

Amélioration du schéma multi-dimensionnel paramétré par une fonction

Sommaire

4.1	Description du schéma MD1f	88
4.1.1	Forme générale	88
4.1.2	Cas d'une vitesse uniforme	95
4.2	Distribution angulaire de l'erreur	97
4.3	Minimisation de l'anisotropie	100
4.3.1	Minimisation sur l'erreur longitudinale	102
4.3.2	Minimisation sur l'erreur en terme croisé	105
4.4	Résultats numériques	107
4.4.1	Cas radial	107
4.4.2	Cas à 5 puits	108
4.4.3	Cas digitations	110

Dans le schéma 9P1s du chapitre §3, la modification du schéma de transport pour la saturation découle de celle du schéma pour la pression par décentrage amont. Il est alors naturel d'envisager une alternative où la modification est directement opérée sur l'équation en saturation, laissant tel quel le schéma de la pression. C'est ce qui est mis en œuvre ici avec l'espoir qu'en déployant un schéma de transport sophistiqué, de type multi-dimensionnel par exemple, l'effet d'orientation de maillage sera davantage réduit.

En effet, au lieu de se contenter de la direction normale à chaque arête, un schéma multi-dimensionnel fait l'effort de suivre de plus près les lignes de courant. Le schéma multi-dimensionnel retenu pour l'étude est celui de Kozdon et al. [60], dont la construction est rappelée en §4.1. Ce choix est motivé non seulement par les bons résultats que semblent obtenir les auteurs sur des simulations diphasiques mais aussi par le fait que le schéma dispose d'un degré de liberté fonctionnel ajustable, d'où d'ailleurs l'acronyme MD1f.

Comme réalisé en §4.2, le paradigme d'optimisation, introduit au chapitre précédent, se transpose assez aisément au cas présent, malgré une relative lourdeur du calcul des variations associé. Ainsi, il est possible de connaître le « meilleur » paramètre selon un

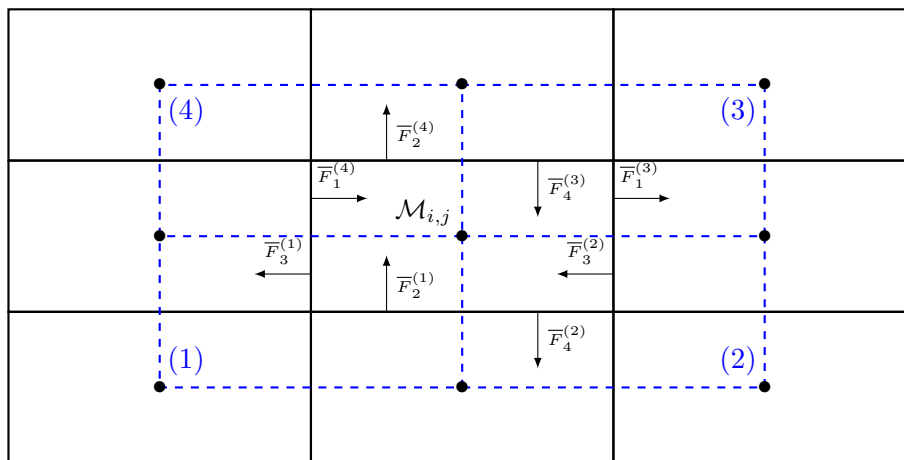


FIGURE 4.1 – Définition des zones d’interaction et du maillage dual.

critère de « moindre anisotropie ». Enfin, la section §4.4 regroupe les résultats numériques correspondant à ce schéma MD1f optimisé.

4.1 Description du schéma MD1f

Il existe un grand nombre de schémas multi-dimensionnels pour l’advection scalaire linéaire ou non linéaire dans la littérature scientifique, comme par exemple les travaux de Colella [30], d’Edwards [39], de Lamine [68], de Kozdon et al. [60] et plus récemment de Hamon et al. [55]. Pour l’advection linéaire, les ingénieurs IFP Energies nouvelles ont développé leur propre méthode [12, 71] implémentée dans divers logiciels.

Dans le cadre de cette thèse, seul le schéma de Kozdon est étudié car il est le seul possédant un paramètre de réglage, en vue de la minimisation de l’anisotropie, détaillée §4.3. Néanmoins, sous l’hypothèse d’une vitesse uniforme et suivant le choix du paramètre de réglage, il est équivalent à d’autres schémas multi-dimensionnels comme le schéma de Colella [30] ou encore le schéma de Roe et Sidilkover [82]. Dans [60, 63–65], le schéma MD1f est utilisé pour discrétiser les équations du système issues de la formulation par phases (2.2). Il est proposé ici d’appliquer ce schéma sur la formulation en flux fractionnaire comme cela est fait dans [55]. À la différence des travaux de Hamon et al., où ils utilisent une discrétisation totalement implicite en temps, le schéma de Kozdon est employé avec la discrétisation IMPES en temps.

4.1.1 Forme générale

La description du schéma MD1f passe avant tout par la définition des zones d’interaction dont l’ensemble forme un *maillage dual*. Celui-ci est construit en joignant les centres des mailles du maillage initial comme illustré sur la figure 4.1. Ainsi, la maille $\mathcal{M}_{i,j}$ fait partie de quatre zones d’interaction représentées par l’exposant (m) et numérotées localement de 1 et 4 dans le sens inverse des aiguilles d’une montre en commençant par le coin inférieur gauche.

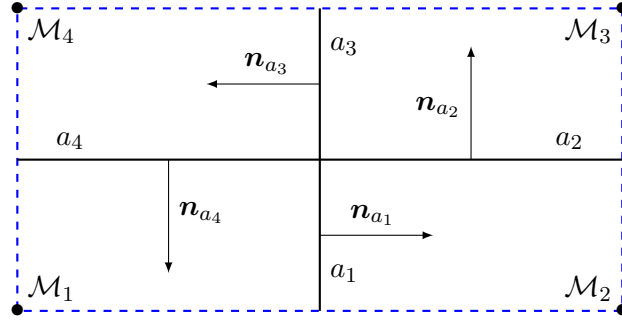


FIGURE 4.2 – Convention de l'orientation des flux dans une zone d'interaction.

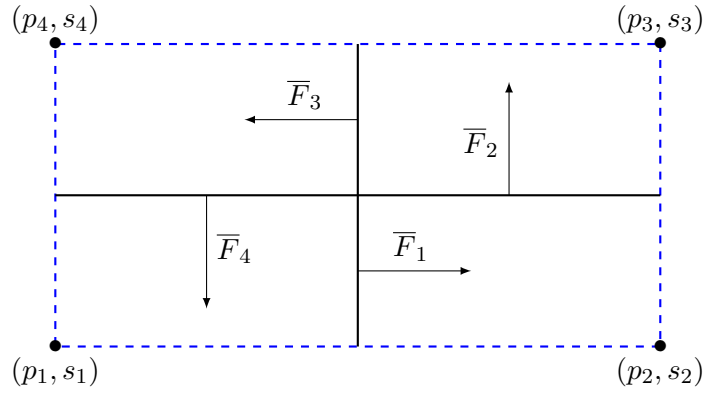


FIGURE 4.3 – Entités dans une zone d'interaction.

Chaque maille est subdivisée en quatre sous-maillles d'une zone d'interaction différente et chaque arête est coupée en deux demi-arêtes de zones d'interaction différentes. Au sein d'une même zone d'interaction, les sous-maillles et les demi-arêtes sont numérotées comme illustrées par la figure 4.2. Le sens des normales à chacune des demi-arêtes y est indiqué et est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Dans la suite, pour la zone d'interaction (m) , les inconnues de pression et de saturation dans chacune des sous-maillles k , $k \in \{1, \dots, 4\}$ seront notées $p_k^{(m)}$ et $s_k^{(m)}$. Ces inconnues sont définies aux sommets des zones d'interaction (voir figure 4.3) et comme ces sommets coïncident avec les centres des mailles, il vient

$$p_{i,j} = p_3^{(1)} = p_4^{(2)} = p_1^{(3)} = p_2^{(4)}, \quad (4.1a)$$

$$s_{i,j} = s_3^{(1)} = s_4^{(2)} = s_1^{(3)} = s_2^{(4)}. \quad (4.1b)$$

Résolution de l'équation en pression

Contrairement au schéma 5P, le raisonnement s'effectue ici sur les demi-arêtes $a_k^{(m)}$ et non plus sur les arêtes entières. Ainsi, le principe des volumes finis appliqué à l'équation en

pression (2.43a) aboutit à l'équation de bilans de flux (2.49) réécrite par demi-arêtes sous la forme

$$\begin{aligned}
 & - \left(\int_{a_1^{(3)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_1^{(3)}}(x_{i+1/2}, y) dy - \int_{a_3^{(2)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_3^{(2)}}(x_{i+1/2}, y) dy \right) \\
 & + \left(\int_{a_1^{(4)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_1^{(4)}}(x_{i-1/2}, y) dy - \int_{a_3^{(1)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_3^{(1)}}(x_{i-1/2}, y) dy \right) \\
 & - \left(\int_{a_2^{(4)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_2^{(4)}}(x, y_{j+1/2}) dx - \int_{a_4^{(3)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_4^{(3)}}(x, y_{j+1/2}) dx \right) \\
 & + \left(\int_{a_2^{(1)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_2^{(1)}}(x, y_{j-1/2}) dx - \int_{a_4^{(2)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_4^{(2)}}(x, y_{j-1/2}) dx \right) \\
 & = \int_{\mathcal{M}_{i,j}} q^{n+1} dx dy. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Le schéma MD1f discrétise alors l'équation de bilan de flux par

$$\left(\bar{F}_1^{(3)} - \bar{F}_3^{(2)} \right) - \left(\bar{F}_1^{(4)} - \bar{F}_3^{(1)} \right) + \left(\bar{F}_2^{(4)} - \bar{F}_4^{(3)} \right) - \left(\bar{F}_2^{(1)} - \bar{F}_4^{(2)} \right) = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1} \tag{4.3}$$

où les flux numériques $\bar{F}_k^{(m)}$ sont une approximation des termes $\int_{a_k^{(m)}} \kappa \lambda(s^n) \nabla p \cdot \mathbf{n}_{a_k^{(m)}} da$, calculés par le schéma TPFa afin d'aboutir à

$$\bar{F}_1^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \kappa \bar{\lambda}_1^{(m)} \left(p_1^{(m)} - p_2^{(m)} \right), \tag{4.4a}$$

$$\bar{F}_2^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \kappa \bar{\lambda}_2^{(m)} \left(p_2^{(m)} - p_3^{(m)} \right), \tag{4.4b}$$

$$\bar{F}_3^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} \kappa \bar{\lambda}_3^{(m)} \left(p_3^{(m)} - p_4^{(m)} \right), \tag{4.4c}$$

$$\bar{F}_4^{(m)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} \kappa \bar{\lambda}_4^{(m)} \left(p_4^{(m)} - p_1^{(m)} \right). \tag{4.4d}$$

Les quantités $\bar{\lambda}_k^{(m)}$ représentent les mobilités totales sur chacune des demi-arêtes $a_k^{(m)}$, approchées soit par un simple décentrage amont

$$\bar{\lambda}_k^{(m)} = \begin{cases} \lambda(s_k^{(m)}) & \text{si } p_k^{(m)} \geq p_{k+1}^{(m)}, \\ \lambda(s_{k+1}^{(m)}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

soit par moyenne harmonique

$$\bar{\lambda}_k^{(m)} = \frac{2\lambda(s_k^{(m)})\lambda(s_{k+1}^{(m)})}{\lambda(s_k^{(m)}) + \lambda(s_{k+1}^{(m)})}.$$

Le schéma MD1f utilise normalement un décentrage des mobilités plus sophistiqué. Or, pour la pression, il n'est pas nécessaire de faire ce choix puisque le travail sur les lignes de courant s'effectue sur l'équation en saturation uniquement.

Il est rappelé que dans le cadre du schéma IMPES, les pressions $p_k^{(m)}$ et les saturations $s_k^{(m)}$ sont, dans les expressions ci-dessus, considérées respectivement aux instants t^{n+1} et t^n . L'exposant $n + 1$ pour les pressions et l'exposant n pour les saturations ne sont pas écrits afin de ne pas alourdir davantage les notations.

En reportant les relations (4.1) dans les expressions (4.4) et en utilisant les définitions des flux $F_{i\pm 1/2,j}$ et $F_{i,j\pm 1/2}$ données en (2.51), il est facile d'avoir les relations suivantes

$$\begin{aligned}\overline{F}_1^{(3)} &= -\overline{F}_3^{(2)} = \frac{1}{2}F_{i+1/2,j}, & \overline{F}_1^{(4)} &= -\overline{F}_3^{(1)} = \frac{1}{2}F_{i-1/2,j}, \\ \overline{F}_2^{(4)} &= -\overline{F}_4^{(3)} = \frac{1}{2}F_{i,j+1/2}, & \overline{F}_2^{(1)} &= -\overline{F}_4^{(2)} = \frac{1}{2}F_{i,j-1/2},\end{aligned}$$

et d'en déduire

$$\begin{aligned}F_{i+1/2,j} &= \overline{F}_1^{(3)} - \overline{F}_3^{(2)}, & F_{i-1/2,j} &= \overline{F}_1^{(4)} - \overline{F}_3^{(1)}, \\ F_{i,j+1/2} &= \overline{F}_2^{(4)} - \overline{F}_4^{(3)}, & F_{i,j-1/2} &= \overline{F}_2^{(1)} - \overline{F}_4^{(2)}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de bilan de flux (4.3) peut se réécrire sous la forme

$$F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j} + F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2} = \Delta x \Delta y q_{i,j}^{n+1}$$

et l'équation en pression est discrétisée de manière identique à celle du schéma 5P, présentée au chapitre 2.

La gestion des conditions de bords ne pose pas de problème particulier. En effet, comme le schéma MD1f pour la pression correspond au schéma 5P, les conditions de bords sont prises en compte de manière identique (voir formules (2.55) et (2.54)).

Résolution de l'équation en saturation

Une fois les pressions p^{n+1} déterminées, la procédure de discrétisation de l'équation en saturation reprend l'écriture (2.58). Le schéma MD1f appliqué sur l'équation en saturation (2.42c) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} &+ \left(\overline{f}_1^{(3)} \overline{F}_1^{(3)} - \overline{f}_3^{(2)} \overline{F}_3^{(2)} \right) - \left(\overline{f}_1^{(4)} \overline{F}_1^{(4)} - \overline{f}_3^{(1)} \overline{F}_3^{(1)} \right) \\ &+ \left(\overline{f}_2^{(4)} \overline{F}_2^{(4)} - \overline{f}_4^{(3)} \overline{F}_4^{(3)} \right) - \left(\overline{f}_2^{(1)} \overline{F}_2^{(1)} - \overline{f}_4^{(2)} \overline{F}_4^{(2)} \right) = \Delta x \Delta y q_{w;i,j}^{n+1},\end{aligned}\tag{4.5}$$

où $\overline{f}_k^{(m)}$ représente l'approximation du flux fractionnaire f sur la demi-arête $a_k^{(m)}$. Le calcul de ces termes $\overline{f}_k^{(m)}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$ étant local à chaque zone d'interaction m , l'exposant (m) sera omis par la suite pour plus de simplicité.

En reprenant la définition donnée dans l'article [60], les termes \overline{f}_k sont calculés par

$$\overline{f}_k = \begin{cases} (1 - \psi(\omega_k))f_k + \psi(\omega_k)\overline{f}_{k-1} & \text{si } \overline{F}_k > 0, \\ (1 - \psi(\omega_k))f_{k+1} + \psi(\omega_k)\overline{f}_{k+1} & \text{sinon.} \end{cases}\tag{4.6}$$

Il s'agit là d'une moyenne pondérée entre les flux fractionnaires évalués dans les mailles $f_k = f(s_k)$ et les flux fractionnaires évalués sur les demi-arêtes en fonction du sens de l'écoulement. Les indices $k - 1$ et $k + 1$ sont définis modulo 4, soit

$$k - 1 = \begin{cases} 4 & \text{si } k = 1, \\ k - 1 & \text{si } k = \{2, 3, 4\}, \end{cases} \quad \text{et} \quad k + 1 = \begin{cases} k + 1 & \text{si } k = \{1, 2, 3\}, \\ 1 & \text{si } k = 4. \end{cases}$$

Le paramètre de pondération ω_k définit le sens de l'écoulement au voisinage de la demi-arête a_k et est donné par [60]

$$\omega_k = \begin{cases} \max(0, \bar{F}_{k-1}/\bar{F}_k) & \text{si } \bar{F}_k > 0, \\ \max(0, \bar{F}_{k+1}/\bar{F}_k) & \text{si } \bar{F}_k < 0, \\ 0 & \text{si } \bar{F}_k = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

La fonction $\psi \in C^1(\mathbb{R}^+; [0, 1])$, avec $\psi(0) = 0$, peut être interprétée comme un limiteur de flux.

Proposition 4.1. *Pour que le schéma (4.5) reste monotone par rapport à la saturation, la fonction ψ doit vérifier*

$$0 \leq \psi(\omega) \leq \min(1, \omega). \quad (4.8)$$

REMARQUE 4.1. Il est à noter que si la fonction $\psi(\omega)$ est prise nulle, alors la combinaison (4.6) dégénère en un simple décentrage amont et le schéma 5P est retrouvé. Deux fonctions $\psi(\omega)$ sont définies dans les articles de Kozdon et Keilegavlen [60] : la fonction $\psi(\omega) = \min(1, \omega)$ appelée TMU (pour *Tight Multidimensional Upwind*), correspondant à la borne supérieure de la monotonie, et la fonction $\psi(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega}$ appelée SMU (pour *Smooth Multidimensional Upwind*), donnée de manière empirique. \square

Les équations (4.6) écrites pour $k \in \{1, \dots, 4\}$ aboutissent à la formulation d'un système linéaire à quatre équations et quatre inconnues de la forme

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad (4.9)$$

où le vecteur $\bar{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur contenant les flux fractionnaires sur les demi-arêtes \bar{f}_k , $k \in \{1, \dots, 4\}$ et le vecteur $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur regroupant les flux fractionnaires sur les mailles f_k , $k \in \{1, \dots, 4\}$. Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices 4×4 dont les composantes sont

$$\begin{aligned} a_{k,k} &= 1, \\ a_{k,k-1} &= \begin{cases} -\psi(\omega_k) & \text{si } \bar{F}_k > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ a_{k,k+1} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{F}_k > 0, \\ -\psi(\omega_k) & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 b_{k,k} &= 1, \\
 b_{k,k-1} &= \begin{cases} 1 - \psi(\omega_k) & \text{si } \bar{F}_k > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
 b_{k,k+1} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{F}_k > 0, \\ 1 - \psi(\omega_k) & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

À partir du système (4.9), les flux fractionnaires définis sur les demi-arêtes sont déterminés en fonction des flux fractionnaires définis dans les mailles par

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{f}. \quad (4.10)$$

REMARQUE 4.2. La matrice \mathbf{A} est une M-matrice non singulière, la fonction ψ ne prenant que des valeurs positives. Son inverse est positive et la matrice \mathbf{B} l'est également ce qui implique que chaque coefficient de $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ est positif. \square

Ainsi, pour chaque zone d'interaction du maillage dual, le calcul de la saturation est effectué par la résolution d'autant de petits systèmes 4×4 qu'il y a de mailles.

En ce qui concerne les mailles de bords, la résolution sur le maillage dual est aussi employée. Sur les demi-arêtes et mailles inexistantes (i.e., extérieures au maillage primal), les flux intervenant dans le calcul du paramètre ω ainsi que les flux fractionnaires sont pris nuls. Le système 4×4 est réduit pour ne faire intervenir que les quantités nécessaires.

La discrétisation de l'équation en saturation (4.5) peut se réécrire en regroupant les termes par zone d'interaction. En l'absence de termes sources, il vient

$$\begin{aligned}
 s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} & \left[\left(\bar{f}_3^{(1)} \bar{F}_3^{(1)} - \bar{f}_2^{(1)} \bar{F}_2^{(1)} \right) + \left(\bar{f}_4^{(2)} \bar{F}_4^{(2)} - \bar{f}_3^{(2)} \bar{F}_3^{(2)} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\bar{f}_1^{(3)} \bar{F}_1^{(3)} - \bar{f}_4^{(3)} \bar{F}_4^{(3)} \right) + \left(\bar{f}_2^{(4)} \bar{F}_2^{(4)} - \bar{f}_1^{(4)} \bar{F}_1^{(4)} \right) \right].
 \end{aligned}$$

En posant $\sigma_k = \bar{f}_{k+2}^{(k)} \bar{F}_{k+2}^{(k)} - \bar{f}_{k+1}^{(k)} \bar{F}_{k+1}^{(k)}$, la mise à jour de la saturation est réalisée par

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sum_{k=1}^4 \sigma_k. \quad (4.11)$$

Proposition 4.2. *Sous les conditions*

$$\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k+2}^{(k)}} \leq 1, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}} \leq 0, \quad \text{avec } k' \neq k+2$$

ainsi qu'en l'absence de termes sources ($q^{n+1} = q_w^{n+1} = 0$), le schéma MD1f est monotone.

DÉMONSTRATION. La démonstration reprend celle réalisée dans l'article [64]. Avec l'équation (4.11), la saturation $s_{i,j}^{n+1}$ s'écrit comme une fonction des autres saturations

$$s_{i,j}^{n+1} = \mathcal{H} \left(s_{i,j}^n, (s_{k'}^{(k)})_{k',k \in \{1,\dots,4\}, k' \neq k+2} \right)$$

Pour réaliser la monotonie du schéma, les dérivées par rapport à chaque saturation doivent être positives. Depuis (4.1), il vient $s_{i,j}^n = s_{k+2}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$ et ainsi, via l'écriture (4.11), la dérivée par rapport à $s_{i,j}^n$ est

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_{i,j}^n} = 1 - \frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k+2}^{(k)}} \geq 0.$$

La première condition de monotonie est alors trouvée. Pour $k' \neq k + 2$ et via l'équation (4.11),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_{k'}^{(k)}} = -\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \sum_{kn=1}^4 \frac{\partial \sigma_{kn}}{\partial s_{k'}^{(k)}} = -\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}}. \quad (4.12)$$

La démonstration de la seconde inégalité nécessite alors l'étude de différents cas de figure pour déterminer le signe de $\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}}$.

- Soient $\bar{F}_{k+2}^{(J)} > 0$ et $\bar{F}_{k+1}^{(k)} < 0$: d'après (4.7), cela implique $\omega_{k+2} = \omega_{k+1} = 0$ et alors, avec les formules (4.6), il vient $\bar{f}_{k+2}^{(k)} = \bar{f}_{k+1}^{(k)} = f_{k+2}^{(k)}$. Ainsi, (4.12) devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s_{k'}^{(k)}} &= -\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} \frac{\partial}{\partial s_{k'}^{(k)}} \left(f_{k+2}^{(k)} (\bar{F}_{k+2}^{(k)} - \bar{F}_{k+1}^{(k)}) \right) \\ &= -\frac{\Delta t^n}{\phi \Delta x \Delta y} (\bar{F}_{k+2}^{(k)} - \bar{F}_{k+1}^{(k)}) \frac{\partial f_{k+2}^{(k)}}{\partial s_{k'}^{(k)}}. \end{aligned}$$

Et comme $\frac{\partial f_{k+2}^{(k)}}{\partial s_{k'}^{(k)}} = 0$ pour $k' \neq k + 2$, il vient $\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}} = 0$.

- Soient $\bar{F}_{k+2}^{(k)} < 0$ et $\bar{F}_{k+1}^{(k)} > 0$: la formule (4.10) permet d'écrire le système en fonction des coefficients de $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ tous positifs. Soient $(c_{k1,k2})_{k1,k2 \in \{1,\dots,4\}}$ les coefficients de cette matrice. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sum_{kn=1}^4 c_{k+2,kn} f_{kn} \bar{F}_{k+2} - c_{k+1,kn} f_{kn} \bar{F}_{k+1} \\ &= \sum_{kn=1}^4 (c_{k+2,kn} \bar{F}_{k+2} - c_{k+1,kn} \bar{F}_{k+1}) f_{kn}. \end{aligned}$$

La dérivée est alors

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}} = \sum_{kn=1}^4 (c_{k+2,kn} \bar{F}_{k+2} - c_{k+1,kn} \bar{F}_{k+1}) \frac{\partial f_{kn}}{\partial s_{k'}^{(k)}}.$$

La dernière dérivée est positive car le flux fractionnaire est une fonction croissante et $(c_{k+2,kn} \bar{F}_{k+2} - c_{k+1,kn} \bar{F}_{k+1})$ est négatif par hypothèses de signe et propriétés de $c_{k1,k2}$. Ainsi, la dérivée de σ_k par rapport à $s_{k'}^{(k)}$ est négative.

- Soient $\bar{F}_{k+2}^{(k)} > 0$ et $\bar{F}_{k+1}^{(k)} > 0$: ici, $\omega_{k+2} = \frac{\bar{F}_{k+1}}{\bar{F}_{k+2}}$ et alors,

$$\bar{f}_{k+2} = (1 - \psi(\omega_{k+2}))f_{k+2} + \psi(\omega_{k+2})\bar{f}_{k+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \left[(1 - \psi(\omega_{k+2}))f_{k+2} + \psi(\omega_{k+2})\bar{f}_{k+1} \right] \bar{F}_{k+2} - \bar{f}_{k+1} \bar{F}_{k+1} \\ &= \bar{f}_{k+1} \left[\psi(\omega_{k+2})\bar{F}_{k+2} - \bar{F}_{k+1} \right] + f_{k+2}(1 - \psi(\omega_{k+2}))\bar{F}_{k+2}. \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à $s_{k'}^{(k)}$ du second terme est nulle car $k' \neq k + 2$. Il ne reste alors que

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial s_{k'}^{(k)}} = \left[\psi(\omega_{k+2})\bar{F}_{k+2} - \bar{F}_{k+1} \right] \frac{\partial \bar{f}_{k+1}}{\partial s_{k'}^{(k)}}.$$

Or, $\bar{f}_{k+1} = \sum_{kn=1}^4 c_{k+1, kn} f_{kn}$ est positif, de même que sa dérivée par rapport à $s_{k'}^{(k)}$ car le flux fractionnaire est une fonction croissante. De plus, en s'aidant de (4.8), il vient

$$\begin{aligned} \psi(\omega_{k+2})\bar{F}_{k+2} - \bar{F}_{k+1} &= -\bar{F}_{k+1} \left[1 - \psi(\omega_{k+2}) \frac{\bar{F}_{k+2}}{\bar{F}_{k+1}} \right] \\ &\leq -\bar{F}_{k+1} \left[1 - \min(1, \omega_{k+2}) \frac{\bar{F}_{k+2}}{\bar{F}_{k+1}} \right] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de σ_k par rapport à $s_{k'}^{(k)}$ est négative.

- Soient $\bar{F}_{k+2}^{(k)} < 0$ et $\bar{F}_{k+1}^{(k)} < 0$: ce cas est analogue au précédent.

La seconde inégalité de la proposition est alors vérifiée pour tous les cas de figure. \square

Les termes sources sont intégrés à l'équation (4.5) en fin d'étape de manière analogue au schéma 5P grâce aux équations (2.68).

4.1.2 Cas d'une vitesse uniforme

En vue de faire une analyse d'erreur, le schéma MD1f est appliqué au modèle simplifié dans lequel la vitesse totale est supposée uniforme, $\mathbf{u} = {}^t(a, b)$ avec a et b positifs et où le flux fractionnaire est pris linéaire sous la forme $f(s) = s$. En prenant $\phi = 1$ et $\kappa\lambda = 1$, l'équation à résoudre, sans terme source, est une équation d'advection linéaire

$$\partial_t s + a\partial_x s + b\partial_y s = 0. \quad (4.13)$$

La discrétisation de l'équation en saturation (4.13) du schéma MD1f est donnée par (4.5) avec le second membre nul. Étant donnée la linéarité du flux fractionnaire, les quantités \bar{f}_k deviennent uniquement des saturations sur demi-arêtes, notées \bar{s}_k .

En reprenant les définitions des flux données par les relations (4.4) et compte tenu de la vitesse uniforme, les flux sur les demi-arêtes d'une même zone d'interaction sont donnés par

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_3 = \frac{\Delta y}{2}a \quad \text{et} \quad \bar{F}_2 = -\bar{F}_4 = \frac{\Delta x}{2}b. \quad (4.14)$$

Le travail est à présent de calculer les valeurs des saturations $(\bar{s}_k)_{k \in \{1, \dots, 4\}}$ en utilisant le décentrage défini par (4.6). En utilisant les flux (4.14) et la définition (4.7), les valeurs ω_k sont les suivantes

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{a\Delta y}{b\Delta x}, \quad \omega_3 = \frac{b\Delta x}{a\Delta y}, \quad \omega_4 = 0.$$

Les saturations données par le décentrage (4.6) et le signe des flux (4.14) s'écrivent

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 &= s_1, & \bar{s}_2 &= (1 - \psi(\omega_2))s_2 + \psi(\omega_2)\bar{s}_1, \\ \bar{s}_3 &= (1 - \psi(\omega_3))s_4 + \psi(\omega_3)\bar{s}_3, & \bar{s}_4 &= s_1, \end{aligned}$$

qui peuvent aussi se noter sous la forme condensée

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{B}\mathbf{s} \quad (4.15)$$

avec $\bar{\mathbf{s}} = (\bar{s}_k)_{k \in \{1, \dots, 4\}}$, $\mathbf{s} = (s_k)_{k \in \{1, \dots, 4\}}$ et les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} définies par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi(\omega_2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\psi(\omega_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \psi(\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \psi(\omega_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution du système (4.15) est obtenue par

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{s}$$

où la matrice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ vaut

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi(\omega_2) & 1 - \psi(\omega_2) & 0 & 0 \\ \psi(\omega_3) & 0 & 0 & 1 - \psi(\omega_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi appliqué pour chaque zone d'interaction intervenant dans le calcul de la saturation (4.5), les saturations définies sur les demi-arêtes sont déduites des saturations des mailles par

$$\begin{aligned} \bar{s}_1^{(3)} &= s_1^{(3)} = s_{i,j} & \bar{s}_1^{(4)} &= s_1^{(4)} = s_{i-1,j} \\ \bar{s}_2^{(1)} &= (1 - \psi(\omega_2))s_2^{(1)} + \psi(\omega_2)s_1^{(1)} & \bar{s}_2^{(4)} &= (1 - \psi(\omega_2))s_2^{(4)} + \psi(\omega_2)s_1^{(4)} \\ &= (1 - \psi(\omega_2))s_{i,j-1} + \psi(\omega_2)s_{i-1,j-1} & &= (1 - \psi(\omega_2))s_{i,j} + \psi(\omega_2)s_{i-1,j} \\ \bar{s}_3^{(1)} &= (1 - \psi(\omega_3))s_4^{(1)} + \psi(\omega_3)s_1^{(1)} & \bar{s}_3^{(2)} &= (1 - \psi(\omega_3))s_4^{(2)} + \psi(\omega_3)s_1^{(2)} \\ &= (1 - \psi(\omega_3))s_{i-1,j} + \psi(\omega_3)s_{i-1,j-1} & &= (1 - \psi(\omega_3))s_{i,j} + \psi(\omega_3)s_{i,j-1} \\ \bar{s}_4^{(2)} &= s_1^{(2)} = s_{i,j-1} & \bar{s}_4^{(3)} &= s_1^{(3)} = s_{i,j} \end{aligned}$$

REMARQUE 4.3. Il est intéressant de constater que la saturation s_k prise dans deux zones d'interaction différentes ne coïncide pas avec la même maille (par exemple, $s_2^{(1)} = s_{i,j-1}$ et $s_2^{(4)} = s_{i,j}$). \square

De même, en utilisant les flux (4.14), il vient

$$\begin{aligned} \overline{F}_1^{(3)} &= \frac{a\Delta y}{2}, & \overline{F}_3^{(2)} &= -\frac{a\Delta y}{2}, & \overline{F}_1^{(4)} &= \frac{a\Delta y}{2}, & \overline{F}_3^{(1)} &= -\frac{a\Delta y}{2}, \\ \overline{F}_2^{(4)} &= \frac{b\Delta x}{2}, & \overline{F}_4^{(3)} &= -\frac{b\Delta x}{2}, & \overline{F}_2^{(1)} &= \frac{b\Delta x}{2}, & \overline{F}_4^{(2)} &= -\frac{b\Delta x}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant un schéma explicite en temps, l'équation discrète en saturation (4.5) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} + \frac{a}{2\Delta x} \left[\psi(\omega_3)(s_{i,j-1}^n - s_{i-1,j-1}^n) + (2 - \psi(\omega_3))(s_{i,j}^n - s_{i-1,j}^n) \right] \\ + \frac{b}{2\Delta y} \left[\psi(\omega_2)(s_{i-1,j}^n - s_{i-1,j-1}^n) + (2 - \psi(\omega_2))(s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec $\omega_2 = \frac{a\Delta y}{b\Delta x}$ et $\omega_3 = \frac{1}{\omega_2}$.

L'équation discrète en saturation (4.16) peut également se mettre sous la forme générale

$$\begin{aligned} \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} + \frac{\delta}{\Delta x} a (s_{i,j-1}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1-\delta}{\Delta x} a (s_{i,j}^n - s_{i-1,j}^n) \\ + \frac{\beta}{\Delta y} b (s_{i-1,j}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1-\beta}{\Delta y} b (s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n) = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients $\delta = \frac{\psi(1/\omega)}{2}$ et $\beta = \frac{\psi(\omega)}{2}$ sont compris entre 0 et 1 et avec $\omega = \frac{a\Delta y}{b\Delta x}$.

REMARQUE 4.4. Cette discrétisation rappelle le schéma CTU (*Corner Transport Upwind*) de Colella [30] qui met en évidence la translation de la solution avec les coefficients $\delta = \frac{b\Delta t}{\Delta y}$ et $\beta = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$. Toujours pour une vitesse uniforme, le schéma décrit dans [68] et [82] est retrouvé pour $k = (1 - \delta)a + (1 - \beta)b$. \square

4.2 Distribution angulaire de l'erreur

La méthode d'analyse du schéma présentée ici consiste à effectuer une analyse par ondes planes [95]. Celle-ci permet de montrer l'influence du schéma numérique dans chacune des directions de propagation de l'onde plane. Pour cela, quelques hypothèses simplificatrices sont à considérer : la vitesse d'écoulement est uniforme $\mathbf{u} = {}^t(a, b)$ avec a et b positifs, le flux fractionnaire est pris linéaire $f(s) = s$ et les propriétés du milieu sont simplifiées avec notamment $\kappa\lambda = 1$ et $\phi = 1$.

D'après la partie précédente, le schéma MD1f discrétise l'équation en saturation (4.13) en

$$\begin{aligned} \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{\Delta t^n} + \frac{\psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a (s_{i,j-1}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1 - \psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a (s_{i,j}^n - s_{i-1,j}^n) \\ + \frac{\psi(\omega)/2}{\Delta y} b (s_{i-1,j}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1 - \psi(\omega)/2}{\Delta y} b (s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n) = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\omega = \frac{a\Delta y}{b\Delta x}.$$

L'idée, déjà étudiée en §3.2, est de déterminer le symbole de la semi-discrétisation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\psi)(\mathbf{k}) &= \frac{\psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a (s_{i,j-1}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1 - \psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a (s_{i,j}^n - s_{i-1,j}^n) \\ &+ \frac{\psi(\omega)/2}{\Delta y} b (s_{i-1,j}^n - s_{i-1,j-1}^n) + \frac{1 - \psi(\omega)/2}{\Delta y} b (s_{i,j}^n - s_{i,j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.17)$$

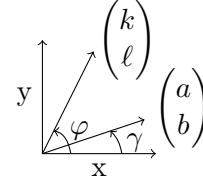
et de le comparer avec le symbole exact de $\mathbf{u} \cdot \nabla$, donné par

$$\mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla])(\mathbf{k}) = I(a k + b \ell), \quad (4.18)$$

où $\mathbf{k} = {}^t(k, \ell)$ est le vecteur d'onde.

Afin de pouvoir poursuivre l'étude, le système de coordonnées est changé en coordonnées polaires avec

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$



et la différence d'angles entre φ et γ sera notée Ω , ce qui équivaut à $\Omega = \varphi - \gamma$ (figure 4.4).

FIGURE 4.4 – Changement de variables pour l'équation en saturation.

Théorème 4.1. *Pour Δx et Δy suffisamment petits, l'erreur du schéma MD1f est*

$$\mathcal{E}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \tilde{A}^\psi(\gamma) & \tilde{B}^\psi(\gamma) \\ \tilde{B}^\psi(\gamma) & \tilde{C}^\psi(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

avec

$$\tilde{A}^\psi(\gamma) = \frac{\Delta x}{2} \cos^3 \gamma + \frac{\Delta y}{2} \sin^3 \gamma + \frac{\psi(1/\omega)}{2} \Delta y \cos^2 \gamma \sin \gamma + \frac{\psi(\omega)}{2} \Delta x \cos \gamma \sin^2 \gamma, \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\psi(\gamma) &= \frac{\psi(1/\omega)}{4} \Delta y \cos^3 \gamma - \frac{\psi(\omega)}{4} \Delta x \sin^3 \gamma + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\psi(\omega)}{2} - 1 \right) \cos^2 \gamma \sin \gamma \\ &+ \frac{\Delta y}{2} \left(1 - \frac{\psi(1/\omega)}{2} \right) \cos \gamma \sin^2 \gamma, \end{aligned} \quad (4.19b)$$

$$\tilde{C}^\psi(\gamma) = \frac{\Delta y}{2} (1 - \psi(1/\omega)) \cos^2 \gamma \sin \gamma + \frac{\Delta x}{2} (1 - \psi(\omega)) \cos \gamma \sin^2 \gamma. \quad (4.19c)$$

DÉMONSTRATION. En remplaçant chaque saturation $s_{i\pm 1, j\pm 1}$ par sa transformée inverse de Fourier dans (4.17), le symbole approché de l'équation en saturation est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\psi)(\mathbf{k}) &= \frac{1 - \psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a \left(1 - e^{-Ik\Delta x} \right) + \frac{\psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a \left(e^{-I\ell\Delta y} - e^{-I(k\Delta x + \ell\Delta y)} \right) \\ &+ \frac{1 - \psi(\omega)/2}{\Delta y} b \left(1 - e^{-I\ell\Delta y} \right) + \frac{\psi(\omega)/2}{\Delta y} b \left(e^{-Ik\Delta x} - e^{-I(k\Delta x + \ell\Delta y)} \right). \end{aligned}$$

Les développements limités de l'exponentielle sont utilisés afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([\mathbf{u} \cdot \nabla]_h^\psi)(\mathbf{k}) &= I \{k a + \ell b\} + \frac{k^2 \Delta x^2}{2} \left[\frac{1 - \psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a + \frac{\psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a \right] \\ &+ \frac{\ell^2 \Delta y^2}{2} \left[\frac{1 - \psi(\omega)/2}{\Delta y} b + \frac{\psi(\omega)/2}{\Delta y} b \right] \\ &+ k \Delta x \ell \Delta y \left[\frac{\psi(1/\omega)/2}{\Delta x} a + \frac{\psi(\omega)/2}{\Delta y} b \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

La différence entre le symbole exact (4.18) et le symbole approché (4.20) fait disparaître le terme imaginaire. Le schéma MD1f est donc consistant. Cette différence entre les symboles vaut

$$\mathcal{E}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \frac{k^2}{2} \Delta x a + \frac{\ell^2}{2} \Delta y b + k \ell \left(\frac{\psi(1/\omega)}{2} a \Delta y + \frac{\psi(\omega)}{2} b \Delta x \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \quad (4.21)$$

En utilisant les changements de variables, l'erreur (4.21) devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{u}) &= |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \left[\frac{\cos^2 \varphi}{2} \Delta x \cos \gamma + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Delta y \sin \gamma \right. \\ &\left. + \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{\psi(1/\omega)}{2} \Delta y \cos \gamma + \frac{\psi(\omega)}{2} \Delta x \sin \gamma \right) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2). \end{aligned}$$

Une formulation matricielle permet de réécrire l'erreur sous la forme

$$\mathcal{E}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A(\gamma) & B(\gamma) \\ B(\gamma) & C(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

en posant

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \frac{\Delta x}{2} \cos \gamma, \\ B(\gamma) &= \frac{1}{4} (\psi(1/\omega) \Delta y \cos \gamma + \psi(\omega) \Delta x \sin \gamma), \\ C(\gamma) &= \frac{\Delta y}{2} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Pour ne faire apparaître qu'un seul angle, la différence Ω entre les angles φ et γ est utilisée. Les formules de passage d'un angle à l'autre étant

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

et

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

l'erreur entre les symboles est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\psi(\mathbf{k}, \mathbf{u}) &= |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\gamma) & B(\gamma) \\ B(\gamma) & C(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix} \\ &= |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}| \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}^\psi(\gamma) & \tilde{B}^\psi(\gamma) \\ \tilde{B}^\psi(\gamma) & \tilde{C}^\psi(\gamma) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effectuant le produit des trois matrices, il vient

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\psi(\gamma) &= A(\gamma) \cos^2 \gamma + 2B(\gamma) \sin \gamma \cos \gamma + C(\gamma) \sin^2 \gamma, \\ \tilde{B}^\psi(\gamma) &= B(\gamma)(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) + (C(\gamma) - A(\gamma)) \sin \gamma \cos \gamma, \\ \tilde{C}^\psi(\gamma) &= C(\gamma) \cos^2 \gamma - 2B(\gamma) \sin \gamma \cos \gamma + A(\gamma) \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

Après calculs, les composantes de la matrice de diffusion sont celles données par (4.19). \square

REMARQUE 4.5. Ces trois erreurs correspondent à l'erreur longitudinale pour \tilde{A}^ψ , l'erreur transverse pour \tilde{C}^ψ et l'erreur en terme croisé pour \tilde{B}^ψ . \square

Afin de travailler avec la « bonne » variable, les erreurs du Théorème 4.1 peuvent être écrites en utilisant la variable $S = \sin^2 \gamma$. Par souci de simplicité et avec un léger abus de notations, les erreurs sont toujours dénommées par \tilde{A}^ψ , \tilde{B}^ψ , \tilde{C}^ψ et valent

$$\begin{aligned} \tilde{A}^\psi(S) &= \frac{\Delta x}{2}(1-S)^{3/2} + \frac{\Delta y}{2}S^{3/2} + \frac{\psi(1/\omega)}{2}\Delta y(1-S)S^{1/2} + \frac{\psi(\omega)}{2}\Delta x(1-S)^{1/2}S, \\ \tilde{B}^\psi(S) &= \frac{\psi(1/\omega)}{4}\Delta y(1-S)^{3/2} - \frac{\psi(\omega)}{4}\Delta xS^{3/2} + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\psi(\omega)}{2} - 1\right)(1-S)S^{1/2} \\ &\quad + \frac{\Delta y}{2}\left(1 - \frac{\psi(1/\omega)}{2}\right)(1-S)^{1/2}S, \\ \tilde{C}^\psi(S) &= \frac{\Delta y}{2}(1 - \psi(1/\omega))(1-S)S^{1/2} + \frac{\Delta x}{2}(1 - \psi(\omega))(1-S)^{1/2}S, \end{aligned}$$

avec $\omega(S) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \sqrt{\frac{1-S}{S}}$.

Sur la figure 4.5 sont représentées ces erreurs en fonction de la variable S et pour différentes fonctions ψ . Les erreurs tracées en rouge correspondent au schéma 5P. Les courbes jaunes, quant à elles, correspondent aux erreurs avec la fonction limite TMU. En maillage carré, la fonction appelée SMU dans [63] donne une droite horizontale, ainsi elle minimise l'erreur en terme croisé. L'étude suivante va permettre de minimiser deux des erreurs afin de déterminer différentes fonctions ψ , dites optimales.

4.3 Minimisation de l'anisotropie

Cette section va permettre d'identifier des fonctions ψ dites « optimales » selon un critère à définir. L'étude va concerner l'erreur longitudinale et l'erreur en terme croisé. En effet, d'après la figure 4.5, la fonction SMU semble minimiser l'erreur en terme croisé en maillage carré. Cependant, dans l'article de [63] où cette fonction est décrite, il n'est pas expliqué comment cette fonction est déterminée. La minimisation ci-après va permettre de retrouver cette fonction et de l'étendre en maillage rectangulaire. Le calcul sur l'erreur longitudinale a également été choisi de sorte à reprendre la méthode du chapitre 3.

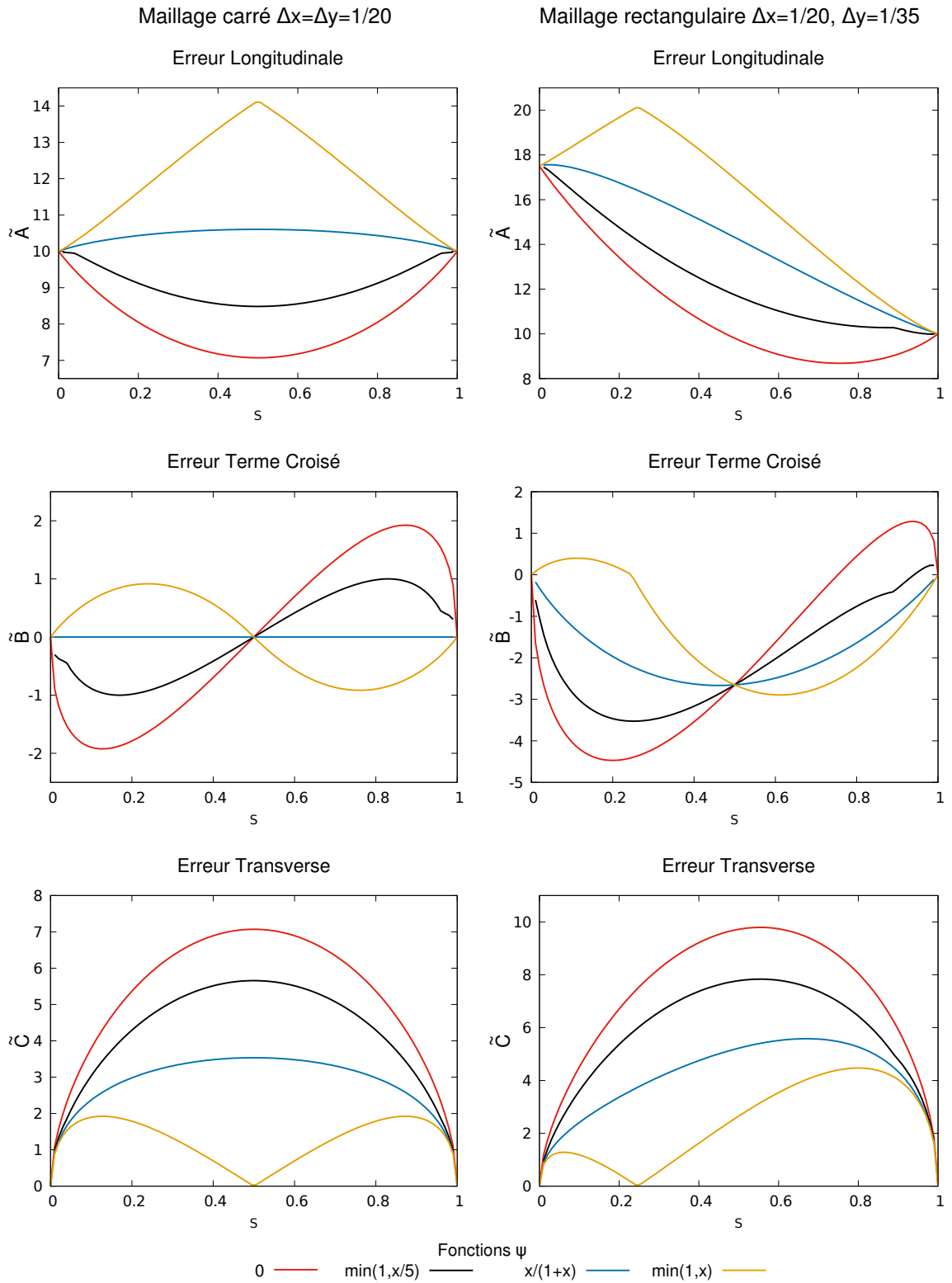


FIGURE 4.5 – Erreurs longitudinales, termes croisés et transverses pour des maillages carrés et rectangulaires selon différentes fonctions ψ .

4.3.1 Minimisation sur l'erreur longitudinale

Conformément à l'esprit de la section §3.3, l'erreur angulaire du schéma est définie comme la fonction $\tilde{A}^\psi(S)$. Les valeurs de \tilde{A}^ψ aux bornes de son intervalle de définition sont

$$\tilde{A}^\psi(S=0) = \frac{\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{A}^\psi(S=1) = \frac{\Delta y}{2}. \quad (4.24)$$

Comme en §3.3 (Définition 3.4 et Théorème 3.5), on souhaite ajuster ψ de sorte que $\tilde{A}^\psi(\cdot)$ s'approche au mieux de la distribution référence la « moins anisotrope »

$$\tilde{A}^*(S) = \frac{\Delta y}{2}S + \frac{\Delta x}{2}(1-S).$$

Autrement dit, on veut déterminer

$$\psi^* = \arg \min_{\psi \in C(\bar{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R})} \int_0^1 |\tilde{A}^\psi(S) - \tilde{A}^*(S)|^2 dS. \quad (4.25)$$

Théorème 4.2. *Une solution de (4.25) est*

$$\psi_{\tilde{A}}^*(\nu) = \frac{N_{\tilde{A}}(\nu)}{D_{\tilde{A}}(\nu)}, \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{aligned} N_{\tilde{A}}(\nu) &= [(\nu^2 + z^3)\sqrt{z^2 + \nu^2} - (\nu^3 + z^4)](1 + z^2\nu^2)^5 \\ &\quad + [(1 + z^3\nu^2)\sqrt{1 + z^2\nu^2} - (1 + z^4\nu^3)](z^2 + \nu^2)^5, \\ D_{\tilde{A}}(\nu) &= z^2\nu[(1 + z^2\nu^2)^5 + (z^2 + \nu^2)^5], \end{aligned}$$

et où $z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Toute autre solution de (4.25) est nécessairement de la forme

$$\psi_{\tilde{A}}^*(\nu) = \frac{N_{\tilde{A}}(\nu)}{D_{\tilde{A}}(\nu)} + \sqrt{\nu} \Upsilon(\log \nu) \quad (4.27)$$

avec $\Upsilon \in C(\bar{\mathbb{R}}; \mathbb{R})$ une fonction anti-symétrique arbitraire.

DÉMONSTRATION. La preuve est basée sur la méthode de calcul des variations [13, 96] et sur l'étude du lagrangien associé au problème de minimisation (4.25). En développant le carré de (4.25), il vient

$$\begin{aligned} |\tilde{A}^\psi(S) - \tilde{A}^*(S)|^2 &= \frac{\Delta x^2}{4}\psi^2(\omega)(1-S)S^2 + \frac{\Delta y^2}{4}\psi^2(1/\omega)(1-S)^2S \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2}\psi(\omega)(1-S)^{1/2}S \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y(S^{3/2} - S) \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta y}{2}\psi(1/\omega)(1-S)S^{1/2} \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y(S^{3/2} - S) \right\} \\ &\quad + \frac{\Delta x \Delta y}{2}\psi(\omega)\psi(1/\omega)(1-S)^{3/2}S^{3/2} \\ &\quad + \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y(S^{3/2} - S) \right\}^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

où $\omega = \omega(S) = z\sqrt{\frac{1-S}{S}}$. Ainsi, la fonctionnelle à minimiser est écrite sous la forme

$$J_{\tilde{A}}(\psi) = \int_0^1 \mathcal{L}_{\tilde{A}}(\psi(\omega(S)), \psi(1/\omega(S)), S) dS$$

avec $\mathcal{L}_{\tilde{A}}$ le lagrangien associé valant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{A}}(\eta, \xi, S) &= \eta^2 \frac{\Delta x^2}{4} (1-S)S^2 + \xi^2 \frac{\Delta y^2}{4} (1-S)^2 S + \eta\xi \frac{\Delta x \Delta y}{2} (1-S)^{3/2} S^{3/2} \\ &+ \eta \frac{\Delta x}{2} (1-S)^{1/2} S \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y (S^{3/2} - S) \right\} \\ &+ \xi \frac{\Delta y}{2} (1-S) S^{1/2} \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y (S^{3/2} - S) \right\} \\ &+ \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y (S^{3/2} - S) \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le raisonnement s'appuie sur celui de la condition d'Euler-Lagrange [13] avec des arguments du lagrangien différents de ceux habituels, à savoir $(\psi(\omega), \psi(1/\omega), S)$. L'idée est de supposer que ψ est le minimum de $J_{\tilde{A}}(\psi)$; ensuite, d'effectuer une petite perturbation dans la direction $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et d'étudier alors l'intégrale obtenue.

Soit $\varepsilon > 0$. Grâce au théorème de dérivation des fonctions composées et à la linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J_{\tilde{A}}(\psi + \varepsilon g)|_{\varepsilon=0} &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \eta}(\psi(\omega), \psi(1/\omega), S) g(\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \xi}(\psi(\omega), \psi(1/\omega), S) g(1/\omega) \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Deux changements de variables sont alors nécessaires pour que les arguments de la fonction g soient identiques dans chacun des termes de la somme. Soient pour cela $\nu = \omega = z\sqrt{\frac{1-S}{S}}$ dans la première intégrale et $\nu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{S}{1-S}}$ dans la seconde. Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J_{\tilde{A}}(\psi + \varepsilon g)|_{\varepsilon=0} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \eta} \left(\psi(\nu), \psi(1/\nu), \frac{z^2}{z^2 + \nu^2} \right) \frac{2z^2\nu}{(z^2 + \nu^2)^2} d\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \xi} \left(\psi(1/\nu), \psi(\nu), \frac{\nu^2 z^2}{1 + z^2 \nu^2} \right) \frac{2\nu z^2}{(1 + z^2 \nu^2)^2} \right\} g(\nu) d\nu. \end{aligned}$$

Si la fonction ψ est supposée être le minimum de $J_{\tilde{A}}$, alors le second membre de l'équation est positif. En réitérant le même processus en changeant g en $-g$, le second membre avec le signe opposé est obtenu. Ainsi, pour tout g , le second membre de l'équation est nul. La condition d'Euler-Lagrange adaptée au problème (4.25) est alors la suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \eta} \left(\psi(\nu), \psi(1/\nu), \frac{z^2}{z^2 + \nu^2} \right) \frac{2z^2\nu}{(z^2 + \nu^2)^2} \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \xi} \left(\psi(1/\nu), \psi(\nu), \frac{\nu^2 z^2}{1 + z^2 \nu^2} \right) \frac{2\nu z^2}{(1 + z^2 \nu^2)^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les dérivées du lagrangien par rapport aux deux premières variables sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \eta}(\eta, \xi, S) &= \eta \frac{\Delta x^2}{2} (1-S)S^2 + \xi \frac{\Delta x \Delta y}{2} (1-S)^{3/2} S^{3/2} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} (1-S)^{1/2} S \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y (S^{3/2} - S) \right\}, \end{aligned} \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{A}}}{\partial \xi}(\eta, \xi, S) &= \xi \frac{\Delta y^2}{2} (1-S)^2 S + \eta \frac{\Delta x \Delta y}{2} (1-S)^{3/2} S^{3/2} \\ &\quad + \frac{\Delta y}{2} (1-S) S^{1/2} \left\{ \Delta x \left((1-S)^{3/2} - (1-S) \right) + \Delta y (S^{3/2} - S) \right\}. \end{aligned} \quad (4.32b)$$

En reportant (4.32) dans (4.31), il vient après simplifications

$$\psi(\nu) + \nu \psi(1/\nu) = 2 \frac{\mathbf{N}_{\tilde{A}}(\nu)}{\mathbf{D}_{\tilde{A}}(\nu)}, \quad (4.33)$$

avec $\mathbf{N}_{\tilde{A}}(\nu)$ et $\mathbf{D}_{\tilde{A}}(\nu)$ donnés dans le Théorème 4.2.

Soit $\zeta(\nu) = \mathbf{N}_{\tilde{A}}(\nu)/\mathbf{D}_{\tilde{A}}(\nu)$. Il est intéressant de constater que cette fonction vérifie la relation de symétrie $\zeta(\nu) = \nu \zeta(1/\nu)$. Alors, le second membre de (4.33) s'écrit aussi $\zeta(\nu) + \nu \zeta(1/\nu)$. Une solution évidente au problème (4.33) est donc $\psi = \zeta$. Toute autre solution sera nécessairement de la forme $\psi = \zeta + \varrho$ où ϱ vérifie l'équation fonctionnelle $\varrho(\nu) + \nu \varrho(1/\nu) = 0$. En considérant $Y(\nu) = \varrho(\nu)/\sqrt{\nu}$, il est facile de prouver que $Y = Y \circ \log$ doit être une fonction anti-symétrique en $\exp \nu$. Ainsi, le résultat (4.27) est retrouvé. \square

La fonction \tilde{A} correspondant à $\psi_{\tilde{A}}^*$ donnée par (4.26) est tracée en jaune pour différents maillages sur la figure 4.6. Les autres courbes correspondent aux trois fonctions décrites dans l'article [65]. Le choix de la fonction $\psi_{\tilde{A}}^*$ est optimal pour un maillage carré puisque l'erreur longitudinale semble épouser exactement la courbe idéale (courbe verte, figure 4.6 au milieu).

REMARQUE 4.6. L'expression de la fonction dans le cas d'un maillage carré est indépendante de Δx et Δy et vaut

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{A}}^*(\nu) &= -\frac{1 + \nu^3 - (1 + \nu^2)\sqrt{1 + \nu^2}}{2\nu} \\ &= \frac{\nu(3 - 2\nu + 3\nu^2)}{2[(1 + \nu^2)^{3/2} + 1 + \nu^3]}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité, obtenue en multipliant par l'expression conjuguée, s'avère numériquement plus robuste pour ν petit. \square

REMARQUE 4.7. En maillage carré ($\Delta x = \Delta y$), on a

$$\tilde{A}^{\psi^*} = \tilde{A}^*.$$

Autrement dit, la distribution « idéale » la moins anisotrope est atteinte. La démonstration est laissée au lecteur. \square

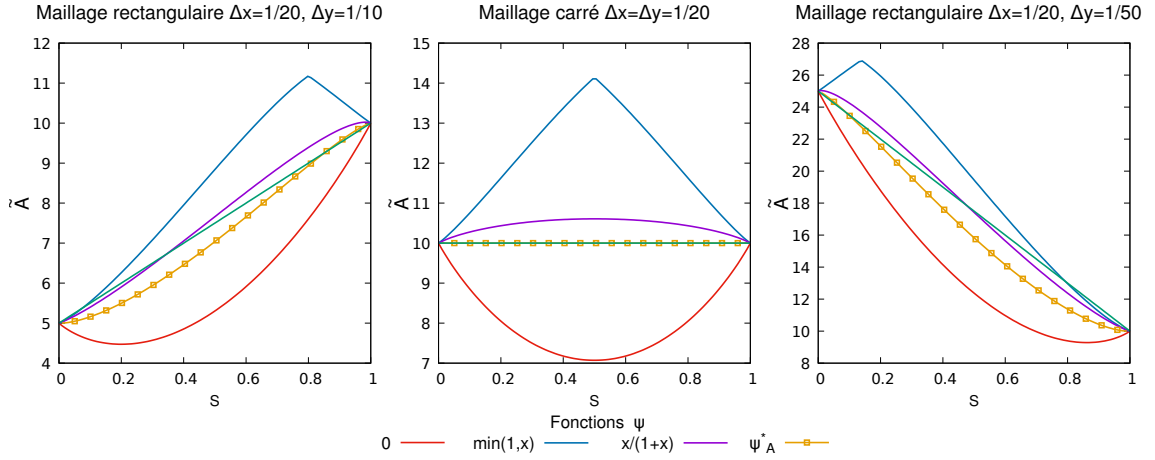


FIGURE 4.6 – Distribution angulaire de l'erreur longitudinale avec plusieurs fonctions ψ utilisées dans le schéma MD1f.

4.3.2 Minimisation sur l'erreur en terme croisé

De manière similaire à l'étude de l'erreur longitudinale, le calcul de cette partie porte sur la minimisation en norme L^2 de l'erreur en terme croisé \tilde{B}^ψ de sorte à approcher une courbe idéale. Celle-ci est définie par la droite $\tilde{B}^*(x) = 0$ puisque les deux extrémités de l'erreur en terme croisé en $S = 0$ et $S = 1$ sont nulles. Le problème à résoudre est de trouver

$$\psi_B^* = \arg \min_{\psi \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})} \int_0^1 |\tilde{B}(S)|^2 dS, \quad (4.34)$$

sous les contraintes $\psi(0) = \psi(1) = 0$ et avec

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\psi(S) &= \psi(1/\omega) \frac{\Delta y}{4} (1-S)^{3/2} - \psi(\omega) \frac{\Delta x}{4} S^{3/2} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\psi(\omega)}{2} - 1 \right) (1-S) S^{1/2} + \frac{\Delta y}{2} \left(1 - \frac{\psi(1/\omega)}{2} \right) (1-S)^{1/2} S \end{aligned}$$

et où $\omega = \omega(S) = z\sqrt{\frac{1-S}{S}}$. Cette formule peut également s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{B}^\psi(S) &= \psi(\omega) \frac{\Delta x}{4} S^{1/2} ((1-S) - S) + \psi(1/\omega) \frac{\Delta y}{4} (1-S)^{1/2} ((1-S) - S) \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2} (1-S) S^{1/2} + \frac{\Delta y}{2} (1-S)^{1/2} S. \end{aligned}$$

Théorème 4.3. Une solution au problème (4.34) est de la forme

$$\psi_B^*(\nu) = \frac{N_{\tilde{B}}(\nu)}{D_{\tilde{B}}(\nu)}, \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{aligned} N_{\tilde{B}}(\nu) &= 2\nu \left((z^2 - \nu^2)(\nu - z^2)(1 + \nu^2 z^2)^5 + (\nu^2 z^2 - 1)(1 - \nu z^2)(z^2 + \nu^2)^5 \right), \\ D_{\tilde{B}}(\nu) &= (z^2 - \nu^2)^2 (1 + \nu^2 z^2)^5 + (\nu^2 z^2 - 1)^2 (\nu^2 + z^2)^5. \end{aligned}$$

Toute autre solution de (4.34) est nécessairement de la forme

$$\psi_{\tilde{B}}^*(\nu) = \frac{\mathbf{N}_{\tilde{B}}(\nu)}{\mathbf{D}_{\tilde{B}}(\nu)} + \sqrt{\nu} \Upsilon(\log \nu)$$

avec $\Upsilon \in C(\bar{\mathbb{R}}; \mathbb{R})$ une fonction anti-symétrique arbitraire.

DÉMONSTRATION. En développant le carré sous l'intégrale et en faisant intervenir $z = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, la fonctionnelle s'écrit sous la forme d'un lagrangien

$$J_{\tilde{B}}(\psi) = \int_0^1 \mathcal{L}_{\tilde{B}}(\psi(\omega(S)), \psi(1/\omega(S)), S) dS$$

avec le lagrangien de l'erreur en terme croisé défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{B}}(\eta, \xi, \gamma) &= \eta^2 \frac{\Delta x^2}{16} S[(1-S) - S]^2 + \xi^2 \frac{\Delta y^2}{16} (1-S)[(1-S) - S]^2 \\ &\quad - \eta \frac{\Delta x}{4} (1-S)^{1/2} S[(1-S) - S] \{ \Delta x (1-S)^{1/2} - \Delta y S^{1/2} \} \\ &\quad - \xi \frac{\Delta y}{4} (1-S) S^{1/2} [(1-S) - S] \{ \Delta x (1-S)^{1/2} - \Delta y S^{1/2} \} \\ &\quad + \eta \xi \frac{\Delta x \Delta y}{8} (1-S)^{1/2} S^{1/2} [(1-S) - S]^2 \\ &\quad + \frac{(1-S)S}{4} \{ \Delta x (1-S)^{1/2} - \Delta y S^{1/2} \}^2. \end{aligned}$$

La condition d'Euler-Lagrange est de la même forme que dans la section précédente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{B}}}{\partial \eta} \left(\psi(\nu), \psi(1/\nu), \frac{z^2}{\nu^2 + z^2} \right) \frac{2z^2\nu}{z^2 + \nu^2} \\ + \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{B}}}{\partial \xi} \left(\psi(1/\nu), \psi(\nu), \frac{z^2\nu^2}{1 + z^2\nu^2} \right) \frac{2z^2\nu}{1 + z^2\nu^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les dérivées par rapport à la première et seconde variable du lagrangien sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{B}}}{\partial \eta}(\eta, \xi, \gamma) &= \eta \frac{\Delta x^2}{8} S[(1-S) - S]^2 + \xi \frac{\Delta x \Delta y}{8} (1-S)^{1/2} S^{1/2} [(1-S) - S]^2 \\ &\quad - \frac{\Delta x}{4} (1-S)^{1/2} S[(1-S) - S] \{ \Delta x (1-S)^{1/2} - \Delta y S^{1/2} \}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\tilde{B}}}{\partial \xi}(\eta, \xi, \gamma) &= \xi \frac{\Delta y^2}{8} (1-S)[(1-S) - S]^2 + \eta \frac{\Delta x \Delta y}{8} (1-S)^{1/2} S^{1/2} [(1-S) - S]^2 \\ &\quad - \frac{\Delta y}{4} (1-S) S^{1/2} [(1-S) - S] \{ \Delta x (1-S)^{1/2} - \Delta y S^{1/2} \}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les détails des calculs ne seront pas développés ici mais en remplaçant les expressions des dérivées (4.37)–(4.38) dans la condition d'Euler-Lagrange (4.36), celle-ci se ramène à une équation de la forme

$$\psi_{\tilde{B}}(\nu) + \nu \psi_{\tilde{B}}(1/\nu) = 2 \frac{\mathbf{N}_{\tilde{B}}(\nu)}{\mathbf{D}_{\tilde{B}}(\nu)}, \quad (4.39)$$

avec $N_{\tilde{B}}$ et $D_{\tilde{B}}$ donnés dans le Théorème 4.3. Par la même méthode que pour l'erreur longitudinale, l'expression de la solution au problème de minimisation de l'erreur en terme croisé (4.34) s'écrit sous la forme (4.35).

La fonction $\zeta(\nu) = \frac{N_{\tilde{B}}(\nu)}{D_{\tilde{B}}(\nu)}$ possède la relation de symétrie $\zeta(\nu) = \nu\zeta(1/\nu)$. Par le même raisonnement qu'en §4.3.1, des fonctions anti-symétriques de la forme $\sqrt{\nu} Y(\log \nu)$ peuvent être ajoutées à la solution (4.35). \square

REMARQUE 4.8. Pour un maillage carré, la fonction optimale ψ_B^* est égale à la fonction SMU de l'article [60], où elle est recommandée de manière empirique. Le formalisme de minimisation décrit ici a permis de donner une justification rigoureuse à cette fonction. \square

La figure 4.7 montre la représentation de l'erreur en terme croisé pour différents rapports de mailles. À nouveau, l'erreur avec la fonction optimale ψ_B^* et en maillage carré est nulle. Le résultat en maillage rectangulaire est moins flagrant quant à l'optimalité de la solution.

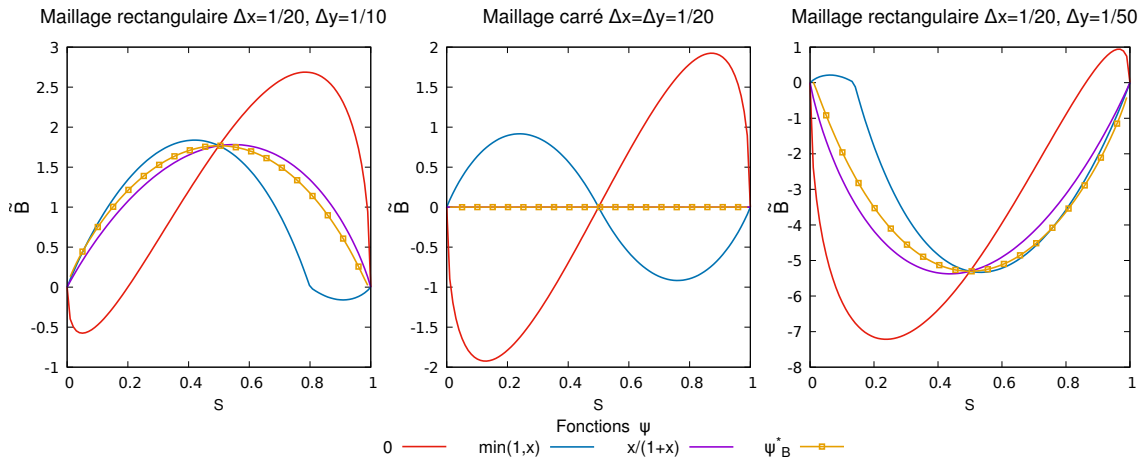


FIGURE 4.7 – Distribution angulaire de l'erreur en terme croisé avec plusieurs fonctions ψ utilisées dans le schéma MD1f.

4.4 Résultats numériques

Dans cette partie, les résultats numériques sont présentés sur les trois cas tests de référence. Comme le schéma MD1f ne s'applique que sur l'équation en saturation, il est nécessaire de préciser celui utilisé pour la discrétisation de l'équation en pression. Ici, il s'agit du schéma 5P détaillé §2.3.

4.4.1 Cas radial

Les résultats présentés dans cette partie correspondent à la résolution du problème décrit §2.4.1. L'effet d'axes privilégiés est mis en évidence lorsqu'il n'y a qu'un puits injecteur au centre d'un domaine homogène. La solution exacte calculée au Théorème 2.3 doit être

radiale, aucune direction ne doit être prédominante par rapport aux autres. Les résultats de la simulation sur ce cas test en utilisant le schéma MD1f sont représentés sur la figure 4.8 pour un maillage carré à gauche et pour un maillage rectangulaire à droite. Les pics remarquables avec le schéma 5P sur la figure 2.15 avec un rapport de mobilités défavorable sont quelque peu atténués avec le schéma MD1f. Cependant, en maillage rectangulaire, un phénomène surprenant est constaté avec des pics n'allant plus vers les bords du domaine mais se propageant plutôt vers le centre du maillage. Une explication à cela peut être que l'erreur transverse du schéma MD1f pour $S = 0$ et $S = 1$ est identiquement nulle quel que soit le choix de la fonction paramètre ψ . Dans les axes du maillage, le décentrage multi-dimensionnel dégénère alors en un décentrage simple amont.

Les pics sur les axes horizontaux et verticaux de la solution se retrouvent également en observant les profils de saturation figures 4.9 et 4.10. À gauche des figures, les profils de pression ne permettent pas de mettre en évidence l'effet d'axes. Par contre, à droite, les profils de saturation suivant différents axes du maillage ne se superposent pas, cela renforce les conclusions visuelles faites sur la figure 4.8. Sur maillage rectangulaire et en comparaison avec la courbe rouge représentant la saturation exacte, l'axe vertical est nettement en avance (pics vers le bord du domaine) tandis que l'axe horizontal en bleu est, lui, en retard par rapport à la solution exacte. Le schéma étudié dans ce chapitre ne semble pas améliorer les résultats du schéma 5P pour ce cas test, contrairement au schéma 9P1s en maillage carré.

4.4.2 Cas à 5 puits

Le problème utilisé ici est celui du paragraphe §2.4.2. Sur les résultats de cette partie (figure 2.21), certains axes de maillage étaient privilégiés au détriment des diagonales. Le cas test à 5 puits avait permis de mettre en évidence cette différence notable de propagation avec le schéma 5P.

La figure 4.11 montre les résultats de simulation sur ce cas test avec le schéma MD1f. Pour rappel, sur la figure de gauche, les puits sont disposés dans les diagonales des mailles du maillage tandis que sur la figure de droite, ils se trouvent dans les axes horizontaux et verticaux du maillage. Le schéma MD1f souffre du même défaut que le schéma 5P puisque les deux solutions sur maillage diagonal et sur maillage parallèle ne sont pas similaires même si les pics de la figure de gauche sont moins visibles que ceux présents à gauche sur la figure 2.21.

Des constatations semblables peuvent être données concernant la percée d'eau au niveau des quatre puits producteurs. Les courbes de production d'eau au cours du temps sont mises figure 4.12. Comme pour le schéma 5P, les percées d'eau aux puits producteurs entre le maillage diagonal et le maillage parallèle ne se font pas au même instant. Cependant, l'écart de début de production de 50 jours pour le schéma 5P (figure 2.22) est légèrement réduit à environ 30 jours.

Le changement de décentrement des flux fractionnaires n'a ainsi pas suffi à réduire l'effet d'orientation de maillage.

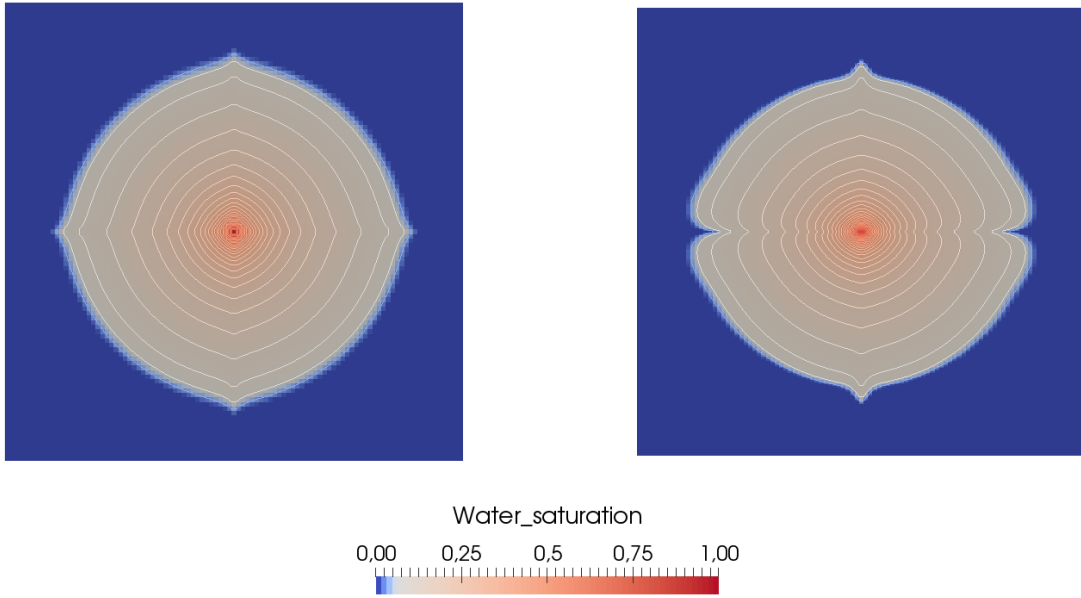


FIGURE 4.8 – Champs de saturation au temps $T = 0.05s$ obtenu sur maillage carré (à gauche) et sur maillage rectangulaire (à droite) avec le schéma MD1f pour $M = 200$.

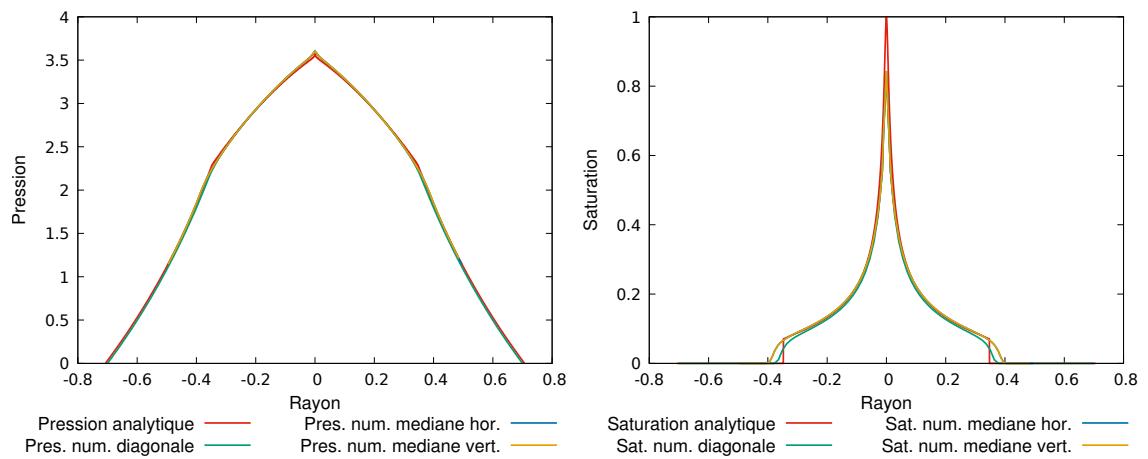


FIGURE 4.9 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma MD1f pour $M = 200$ sur maillage carré 101×101 .

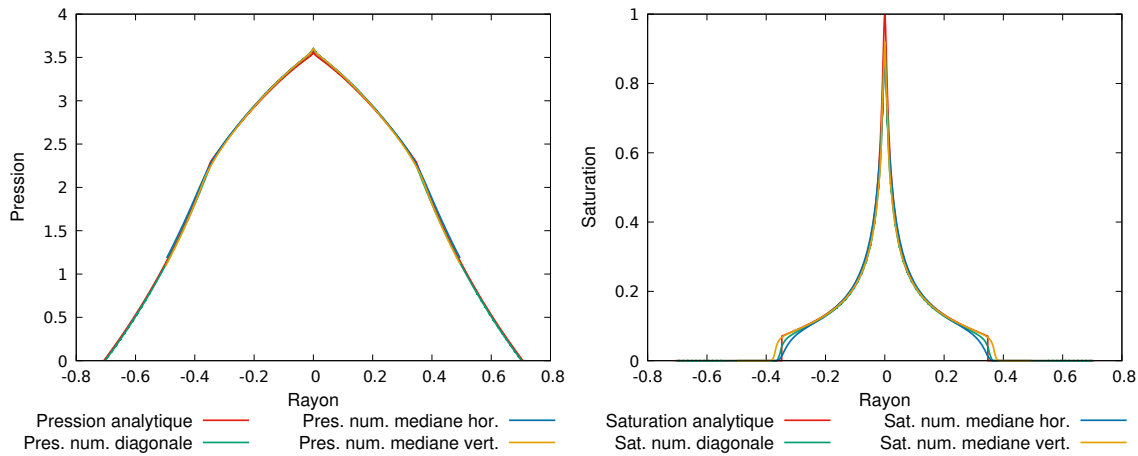


FIGURE 4.10 – Coupes selon différentes directions en pression (à gauche) et en saturation (à droite) de la solution obtenue avec le schéma MD1f pour $M = 200$ sur maillage rectangulaire 101×301 .

4.4.3 Cas digitations

Cette dernière partie s'intéresse à l'instabilité du système présenté §2.4.3. Dans cette section, il a été montré que le schéma 5P faisait apparaître des digitations au niveau du front du choc. Ce phénomène n'est pas physique et provient du caractère instable du modèle. La figure 4.13 présente les instantanées de saturation à différents temps de simulation. Quelques vaguelettes commencent à apparaître vers 1760 jours et sont nettement développées en fin de simulation. Comparativement aux résultats du schéma 5P figure 2.23, les digitations ne sont pas identiques mais le schéma MD1f n'a pas réussi à en limiter la propagation. Ici, le champ de vitesse est parallèle à la direction x , γ vaut 0 et l'erreur transverse \tilde{C} apparaissant dans le théorème 4.1 ne dépend pas de la fonction ψ . Cela implique que, pour ce cas, le schéma MD1f dégénère en un schéma 5P et ne permet pas d'améliorer les résultats de digitations.

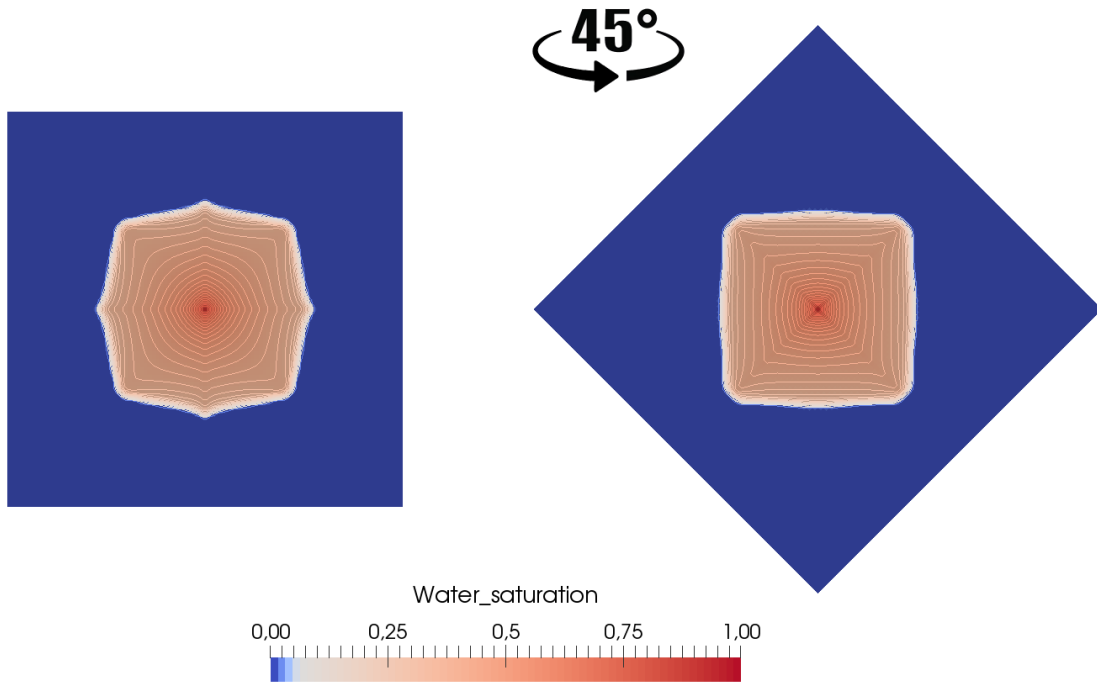


FIGURE 4.11 – Champs de saturation au temps $T = 200$ jours pour $M = 100$, obtenu avec le schéma MD1f en maillage diagonal (à gauche) et maillage parallèle (à droite).

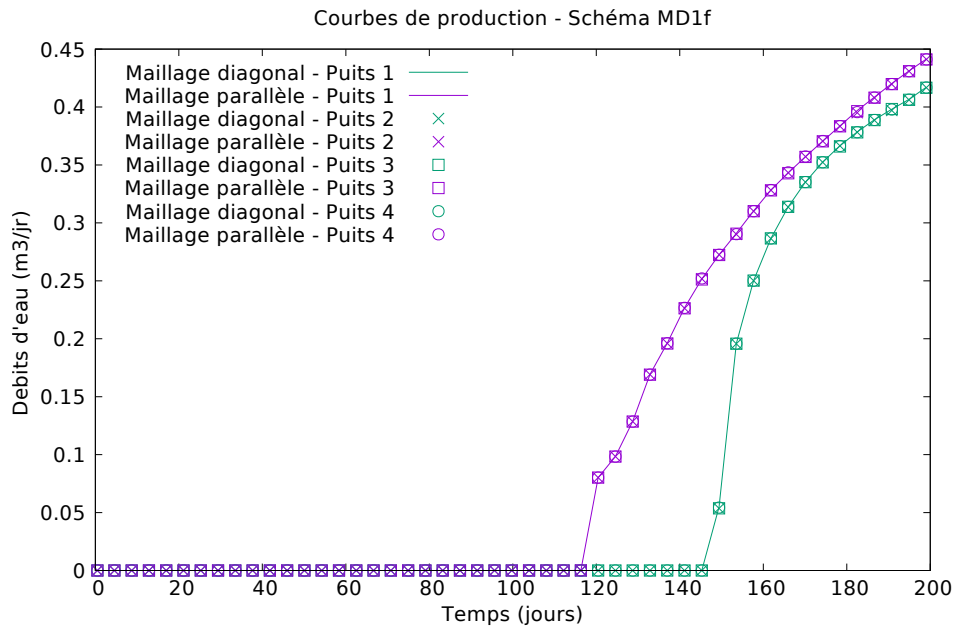


FIGURE 4.12 – Courbes de production d'eau au cours du temps aux puits producteurs pour $M = 100$ en maillages diagonal et parallèle avec le schéma MD1f.

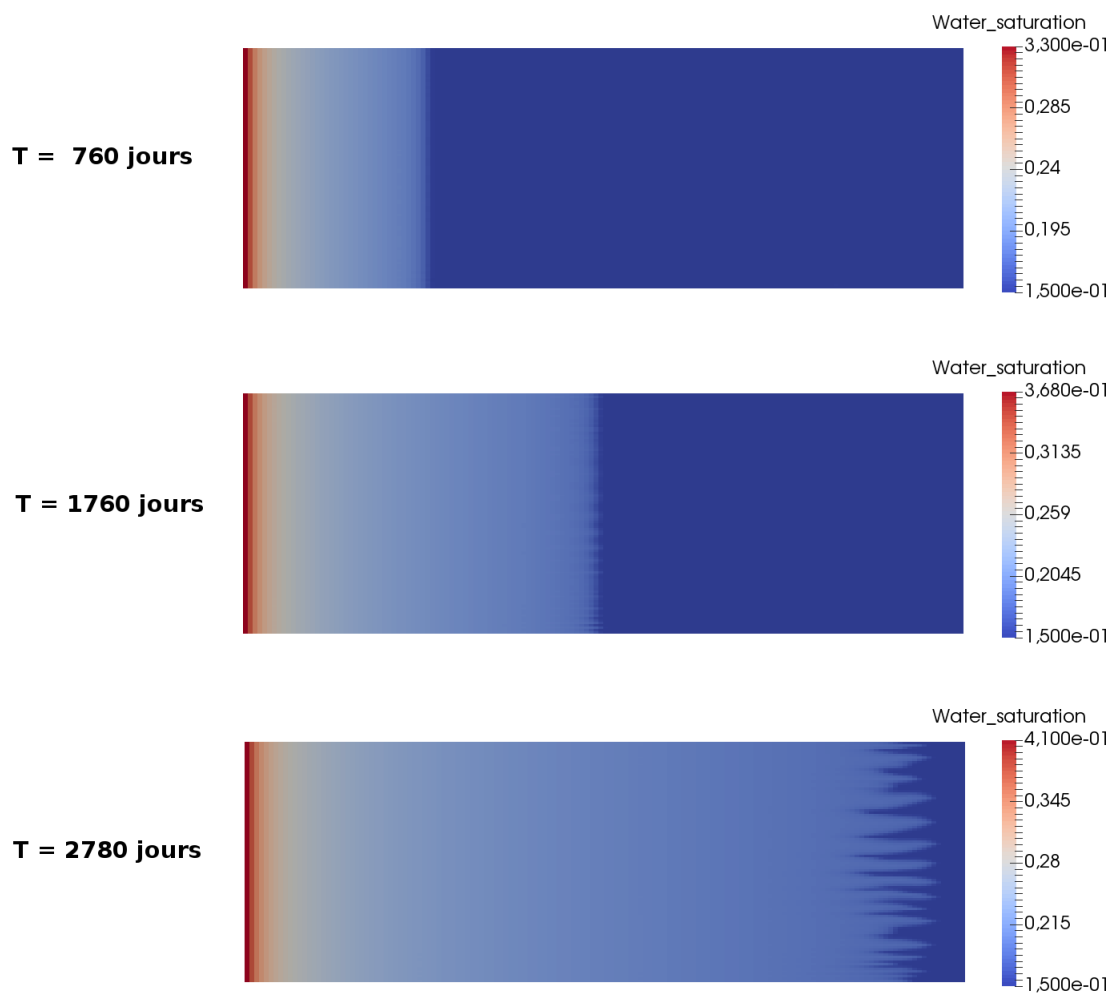


FIGURE 4.13 – Champ de saturation à différents temps de simulation pour le cas digitations avec le schéma MD1f.