

Écoulements fluides incompressibles

Comme nous l'avons introduit au premier chapitre lors de la présentation du modèle, l'écoulement que nous considérons est constitué d'un fluide incompressible gouverné par les équations de Navier-Stokes. Nous disposons à présent, avec les schémas DDFV, des outils numériques qui permettent de discrétiser des problèmes elliptiques sur des maillages conformes et non conformes. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en utilisant les discrétisations DDFV.

En considérant le domaine d'étude Ω , un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^3 , on rappelle que ces équations peuvent s'écrire dans le cas continu sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. + \text{(C.L.)}, \quad (4.1)$$

où \mathbf{u} et p sont respectivement le champ de vitesse et la pression définis sur Ω . Le terme source \mathbf{f} représente les forces volumiques agissant sur le système, ρ est la masse volumique du fluide et μ sa viscosité dynamique. Les conditions aux limites (C.L.) ne sont pas données ici, mais elles sont nécessaires pour fermer le système. Nous verrons plus tard dans ce chapitre les différents types de conditions que nous allons employer.

Une difficulté majeure dans la recherche d'une solution discrète à ce système est le couplage entre la vitesse et la pression au travers de la condition d'incompressibilité $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$. Pour tenir compte de cette condition nous utilisons une méthode de projection qui, par un procédé itératif de type "prédiction-correction", donne un découplage vitesse/pression conduisant à la résolution de deux équations en deux étapes successives. La première étape revient à chercher une prédiction de la vitesse qui *a priori* ne vérifie pas la contrainte d'incompressibilité, puis par une correction de la pression, la deuxième étape aboutit à convergence, à la vérification de la contrainte. Ces techniques font parties de l'ensemble des méthodes de projection qui sont largement employées et développées depuis les travaux originaux de A.J. Chorin [24] et R. Temam [91]. Les méthodes qui proposent des résolutions directes sous forme couplée à l'instar des méthodes de matrice d'influence [57] et des méthodes basées sur l'algorithme d'Uzawa [79], se révèlent complexes ou trop coûteuses surtout en dimension 3.

Dans ce cadre, l'intérêt d'utiliser une méthode de projection est le découplage qui permet une simplicité pratique de mise en œuvre et de souplesse d'utilisation à moindre coût. En effet, les méthodes de projection s'articulent autour de la décomposition de Hodge [24] dont le théorème stipule qu'un champ vectoriel $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ peut être décomposé en un champ à divergence nulle \mathbf{u}^* et en un gradient d'une fonction scalaire ∇q tel que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \nabla q$. On peut ainsi définir un opérateur de projection orthogonale P_H tel que :

$$\mathbf{u}^* = P_H \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \nabla q = \mathbf{u} - P_H \mathbf{u}.$$

L'opérateur P_H projette les vitesses dans un espace de vitesse à divergence nulle avec des conditions aux limites appropriées. En appliquant cet opérateur de projection à chaque pas de temps, la condition d'incompressibilité sera respectée, associée à un correcteur en pression.

Les algorithmes que nous avons étudiés ont été proposés par J.L. Guermond *et al.* dans [49, 50]. Nous nous sommes intéressés aussi aux méthodes dites de projection vectorielles. Elles ont été utilisées par C. Romé [82] pour la résolution des équations de Navier-Stokes avec une méthode de raccordement de maillages non-conformes. Une variante plus rapide utilisant la pénalisation a été proposée et développée récemment par Ph. Angot *et al.* [5, 6].

4.1 Équation de Stokes

Nous commençons par le traitement de l'équation de Stokes instationnaire en mettant de côté le terme de convection non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ de l'équation de Navier-Stokes. Ce qui revient à modéliser l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à faible Reynolds. En imposant des conditions d'adhérence, on peut compléter l'équation (4.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \rho \partial_t \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

La fonction \mathbf{f} et la donnée initiale $\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{x})$ sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution dans un bon cadre fonctionnel [63], [92].

4.1.1 Discrétisation temporelle

On s'intéresse par la suite à l'approximation de la solution de (4.2) sur l'intervalle $[0, T]$. Introduisons une partition de l'intervalle de temps : $t_n = n\delta t$ (δt désigne le pas de temps). On note par \mathbf{u}^n et p^n respectivement le champs de vitesse et la pression à l'instant t_n .

La discrétisation par un schéma implicite de la 1^{ère} équation du système (4.2) donne :

$$\frac{\rho}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}.$$

En posant $r = \rho/\delta t$ et $\mathbf{f}^n = \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n$ on obtient la discrétisation temporelle suivante, où \mathbf{u}^{n+1} résout un problème elliptique :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{n+1} - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^n & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.2 Algorithme de résolution

Nous avons fait le choix, tel que nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, d'utiliser une méthode de projection pour la résolution des équations de Stokes et de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible. L'algorithme que nous présentons ici et que nous avons implémenté est basé sur une variante des méthodes de projection inspirée par les travaux de J.L. Guermond *et al.* [49].

L'algorithme consiste à construire une suite d'approximation de la vitesse (\mathbf{u}_k) et une autre de la pression (p_k). En premier lieu, on détermine le champ de vitesse \mathbf{u}_k prédiction de \mathbf{u} , qualifiée de vitesse intermédiaire, avant de le projeter et de le rendre à divergence nulle suivant la décomposition de Helmholtz-Hodge en introduisant une correction sur la pression p_k . Initialement, on dispose d'une vitesse donnée \mathbf{u}_0 et d'une pression p_0 que l'on peut prendre arbitraire. Étant donnée une solution à l'itération k , on cherche la solution à l'itération $k+1$; et finalement on constitue un couple (\mathbf{u}_k, p_k) destiné à converger vers (\mathbf{u}, p) solution du système (4.3) selon l'algorithme suivant :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1} - \mu\Delta\mathbf{u}_{k+1} = -\nabla p_k + \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

- Étape 2 : solution en pression

$$\begin{cases} \frac{\mu}{r}q - \Delta q = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{k+1}) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n q = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

- Étape 3 : correction de la pression

$$p_{k+1} = p_k + \alpha q. \quad (4.6)$$

Dans les deux première étapes, on obtient deux équations elliptiques découplées vis à vis du couple vitesse/pression à résoudre successivement. Dans la troisième étape, on introduit un coefficient α pour corriger la pression. Il dépend d'autres paramètres du problème et, par son contrôle, on assure la convergence de l'algorithme dont le résultat est énoncé dans théorème qui suit :

Théorème 3

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{u}_k \in (H_0^1(\Omega))^3$ et $p, p_k \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tels que (\mathbf{u}, p) et (\mathbf{u}_k, p_k) sont les solutions respectives de (4.3) et (4.4) – (4.5) – (4.6).

Si $\alpha \leq 2r$, alors :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \longrightarrow \mathbf{u} & \text{dans } H_0^1(\Omega) \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ p_k \longrightarrow p & \text{dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Démonstration :

On prend $q_k = p_k - p$ et $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}$, et on choisit p_0 quelconque dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

Connaissant q_k dans $L^2(\Omega)$, on trouve $\mathbf{v}_{k+1} \in (H_0^1(\Omega))^3$ tel que :

$$r\mathbf{v}_{k+1} - \mu\Delta\mathbf{v}_{k+1} + \nabla q_k = 0. \tag{4.7}$$

On définit q_{k+1} tel que :

$$\frac{\nu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k) + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) = 0, \tag{4.8}$$

où α est un paramètre réel positif.

On pose : $q_{k+1} - q_k = q$.

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indifféremment le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ et sur $(L^2(\Omega))^3$. La norme associée à ce produit scalaire (indifféremment dans les deux cas) est désignée par $\|\cdot\|$.

1. Vérifions que :

$$\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}\|^2 - \|q_k\|^2) + \|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 + \alpha \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}, q_{k+1} - q_k + 2q_k \rangle = 0 \tag{4.9}$$

On a :

$$\|\nabla q_{k+1}\|^2 = \|\nabla q_k + \nabla q\|^2 = \|\nabla q_k\|^2 + \|\nabla q\|^2 + 2 \langle \nabla q_k, \nabla q \rangle.$$

Par la formule de Green et en utilisant l'équation (4.8), on a :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla q\|^2 &= \langle \nabla q, \nabla q \rangle_{L^2} \\
 &= -\langle \Delta q, q \rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} q d\sigma \\
 &= \left\langle -\frac{\mu}{r}q - \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q \right\rangle \quad \left(\frac{\partial q}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right) \\
 &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q \rangle - \frac{\mu}{r} \|q\|^2.
 \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla q_k, \nabla q \rangle &= -\langle \Delta q, q_k \rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial n} q_k d\sigma \\
 &= -\left\langle \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) + \frac{\mu}{r}q, q_k \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q \rangle - \frac{\mu}{r} \|q\|^2 - \langle 2\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) - 2q, q_k \rangle \\
 &= -\alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q + 2q_k \rangle - \frac{\mu}{r} (2\langle q, q_k \rangle + \|q\|^2).
 \end{aligned}$$

Or :

$$\|q\|^2 + 2\langle q, p_k \rangle = \langle q_{k+1} - q_k, q_{k+1} + q_k \rangle = \|q_{k+1}\|^2 - \|q_k\|^2.$$

Alors :

$$\frac{\mu}{r} (\|q_{k+1}\|^2 - \|p_k\|^2) + \|\nabla q_{k+1}\|^2 - \|\nabla q_k\|^2 + \alpha \langle \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q_{k+1} - q_k + 2q_k \rangle = 0.$$

2. Montrons que :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{H^{-1}, H^1} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k dx \quad (4.10)$$

En multipliant l'équation (4.7) par \mathbf{v}_{k+1} et en utilisant le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a :

$$\langle r\mathbf{v}_{k+1} - \mu\Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{H^{-1}, H^1}.$$

Ainsi, on trouve que :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 - \mu \langle \Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle_{H^{-1}, H^1}.$$

Par la formule de Green et l'équation (4.7), on a :

$$\begin{aligned}\langle \Delta \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle &= -\langle \nabla \mathbf{v}_{k+1}, \nabla \mathbf{v}_{k+1} \rangle + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1}}{\partial n} \cdot \mathbf{v}_{k+1} d\sigma \\ &= -\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 \quad (\mathbf{v}_{k+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega).\end{aligned}$$

Donc :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle.$$

D'autre part, en utilisant une intégration par partie et le fait que $\mathbf{v}_{k+1} = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve que :

$$-\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}, q_k \rangle - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{n} q_k d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k dx.$$

Finalement :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu\|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 = -\langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k dx.$$

3. Montrons que :

$$-\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k) dx = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \quad (4.11)$$

On a :

$$-\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) = \frac{\mu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k).$$

Donc :

$$\begin{aligned}-\langle \alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}), q_{k+1} - q_k \rangle &= \left\langle \frac{\mu}{r}(q_{k+1} - q_k) - \Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \right\rangle \\ &= \frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 - \langle \Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (4.5), on trouve :

$$\begin{aligned}\langle -\Delta(q_{k+1} - q_k), q_{k+1} - q_k \rangle &= \langle \nabla(q_{k+1} - q_k), \nabla(q_{k+1} - q_k) \rangle \\ &= \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2.\end{aligned}$$

Finalement :

$$-\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k) dx = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2.$$

4. Montrons l'inégalité :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 \quad (4.12)$$

En utilisant la formule de Green et le fait que $\mathbf{v}_{k+1} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a :

$$\begin{aligned} -\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_k dx &= \alpha \langle \nabla q_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle \\ -\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1}) q_{k+1} dx &= \alpha \langle \nabla q_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

Donc :

$$-\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1} (q_{k+1} - q_k) dx = \alpha \langle \nabla(q_{k+1} - q_k), \mathbf{v}_{k+1} \rangle. \quad (4.13)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\langle \nabla(q_{k+1} - q_k), \mathbf{v}_{k+1} \rangle| \leq \|\mathbf{v}_{k+1}\| \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|.$$

Et en utilisant l'équation (4.10) on déduit que :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha \|\mathbf{v}_{k+1}\| \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|. \quad (4.14)$$

D'autre part, on a :

$$\|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2.$$

En utilisant (4.13) et (4.11), on trouve que :

$$\|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha \langle \nabla(q_{k+1} - q_k), \mathbf{v}_{k+1} \rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha \|\mathbf{v}_{k+1}\| \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|.$$

Ce qui donne :

$$\|\nabla(q_{k+1} - q_k)\| \leq \alpha \|\mathbf{v}_{k+1}\|.$$

Finalement, en utilisant (4.14) :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

5. Vérifions que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k) dx \geq (2r - \alpha) \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + 2\mu \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2 \quad (4.15)$$

En utilisant (4.11) et (4.12), on trouve :

$$-\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k) dx = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1} - q_k\|^2 + \|\nabla(q_{k+1} - q_k)\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})(q_{k+1} - q_k) dx \geq -\alpha \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

D'autre part, selon (4.10) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}_{k+1})q_k dx = r \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Finalement :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k) dx \geq (2r - \alpha) \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + 2\mu \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

6. On pose :

$$r_k = \frac{\mu}{r} \|q_k\|^2 + \|\nabla q_k\|^2.$$

En utilisant (4.9), on trouve que :

$$r_{k+1} - r_k = -\alpha \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_{k+1}(q_{k+1} - q_k + 2q_k) dx.$$

Et en utilisant (4.15), on a :

$$r_{k+1} - r_k \leq \alpha(\alpha - 2r) \|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 - 2\alpha\mu \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2.$$

Comme $\alpha \geq 0$, pour que la suite $(r_k)_k$ soit décroissante, il suffit d'avoir :

$$\alpha \leq 2r.$$

Sous cette condition, en prenant $C_1 = \min(\alpha(2r - \alpha), 2\alpha\mu)$ on a :

$$\begin{aligned} r_{k+1} - r_k &\leq -C_1(\|\mathbf{v}_{k+1}\|^2 + \|\nabla \mathbf{v}_{k+1}\|^2) \\ &= -C_1 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

La suite $(r_k)_k$ est décroissante positive, alors elle converge et donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (r_{k+1} - r_k) = 0.$$

Alors, selon l'inégalité précédente on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^1} = 0.$$

Ainsi, on obtient la convergence pour la vitesse et sa divergence :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \longrightarrow \mathbf{u} & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fortement.} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k \longrightarrow \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fortement.} \end{cases}$$

D'autre part, selon (4.7) on trouve que :

$$\nabla q_k = -r\mathbf{v}_{k+1} + \mu\Delta\mathbf{v}_{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

En effet, en utilisant la formule de Green et que \mathbf{v}_{k+1} sur $\partial\Omega$, on a $\forall\phi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\langle \nabla q_k, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1} = -r \int_{\Omega} \mathbf{v}_{k+1} \phi dx - \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_{k+1} \nabla \phi dx.$$

Ce qui implique :

$$|\langle \nabla q_k, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1}| \leq \max(r, \mu) |\langle \mathbf{v}_{k+1}, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1}|.$$

Et par l'inégalité de Schwartz, avec ($C_2 = \max(r, \mu)$), on a :

$$|\langle \nabla q_k, \phi \rangle_{H^{-1}, H^1}| \leq C_2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^{-1}} \|\phi\|_{H^1}.$$

Donc :

$$\|\nabla q_k\|_{H^{-1}} \leq C_2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_{H^{-1}}.$$

Or, on sait par l'inégalité Nečas [72] qu'il existe $C_3 > 0$ tel que :

$$\|q_k - \int_{\Omega} q_k\| \leq C_3 \|\nabla q_k\|_{H^{-1}}.$$

Donc : $\lim_{k \rightarrow \infty} \|q_k - \int_{\Omega} q_k\| = 0$, et finalement :

$$p_k \longrightarrow p \text{ dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R}.$$

■

Remarque 12

On peut formuler un algorithme plus général, qui donne un schéma hybride entre la méthode du Lagrangien Augmenté [38] et la méthode de projection. Dans ce cas, les équations de prédiction/correction peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1} - \mu\Delta\mathbf{u}_{k+1} - \xi\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_{k+1} = -\nabla p_k + \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma q - \delta\Delta q = -\operatorname{div}(\mathbf{u}_{k+1}) & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n q = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$p_{k+1} = p_k + \alpha q + \beta \operatorname{div}\mathbf{u}_{k+1}.$$

Les différents paramètres permettent de combiner les deux méthodes tels que,
– pour le Lagrangien Augmenté :

$$\gamma = 1, \delta = \alpha = 0 \implies \beta \text{ est limité par } \xi + \frac{\mu}{2};$$

– pour la projection itérative :

$$\delta = 1, \xi = \gamma = \beta = 0 \implies \alpha \text{ est limité par } r.$$

4.1.3 Discrétisation spatiale

Dans ce paragraphe, nous allons présenter la discrétisation spatiale de l'équation de Stokes et réécrire l'algorithme de projection par le schéma DDFV. Comme évoqué en détail au chapitre précédent, l'intérêt principal de ce schéma, outre son application sur presque tous les maillages (non-structurés et non-conformes), réside dans les relations de dualités discrètes qu'il présente. En effet, ces relations seront nécessaires, comme dans le cas continu, pour l'application de la méthode de projection dans le cas discret du fait du découplage pression/vitesse et les conditions aux limites qui en découlent.

Nous cherchons l'approximation de la vitesse \mathbf{u} sur les centres des cellules et sur les sommets (maillage \mathcal{T}) et l'approximation de la pression p sur les cellules diamants (maillage \mathcal{D}). La discrétisation sur le maillage DDFV de l'équation (4.3) donne :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - \mu\Delta^{\mathcal{T}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}}p^{\mathcal{D}} = \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.16)$$

Comme dans le cas continu, on construit deux suites $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ et $(p_k^{\mathcal{D}})$ respectivement pour la vitesse et la pression discrètes. La suite $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ est initialisée par une donnée $\mathbf{u}_0^{\mathcal{T}}$ connue (nulle par exemple) et la suite $(p_k^{\mathcal{D}})$ initialisée en prenant une pression $p_0^{\mathcal{D}}$ quelconque.

L'algorithme de projection peut s'écrire dans le cas discret comme suit :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = -\nabla^{\mathcal{T}} p_k^{\mathcal{D}} + \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

- Étape 2 : solution en pression :

$$\begin{cases} \frac{\mu}{r} q^{\mathcal{D}} - \Delta^{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}} = -\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.18)$$

- Étape 3 : correction de pression :

$$p_{k+1}^{\mathcal{D}} = p_k^{\mathcal{D}} + \alpha q^{\mathcal{D}}. \quad (4.19)$$

On remarque que le formalisme des schémas DDFV nous permet de transposer tous les opérateurs écrits dans le cas continu en leurs équivalents dans le cas discret sans aucun problème. Dans l'algorithme précédent, les deux premières étapes correspondent à deux équations elliptiques discrétisées respectivement sur le maillage \mathcal{T} et \mathcal{D} . Notons que dans le chapitre précédent on avait testé et validé sur ces deux maillages la résolution du problème de Poissons avec deux types de conditions aux limites, Dirichlet et Neumann.

Comme dans le cas continu, le paramètre α est choisi en fonction de r afin de garantir la convergence de la méthode où le couple $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}}, p_k^{\mathcal{D}})$ est destiné à converger vers $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ solution du système (4.16). Le résultat est annoncé dans le théorème suivant :

Théorème 4

Soient $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ et $p^{\mathcal{D}}, p_k^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ et $(\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}}, p_k^{\mathcal{D}})$ sont les solutions respectives de (4.16) et (4.17) – (4.18) – (4.19).

Si : $\alpha \leq 2r$, alors :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbf{u}^{\mathcal{T}} & \text{dans } (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3 \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \\ p_k^{\mathcal{D}} \longrightarrow p^{\mathcal{D}} & \text{dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \end{cases}$$

Démonstration :

On prend $q_k^{\mathcal{D}} = p_k^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{v}_k^{\mathcal{T}} = \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$, et on choisit $p_0^{\mathcal{D}}$ quelconque dans $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

Connaissant $q_k^{\mathcal{D}}$, on trouve $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ tel que :

$$r\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}} = 0. \quad (4.20)$$

On définit $q_{k+1}^{\mathcal{D}}$ tel que (α un paramètre réel positif) :

$$\frac{\mu}{r}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) - \Delta^{\mathcal{D}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) + \alpha \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) = 0. \quad (4.21)$$

On pose : $q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} = q^{\mathcal{D}}$.

On désigne par $\|\cdot\|$ indifféremment la norme de $(\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$ et de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

1. Vérifions que :

$$\frac{\mu}{r}(\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + \|\nabla^{\mathcal{D}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|\nabla^{\mathcal{D}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = 0. \quad (4.22)$$

On a :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 &= \|\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}} + \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\|^2 \\ &= \|\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\|^2 + 2 \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Par la première formule de Green discrète on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\|^2 &= \langle \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{T}} \\ &= - \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle q^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) \rangle_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Comme : $\gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) = 0$, car $\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\|^2 = \langle -\Delta^{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}}, q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}}.$$

En utilisant l'équation (4.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}\|^2 &= \left\langle -\frac{\mu}{r} q^{\mathcal{D}} - \alpha \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= -\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r} \|q^{\mathcal{D}}\|^2. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{T}} &= - \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle q_k^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} q^{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{n}) \rangle_{\partial\Omega} \\ &= - \left\langle \alpha \operatorname{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) + \frac{\mu}{r} p^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2 &= -\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r} \|q^{\mathcal{D}}\|^2 \\ &\quad - 2 \langle \alpha \operatorname{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}) - q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} \\ &= -\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} (\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{\mu}{r} (2 \langle q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} + \|q^{\mathcal{D}}\|^2). \end{aligned}$$

Comme :

$$\|q^{\mathcal{D}}\|^2 + 2 \langle q^{\mathcal{D}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = \langle q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} + q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = \|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

Alors, on obtient :

$$\frac{\mu}{r} (\|q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + (\|\nabla^{\mathcal{D}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}\|^2 - \|\nabla^{\mathcal{D}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2) + \alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = 0.$$

2. Montrons que :

$$r \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 = - \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} = \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} \quad (4.23)$$

En multipliant l'équation (4.20) par $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}$ et en intégrant sur \mathcal{T} , on a :

$$\langle r \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} = - \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}.$$

Donc :

$$r \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 - \underbrace{\mu \langle \operatorname{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}}_{=A} = - \underbrace{\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}}_{=B}.$$

Par la première formule de Green discrète, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^3 \langle \operatorname{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}), v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} \quad (\text{avec : } v_{k+1}^{\mathcal{T}} = (v_{i,k+1}^{\mathcal{T}})_{i=1}^3) \\ &= \sum_{i=1}^3 (- \langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{D}}^3 + \langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}, \gamma^{\mathcal{D}}(v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}) \rangle_{\partial\Omega}). \end{aligned}$$

Comme : $v_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors : $\gamma^{\mathcal{D}}(v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}) = 0$ et donc :

$$A = \sum_{i=1}^3 (-\langle \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} v_{i,k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{D}})^3 = -\|\nabla^{\mathcal{D}} v_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Par la seconde formule de Green discrète, on a

$$B = \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} = -\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle q_{k+1}^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \rangle_{\partial\Omega}.$$

Or, $\gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n})$ car $\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc : $B = -\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}}$.

Ainsi, on obtient :

$$r\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 = -\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} = \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}}.$$

3. Montrons que :

$$-\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2. \quad (4.24)$$

En multipliant (4.21) par $q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}$ et en intégrant sur \mathcal{D} , on a :

$$\begin{aligned} \langle -\alpha \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} &= \left\langle \frac{\mu}{r} (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) - \Delta^{\mathcal{D}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \right\rangle_{\mathcal{D}} \\ &= \frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 - \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième formule de Green discrète, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} &= -\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \langle \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Or, on a $\gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n}) = 0$ car $\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} &= -\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{T}} \\ &= \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$-\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), (q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}) \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2.$$

4. Montrons l'inégalité :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 \leq \alpha^2 \|v_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 \quad (4.25)$$

En utilisant la deuxième formule de Green et que $v_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0$ sur $\partial\Omega$, on trouve :

$$\begin{aligned} -\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} + \langle q_k^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \rangle_{\partial\mathcal{D}} \\ &= \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} + \langle q_{k+1}^{\mathcal{D}}, \gamma^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n}) \rangle_{\partial\mathcal{D}} \\ &= \langle \nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Donc :

$$-\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}), q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = \alpha \langle \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}. \quad (4.26)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$|\langle \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}| \leq \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Et en utilisant l'équation (4.23) on déduit que :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2 \leq \alpha \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|. \quad (4.27)$$

D'autre part, on a :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2 \leq \frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

En utilisant (4.24) et (4.26), on trouve que :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2 \leq \alpha \langle \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}.$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\langle \nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}), \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} \leq \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Ce qui donne :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\|^2 \leq \alpha \|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Autrement dit :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}}(q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}})\| \leq \alpha \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|.$$

Finalement, en utilisant (4.27), on trouve que :

$$\frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

5. Vérifions que :

$$\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} \geq (2r - \alpha) \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + 2\mu \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 \quad (4.28)$$

En utilisant (4.24) et (4.25), on trouve que :

$$-\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{r} \|q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}}\|^2 \leq \alpha^2 \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Donc :

$$\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} \geq -\alpha \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

D'autre part, selon (4.23) on a :

$$\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} = r \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \mu \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Finalement, on trouve que :

$$\langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}} \geq (2r - \alpha) \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + 2\mu \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

6. On pose :

$$r_k = \frac{\mu}{r} \|q_k^{\mathcal{D}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|^2.$$

En utilisant (4.22), on a :

$$r_{k+1} - r_k = -\alpha \langle \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, q_{k+1}^{\mathcal{D}} - q_k^{\mathcal{D}} + 2q_k^{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{D}}.$$

En utilisant (4.28), on trouve que :

$$r_{k+1} - r_k \leq \alpha(\alpha - 2r) \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 - 2\alpha\mu \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2.$$

Comme $\alpha \geq 0$, pour que la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit décroissante, il suffit d'avoir :

$$\alpha \leq 2r.$$

Sous cette condition, en prenant $C_1 = \min(\alpha(2r - \alpha), 2\alpha\mu)$, on a :

$$r_{k+1} - r_k \leq -C_1(\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2 + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|^2) = -C_1\|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1}^2. \quad (4.29)$$

La suite (r_k) est décroissante positive, alors elle converge et donc $\lim_{k \rightarrow \infty} (r_{k+1} - r_k) = 0$. Ainsi, selon l'inégalité (4.29) on obtient $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1} = 0$, d'où :

$$\mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \text{ dans } (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3.$$

Comme $\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} = \operatorname{tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}})$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$, on déduit :

$$\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_k^{\mathcal{T}} \longrightarrow \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{\mathcal{D}}.$$

Enfin, comme on ne peut pas démontrer en DDFV une inégalité équivalente à celle de Nečac on s'arrête au niveau de la convergence du gradient de pression.

En prenant l'équation (4.20) : $\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}} = -r\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}} + \mu \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}$,

et en la multipliant par $\phi^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^3$, on trouve et en utilisant la 1ère formule de Green :

$$\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} = -r \langle \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}} - \mu \langle \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{D}} \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Ce qui implique :

$$|\langle \nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}| \leq \max(r, \mu) |\langle \mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}, \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{H^{-1}, H^1}| \leq \max(r, \mu) \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1} \|\phi^{\mathcal{T}}\|_{H^1}.$$

En considérant la norme duale discrète : $\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\phi^{\mathcal{T}}\| \leq 1} \frac{\langle \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \phi^{\mathcal{T}} \rangle_{\mathcal{T}}}{\|\phi^{\mathcal{T}}\|}$

L'inégalité précédente peut être écrite sous la forme (avec $C_2 = \max(r, \mu)$) :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}} q_k^{\mathcal{D}}\|_{H^{-1}} \leq C_2 \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1}.$$

Or on a : $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_{k+1}^{\mathcal{T}}\|_{H^1} = 0$, donc on conclut que :

$$\|\nabla^{\mathcal{T}} (p_{k+1}^{\mathcal{D}} - p_k^{\mathcal{D}})\|_{H^{-1}} \longrightarrow 0.$$

■

Remarque 13

Notons que les normes discrètes des quantités utilisées dans la démonstration précédente sont bornées par rapport au pas de maillage. Les résultats de convergence (quand $k \rightarrow +\infty$) sont donc uniformes par rapport à la taille du maillage.

Méthode de projection vectorielle

À notre algorithme, on peut adapter la méthode de projection vectorielle [5, 6] que nous avons évoquée à l'introduction de ce chapitre. La première étape de prédiction de vitesse est la même. Dans la deuxième, on résout une équation elliptique dont l'opérateur est un $\nabla \operatorname{div}$; la solution obtenue est un pur gradient qui sert à faire, à la troisième étape, une correction en gradient de pression. Avec la discrétisation DDFV, l'algorithme peut s'écrire comme suit :

- Étape 1 : prédiction de la vitesse :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \mu \Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = -\nabla^{\mathcal{T}} p_k^{\mathcal{D}} + \mathbf{f}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Étape 2 : solution en "gradient de pression" :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}} - \frac{1}{\epsilon} \nabla^{\mathcal{T}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\epsilon} \nabla^{\mathcal{T}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{k+1}^{\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Étape 2 : Correction de gradient de pression :

$$\nabla^{\mathcal{T}} p_{k+1}^{\mathcal{D}} = \nabla^{\mathcal{T}} p_k^{\mathcal{D}} + \alpha \mathbf{q}_{k+1}^{\mathcal{T}}.$$

Selon Ph. Angot [5], parmi les méthodes de projection cette variante est la plus rapide. Mais, on n'a pas constaté de différence entre cette méthode et celle que nous avons présentée précédemment, car on utilise un solveur BiCGStab avec un préconditionneur de Jacobi (*cf.* partie 4.5 de ce chapitre), tandis que Angot utilise un préconditionneur de type ILU.

4.2 Équation de Navier-Stokes

Le problème de Stokes étudié dans la section précédente est un modèle simplifié d'un écoulement de fluide visqueux incompressible. On reprend à présent l'équation de Navier-Stokes (4.1) où la partie convective $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ n'est plus négligeable, ce qui permet de tenir compte de l'inertie du fluide. Puisque l'écoulement est incompressible, ce terme d'advection peut se décomposer de la manière suivante :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{u}\|^2 - \mathbf{u} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

À cette formulation rotationnelle, nous associons la pression de Bernoulli $P = p + \rho \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}$ qui sera considérée dans la suite comme la pression du système.

Ainsi, en imposant des conditions d'adhérence aux parois, le problème (4.1) peut être écrit

comme suit :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \mathbf{u} - \mathbf{u} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{f} & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.30)$$

La donnée initiale $\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{x})$ et la fonction \mathbf{f} sont supposées suffisamment régulières pour assurer l'existence des solutions faibles de ce problème dans la cadre du théorème de J. Leray ; dont l'étude complète est reprise et détaillée par F. Boyer et P. Fabrie dans [16, chapitre 4].

NB. Dans la suite de ce travail, le système (4.30) sera le formalisme que nous allons utiliser pour décrire les équations de Navier-Stokes de l'écoulement d'un fluide incompressible.

4.2.1 Discrétisations

Discrétisation temporelle

Comme dans le cas de l'équation de Stokes, nous introduisons une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$: $t_n = n\delta t$. On note par \mathbf{u}^n et P^n respectivement le champs de vitesse et la pression à l'instant t_n et on pose $r = \rho/\delta t$. La discrétisation temporelle par un schéma semi-implicite de (4.30) donne :

$$\begin{cases} r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{u}^n - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} = \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.31)$$

Étude de la stabilité L^2

Pour cela nous allons chercher comment contrôler la solution \mathbf{u}^n par la donnée initiale \mathbf{u}^0 . On prend la 1^{ère} équation du système (4.31) et on la multiplie par \mathbf{u}^{n+1} puis on intègre sur le domaine Ω :

$$\langle r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{u}^n - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{H^{-1}, H^1} + r \langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2}.$$

En utilisant les formules de Green avec $\mathbf{u}^{n+1} = 0$ sur $\partial\Omega$ on trouve :

$$\begin{aligned} r\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \underbrace{\rho \langle \mathbf{u}^{n+1} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2}}_{=0} + \mu \langle \nabla\mathbf{u}^{n+1}, \nabla\mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2} - \underbrace{\langle P^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2}}_{=0} \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{H^{-1}, H^1} + r \langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Selon l'inégalité de Poincaré $\exists c > 0$ tel que $c\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \mu\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2$,

donc :

$$(r + c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq r\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Ainsi :

$$(r + c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{H^{-1}, H^1} + r \langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, on a :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{H^{-1}, H^1} \leq \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{H^1} \leq \frac{1}{2c} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2 + \frac{c}{2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2$$

et

$$\langle \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rangle_{L^2} \leq \|\mathbf{u}^n\|_{L^2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Donc :

$$(r + c)\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2c} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2 + \frac{c}{2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{r}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2 + \frac{r}{2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

Finalement, en posant $a = \frac{1}{c(r+c)} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2$, on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq a + \frac{r}{r+c} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2}^2. \quad (4.32)$$

On considère la suite arithmético-géométrique suivante :

$$y_{n+1} = a + \frac{r}{r+c} y_n.$$

En posant $b = \frac{a(r+c)}{c}$ ($c \neq 0$), on peut écrire le terme général de cette suite sous la forme :

$$y_n = \left(\frac{r}{r+c}\right)^n (y_0 - b) + b.$$

En appliquant ce résultat à l'inégalité (4.32) (dont les suites sont > 0), on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{r}{r+c}\right)^n (\|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 - b) + b.$$

Finalement, puisque $\frac{r}{r+c} < 1$ et $b = \frac{1}{c^2} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2$, on trouve que :

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \left| \left(\|\mathbf{u}^0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{c^2} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2\right) \right| + \frac{1}{c^2} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}}^2.$$

■

Discrétisation spatiale

On utilise le même procédé que celui appliqué à l'équation de Stokes (4.16) pour discrétiser en DDFV l'équation de Navier-Stokes. Les approximations de la vitesse et de la pression sont faites respectivement sur les maillages \mathcal{T} et \mathcal{D} . La discrétisation spatiale de (4.31) donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} - \rho\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} \wedge \mathbf{rot}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}^{n\mathcal{D}} - \mu\Delta^{\mathcal{T}} \mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}} P^{n+1\mathcal{D}} = \mathbf{f}^{n\mathcal{T}} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Notons que, dans la première équation de ce système, l'application de l'opérateur $\mathbf{rot}^{\mathcal{T}}$ à la vitesse nécessite de l'évaluer sur le maillage \mathcal{D} . Pour cela on utilise la moyenne de la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_A)_{K,A \in \mathcal{T}}$ sur chaque diamant $D_\sigma = (K, A)_{K,A \in \mathcal{T}}$ pour calculer $\mathbf{u}^{\mathcal{D}} = (\mathbf{u}_\sigma)_{D_\sigma \in \mathcal{D}}$.

On peut également utiliser l'opérateur $\mathbf{rot}^{\mathcal{D}}$ que l'on applique directement à la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. On obtient dans ce cas un vecteur $\mathbf{w}^{\mathcal{D}} = \mathbf{rot}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. Pour la discrétisation de la partie convective, on cherche $\mathbf{w}^{\mathcal{T}}$ sur chaque élément K et A de \mathcal{T} , pour cela on utilise les moyennisations des valeurs prises sur les diamants auxquels appartiennent chaque éléments K et A .

Pour la stabilité, on peut appliquer la même démonstration en suivant les même étapes que dans le cas continu en utilisant la norme $L^2(\mathcal{T})$.

4.2.2 Algorithme de résolution

En prenant $\mathbf{f}^n = \mathbf{f} + r\mathbf{u}^n$, on peut écrire l'équation (4.31) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{u}^n + \rho - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} = \mathbf{f}^n & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Grâce à l'asymétrie du terme $\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{u}^n$, l'application de l'algorithme de projection à cette équation se déroulera de la même manière comme pour l'équation de Stokes (4.3). En effet, ce terme sera éliminé en le multipliant par \mathbf{u}^{n+1} ; et donc, on peut appliquer exactement les mêmes démonstrations de la convergence de l'algorithme décrites précédemment dans le cas continu et discret.

4.3 Les conditions aux bords

Afin de traiter efficacement des conditions aux limites de type Dirichlet pour imposer une vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$, on utilise la méthode de pénalisation décrite dans le premier chapitre (pour imposer une vitesse nulle au sol). Pour cela, on ajoute le terme de pénalisation dans l'équation de la prédiction de vitesse au niveau des éléments de $\partial\Omega$. Cette équation devient :

$$r\mathbf{u}^{n+1} - \rho\mathbf{u}^{n+1} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{u}^n - \mu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla P^{n+1} + \frac{\mu}{K_s}\chi_{\partial\Omega}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_b) = \mathbf{f}^n.$$

Dans le cas discret cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$r\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} - \rho\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} \wedge \mathbf{rot}^{\mathcal{T}}\mathbf{u}^{n\mathcal{D}} - \mu\Delta^{\mathcal{T}}\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} + \nabla^{\mathcal{T}}P^{n+1\mathcal{D}} + \frac{\mu}{K_s}\chi_{\partial\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{n+1\mathcal{T}} - \mathbf{u}_b^{\mathcal{T}}) = \mathbf{f}^{n\mathcal{T}}.$$

La fonction χ_E est une indicatrice qui vaut 1 sur l'ensemble E et 0 ailleurs. On choisit le paramètre de pénalisation $K_s \ll 1$; il est équivalent à une perméabilité. L'avantage de cette méthode est qu'elle nécessite simplement de connaître le champs de vitesse à imposer au bord du domaine, ce qui rend son implémentation aisée.

Remarque 14

Le traitement des conditions de Neumann se fait en imposant aux opérateurs $\text{div}^{\mathcal{T}}$ et $\nabla^{\mathcal{D}}$, au niveau des faces du bord, des valeurs issues des calculs de la trace. Au chapitre précédent, ces calculs sont détaillés lors de l'étude des Laplaciens $\Delta^{\mathcal{T}}$ et $\Delta^{\mathcal{D}}$ (cf. § 3.5.3).

4.4 Tests et validations numériques

On présente des résultats obtenus sur le domaine $\Omega = [0, 1]^d$ ($d=2$ ou $d=3$) de quelques tests numériques pour valider l'algorithme implémenté dans le cas de l'équation de Stokes, puis dans celui de l'équation de Navier-Stokes.

4.4.1 Solutions polynômiales

On commence par le test de l'équation de Stokes stationnaire avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes. Le domaine de calcul est le carré $\Omega = [0, 1]^2$ et les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que la solution exacte soit donnée par :

$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} 2000x^2(1-x)^2y(1-y)(1-2y) \\ -2000y^2(1-y)^2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_e = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}.$$

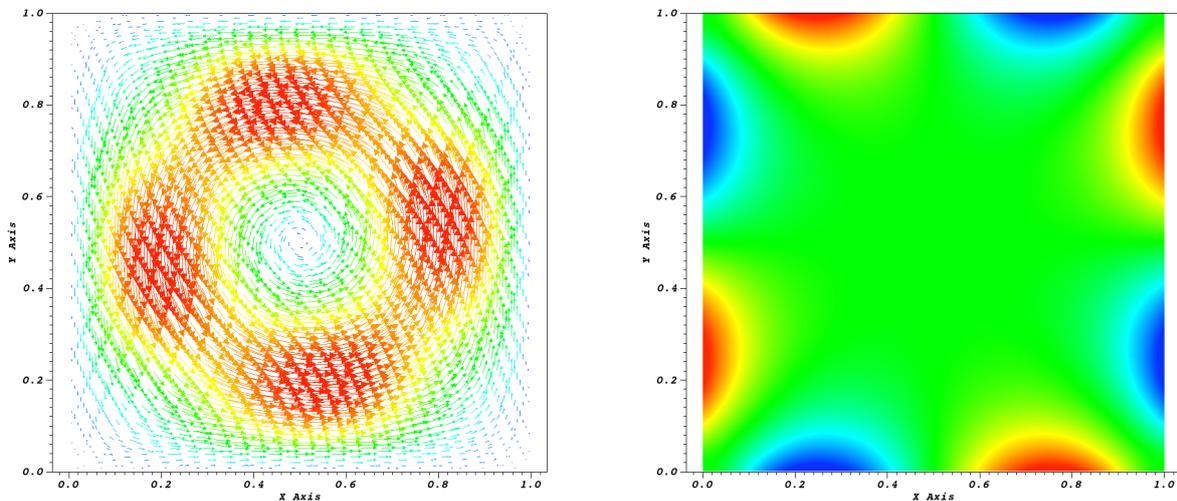
Nous nous sommes intéressés à la convergence de la vitesse \mathbf{u} et de la pression p . Pour cela, on calcule les normes L^2 et L^∞ de l'erreur respectivement entre les solutions exactes et les solutions approchées de la vitesse et de la pression, pour différentes tailles du maillage. Les résultats accompagnés des taux de convergence associés sont regroupés dans le tableau suivant :

Maillage	La vitesse				La pression			
	ErrL ²	Ordre	ErrL [∞]	Ordre	ErrL ²	Ordre	ErrL [∞]	Ordre
20 ²	2.61E-01	-	1.21E-01	-	1.30E-01	-	1.19E-01	-
40 ²	6.76E-02	1.93	3.20E-02	1.89	3.44E-02	1.89	3.18E-02	1.87
80 ²	1.73E-02	1.95	8.264E-03	1.94	8.95E-03	1.92	8.28E-03	1.92
160 ²	4.38E-03	1.98	2.119E-03	1.95	2.28E-03	1.96	2.15E-03	1.93

TABLE 4.1: Solutions polynômiales : convergence de la vitesse et de la pression.

De ces résultats, on déduit que l'algorithme que nous avons implémenté pour la résolution des équations de Stokes incompressibles avec les conditions de Dirichlet possède donc un ordre de convergence de 2.

Dans les deux figures qui suivent, nous donnons une illustration du champ de la vitesse et de la pression produites.



(a) Le champ de vitesse

(b) La pression

FIGURE 4.1: Équation de Stokes - Solution polynômiale.

4.4.2 Tourbillons de Green-Taylor

On reprend le domaine de calcul $\Omega = [0, 1]^2$ et on utilise la solution exacte donnée par le couple vitesse/pression suivant :

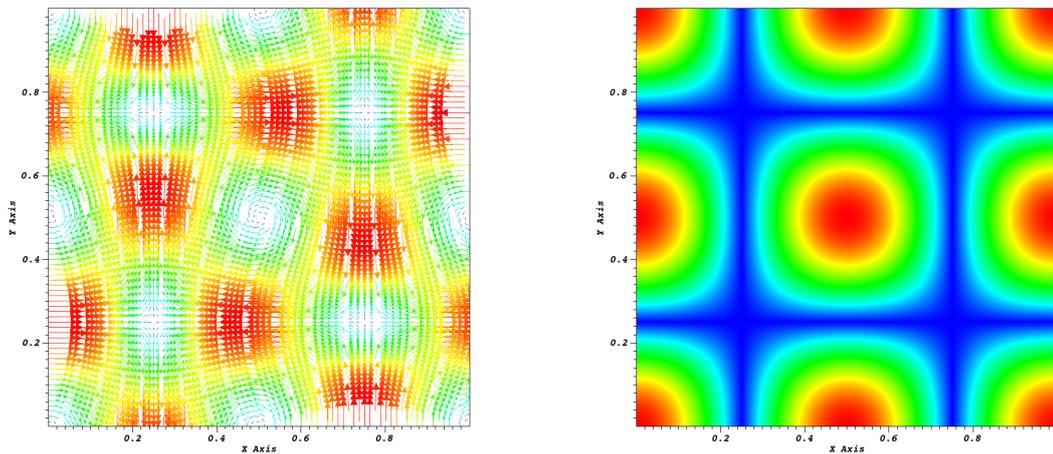
$$\mathbf{u}_e = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ -\sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_e = \frac{1}{4}(\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)).$$

De la même manière que dans le cas test précédent, on calcule les normes L^2 et L^∞ de l'erreur entre les solutions exactes et les solutions approchées de la vitesse et la pression en fonction de la taille du maillage. Les résultats accompagnés des taux de convergence associés sont regroupés dans le tableau 4.2 où on observe une convergence d'ordre 2 en norme L^2 .

Maillage	La vitesse				La pression			
	ErrL ²	Ordre	ErrL [∞]	Ordre	ErrL ²	Ordre	ErrL [∞]	Ordre
20 ²	5.30E-01	-	1.59E-01	-	2.18E-01	-	2.02E-01	-
40 ²	1.49E-01	1.77	4.54E-02	1.75	6.08E-02	1.79	5.70E-02	1.77
80 ²	3.03E-02	1.86	1.25E-02	1.81	1.68E-02	1.81	1.58E-02	1.80
160 ²	8.03E-03	1.89	3.37E-03	1.86	4.52E-03	1.86	4.35E-03	1.82

TABLE 4.2: Tourbillons de Green-Taylor : convergence de la vitesse et de la pression.

Dans les deux figures qui suivent, nous donnons une illustration du champ de la vitesse et de la vorticité associée.



(a) Le champ de vitesse

(b) La vorticité

FIGURE 4.2: Tourbillons de Green-Taylor.

Dans les deux cas tests précédents, on observe une super convergence en norme L^2 pour la vitesse ce qui correspond aux mêmes ordres de convergence que ceux obtenus par S. Krell [58] pour la résolution du problème de Stokes standard par un un schéma DDFV stabilisé et un algorithme couplé. On remarque que nos ordres de convergence sont plus grand que les ordres théoriques, même constat dans [58] et [33]. Enfin, dans les campagnes de tests que nous avons effectuées, on a remarqué également que l'ordre de convergence n'est pas sensible à la présence de mailles localement raffinées non-conformes.

4.4.3 Translation de tourbillons

Dans ce test, on simule la translation de vortex. On considère le domaine $\Omega = [0, 1]^2$, la solution visqueuse des équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible traduit la translation diagonale de tourbillons. La solution initiale et les conditions aux limites sont choisies en fonction de la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = 1 + 2 \cos(2\pi(x - t)) \sin(2\pi(y - t)) e^{-8\pi^2 \nu t} \\ v(x, y, t) = 1 - 2 \sin(2\pi(x - t)) \cos(2\pi(y - t)) e^{-8\pi^2 \nu t} \\ p(x, y, t) = -(\cos(4\pi(x - t)) + \cos(4\pi(y - t))) e^{-16\pi^2 \nu t} \end{cases}$$

La translation s'accompagne d'un amortissement exponentiel de l'intensité des tourbillons sous l'effet de la dissipation visqueuse portée par la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0.01$.

Dans les figures qui suivent, on donne les représentations de la solution (\mathbf{u}, p) à l'instant initial puis à l'instant $t = 1.125\text{s}$.

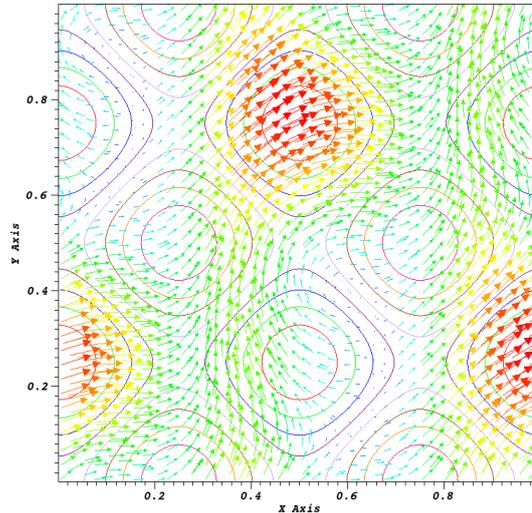
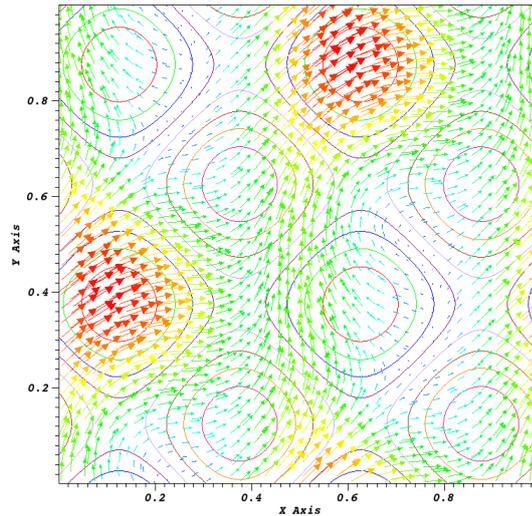


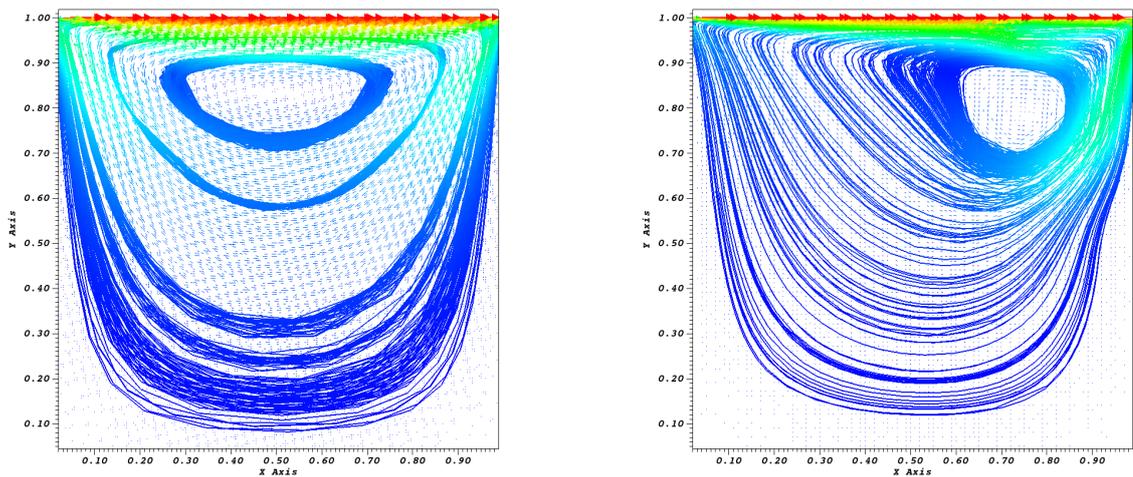
FIGURE 4.3: Solution (\mathbf{u}, p) à l'instant initial.

FIGURE 4.4: Solution (\mathbf{u}, p) à l'instant $t = 1.125s$.

Comme pour les tests précédents, connaissant la solution exacte, on calcule les taux de convergence en norme L^2 pour la vitesse et la pression. On trouve des ordres qui valent 2.

4.4.4 Cavité entraînée

On considère un écoulement dans une cavité carré $[0, 1]^2$ où la paroi supérieure $y = 1$ est entraînée à une vitesse constante horizontale $\mathbf{u} = (1, 0)$, les autres étant immobiles. Les figures ci-dessous représentent quelques lignes de courant du champ de vitesse :



(a) avec Stokes

(b) avec Navier-Stokes ($Re = 1000$)

FIGURE 4.5: Lignes de courant du champ de vitesse d'une cavité entraînée.

On refait le même test de la cavité entraînée en dimension 3. Le domaine de calcul est le cube $[0, 1]^3$. La paroi supérieure $z = 1$ est entraînée à la vitesse constante horizontale $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, les autres étant immobiles. La figure suivante donne quelques lignes de courant du champ de vitesse issu de l'équation de Navier-Stokes.

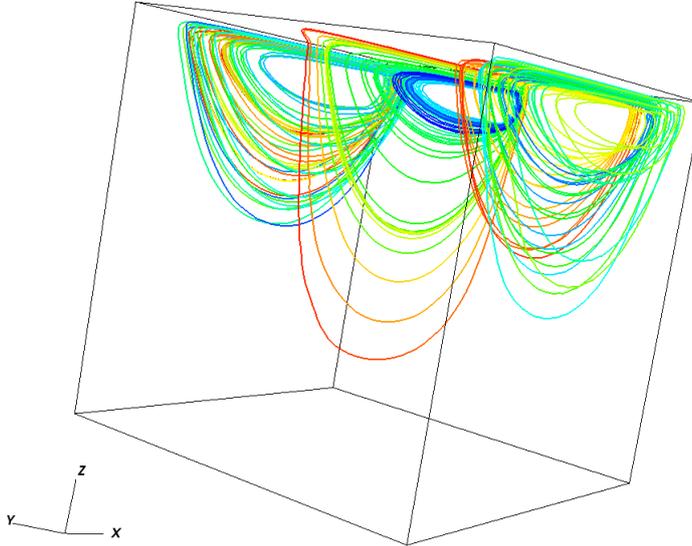


FIGURE 4.6: Lignes de courant d'une cavité entraînée en 3D.

On ne connaît pas la solution analytique de ce problème, mais en observant les profils de vitesse, on constate que les lignes de niveaux issues de l'équation de Stokes sont symétriques tandis que celles issues de l'équation de Navier-Stokes sont dissymétriques par l'effet d'inertie, ces résultats sont en accord avec [103].

4.4.5 Champs tournant

Dans ce test, on s'intéresse au comportement de la divergence de la vitesse en fonction des itérations de la méthode de projection. On considère l'équation de Stokes dans le domaine $\Omega = [0, 1]^3$ en imposant le terme source :

$$\mathbf{f} = (y - 0.5, 0.5 - x, 0).$$

Dans la figure, 4.7 on présente quelques lignes de courant et le champ de vitesse résultat de l'algorithme au bout d'un nombre d'itérations où la divergence devient de l'ordre de $O(h^2)$ où h est le pas de maillage.

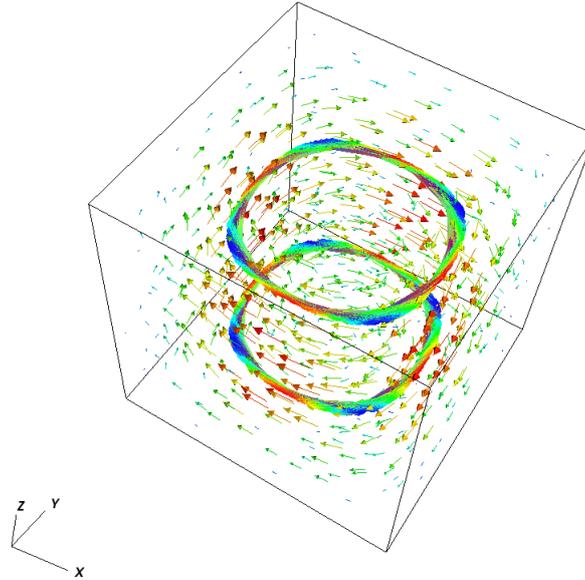
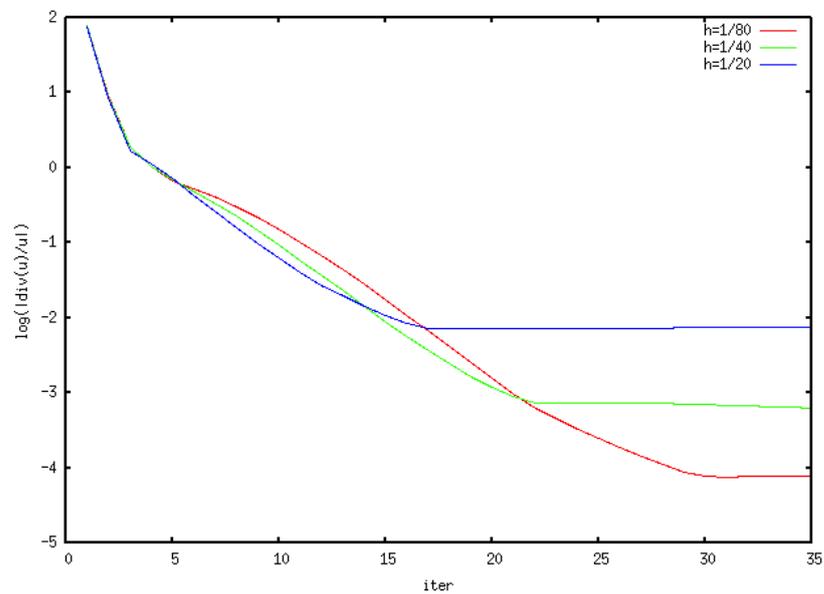


FIGURE 4.7: Profil de la vitesse d'un champ tournant.

À chaque itération, on calcule $\|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_2$ pour différents pas de maillage h . On obtient les graphes suivants qui donnent la décroissance de la quantité $\frac{\|\operatorname{div}(\mathbf{u})\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}$ (en échelle logarithmique) en fonction du nombre d'itérations $iter$, ce qui correspond aux résultats attendus :

FIGURE 4.8: Divergence de la vitesse en norme L^2 pour différents pas de maillage.

Ces courbes ne gardent pas une décroissance linéaire à cause des défauts de la divergence le long des arêtes du bord. Mais ceci n'est pas en contradiction avec les résultats théoriques.

4.5 Parallélisation

Les approximations des équations de Stokes ou de Navier-Stokes décrivant un fluide incompressible résolues avec l'algorithme de projection que nous avons exposé dans ce chapitre reposent sur la résolution de deux équations elliptiques. La première est pour la prédiction de la vitesse et la seconde pour la solution de la pression. Ceci revient à résoudre à chaque étape des systèmes d'équations linéaires de type :

$$Ax = b \quad (4.35)$$

avec A une matrice carrée donnée définie positive non singulière et b un vecteur donné. L'inconnue x peut représenter soit la vitesse soit la pression.

Nous utilisons, pour la résolution de ce système, le schéma itératif Bi-CGStab (Bi-Gradient Conjugué Stabilisé) [89, 94]. Pour réduire le temps de calcul, nous avons eu recours à la parallélisation des solveurs en utilisant ce schéma à l'aide la bibliothèque OpenMP¹.

4.5.1 Le schéma

L'algorithme séquentiel du schéma classique Bi-CGStab, où x_k est l'approximation de x à l'itération k , peut s'écrire sous la forme suivante :

```

 $r_0 = b - Ax_0$ 
 $\alpha_0 = \beta_0 = w_0 = 1$ 
 $v_0 = q_0 = 0$ 
for  $k = 1 \dots n$  do
   $\alpha_k = \frac{r_0^T r_{k-1}}{r_0^T r_{k-1}}$ 
   $\gamma = \frac{\alpha_k \beta_k}{\alpha_{k-1} w_{k-1}}$ 
   $q_k = r_{k-1} + \gamma(q_{k-1} - w_{k-1} w_k)$ 
   $v_k = Aq_k$ 
   $\beta_k = \frac{\alpha_k}{r_0^T v_k}$ 
   $s_k = r_{k-1} - \beta_k v_k$ 
   $t_k = As_k$ 
   $w_k = \frac{r_k^T s_k}{t_k^T t_k}$ 
   $x_k = x_{k-1} + \beta_k q_k + w_k s_k$ 
  if  $\|r_k\| \geq \epsilon$  then
    | exit
  end
   $r_k = s_k - w_k t_k$ 
end

```

1. Open Multi-Processing : <http://openmp.org/wp/openmp-specifications>.

Dans cet algorithme, les matrices traitées sont creuses et elles ont une indexation qui facilite les calculs. Afin d'améliorer la convergence, nous allons conditionner la matrice A par une matrice P inversible. Pour cela on résout à la place du système (4.35) le système suivant :

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b \quad (4.36)$$

Par souci de simplicité, nous choisissons le préconditionneur de Jacobi. La matrice P est choisie comme étant la diagonale de la matrice A du système : $P = \text{diag}(A)$.

4.5.2 Mise en œuvre avec OpenMP

La bibliothèque OpenMP est une interface de programmation contenant un ensemble de directives pour paralléliser un code sur une architecture à mémoire partagée. Ces directives permettent de faire les calculs plus rapidement en utilisant plusieurs processeurs. En effet, chaque processeur exécute un bout de programme avec un unique jeu de variables et les directives OpenMP définissent les zones parallèles et les attribuent à des différents threads. Chaque threads exécute des tâches en parallèle sur un processeur ou cœur (*core*) indépendant.

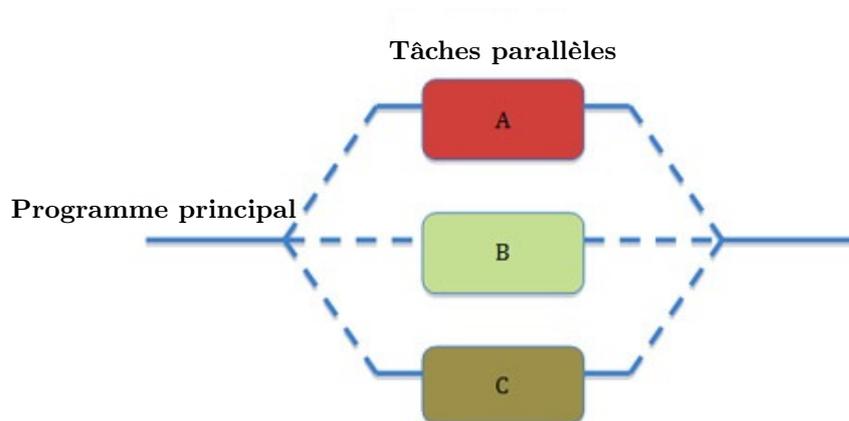


FIGURE 4.9: Programme principal et tâches parallèles.

Dans les régions parallélisées, le programme principal via un *master thread* lance des threads (dont le nombre a été précisé auparavant par l'utilisateur) pour répartir la charge de calcul. Chaque thread exécute un ensemble d'instructions puis se met en attente jusqu'à la fin de toutes les tâches. Après synchronisation, le *master thread* reprend la main (*cf.* figure 4.9). Les variables partagées sont utilisées par tous les threads sur la même zone mémoire tandis que chaque copie des variables privées utilise une zone mémoire accessible uniquement par le thread concerné. Cette forme de parallélisation permet de développer rapidement en restant proche du code séquentiel sans avoir à tout reconstruire.

Dans le cas qui nous intéresse, on peut par exemple répartir une boucle *for* $i = 1 : n$ sur plusieurs threads avec une boucle de taille n_ℓ , définie pour chaque thread tel que $\sum n_\ell = n$. Ceci nous permet donc de diminuer le temps d'exécution de la boucle en question en le divisant au mieux par le nombre de processeurs. Sur la figure suivante, nous présentons un exemple d'exécution de la boucle avec m processeurs partageant deux mémoires comme sur notre cluster ².

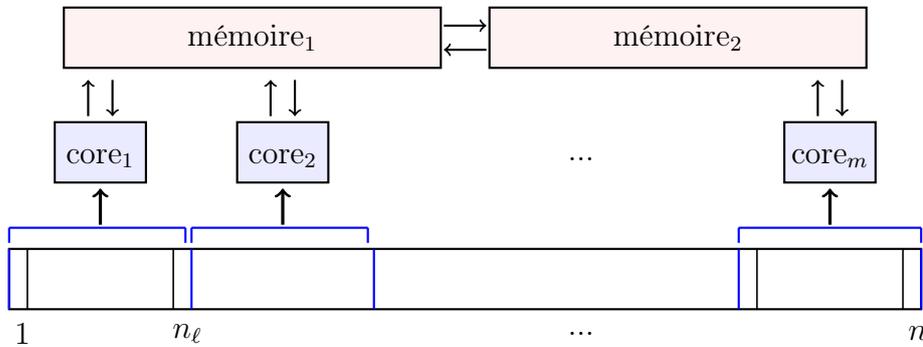


FIGURE 4.10: Exemple d'exécution parallèle sur m processeurs.

Pour ne pas avoir des conflits par rapport à la mémoire partagée, il est nécessaire d'initialiser les variables utilisées dans les zones parallélisées. Dans notre code, les variables qui sont utiles seulement à l'itération sont déclarées privées. Les indices des boucles (internes à la zone parallèle), les indices dans les tableaux et toutes leurs correspondances locales ou globales sont aussi privés puisqu'ils sont propres aux itérations de la boucle parallélisée.

4.5.3 Tests de performance

La parallélisation doit permettre de réduire le temps de calcul lors des appels du solveur algébrique. Ainsi, pour mesurer les performances de l'algorithme parallélisé, on considère sur le domaine $\Omega = [0, 1]^3$ le problème de Poisson suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.37)$$

On prend pour le second membre la fonction $f = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$ et on utilise la discrétisation DDFV en appliquant l'opérateur Δ^T (cf. la section 3.5.3 du chapitre précédent). On résout ce problème sur deux maillages différents qui correspondent à :

- Cas 1 : taille de grille de 80^3 , soit 1.081.841 inconnues.
- Cas 2 : taille de grille de 50^3 , soit 272.651 inconnues.

2. Cluster UTLN : <http://mejean.univ-tln.fr>.

Dans les deux cas, on lance plusieurs tests en exécutant le programme sur la même machine CPU du cluster. On commence par un premier test sans parallélisation, ce qui nous donne un temps d'exécution T_0 . Puis on lance une série de tests en utilisant la parallélisation avec 2, 4, 6, ... jusqu'à 20 cœurs et à chaque fois on calcule le temps d'exécution T_p . Ceci nous permet de calculer pour chaque test l'accélération du programme, le speedup : T_0/T_p . Il s'agit donc du ratio du temps de calcul en séquentiel (sur 1 cœur) sur le temps de calcul en parallèle sur p cœurs. Plus ce ratio se rapproche du nombre des cœurs utilisés pour le calcul parallèle, plus l'efficacité parallèle du code est bonne.

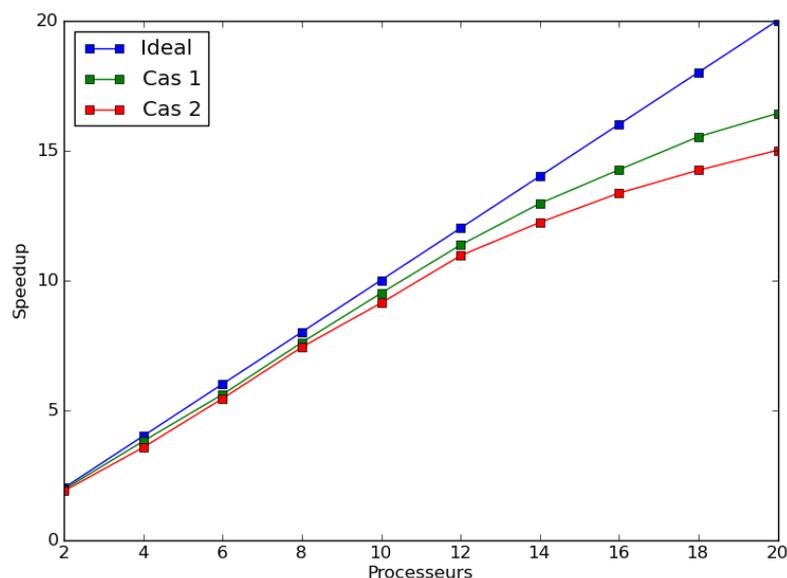


FIGURE 4.11: Calcul de la scalabilité du solveur Bi-CGStab utilisant OpenMP.

Sur la figure ci-dessus on donne des courbes affichant le speedup en fonction du nombre de cœurs sur lequel est lancé le calcul dans les deux cas présentés précédemment. On peut voir, par exemple, que pour 10 cœurs, quelque soit la taille du problème, le speed up est très bon puisqu'il est très proche de 10. On remarque aussi que la scalabilité dans les deux cas reste assez bonne et demeure croissante mais elle s'affaiblit et elle dépend de la taille du problème. Tout cela justifie le recours à la parallélisation en OpenMP.

Enfin, pour avoir une bonne optimisation (surtout en terme de mémoire), on pourrait utiliser une autre bibliothèque telle que MPI³. Mais son implémentation reste très technique et nécessite une refonte d'une grande partie du code. Pour nos besoins, la parallélisation en OpenMP est suffisante.

3. Message Passing Interface : <http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpi>

4.6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre un algorithme de résolution de l'équation de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible. Cet algorithme s'appuie sur une méthode de projection qui permet d'approcher les solutions de l'équation en plusieurs étapes. Chaque étape consiste en une procédure de prédiction-corrrection entre les champs de vitesse et de pression qui conduit à un découplage vitesse-pression. Cette procédure sert à imposer la divergence nulle de la vitesse et à faire apparaître explicitement la pression. Les discrétisations spatiales sont basées sur les schémas DDFV étudiés dans le 3^{ème} chapitre. Comme présenté précédemment, les schémas DDFV peuvent traiter des maillages généraux et non conformes et fournissent un formalisme adéquat qui conserve la convergence de l'algorithme et qui permet son implémentation.

De nombreux tests de validation ont été effectués dans le cas des équations de Stokes et des équations de Navier-Stokes et ceci en dimension 2, puis en dimension 3. D'autres tests ont été réalisés afin d'étudier le coût itératif de l'algorithme et de quantifier, dans certains cas, le nombre d'itérations maximales à partir duquel on peut observer la convergence de la méthode. Pour la résolution des systèmes linéaires, nous avons utilisé un solveur itératif de type bi-gradient conjugué stabilisé Bi-CGStab. Pour réduire les coûts de calcul nous avons eu recours à des techniques de parallélisation basée sur l'API OpenMP.