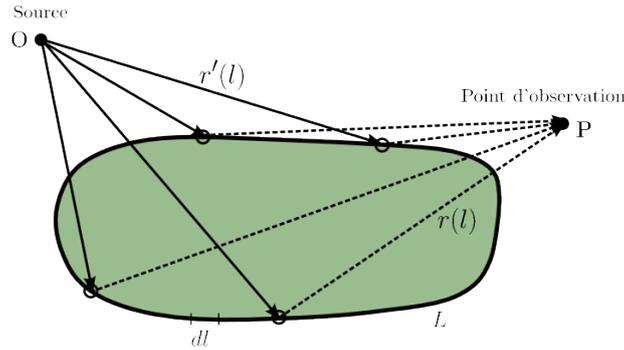


FIGURE 3.6 – Contributions incrémentales d'un ensemble de points le long d'un contour.

Le champ diffracté au point P est la superposition des contributions incrémentales, c'est-à-dire la sommation des contributions de chaque points le long du contour L , cf. Fig. 3.6. Chaque contribution est due à l'illumination de chaque point de diffraction local par la source et ceci grâce au principe de localité. D'après le principe de localité (à haute fréquence), cf. Section 3.1.2, on définit localement la discontinuité par un problème canonique pour chaque point le long du contour L .

Le champ électrique total diffracté s'obtient en distribuant et en intégrant les contributions incrémentales le long du contour L :

$$E^d(P) = \int_L dE^d(l) dl = \int_L \bar{\bar{D}}(l) E_0(l) \frac{e^{-jkr(l)}}{r(l)} dl \quad (3.1.1)$$

où

- . dE^d est la contribution incrémentale du champ.
- . $\bar{\bar{D}}$ est le coefficient de diffraction dyadique au point d'intégration.
- . E_0 est le champ incident au point d'intégration.
- . r est la distance du point d'intégration au point d'observation P .
- . k est la constante de propagation du milieu.

On ajoute aux champs incident et réfléchi de l'optique géométrique, celui du champ diffracté de la théorie incrémentale de la diffraction. Le champ total E_{tot} peut donc s'écrire :

$$E_{tot} = E^i + E^r + E_{ITD}^d$$

L'ITD permet l'intégration sur des contours complexe, cependant le rayon de courbure du contour doit être supérieur à la longueur d'onde utilisée.

Les approches géométriques (basées sur le lancer de rayons) ne sont pas les seules à fournir une solution asymptotique. Ces méthodes donnent directement les champs diffractés¹⁸ le long d'un rayon. Cependant, elles ne permettent pas de prédire et d'évaluer le champ électromagnétique dans les régions des caustiques où elles prédisent des champs infinis (sauf pour l'ITD).

D'autres techniques ont été développées pour traiter des interactions d'une onde électromagnétique avec un objet électriquement grand. Basées sur approche physique, elles utilisent les courants induits circulant à la surface d'un objet éclairé par une onde incidente afin de déterminer les champs électromagnétiques rayonnés par cet objet.

3.2 Méthodes basées sur les courants – Théories et approches physiques

Les approches physiques [Str41] sont des méthodes — basées sur une approximation haute fréquence — qui se situent entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire. En effet, l'approximation consiste à utiliser les rayons de l'optique géométrique pour estimer les champs à la surface de l'objet considéré et d'intégrer ensuite ces champs sur l'ensemble de la surface éclairée pour déterminer les champs diffusés — c'est-à-dire réfléchis et diffractés — par cet objet. Le champ à la surface peut être considéré comme la somme de deux contributions, un champ *uniforme* calculé sur chaque portion de surface régulière et un champ dit *de frange* qui provient des discontinuités.

Cependant comme toute formulation asymptotique basée sur l'hypothèse de l'approximation haute fréquence, ces méthodes ne permettent pas de prédire l'évolution du champ électromagnétique en zone de champ proche.

3.2.1 Optique physique (PO)

L'optique physique est une méthode intermédiaire entre l'optique géométrique et la théorie physique. Le terme d'« optique physique » signifie que cette théorie est plus physique que l'optique géométrique et pas aussi précise que la théorie physique. Elle est basée sur une approximation de la densité de courant électrique circulant à la surface d'un objet parfaitement conducteur.

La méthode consiste généralement à approcher la densité de courant électrique \vec{J} à la surface S d'un objet par la densité de courant \vec{J}_{PO} induite par le champ magnétique incident \vec{H}_i , cf. Figure 3.7. Les champs rayonnés par la surface sont ensuite calculés en

18. On entend ici par champs diffractés, l'ensemble des rayons *i.e.* propagation, réflexion, réfraction et diffraction.

intégrant cette densité de courant électrique sur la surface éclairée en utilisant la fonction de Green [Mil05] et les expressions intégrales des équations de Maxwell¹⁹. Il est alors possible de déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.

Dans la zone éclairée, le champ électromagnétique est considéré comme un champ uniforme et peut être déterminé par la série de Luneberg-Kline [BM94].

Soit S la surface d'un objet parfaitement conducteur, r' un point de S et \vec{n} le vecteur normal unitaire extérieur à la surface S en r' . La densité surfacique de courant électrique \vec{J} peut s'exprimer en fonction du champ magnétique incident \vec{H}^i sur la surface S grâce au théorème d'équivalence :

$$\vec{J}(r') = \hat{n}(r') \times [\vec{H}^i(r') + \vec{H}^r(r')] = 2 \hat{n}(r') \times \vec{H}^i(r') \quad (3.2.1)$$

car $\vec{H}^i = \vec{H}^r$, où \vec{H}^r est le champ magnétique réfléchi.

Dans les zones d'ombre — surface non-éclairée selon l'hypothèse de l'optique géométrique — la densité de courant est considérée comme nulle. L'approximation de l'optique géométrique consiste à utiliser la densité de courant surfacique \vec{J}_{PO} induite par un plan parfaitement conducteur tangent à la surface S en r' :

$$\vec{J}_{PO}(r') = \begin{cases} 2 \hat{n}(r') \times \vec{H}^i(r') & \text{si la surface } S \text{ est directement éclairée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

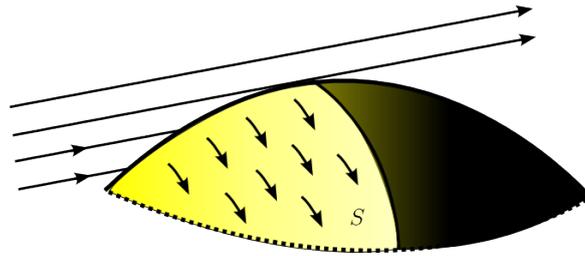


FIGURE 3.7 – Calcul du champ rayonné par la PO.

Cependant, cette approximation ne rend pas compte des ondes rampantes, ondes de discontinuité de la zone de séparation ombre-lumière aussi appelée séparatrice. Par conséquent, l'optique physique ne peut tenir compte que d'un seul type d'interaction, la réflexion. Dans les zones d'ombre, la densité de courant est considérée comme nulle. Le champ électromagnétique total s'obtient en sommant les contributions du champ incident et du champ rayonné par l'objet : $E_{tot} = E^i + E_{PO}^r$.

Pour pallier ce défaut, une autre théorie a donc été développée afin de tenir compte de ces ondes rampantes, la théorie physique de la diffraction.

¹⁹. Formulations de Stratton-Chu, Kottler ou Franz.

3.2.2 Théorie physique de la diffraction (PTD)

La théorie physique de la diffraction a été développée par Ufimtsev en 1962. Ces concepts sont similaires à ceux de la théorie géométrique de la diffraction [Ufi91], [Ufi07]. La PTD est à la PO ce que la GTD est à la GO.

La PTD utilise les mêmes principes que ceux de l'optique physique en y ajoutant des courants de frange induits par la présence de discontinuités afin de tenir compte de la diffraction. Le champ électromagnétique total s'exprime :

$$E_{tot} = E^i + E_{PO}^r + E_u^d \quad (3.2.3)$$

où

- . E^i est le champ incident.
- . E_{PO}^r le champ réfléchi dans l'hypothèse de la PO.
- . E_u^d un terme correcteur, approximation asymptotique au premier ordre de l'effet de diffraction induit par les discontinuités.

Plusieurs techniques permettent de formuler ce champ correcteur E_u^d . Généralement, elles consistent à l'exprimer sous la forme d'une intégrale linéique, dont le contour d'intégration correspond à la bordure diffractante. On peut citer parmi ces techniques :

- la méthode des courants équivalents (ECM).
- la théorie incrémentale de la diffraction (ITD) (vue à la Section 3.1.4).

Notons que l'utilisation de la $GO + ITD$ est plus rapide que la $PO + PTD$. Ceci est principalement dû au fait que l'ITD intègre sur un contour tandis que la PO intègre sur une surface.

3.2.3 Méthode des courants équivalents (ECM)

La PTD nécessite une mise en œuvre relativement lourde pour déterminer le champ diffracté par une discontinuité. C'est pourquoi on peut être amené à utiliser d'autres techniques, basées sur l'utilisation de courants équivalents, afin de calculer numériquement les champs diffractés [RP60] et ceci à l'aide d'expressions relativement simples.

Cette méthode consiste à remplacer les sources du champ diffracté par des courants équivalents fictifs, électriques et magnétiques, qui évoluent le long de la discontinuité. Ceci a pour conséquence de considérer une intégrale curviligne le long de la ligne de discontinuité et non plus une intégrale surfacique comme l'exige la PO et la PTD [KST04b], [PB02] ce qui a pour conséquence de réduire d'un degré la dimension du problème.

Elle postule donc l'existence de courants linéiques fictifs, électrique I et magnétique M le long de la discontinuité. Le champ diffracté par cette discontinuité, en zone de Fraunhofer (champ lointain) peut s'exprimer par :

$$\vec{E}_d = jk\psi_0 \int_C \left[Z_0 I \hat{s} \times (\hat{s} \times \hat{l}) + M(\hat{s} \times \hat{l}) \right] dl \quad (3.2.4)$$

où

- . ψ_0 est la fonction de Green en espace libre $\implies \psi_0 = \frac{e^{-jk\hat{r}\hat{s}}}{r}$
- . I est le courant électrique.
- . M est le courant magnétique.
- . \hat{s} est le vecteur unitaire suivant la direction d'observation.
- . \hat{l} est le vecteur unitaire aligné le long du contour d'intégration.

La diffraction de Fraunhofer simplifie l'expression du champ électrique diffracté en une somme d'ondes planes car en zone de champ lointain, le rayon de courbure des ondes peut être approché par des ondes planes ce qui n'est pas le cas de la diffraction de Fresnel (zone de champ proche) qui doit tenir compte de la courbure des fronts d'ondes.

Les courants électrique et magnétique peuvent s'exprimer ainsi [Mic91] :

$$I = \frac{2j (\hat{l} \cdot \vec{E}_i) D_s}{kZ_0 \sin \beta_i} \quad (3.2.5)$$

$$M = \frac{2jZ_0 (\hat{l} \cdot \vec{H}_i) D_h}{k \sin \beta_i} \quad (3.2.6)$$

où

- . D_s et D_h sont les coefficients de diffraction *soft* et *hard* déterminés par la GTD.
- . \vec{E}_i et \vec{H}_i sont les champs électrique et magnétique incidents à la discontinuité.
- . β_i est l'angle formé par le vecteur unitaire de la direction d'incidence et celui porté le long de la discontinuité.

Toutefois, cette méthode est soumise aux mêmes limitations que la GTD et ne permet pas par conséquent de calculer le champ diffracté en zone de champ proche. Aussi les champs sont infinis sur les caustiques. Elle permet néanmoins de supprimer les divergences de la GTD aux frontières ombre-lumière.

Une autre technique permet d'obtenir les champs diffractés aussi bien en zone de champ proche qu'en zone de champ lointain, la théorie spectrale de la diffraction.

3.2.4 Théorie spectrale de la diffraction (STD)

La théorie spectrale de la diffraction a été inventée par Mittra *et al.* [MRSK76], [MKRS79]. Elle consiste à représenter les champs intervenant dans des problèmes de diffraction comme des superpositions d'ondes planes [BM94].

Les ondes planes sont des solutions élémentaires de l'équation d'onde. Puisque cette équation est linéaire, toute superposition d'ondes planes est également solution de l'équation d'onde.

Avec ce formalisme, le champ peut être calculé quel que soit le point d'observation. De plus, cette représentation spectrale du champ permet de passer aisément des phénomènes de diffraction en zone de champ proche (Fresnel) en zone de champ lointain (Fraunhofer) [Gui83].

La méthode du spectre d'onde plane [Cle66] consiste à rechercher les solutions de certains problèmes de diffraction sous forme d'un spectre d'ondes planes [Cle73], [CBRM84] de la forme :

$$U(x, y, z) = \iint A(\alpha, \beta) e^{jk(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta \quad (3.2.7)$$

où

- . U est l'amplitude complexe du champ électromagnétique incident se propageant suivant z .
- . $A(\alpha, \beta)$ est le spectre angulaire. Il représente l'ensemble des directions de propagation des ondes planes composant U dans le plan z .
- . k est le vecteur d'onde.

L'un des principaux avantages de la STD est qu'elle demeure valide aux frontières ombre-lumière. De plus, elle tient compte des modes rampants introduits par une discontinuité à partir du moment où le champ incident peut être représenté par un spectre d'ondes planes. Si le champ incident ne peut être représenté par un spectre d'ondes planes, on applique alors le principe de localité de manière à pouvoir approcher localement le champ au voisinage de la singularité par une onde plane.

Nous venons d'établir les principales méthodes asymptotiques. Certaines se basent sur les champs électromagnétiques, ce sont les approches géométriques tandis que d'autres se basent sur les courants, ce sont les approches physiques. Cependant, les concepts et la mise en œuvre de ces deux approches sont très différentes l'une de l'autre.

La résolution des approches physique se fait principalement de manière numérique puisque l'on cherche à calculer une intégrale sur un contour ou plus généralement une surface pour déterminer les courants. Toutefois, elles permettent difficilement de tenir compte de la présence de nombreux obstacles dans l'environnement. Ces méthodes sont plutôt adaptées à l'étude du rayonnement d'une antenne avec un réflecteur.

Les approches géométriques quant à elles, utilisent le concept du lancer de rayon afin de déterminer l'ensemble des trajectoires des raies de champ électromagnétique émis depuis une source. Ces dernières sont bien adaptées aux calculs de propagation dans des environnements comportant de nombreux obstacles. Nous allons dans la suite décrire brièvement cette technique.

3.3 Les méthodes de lancer de *rayons*

La mise en œuvre de modèles basés sur des approches géométriques telles que la GO, la GTD ou l'UTD par exemple, requiert la construction des trajectoires des rayons entre la (les) source(s) et le(s) récepteur(s). Ce sont typiquement ces méthodes qui sont le plus utilisées pour étudier le rayonnement et les interactions d'une source électromagnétique dans des environnements comportant de nombreux objets tels que les milieux urbains ou *indoors* [YWK98]. Ces méthodes nécessitent un traitement géométrique pour déterminer l'ensemble des rayons (trajets source-récepteurs) puis électromagnétique pour quantifier le champ porté par ces rayons.

Parmi les méthodes dites de « lancer », on distingue plusieurs techniques : le lancer de rayons (LR²⁰), le lancer de faisceaux gaussien (LFG²¹) et le lancer hybride.

20. en anglais, *Ray Tracing (RT)*.

21. en anglais, *Ray Gaussian Beam (RGB)*.

3.3.1 Le lancer de rayons

Parmi les méthodes de lancer de rayons [Des72], [Rey06] nous pouvons distinguer deux « optiques » différentes. L'une consiste à partir de la source pour aller vers le récepteur, on parlera alors de lancer de rayons ; alors que l'autre fait chemin inverse et consiste à partir du récepteur pour aller vers la source, on parlera alors de tracé de rayons, *cf.* Fig. 3.8. Tout dépend ce que l'on cherche à modéliser et à simuler [Gla89].

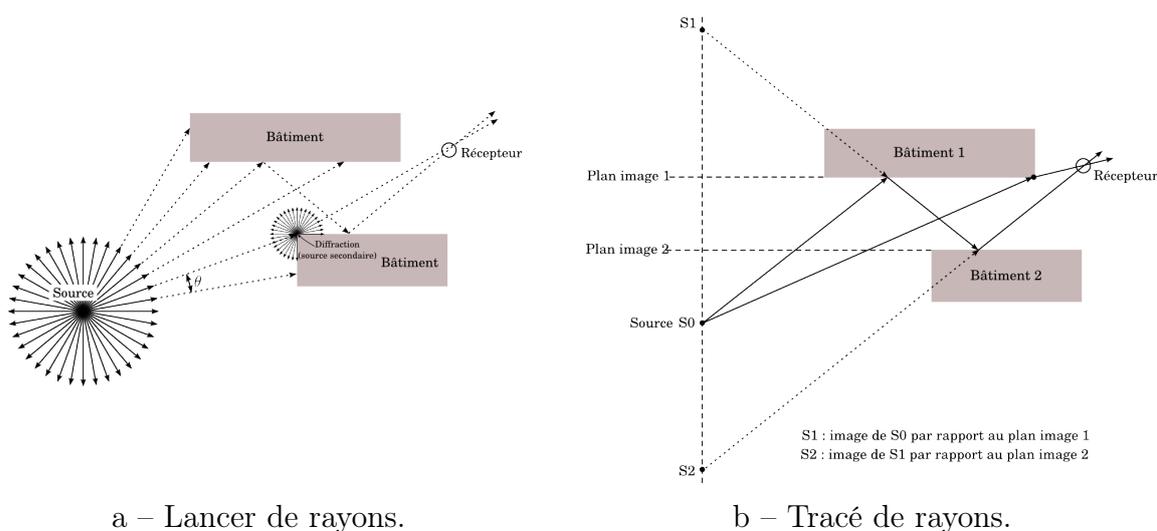


FIGURE 3.8 – Illustration des méthodes de lancer et de tracé de rayons.

Le lancer de rayons : de la source vers le récepteur

Le principe du lancer de rayons, comme nous venons de le voir, consiste à émettre des rayons depuis la source dans « toutes » les directions de l'espace et à suivre l'évolution²² de ces rayons pour ensuite ne conserver que ceux qui atteignent un récepteur « cible ». Bien entendu, il n'est pas possible de lancer une infinité de rayons dans « toutes » les directions de l'espace mais plutôt de lancer un nombre important de rayons, répartis avec un certain pas angulaire de façon à couvrir la zone la plus large, et ce pour une résolution donnée.

Un des inconvénients majeurs de cette technique est d'omettre les interactions avec certains objets. Typiquement si un objet de petite taille se situe entre deux rayons adjacents, celui-ci ne pourra être vu et sera donc invisible. Une solution consiste alors à affiner le pas angulaire du lancer de rayons de façon à tenir compte de la résolution du plus petit objet de la scène. Mais le nombre de rayons sera d'autant plus élevé que les objets de la scène seront de petites dimensions, ce qui peut nécessiter un temps de calcul important voire prohibitif.

Cette technique est plutôt utilisée pour déterminer la carte de champ électromagnétique rayonné par une source dans une zone de l'espace délimitée par une frontière extérieure, limitant ainsi le domaine de calcul.

22. Évolution des rayons suite aux interactions (ou non) de ceux-ci avec les objets de la scène : propagation, réflexion, transmission, diffraction.

Le tracé de rayons : du récepteur vers la source

La technique du tracé de rayon fait le chemin inverse de celle du lancer de rayons. Elle consiste à partir d'un récepteur donné pour aller vers la source en utilisant la méthode des images. On génère ainsi un nombre beaucoup plus faible de rayons puisqu'on ne conserve que les rayons qui partant du récepteur, arrive jusqu'à la source suite aux différentes interactions. En contrepartie, la zone d'observation et de quantification du champ électromagnétique est restreinte à celle du récepteur. Notons que cette méthode est dite exacte car la recherche des trajets se fait rigoureusement en accord avec le nombre d'interactions paramétrées et l'environnement.

Cette technique sera donc plutôt utilisée pour déterminer le champ électromagnétique rayonné par une source en un point particulier de l'environnement.

Pour résoudre l'inconvénient majeur du lancer de rayons, qui est le nombre de rayons, d'autres méthodes ont été développées, utilisant le fait que de nombreux rayons suivent approximativement le même trajet. On distingue parmi ces méthodes, le lancer de faisceaux gaussiens et le lancer hybride.

3.3.2 Le lancer de faisceaux gaussiens

Le lancer de faisceaux gaussiens est une approche volumique du lancer de rayons classique. Elle consiste à échantillonner l'ensemble de l'espace autour de la source en un certain nombre de « faisceaux volumiques » et ce sont les volumes qui propagent les fronts d'ondes, *cf.* Fig. 3.9. Le champ rayonné est donc représenté par une superposition de champs de faisceaux gaussiens. On ne suit plus l'évolution de rayons mais celui de fronts d'ondes.

Un faisceau gaussien est solution de l'équation de propagation dans la cadre de l'approximation paraxiale, ce qui suppose une faible divergence du faisceau par rapport à son axe de propagation. Les seuls trajets à tracer sont les axes des faisceaux. De plus les faisceaux gaussiens ne rencontrent pas de problèmes de caustiques contrairement au méthodes de lancer de rayons ou tubes de rayons.

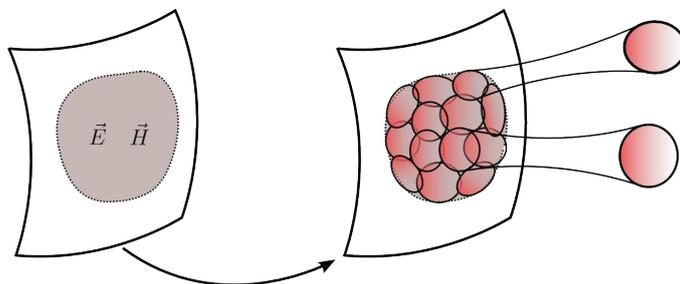


FIGURE 3.9 – Illustration de la décomposition en faisceaux d'un champ électromagnétique sur une surface courbe.

L'ensemble des techniques hautes fréquences développées précédemment s'appuie sur le principe de localité. Localement, la géométrie d'un objet est équivalente à celle d'un objet canonique connu. Aussi le champ incident est assimilable à une onde plane ou sphérique, ce qui n'est plus le cas lorsque le champ incident correspond à un faisceau

gaussien.

Le lancer de faisceaux gaussiens est une adaptation du lancer de rayons [Hey02], [Lea03], [Hil07] pour former un champ de faisceaux. Les faisceaux recouvrant tout l'espace, cette méthode ne risque plus d'omettre certains objets. Par contre la complexité des calculs pour déterminer les intersections entre les faisceaux et les objets augmente par rapport au lancer de rayons ; et le temps de calcul s'avère toujours très important. De plus, il est difficile de tenir compte de parois à forte courbure.

Pour traiter le cas de la diffraction, on a recours à la théorie spectrale de la diffraction. Le champ incident est décrit comme une superposition d'ondes planes et le champ diffracté est la superposition des champs diffractés de chacune de ces ondes planes.

Ces différentes techniques sont donc relativement coûteuses d'un point de vue informatique. D'un côté, le lancer de rayons met en œuvre un traitement relativement simple en contrepartie d'un nombre important de rayons pour limiter le risque d'omettre des interactions avec des objets. De l'autre côté, le lancer de faisceaux gaussiens permet de recouvrir tout l'espace au prix d'une complexité des interactions.

Afin de pallier les principaux défauts de ces méthodes, une autre solution a été développée. Nommée le lancer hybride, elle allie d'une certaine manière le lancer de rayons au lancer de faisceaux.

3.3.3 Le lancer hybride

Le lancer hybride est une méthode de lancer de faisceaux adaptatif. Comme pour le lancer de faisceaux, l'espace autour de la source est échantillonné (décomposé) en faisceaux. Ces faisceaux sont caractérisés par un nombre restreint de rayons « porteurs »²³. Typiquement, ces faisceaux (ou tube de rayons) sont délimités par des parallèles, des cônes ou des pyramides par exemple [SR94], [SM97]. Ainsi l'évolution du faisceau ne dépend que de l'évolution de ses rayons porteurs ce qui simplifie considérablement le calcul des interactions faisceaux-objets.

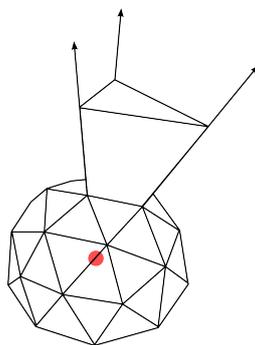


FIGURE 3.10 – Exemple d'échantillonnage de l'espace autour de la source.

23. Trois rayons pour un faisceau triangulaire, quatre pour un faisceau quadrangulaire, etc.

La source est décomposée en faisceaux homogènes, *cf.* Fig. 3.10, lesquels au cours de leur propagation²⁴ et de leurs interactions vont s'adapter et se subdiviser à leur tour en d'autres faisceaux (homogènes ou inhomogènes). On parle alors de subdivision adaptative *cf.* Fig. 3.11. La subdivision d'un faisceau se fait successivement tant que persiste des faisceaux inhomogènes ou que ces derniers n'ont pas atteint un critère limitant²⁵.

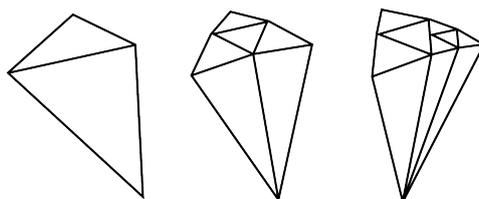


FIGURE 3.11 – Exemple de subdivision homogène d'un faisceaux.

24. Ces faisceaux s'élargissent au cours de la propagation.

25. Nombre maximal de subdivision ou angle solide minimal autorisé par exemple.