

# Homogénéisation d'un problème elliptique

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Présentation de la théorie de l'homogénéisation . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Problème de départ . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.3</b>	<b>Résultats et théorèmes préliminaires . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>3.4</b>	<b>Développement asymptotique formel . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>3.5</b>	<b>Convergence à deux échelles . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>3.6</b>	<b>Résultat de convergence et estimation <i>a priori</i> . . . . .</b>	<b>49</b>

---

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté deux schémas de discrétisation pour le calcul d'un écoulement diphasique dans un milieu poreux. Pour ces deux schémas, la première étape consiste à résoudre un problème elliptique pour calculer la pression à l'intérieur du réservoir. Dans ce chapitre, nous présentons l'homogénéisation d'un problème elliptique périodique. Ces résultats servent de base aux méthodes multi-échelles présentées aux chapitres 4 et 5. L'objectif est de calculer numériquement la pression dans le réservoir lors d'un écoulement diphasique avec ces méthodes.

## 3.1 Présentation de la théorie de l'homogénéisation

De nombreux problèmes rencontrés dans différents domaines scientifiques dépendent de paramètres ayant une grande variabilité spatiale. La résolution de ce type de problème à l'échelle de variation de ces paramètres peut être très difficile du fait de la taille des maillages utilisés. Le but de l'homogénéisation est de reformuler ces problèmes sous la forme d'un problème dit *homogénéisé* en introduisant des paramètres effectifs définis à une échelle d'espace plus grossière. La résolution de ce second problème à cette échelle est alors moins coûteuse.

La notion d'homogénéisation est en fait une généralisation du concept de *valeurs moyennes* qui a été étudié depuis le XIX<sup>e</sup> siècle (voir, par exemple, J. C. Maxwell [Max81] et S.-D. Poisson [Poi25]). Cependant le terme d'homogénéisation a été introduit, pour la première fois, par P. Benoist [Ben64] pour l'étude des phénomènes de diffusion dans les réacteurs nucléaires. Les premières théories mathématiques sur l'homogénéisation ont été publiées par S. Spagnolo et E. De Giorgi (voir [Spa68], [DS73], [DG75], [Spa76] et [DG83]) qui ont introduit les notions de G-convergence et  $\Gamma$ -convergence. Ces notions ont ensuite été généralisées par F. Murat et L. Tartar qui ont défini la notion de H-convergence [MT97]. La théorie de l'homogénéisation s'est ensuite étoffée avec l'utilisation de développements asymptotiques. Les développements asymptotiques avaient déjà été utilisés notamment pour spécifier des termes de couches limites. Cependant, leur utilisation pour prouver des résultats d'homogénéisation a été proposée par É. Sanchez-Palencia [SP80], I. Babuška [Bab76], N. Bakhvalov et G. Panasenko [BP89]. Le livre [BLP78] écrit par A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou regroupe un certain nombre de résultats et de démonstrations sur la théorie de

l'homogénéisation. Dans ce qui suit, on démontre une partie des résultats issus de cette théorie dans le cas d'un problème elliptique à coefficients périodiques. Ces démonstrations se basent sur la convergence à deux échelles qui a été introduite par G. Nguetseng [Ngu89] et formalisée par G. Allaire [All92]. D'autres méthodes telles que la *méthode de l'éclatement périodique* (periodic unfolding method) présentée par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso [CDG02] ont été mises au point pour expliquer et démontrer différents résultats d'homogénéisation.

Le concept de convergence à deux échelles a également été généralisé avec l'intégration d'une dérive pour traiter des problèmes de convection-diffusion à convection dominante dans [MPP05]. Cette notion a notamment été présentée par P. Donato et A.L. Piatnitski [DP05] ainsi que G. Allaire et A.L. Raphael [AR07]. Notons que certains articles antérieurs tels que [ZKO94] et [Pap95] envisageaient déjà une extension des résultats d'homogénéisation elliptique à cette classe de problèmes. L'homogénéisation basée sur un développement asymptotique à deux échelles avec dérive est présentée plus en détail au chapitre 7.

La plupart des références que nous avons évoquées s'intéressent à l'homogénéisation de problèmes périodiques. De nombreux auteurs ont pu constater que des résultats assez similaires pouvaient également être démontrés si on souhaite intégrer des données aléatoires. On parle alors d'*homogénéisation stochastique* (voir [ZKO94], [PS08] et [PV<sup>+</sup>79]).

Mentionnons enfin plusieurs livres très complets sur l'homogénéisation : [All02], [CD99], [PS08], [Tar09] et [ZKO94].

Ce chapitre présente brièvement des résultats d'homogénéisation dans le cas d'un problème elliptique périodique.

## 3.2 Problème de départ

Le problème elliptique que l'on cherche à résoudre dans le système (2.6) est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla P) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ P & = & P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D \\ k\lambda_T \nabla P \cdot \mathbf{n} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D. \end{cases}$$

Ce problème est posé sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné qui représente le réservoir. On souhaite résoudre ce problème dans le cas où  $k\lambda_T$  varie à une échelle beaucoup plus petite que le domaine  $\Omega$ .

Ainsi, notons  $\varepsilon = \frac{l}{L}$  où  $l$  représente l'échelle caractéristique des hétérogénéités et  $L$  celle du domaine  $\Omega$ .

Nous voulons construire une méthode multi-échelle permettant d'approcher la solution de ce problème elliptique. Pour plus de généralité, nous considérons ici un problème avec second membre. On va cependant prendre des conditions aux bords plus simples. De plus, pour se conformer aux usages en théorie de l'homogénéisation nous modifions les notations. Le problème que l'on cherche à résoudre est alors

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $A^\varepsilon$  est une matrice dont les coefficients varient à l'échelle  $\varepsilon$ . Ce problème est utilisé pour construire et justifier le choix de la méthode multi-échelle. Nous appliquerons ensuite la même méthode pour le problème en pression précédent.

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats d'homogénéisation périodique où  $A^\varepsilon$  est supposée périodique de période  $\varepsilon$  dans chaque direction de l'espace.

Dans ce qui suit, on ajoutera l'indice  $\#$  sur les espaces de fonctions pour préciser que ces fonctions vérifient des conditions aux bords de périodicité. Ainsi, on désigne par  $L^2_\#(X)$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable définies sur un pavé  $X$  et  $X$ -périodiques.

Soit  $Y$  la cellule unité  $(0,1)^N$ . Le problème que l'on cherche à résoudre consiste alors à trouver  $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon\right) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 3.1 :**

1.  $A \in \left[ L_{\#}^{\infty}(Y) \right]^{N \times N}$ ,
2.  $A$  est coercive : il existe une constante  $C_{sta} > 0$  telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$  étant la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^N$ ,

3.  $f \in L^2(\Omega)$ .

Le problème ainsi posé admet une et une seule solution  $u_{\varepsilon}$  par le théorème de Lax-Milgram rappelé dans l'annexe A.2.1.

La valeur du coefficient  $\varepsilon$  est faible. On va donc chercher à caractériser la solution à ce problème lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

Dans la prochaine partie, nous allons partir d'un développement asymptotique formel pour obtenir un problème de cellule (3.4) et un problème homogénéisé (3.5) (paragraphe 3.4).

Puis, dans le paragraphe 3.5, nous allons introduire la notion de convergence à deux échelles et nous verrons que cette notion nous permet de caractériser la convergence de la solution calculée à partir du problème homogénéisé vers la solution du problème de départ. En particulier, le théorème des correcteurs (Théorème 3.3) montre que l'on peut avoir une convergence en norme  $H_0^1(\Omega)$  vers la solution du problème initial.

Une fois ces résultats établis, nous allons voir qu'on peut estimer l'écart entre la solution obtenue en résolvant le problème homogénéisé et la solution du problème initial. On arrive, par exemple, à l'inégalité (3.21) qui montre que la convergence en norme  $H_0^1(\Omega)$  rappelée précédemment est à l'ordre  $\frac{1}{2}$  en  $\varepsilon$ .

Ces résultats théoriques servent de base à la méthode multi-échelle présentée au chapitre 4.

### 3.3 Résultats et théorèmes préliminaires

Le résultat suivant est classique et sera utilisé dans la suite.

**Lemme 3.1.** *Soit  $\varphi$  une fonction dans l'espace  $L^2\left(\Omega, \mathcal{C}_{\#}^0(Y)\right)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$  est mesurable sur  $\Omega$ , et on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y) dx dy. \quad (3.2)$$

Pour résoudre les problèmes qui suivent, on va utiliser l'alternative de Fredholm montrée sous cette forme dans [BLP78].

**Lemme 3.2** (Alternative de Fredholm). *Soit  $g \in L_{\#}^2(Y)$ . On suppose que la matrice  $A \in \left[ L_{\#}^{\infty}(Y) \right]^{N \times N}$  est coercive. Le problème : trouver  $v \in H_{\#}^1(Y)$  telle que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y v) & = g & \text{dans } Y \\ v \text{ est } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

admet une solution unique, à l'addition d'une constante près si et seulement si

$$\int_Y g(y) dy = 0.$$

Cette condition est appelée alternative de Fredholm ou condition de compatibilité.

### 3.4 Développement asymptotique formel

Les calculs que l'on présente dans ce paragraphe sont formels. Pour plus de détail sur ce développement asymptotique, on peut, par exemple, se référer à [SP80], [BLP78] ou [BP89]. Nous allons, ici, partir d'un

postulat : on suppose que la fonction  $u_\varepsilon$  solution du problème (3.1) peut s'écrire sous la forme

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (3.3)$$

où pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_i(x, y)$  dépend de deux variables  $x \in \Omega$  et  $y \in Y$  et est  $Y$ -périodique par rapport à  $y$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème (3.1). On suppose que les hypothèses 3.1 sont vérifiées. On suppose également que le développement asymptotique (3.3) est vrai et que les fonctions  $u_i$  sont  $Y$ -périodiques par rapport à  $y$  et "régulières" (les résultats de cette proposition sont uniquement formels, il n'y a donc pas besoin de préciser les régularités). Alors*

- la fonction  $u_0$  ne dépend pas de la variable  $y$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall y \in Y, \quad u_0(x, y) = u(x).$$

- On définit les fonctions  $w_i$  solutions des problèmes de cellules

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) = 0, \\ y \mapsto w_i(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.4)$$

- La fonction  $u$  est solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $A^*$  est une matrice définie positive telle que

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy. \quad (3.6)$$

- La fonction  $u_1$  est définie par

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y) + \tilde{u}_1(x), \quad (3.7)$$

avec une fonction  $\tilde{u}_1$  dépendant uniquement de  $x$  qui reste à définir.

**Remarque 3.1 :** La solution du problème de départ peut ensuite être approchée de la manière suivante

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

Cela correspond aux deux premiers termes du développement asymptotique (3.3).

On remarque que, pour calculer ces deux termes, il faut d'abord résoudre les problèmes de cellule (3.4) dans chaque direction. Ces problèmes doivent être résolus sur  $Y$  à l'échelle fine. Puis, en utilisant les solutions  $w_i$ , on calcule la matrice homogénéisée  $A^*$  par la formule (3.6). On obtient alors  $u$  en résolvant un autre problème elliptique (3.5) sur  $\Omega$  mais ce problème n'a pas de coefficient variant à l'échelle  $\varepsilon$ . On a donc, à aucun moment, besoin de faire des calculs à l'échelle fine sur l'espace entier.

*Démonstration.* On remarque d'abord que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\nabla \left( u_i \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left( \nabla_x u_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y u_i \right) \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

En appliquant cette formule au développement asymptotique de  $u_\varepsilon$ , et en regroupant les termes en fonctions du degré en  $\varepsilon$ , on obtient :

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_y u_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\nabla_x u_i + \nabla_y u_{i+1}) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{div}_y (A \nabla_y u_0) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_x (A \nabla_y u_0) + \operatorname{div}_y (A (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1))) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i (\operatorname{div}_x (A \nabla_x u_i + A \nabla_y u_{i+1}) + \operatorname{div}_y (A \nabla_x u_{i+1} + A \nabla_y u_{i+2})) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Sachant que l'on veut

$$-\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f(x)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut identifier les termes en fonction de l'ordre en  $\varepsilon$ .

On obtient d'abord en prenant le terme en  $\varepsilon^{-2}$

$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \quad -\operatorname{div}_y \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla_y u_0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) = 0.$$

On a donc, en posant  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  :

$$\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad -\operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0. \quad (3.8)$$

De même, en considérant le terme en  $\varepsilon^{-1}$ , on a :

$$\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1)(x, y)) - \operatorname{div}_x (A(y) \nabla_y u_0(x, y)) = 0. \quad (3.9)$$

Pour le terme en  $\varepsilon^i$ , avec  $i \geq 0$ , l'équation qui doit être vérifiée est :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad &-\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y u_{i+2} + \nabla_x u_{i+1})(x, y)) \\ &-\operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i)(x, y)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

On interprète toutes ces équations comme des équations aux dérivées partielles en  $y$  qui sont toutes de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) \nabla_y v) = g & \text{dans } Y, \\ y \mapsto v(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction  $Y$ -périodique.

Dans cette partie, on cherche à effectuer le calcul formellement. On va donc supposer que toutes fonctions  $g$  aux seconds membres sont dans  $L^2(Y)$ . On applique ensuite l'alternative de Fredholm (voir lemme 3.2) aux différentes équations.

Pour l'équation (3.8), le second membre est nul donc cette condition est clairement vérifiée. De plus,  $u_0 = 0$  est une solution évidente du problème et l'unicité à une constante près nous permet de dire que  $u_0$  est une constante par rapport à  $y$ . On peut donc écrire :

$$\boxed{\forall x \in \Omega, \forall y \in Y, \quad u_0(x, y) = u(x).}$$

En utilisant ce résultat, l'équation (3.9) devient

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_x u + \nabla_y u_1)(x, y)) = 0, \\ y \mapsto u_1(x, y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.11)$$

On décompose  $\nabla_x u$  sur la base canonique :

$$\nabla_x u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) e_i.$$

Pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on définit  $w_i : Y \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_i + e_i)) = 0, \\ y \mapsto w_i(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Ces fonctions existent car les seconds membres sont  $g_i = \operatorname{div}_y (Ae_i)$  et

$$\int_Y \operatorname{div}_y (Ae_i) = \int_{\partial Y} Ae_i \cdot n = 0,$$

par périodicité de  $A$ .

Le problème (3.4) est appelé *problème de cellule* et les solutions  $w_i$  sont appelés *correcteurs*.

On remarque ensuite que, par linéarité, la fonction

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y)$$

est solution du problème (3.11).

Par unicité de la solution à une constante près, on obtient

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) w_i(y) + \tilde{u}_1(x).$$

**Remarque 3.2 :** En pratique, les fonctions  $w_i$  étant définies à une constante près, on les choisira à moyenne nulle. De plus, on prendra  $\tilde{u}_1(x) = 0$ .

On résout ensuite le problème (3.10) pour  $i = 0$  :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1)) - \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) = f(x), \\ y \mapsto u_2(x, y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.12)$$

La condition de compatibilité impose

$$\int_Y (f(x) + \operatorname{div}_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u)) + \operatorname{div}_y (A(y) \nabla_x u_1)) dy = 0.$$

L'intégrale du terme en  $\operatorname{div}_y$  est nulle car  $A(y) \nabla_x u_1(x, y)$  est  $Y$ -périodique.

La fonction  $f$  ne dépend pas de la variable  $y$ , donc son intégrale sur  $Y$  (de mesure unitaire) vaut  $f$ . En décomposant ensuite l'équation précédente et, en adoptant la convention de sommation d'Einstein, on obtient :

$$f + \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{i,j}(y) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} u_1 + \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) \right) dy = 0,$$

ie.

$$\forall x \in \Omega, \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_Y A_{i,j}(y) \left( \frac{\partial w_k}{\partial y_j}(y) \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) dy = f(x),$$

ou

$$\forall x \in \Omega, \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{i,k}^* \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right) = f(x),$$

avec

$$A_{i,k}^* = \int_Y A_{i,j}(y) \left( \frac{\partial w_k}{\partial y_j}(y) + \delta_{k,j} \right) dy.$$

Ce qui peut se réécrire

$$A_{i,k}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_k(y) + e_k) \cdot e_i dy. \quad (3.13)$$

On aboutit donc à l'équation *homogénéisée* :

$$\boxed{\begin{cases} -\operatorname{div}_x (A^* \nabla_x u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}}$$

**Lemme 3.3.** *La matrice  $A^*$  définie par (3.13) est définie positive et*

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy.$$

*Cette formule montre que  $A^*$  est symétrique si pour tout  $y \in Y$ ,  $A(y)$  l'est.*

*Démonstration.* On reprend l'équation (3.4) pour  $w_j$  :

$$-\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_j + e_j)) = 0.$$

On multiplie cette égalité par  $w_i$  et on l'intègre sur  $Y$ . On effectue ensuite une intégration par parties :

$$\int_Y A(y) (\nabla_y w_j + e_j) \cdot \nabla_y w_i dy = 0.$$

En ajoutant ce terme à la définition de  $A_{i,j}^*$ , on obtient :

$$A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \cdot (e_i + \nabla_y w_i) dy.$$

La matrice  $A^*$  peut donc bien être définie par la formule (3.6). Il nous reste à montrer qu'elle est définie positive. Soit  $\xi \in \mathbb{R}^N$ . On définit

$$w_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i.$$

Par linéarité, la fonction  $w_\xi$  est solution du problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(y) (\nabla_y w_\xi + \xi)) = 0, \\ y \mapsto w_\xi(y) \text{ est une fonction } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (3.14)$$

En multipliant l'équation (3.14) par  $w_\xi$  et en intégrant sur  $Y$  par parties, on a :

$$\int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \nabla_y w_\xi(y) dy = 0. \quad (3.15)$$

Et

$$A^* \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j A_{i,j}^* = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \xi dy. \quad (3.16)$$

D'où, en sommant les égalités (3.15) et (3.16) :

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) dy.$$

On utilise maintenant la coercivité de  $A$

$$A^* \xi \cdot \xi = \int_Y A(y) (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot (\nabla_y w_\xi(y) + \xi) dy \geq C_{sta} \int_Y |\nabla_y w_\xi(y) + \xi|^2 dy.$$

On a donc la positivité de la matrice. De plus, si  $A^*\xi \cdot \xi = 0$ , on a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\forall y \in Y, \quad \nabla_y w_\xi(y) + \xi = 0.$$

On en déduit que

$$w_\xi(y) = -\xi y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Or,  $w_\xi$  est une fonction  $Y$ -périodique, donc  $\xi = 0$ .

$A^*$  est donc bien une matrice définie positive. □

Par le théorème de Lax-Milgram, le problème homogénéisé (3.5) admet donc une solution unique. De plus, par les théorèmes de régularité elliptique (voir annexe A.2.3)  $A^*$  étant constant, si  $f$  est régulière,  $u$  est aussi régulière que  $\Omega$ . Ainsi, si  $\Omega$  est de classe  $C^\infty$  et  $f \in C^\infty(\Omega)$ ,  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . □

Tous les résultats obtenus dans ce paragraphe sont uniquement formels et n'ont, pour l'instant, pas de justification mathématique. En particulier la régularité des différentes fonctions n'est pas précisée et on ne précise pas en quel sens la fonction  $u_\varepsilon$  est proche de son développement asymptotique.

### 3.5 Convergence à deux échelles

Nous présentons ici le concept de convergence à deux échelles. La notion de convergence à deux échelles a été introduite par G. Nguetseng dans [Ngu89] et formalisée par G. Allaire dans [All92]. Cette notion va nous servir à justifier mathématiquement et de manière plus précise le développement asymptotique (3.3) et les résultats de la proposition 3.1. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour obtenir ces résultats. On peut citer, par exemple, la *méthode du déploiement périodique* (periodic unfolding method) présentée par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso dans [CDG02] ou la méthode de la *fonction test oscillante* introduite par L. Tartar dans [Tar76] et [MT97]. La méthode de la fonction test oscillante permet, en outre, d'obtenir des résultats d'homogénéisation pour des cas non périodiques.

**Définition 3.1** (Convergence à deux échelles). *On dit qu'une suite de fonctions  $u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$  converge à deux échelles vers une limite  $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$  si, pour toute fonction  $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_\#(Y))$ , on a*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x,y) \varphi(x,y) dx dy.$$

**Propriétés :**

1. Si  $u_\varepsilon$  est une suite bornée de  $L^2(\Omega)$  et converge à deux échelles vers  $u_0(x,y)$  alors  $u_\varepsilon$  converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $u(x) = \int_Y u_0(x,y) dy$ . En effet,  $\forall \varphi \in D(\Omega)$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \varphi(x) = \int_{\Omega} \int_Y u_0(x,y) \varphi(x) dx dy = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

2. On a aussi l'inégalité :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0(x,y)\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u(x)\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'introduction de la notion de convergence à deux échelles permet d'obtenir certains résultats intéressants. On peut citer, le théorème suivant montré dans [All92].

**Théorème 3.1.** *Soit  $(u_\varepsilon)$  une suite bornée de fonctions de  $H^1(\Omega)$ .*

*Alors il existe une sous-suite et deux fonctions limites  $u(x) \in H^1(\Omega)$  et  $u_1(x,y) \in L^2\left(\Omega, H^1_\#(Y)\right)$  tels que :*

*$u_\varepsilon(x)$  converge à deux échelles vers  $u(x)$*

*$\nabla u_\varepsilon(x)$  converge à deux échelles vers  $\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)$*

En fait, pour  $u_\varepsilon$  solution du problème (3.1), on peut montrer que les fonctions  $u(x)$  et  $u_1(x,y)$  définies dans le théorème 3.1 peuvent être identifiées aux fonctions définies la proposition 3.1.

**Théorème 3.2.** *On considère la suite  $(u_\varepsilon)$  des solutions de (3.1). Alors  $u_\varepsilon$  converge à deux échelles vers  $u$  solution de (3.5) et  $\nabla u_\varepsilon$  converge à deux échelles vers  $\nabla_x u + \nabla_y u_1$  avec  $u_1$  définie par l'équation (3.7).*

Ce théorème est également montré dans [All92].

### 3.6 Résultat de convergence et estimation a priori

Les théorèmes énoncés au paragraphe précédent nous permettent d'obtenir des résultats de convergence sur des espaces de fonctions plus classiques. Ainsi, le théorème suivant qui a, par ailleurs, été démontré dans [BLP78], montre que la fonction  $u_\varepsilon$  converge dans  $H_0^1(\Omega)$  vers  $u + \varepsilon u_1$ .

**Théorème 3.3** (des correcteurs). *Soient  $u_\varepsilon$  vérifiant l'équation (3.1),  $u$  solution du problème homogénéisé (3.5) et  $u_1$  définie par (3.7) où les fonctions  $w_i$  sont les solutions à moyenne nulle des problèmes (3.4) et  $\tilde{u}_1 = 0$ . Si on suppose, de plus, que  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ , alors on a :*

$$u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

*Démonstration.* Nous reprenons ici la preuve de ce théorème faite dans [All92]. Nous supposons ici que  $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$  mais le résultat reste vrai si  $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ . On va évaluer la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de l'intégrale

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x) dx \\ & \quad - 2 \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \left( \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx \\ & + \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \cdot \left( \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \nabla_x u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

En multipliant la première équation du système (3.1) par  $u_\varepsilon$  et en intégrant, on montre que

$$\int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \int_{\Omega} f u_\varepsilon. \quad (3.18)$$

On veut passer à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 dans l'équation (3.17). Pour cela, on utilise l'équation (3.18) ainsi que la convergence à deux échelles de  $\nabla u_\varepsilon$  vers  $\nabla u + \nabla_y u_1$  :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) u(x) dx - 2 \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy \\ & \quad + \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (3.19)$$

On reprend ensuite la définition de  $A^*$  dans (3.6) et la définition (3.7) de  $u_1$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times Y} A(y) (\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x, y)) dx dy &= \int_{\Omega} A^* \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (A^* \nabla u(x)) u(x) dx, \end{aligned} \quad (3.20)$$

par intégrations par parties.

En insérant l'égalité (3.20) dans l'équation (3.19), on a

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left( \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(x) - \operatorname{div} (A^* \nabla u(x))) u(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction  $u$  étant solution du problème homogénéisé (3.5), on remarque que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left( \nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) \cdot \left( \nabla u_{\varepsilon}(x) - \nabla \left( u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \right) dx = 0.$$

En utilisant la coercivité de  $A$ , on en déduit le résultat voulu.  $\square$

De plus, on peut caractériser la vitesse de cette convergence comme le montre ce théorème démontré dans [BLP78] et dans [AA99] d'une autre manière.

**Théorème 3.4.** *Soient  $u_{\varepsilon}$ ,  $u$  et  $u_1$  définies comme dans le théorème 3.3. Si on suppose, de plus, que  $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , alors on a l'estimation a priori :*

$$\left\| u_{\varepsilon}(x) - u(x) - \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.21)$$

## Chapitre 4

# Une méthode multi-échelle pour des problèmes elliptiques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Étude bibliographique des méthodes multi-échelles</b>	<b>51</b>
4.1.1	Définition	52
4.1.2	Méthodes des éléments finis multi-échelles	53
4.1.3	Méthodes multi-échelles hétérogènes	53
4.1.4	Méthodes des volumes finis multi-échelles	55
<b>4.2</b>	<b>Définition de la méthode multi-échelle</b>	<b>57</b>
4.2.1	Hypothèses de départ	57
4.2.2	Idée de la méthode	57
4.2.3	Hypothèses de discrétisation	58
4.2.4	Définition de la méthode	59
<b>4.3</b>	<b>Estimation <i>a priori</i></b>	<b>60</b>
4.3.1	Terme d'homogénéisation globale $G_1$	61
4.3.2	Terme d'interpolation $G_2$	62
4.3.3	Terme d'homogénéisation locale $G_3$	63
4.3.4	Terme d'interpolation locale $G_4$	66
4.3.5	Conclusion	69
<b>4.4</b>	<b>Présentation des résultats obtenus avec cette méthode</b>	<b>69</b>
4.4.1	Remarques préliminaires	69
4.4.2	Application à la couche 85 du cas SPE 10	69

---

Ce chapitre débute par une étude bibliographique des méthodes multi-échelles développées pour la résolution de problèmes elliptiques. Nous rappelons ensuite la méthode multi-échelle présentée par G. Allaire et R. Brizzi dans [AB05] qui est construite à partir des résultats du chapitre 3. Après avoir défini cette méthode, nous démontrons le théorème 4.1 qui nous permet d'obtenir une estimation *a priori* de sa précision et présentons quelques résultats numériques.

### 4.1 Étude bibliographique des méthodes multi-échelles

L'*upscaling* ou mise à l'échelle consiste à moyenner les valeurs de propriétés sur un maillage plus grossier que le maillage où elles sont initialement définies et à ne résoudre le problème initial que sur ce second maillage. Le calcul de ces valeurs moyennes peut souvent être justifié par le biais de résultats d'homogénéisation périodique ou stochastique [BQW88]. Dans le cas d'un problème elliptique de type (3.1), l'*upscaling* consisterait à calculer les valeurs de  $A^*$  sur chaque maille grossière, puis à résoudre le problème grossier (3.5)

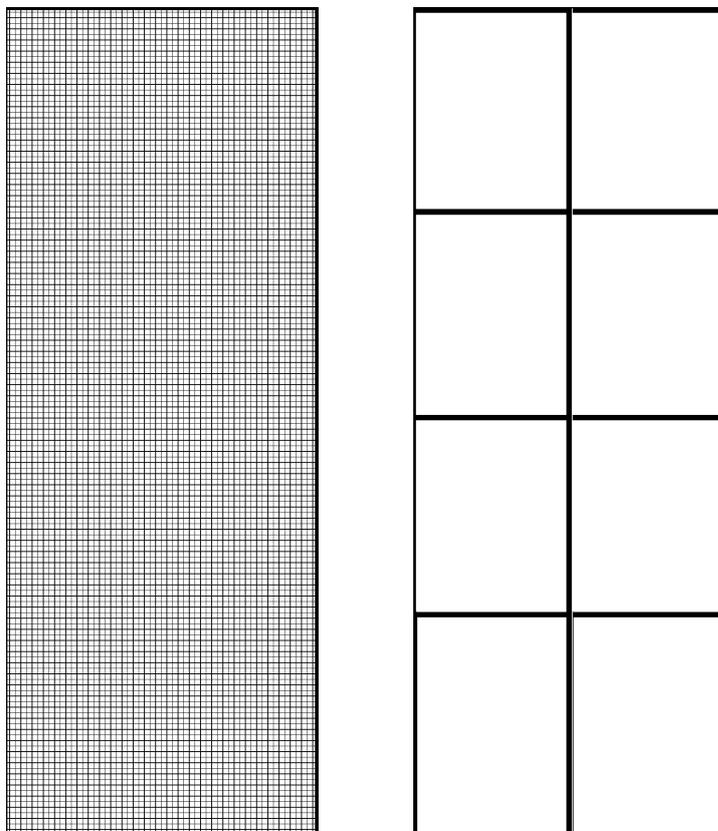


FIGURE 4.1 – Les deux maillages (fin et grossier)

avec une matrice  $A^*$  constante sur chaque maille grossière. Ce type d'approche, largement antérieur aux méthodes multi-échelles (voir [Max81] et [Poi25]), permet de calculer une valeur moyenne de la solution de manière efficace et est très largement utilisé pour la simulation des écoulements en milieux poreux [RDM97]. L'upscaling ne permet toutefois pas de reproduire les oscillations de la solution à l'échelle fine à moins d'utiliser une approche de type double maillage comme dans [GV95].

Dans la suite de cette section, nous allons voir que les méthodes multi-échelles ne calculent pas des paramètres équivalents à l'échelle grossière mais des fonctions de base qui permettent de réduire la taille du système linéaire à résoudre à cette échelle et de projeter ensuite les solutions à l'échelle fine.

#### 4.1.1 Définition

D'une manière générale, les méthodes multi-échelles sont des méthodes numériques utilisées pour résoudre des problèmes dans lesquels on observe une séparation d'échelle. Le plus souvent, on considère une échelle fine correspondant à la longueur caractéristique de variation des paramètres et une échelle grossière associée à la taille du domaine de définition du problème. Dans toute la suite de ce paragraphe, on va donc considérer qu'il y a deux maillages :

- un *maillage fin*  $\mathcal{K}_h$  dont la résolution est plus fine que la taille des hétérogénéités,
- un *maillage grossier*  $\mathcal{K}_H$  qui comporte des mailles beaucoup plus grandes (voir figure 4.1).

Le plus souvent, les méthodes multi-échelles s'inspirent de résultats obtenus dans des cas périodiques pour justifier les différentes approximations.

### 4.1.2 Méthodes des éléments finis multi-échelles

La *méthode des éléments finis multi-échelles* a été introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97]. I. Babuška et J.E. Osborn avaient proposé une idée similaire en une dimension [BO83]. L'idée principale de cette méthode est de définir des fonctions de base associées à des degrés de liberté grossiers mais dépendant localement des valeurs des paramètres connues à l'échelle fine. Plus précisément, la méthode des éléments finis multi-échelles consiste à calculer numériquement, sur un maillage fin local à chaque maille grossière, des fonctions solutions du problème elliptique suivant :

$$-\operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla \phi_K^i\right)=0 \quad \text{dans } K. \quad (4.1)$$

Ce problème n'est pas fermé tant que l'on n'a pas imposé de conditions aux limites. Ces fonctions de base sont en fait considérées comme des extensions des fonctions de base d'une méthode  $\mathbb{P}_1$  Lagrange. Ainsi, une fonction  $\phi^i$  est associée à un nœud  $x_i$  et vérifie

$$\forall x_j \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_1, H}, \quad \phi^i\left(x_j\right)=\delta_{i, j}.$$

Il reste donc à définir les valeurs sur les bords des mailles  $K \in \mathcal{K}_H$  tout en respectant cette condition sur les nœuds. L'article [HW97] propose plusieurs façons d'imposer ces conditions aux bords, mais on va supposer ici que ces conditions sont linéaires. Ce choix implique que les fonctions  $\phi^i$  sont nulles sur toutes les mailles qui n'ont pas  $x_i$  pour sommet. Les problèmes (4.1) peuvent être résolus pour un nombre restreint de mailles et de manière indépendante du fait du choix des conditions aux limites. Cette dernière caractéristique est très intéressante d'un point de vue informatique, car cela signifie que la résolution de ces problèmes peut être faite en parallèle. Une fois ces fonctions de base construites, on construit l'espace aux éléments finis  $V_H^{MS}$  engendrés par ces fonctions  $\phi^i$ . Le problème consiste alors à chercher la solution  $u^{MS} \in V_H^{MS}$  du problème

$$\forall v^{MS} \in V_H^{MS}, \quad \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u^{MS} \cdot \nabla v^{MS} dx = \int_{\Omega} f v^{MS} dx. \quad (4.2)$$

Si on suppose que les fonction  $\phi^i$  sont calculées en résolvant de manière exacte les problèmes (4.1), on peut alors montrer l'estimation d'erreur *a priori* entre la solution multi-échelle et la solution  $u_\varepsilon$  du problème (3.1) :

$$\left\|u_\varepsilon - u_{MS}\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(H + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right). \quad (4.3)$$

D'autres méthodes présentées antérieurement peuvent être rapprochées de la méthode des éléments finis multi-échelles. On peut citer la méthode de *partition de l'unité* présentée par I. Babuška et J.M. Melenk [MB96] ou les méthodes intégrant des *bulles* présentées par F. Brezzi, L. Franca et A. Russo [BR94, BFR98]. La méthode que nous présentons dans ce chapitre généralise la méthode introduite par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] en considérant des fonctions de base d'ordres supérieurs. Cette idée a ensuite été reprise par H. Owhadi et L. Zhang dans [OZ07] et [OZ08].

Le chapitre 5 présente la méthode des éléments finis mixtes multi-échelles introduite par Z. Chen et Th. Y. Hou [CH02] qui est l'adaptation de la méthode des éléments finis multi-échelles aux éléments finis mixtes.

### 4.1.3 Méthodes multi-échelles hétérogènes

La première méthode multi-échelle hétérogène a été proposée par W. E et B. Engquist [EE03] pour résoudre des problèmes elliptiques à coefficients périodiques de type (3.1). On décrit ici la méthode en s'inspirant de la description faite par A. Abdulle [Abd13]. En fait, l'objectif de cette méthode est de calculer numériquement le tenseur  $A^*$  vu au chapitre 3 dans un cas non périodique. On voudrait ensuite appliquer une méthode aux éléments finis  $V_H$  associée à un maillage grossier  $\mathcal{K}_H$  du domaine  $\Omega$  pour résoudre le problème homogénéisé (3.5). Cependant, on remarque que, si on veut résoudre numériquement un problème elliptique, on a besoin de connaître la valeur du tenseur uniquement aux points de quadrature utilisés pour calculer les intégrales. Ici, les variations de la solution à l'échelle fine ne sont donc calculées qu'au voisinage de certains points qui seront, en général, ces points de quadrature. On définit alors, pour chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , des pavés  $Y_{i, \delta}$  de taille  $\delta$  autour de ces points (voir figure 4.2). On décompose ensuite la solution

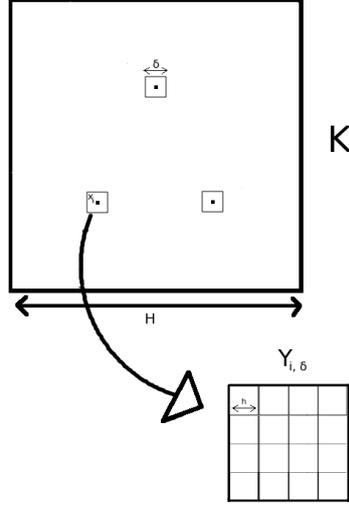


FIGURE 4.2 – Schéma présentant la discrétisation effectuée pour la Méthode Multi-échelle Hétérogène

numérique en deux parties : une partie macroscopique  $u_H \in V_H$  et une partie microscopique  $\tilde{u}_h$  définie sur les  $Y_{i,\delta}$ . Au final, on définit la solution obtenue avec une méthode multi-échelle hétérogène par

$$u_h = u_H + \tilde{u}_h. \quad (4.4)$$

On remarque que la décomposition (4.4) peut être rapprochée de l'approximation montrée au chapitre 3 :

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Ainsi, la fonction  $\tilde{u}_h$  devrait être de l'ordre de  $\varepsilon$  mais son gradient de l'ordre de 1. L'objectif de cette méthode est de bien approcher  $u$  et on ne s'intéresse donc ici qu'au calcul de  $u_H$ . On choisit alors  $\delta > \varepsilon$  mais de l'ordre de  $\varepsilon$  de telle sorte que le maillage utilisé à l'intérieur des  $Y_{i,\delta}$  soit de résolution  $h \ll \varepsilon$  et comporte un nombre de mailles raisonnable. Dans cette méthode, on impose que la partie microscopique  $\tilde{u}_h$  soit à moyenne nulle sur chacune des cellules  $Y_{i,\delta}$ . Cette condition est liée au fait que ce terme devrait être de l'ordre de  $\varepsilon$ . On construit alors un espace aux éléments finis  $\tilde{V}_h(Y_{i,\delta})$  qui est un sous-espace de l'ensemble des fonctions de  $Y_{i,\delta}$  à moyenne nulle associé au maillage fin  $\mathcal{K}_h$ . On suppose ensuite que  $\tilde{u}_h|_{Y_{i,\delta}} \in \tilde{V}_h(Y_{i,\delta})$ . En s'inspirant des problèmes de cellules (3.4), on définit des problèmes de cellules discrets. On cherche sur chaque maille  $Y_{i,\delta}$  les fonctions  $w_{Y_{i,\delta},h,j}, j = 1, \dots, N$  solutions des problèmes

$$\forall \tilde{z}_h \in \tilde{V}_h(Y_{i,\delta}), \quad \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j} \cdot \nabla \tilde{z}_h dx = \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) e_j \cdot \nabla \tilde{z}_h dx. \quad (4.5)$$

Ensuite, en se basant sur la définition de la matrice  $A^*$  dans (3.13), on définit

$$A_{Y_{i,\delta}}^0 = \frac{1}{|Y_{i,\delta}|} \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) (Id + \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j}) dx. \quad (4.6)$$

La fonction  $u_H$  est alors calculée en résolvant le problème :

$$\forall v_H \in V_H, \quad B_H(u_H, v_H) = \int_{\Omega} f v_H, \quad (4.7)$$

où

$$\begin{aligned} B_H(u_H, v_H) &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \sum_{x_i} \frac{|K|}{|Y_{i,\delta}|} \omega_{K,i} \int_{Y_{i,\delta}} A^\varepsilon(x) (Id + \nabla w_{Y_{i,\delta},h,j}) \nabla u_H \cdot \nabla v_H dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} |K| \sum_{x_i} \omega_{K,i} A_{Y_{i,\delta}}^0 \nabla u_H(x_i) \cdot \nabla v_H(x_i), \end{aligned}$$

les  $x_i$  étant les points de quadrature de la maille  $K$  et les  $\omega_{K,i}$  les poids associés. Avec cette méthode, pour un bon choix de  $\delta$ , les estimations d'erreur *a priori* (voir [MZ<sup>+</sup>05] et [Abd05]) suivantes peuvent être établies

$$\|u_\varepsilon - u_H\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( H^2 + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} + \varepsilon \right), \quad (4.8)$$

$$\|u - u_H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( H + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\delta} \right), \quad (4.9)$$

où  $u$  est la solution du problème homogénéisé (3.5). On peut même montrer, si on suppose que le rapport  $\frac{\delta}{\varepsilon}$  est entier, que

$$\|u - u_H\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( H + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \right).$$

L'avantage de cette méthode par rapport à celle de Th. Hou et X. Wu est qu'elle diminue la taille des systèmes fins à résoudre. En effet, les problèmes de cellule (4.5) sont aussi indépendants mais doivent être uniquement résolus sur les  $Y_{i,\delta}$ . Ainsi, pour un maillage de même résolution, le nombre d'inconnues fines sera plus faible avec la méthode multi-échelle hétérogène.

On peut également, avec cette méthode, reconstruire une solution oscillante sur le maillage complet. Pour cela, on utilise la solution locale  $\tilde{u}_h$  définie sur les mailles  $Y_{i,\delta}$  que l'on prolonge par périodicité sur toute la maille  $K$ . Cela nous permet de définir une fonction oscillante  $\tilde{u}_{h,K}$ . On introduit ainsi la fonction  $u_{Hh}$  définie par

$$u_{Hh}|_K = u_H + \tilde{u}_{h,K}.$$

On peut alors montrer l'inégalité

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u_{Hh}\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( H + \frac{h}{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \right),$$

sous l'hypothèse  $\frac{\delta}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ .

Cette reconstruction par périodicité est très intéressante dans le cas localement périodique. Cependant, cette méthode ne serait pas applicable dans les cas que nous souhaitons considérer où les oscillations ne sont pas périodiques.

#### 4.1.4 Méthodes des volumes finis multi-échelles

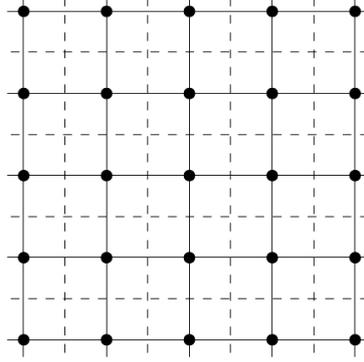
La méthode des éléments finis multi-échelles permet de résoudre un problème elliptique et pourrait donc être appliquée pour calculer un champ de pression (voir chapitre 2). Cependant, les flux que l'on obtiendrait en appliquant cette méthode ne seraient pas conservatifs à l'échelle fine. Ainsi, si on souhaite préserver le principe du maximum en saturation (voir chapitre 2), la méthode des éléments finis multi-échelles n'est pas applicable à la simulation d'un écoulement. La méthode des volumes finis multi-échelles a été présentée pour la première fois par P. Jenny, S.H. Lee et H. Tchelepi dans [JLT03]. Cette méthode a pour but d'être appliquée à la simulation d'un écoulement en milieu poreux. L'objectif de cette méthode multi-échelle est donc d'obtenir des flux conservatifs sur le maillage fin. La présentation que l'on donne de cette méthode est inspirée de la description faite par Th. Abballe dans [Abb11].

Pour définir cette méthode, il faut tout d'abord construire le maillage dual  $\tilde{\mathcal{K}}_H$  associé au maillage grossier  $\mathcal{K}_H$  en reliant les barycentres des mailles  $K \in \mathcal{K}_H$ .

Cette méthode a pour but d'être appliquée à la simulation des écoulements en milieux poreux, on reprend donc les notations du chapitre 2. On veut résoudre le problème

$$-\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla P) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Comme dans l'approche volumes finis classique, on suppose que la pression est constante sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$  et on la note  $P_K$ . La première étape de cette méthode est de réécrire la pression sur une maille


 FIGURE 4.3 – En trait plein le maillage  $\mathcal{K}_H$ , en tirets le maillage dual  $\tilde{\mathcal{K}}_H$ 

duale  $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{K}}_H$  comme une combinaison des pressions sur les mailles qui lui sont reliées :

$$P_{|\tilde{K}}(x) = \sum_{K, K \cap \tilde{K} \neq \emptyset} P_K \Phi_{\tilde{K}}^K(x). \quad (4.10)$$

Il reste donc à définir les fonctions  $\Phi_{\tilde{K}}^K$ . Dans cette méthode, ces fonctions  $\Phi_{\tilde{K}}^K$  sont en fait définies en s'inspirant de la méthode aux éléments finis multi-échelles présentée au paragraphe 4.1.2. Ainsi,  $\Phi_{\tilde{K}}^K$  est solution du *problème de cellule dual*

$$-\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla \Phi_{\tilde{K}}^K) = 0 \quad \text{dans } \tilde{K}. \quad (4.11)$$

On note  $\mathbf{x}_K$  le barycentre de la maille  $K \in \mathcal{K}_H$ . On impose alors que

$$\forall L \in \mathcal{K}_H, \quad \Phi_{\tilde{K}}^K(\mathbf{x}_L) = \delta_{K,L}.$$

Comme pour le problème (4.1), nous allons supposer ici que les conditions aux bords sont linéaires. Ces problèmes de cellule duaux sont alors résolus sur un maillage fin local. Une fois les fonctions  $\Phi_{\tilde{K}}^K$  connues sur ce maillage fin, les flux de  $k\lambda_T \nabla P$  à travers les faces grossières  $\Sigma \in \mathcal{F}_H$  peuvent être calculés en utilisant la formule (4.10). Nous pouvons donc obtenir les pressions grossières  $P_K$ .

On voudrait maintenant reconstruire ce champ de pression à l'échelle fine pour obtenir des flux conservatifs. Pour cela, on considère l'ensemble des mailles de  $\mathcal{K}_H$  partageant un sommet avec la maille  $K \in \mathcal{K}_H$ . On note cet ensemble  $\mathcal{V}_{H,K}$ . Alors, pour chaque maille  $L \in \mathcal{V}_{H,K}$  on définit la fonction  $\psi_K^L$  solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\lambda_T \nabla \psi_K^L) = 0 & \text{dans } L, \\ \psi_K^L = \sum_{\tilde{K}, L \cap \tilde{K} \neq \emptyset} \Phi_{\tilde{K}}^L & \text{sur } \partial L. \end{cases} \quad (4.12)$$

Ces problèmes sont également résolus sur des maillages fins locaux. La pression est ensuite reconstruite sur le maillage fin en utilisant la formule

$$P_h|_K = \sum_{L \in \mathcal{V}_{H,K}} P_L \psi_K^L.$$

Ce champ de pression fin permet finalement d'obtenir des flux conservatifs à l'échelle fine.

V. Ginting [Gin04] a montré que cette méthode permettait d'avoir la même estimation d'erreur que la méthode des éléments finis multi-échelles.

La méthode des volumes finis multi-échelles a été, par la suite, appliquée à des cas non linéaires [LZT09]. Cette méthode a également été adaptée pour prendre en compte des géométries non conformes [HDJ11].

## 4.2 Définition de la méthode multi-échelle

### 4.2.1 Hypothèses de départ

On veut construire une méthode aux éléments finis qui s'inspire des résultats obtenus dans le cas de l'homogénéisation périodique mais qui s'appliquerait à des cas plus généraux. Cependant, on peut obtenir une estimation quantitative dans le cas périodique. Le problème que l'on souhaite résoudre est donc de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.13)$$

où on suppose que  $A^\varepsilon(x) = A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  et on fait les hypothèses suivantes

#### Hypothèses 4.1 :

1. La fonction  $A$  est  $Y$ -périodique,
2. La fonction  $A$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et les interfaces de discontinuités sont  $\mathcal{C}^2$ ,
3.  $A$  est coercive : il existe une constante  $C_{sta} > 0$  telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad A\xi \cdot \xi \geq C_{sta} |\xi|^2$$

$|\cdot|$  étant la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^N$ .

Avec ces hypothèses sur  $A$ , en reprenant la définition des fonctions  $w_i$  dans (3.4), on peut montrer que  $w_i \in W_{\#}^{1,\infty}(Y)$ . En effet, on peut appliquer le lemme suivant.

**Lemme 4.1.** *On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^N$ . On définit les fonctions  $f$ ,  $a_i$  et  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  vérifiant les hypothèses*

1. *La matrice des  $a_{i,j}$  est coercive.*
2. *Les fonctions  $f, a_i$  et  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et les interfaces de discontinuités sont de classe  $\mathcal{C}^2$ .*

*Soit  $w$  la fonction solution du problème*

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial w}{\partial x_i} = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (4.14)$$

*Alors, la fonction  $w$  est dans l'espace  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ .*

*Idée de la démonstration.* Cette démonstration suppose que l'on est localement d'un seul côté de l'interface de discontinuité (ie. les interfaces ne se touchent pas). Lorsqu'on est loin des interfaces de discontinuités des  $a_i, a_{i,j}$ , on peut dériver l'équation (4.14). On en déduit, en utilisant des régularités elliptiques, que  $w$  est localement dans  $W^{1,\infty}$ .

Il reste à montrer que l'on peut "recoller" la fonction aux interfaces de discontinuités de manière à avoir  $w \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ . Cela est possible car ces interfaces sont de classe  $\mathcal{C}^2$ . Une utilise alors un argument de carte locale et une partition de l'unité (voir, par exemple [All05] ou [Bre83]). La démonstration faite dans [LV00] permet de montrer que cela reste vrai si les interfaces de discontinuités se touchent ponctuellement.  $\square$

**Remarque 4.1 :** On utilise ici le fait que résoudre un problème sur pavé de  $\mathbb{R}^N$  avec des conditions aux bords de périodicité est équivalent à résoudre un problème sur l'espace  $\mathbb{R}^N$  tout entier. Cette remarque sera utilisée souvent par la suite.

### 4.2.2 Idée de la méthode

Les résultats présentés dans la partie 3.6 nous permettent de justifier l'approximation

$$u_\varepsilon(x) \approx u(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On définit les *fonctions tests oscillantes*  $\tilde{w}_i^\varepsilon$  par

$$\tilde{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où  $w_i$  est la solution de l'équation (3.4). En reprenant la définition de  $u_1$  dans (3.7),  $u_\varepsilon$  peut être approchée de la manière suivante :

$$u_\varepsilon \approx u + \sum_{i=1}^N (\tilde{w}_i^\varepsilon - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

On remarque que cela est en fait le début d'un développement de Taylor et on peut donc faire l'approximation :

$$u_\varepsilon \approx u \circ \tilde{w}^\varepsilon.$$

Cette remarque a été faite par S.M. Kozlov dans [Koz80] dans le contexte de l'homogénéisation d'opérateurs aléatoires. Ce changement de variables était appelé "coordonnées harmoniques" dans cet article.

Dans la suite, en partant de cette approximation, nous allons construire des fonctions de base utilisant cette composition.

### 4.2.3 Hypothèses de discrétisation

Nous avons introduit au paragraphe 2.2 des notations sur les maillages. Cependant, ces maillages sont utilisés pour appliquer des méthodes volumes finis. Dans ce chapitre, on construit une méthode aux éléments finis. Pour que cette méthode approche efficacement la solution, le maillage considéré doit vérifier un certain nombre d'hypothèses.

On introduit une famille de maillages  $(\mathcal{K}_H)_H$  tels que pour tout  $H > 0$ ,

$$\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{K}_H} K} = \overline{\Omega}.$$

Sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , on définit :

- le diamètre  $H_K$ , la longueur du plus grand côté de  $K$ ,
- la rondeur  $\rho_K$ , diamètre de la boule inscrite dans  $K$ ,
- l'excentricité  $\sigma_K = \frac{H_K}{\rho_K}$  qui mesure la non-dégénérescence de  $K$ .

Chaque maillage  $\mathcal{K}_H$  est tel que  $H = \max_{K \in \mathcal{K}_H} H_K$ . On introduit maintenant quelques définitions.

**Définition 4.1.** *Un maillage  $\mathcal{K}_H$  est dit conforme (au sens des éléments finis) si toute face d'un élément de  $K \in \mathcal{K}_H$  est soit contenue dans la frontière  $\partial\Omega$ , soit égale à une face d'un autre élément  $K'$ .*

**Définition 4.2.** *La famille de maillages  $(\mathcal{K}_H)_H$  est dite régulière si et seulement si, il existe une constante  $C_r$  telle que*

$$\sigma_K \leq C_r,$$

pour toute maille  $K \in \mathcal{K}_H$  et pour tout  $H > 0$ .

**Définition 4.3.** *La famille de maillages  $(\mathcal{K}_H)_H$  est dite quasi-uniforme si et seulement si, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que*

$$\forall H > 0, \forall K \in \mathcal{K}_H, \quad C_1 H \leq \rho_K \leq H_K \leq H.$$

Pour la suite, on fait les hypothèses suivantes

#### Hypothèses 4.2 :

La famille de maillages  $(\mathcal{K}_H)_H$  est conforme, régulière et quasi-uniforme.

#### 4.2.4 Définition de la méthode

Nous allons maintenant mettre en place une méthode de résolution pour le problème (4.13) en faisant les hypothèses 4.1. On considère une famille de maillages grossiers  $\mathcal{K}_H$  de résolution  $H$  vérifiant les hypothèses 4.2. Soient  $k$  et  $k'$  deux entiers  $\geq 1$  qui représentent les ordres de résolutions global et local de notre méthode multi-échelle. Sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , on calcule les fonctions  $\widehat{w}_i^{\varepsilon, K}$  solutions de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A^\varepsilon \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon, K} \right) = 0 & \text{sur } K, \\ \widehat{w}_i^{\varepsilon, K} = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (4.15)$$

On note alors  $\widehat{w}_i^{\varepsilon, H}$  les fonctions définies sur le domaine  $\Omega$  telles que pour toute maille  $K \in \mathcal{K}_H$

$$\left( \widehat{w}_i^{\varepsilon, H} \right)_{|K} = \widehat{w}_i^{\varepsilon, K}.$$

Pour chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , on définit un maillage local  $\mathcal{K}_h^K$  vérifiant aussi les hypothèses 4.2 et tel que  $\overline{\bigcup_{k \in \mathcal{K}_h^K} k} = \overline{K}$ . On définit alors le maillage fin  $\mathcal{K}_h$  par

$$\mathcal{K}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_H} \mathcal{K}_h^K.$$

Chaque problème de cellule (4.15) est résolu numériquement en utilisant une méthode  $\mathbb{P}_{k'}$  Lagrange sur le maillage  $\mathcal{K}_h^K$  de résolution  $h$ . On note  $w_i^{\varepsilon, K}$  les solutions numériques des problèmes (4.15). Et, par extension, on note  $w_i^{\varepsilon, H}$  les fonctions telles que, pour toute maille  $K \in \mathcal{K}_H$ ,

$$\left( w_i^{\varepsilon, H} \right)_{|K} = w_i^{\varepsilon, K}.$$

On souhaite que l'échelle  $h$  soit assez fine pour que les oscillations de  $A^\varepsilon$  soient prises en compte. Donc  $h < \varepsilon$ . De plus, pour que l'homogénéisation faite à l'échelle  $H$  soit cohérente avec les hypothèses, il faut que  $H \gg \varepsilon$ . Ainsi, on fait les hypothèses suivantes

$$0 < h < \varepsilon < H.$$

Nous allons maintenant mettre en place la méthode aux éléments finis multi-échelles présentée dans [AB05]. On considère  $V_H$ , un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)$  de dimension  $D_H$  finie et associé au maillage grossier  $\mathcal{K}_H$ . Dans notre cas,  $V_H$  est un espace  $\mathbb{P}_k$  Lagrange. On note  $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$  l'ensemble des nœuds de cette méthode. Soient  $(\Phi_l^H)_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}}$  les fonctions de base de l'espace  $\mathbb{P}_k$  Lagrange  $V_H$ . On construit  $V_{\varepsilon, H}$  l'espace engendré par les fonctions

$$\Phi_l^{\varepsilon, H}(x) = \Phi_l^H \circ w^{\varepsilon, H}(x).$$

Soit  $\pi_H$  l'opérateur d'interpolation sur  $V_H$  :

$$\pi_H v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}} v(l) \Phi_l^H(x).$$

On définit l'opérateur d'interpolation  $\pi_{\varepsilon, H}$  sur  $V_{\varepsilon, H}$  :

$$\pi_{\varepsilon, H} v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}} v(l) \Phi_l^{\varepsilon, H}(x).$$

L'espace  $V_{\varepsilon, H}$  va être utilisé pour résoudre la formulation variationnelle du problème (4.13). Le problème discret que l'on résout s'écrit alors : trouver  $u_{\varepsilon, H} \in V_{\varepsilon, H}$  telle que

$$\forall v_{\varepsilon, H} \in V_{\varepsilon, H}, \quad \int_{\Omega} A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon, H} \cdot \nabla v_{\varepsilon, H} dx = \int_{\Omega} f v_{\varepsilon, H} dx. \quad (4.16)$$

**Remarques 4.2 :**

Sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , les fonctions  $\Phi_l^{\varepsilon, H}$  se décomposent selon

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon, H}\right)_{|K}(x) = p_l^K \circ w^{\varepsilon, K}(x),$$

avec les  $p_l^K \in \mathbb{P}_k(K)$  tels que pour tout  $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$ ,  $p_l^K(l') = \delta_{l, l'}$  et 0 sinon. Pour  $k \leq 2$ , comme on a  $w^{\varepsilon, K} = x$  sur  $\partial K$  et que tous les nœuds se situent sur le bord des mailles, on a pour tout  $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$ ,

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon, H}\right)_{|K}(l') = \delta_{l, l'}.$$

On a donc, pour  $k \leq 2$ ,

$$\pi_{\varepsilon, H} v(l) = v(l), \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}. \quad (4.17)$$

Pour des ordres  $k \geq 3$ , les nœuds de la méthode aux éléments finis  $\mathbb{P}_k$  Lagrange ne sont pas tous sur le bord des mailles, l'égalité (4.17) n'est donc plus vraie.

$V_{\varepsilon, H}$  est de dimension  $D_H$  même s'il est nécessaire de résoudre des problèmes locaux sur un maillage plus fin pour construire ses fonctions de base.

L'espace  $V_H$  est un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)$  et chaque point  $x \in \partial\Omega$  appartenant au bord du domaine se situe nécessairement sur le bord d'une certaine maille  $K \in \mathcal{K}_H$ . Ainsi

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad w^{\varepsilon, H}(x) = x.$$

Comme, pour tout  $l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k, H}$ ,  $\Phi_l^H \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\Phi_l^{\varepsilon, H} = \Phi_l^H \circ w^{\varepsilon, H} \in H_0^1(\Omega).$$

On en déduit que l'espace  $V_{\varepsilon, H}$  est bien un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)$ .

### 4.3 Estimation *a priori*

Dans cette partie, on va prouver l'estimation *a priori* présentée dans [AB05]. La démonstration qui en est faite dans cet article n'est pas tout à fait exacte : les termes que l'on nomme "terme d'homogénéisation locale" et "terme d'interpolation locale" y sont mal exprimés. La preuve donnée dans ce paragraphe complète donc cette démonstration.

**Théorème 4.1.** *Soit  $u_\varepsilon$  la solution du problème (4.13). On considère un maillage  $\mathcal{K}_H$  de résolution  $H$  vérifiant les hypothèses 4.2. Sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ , on résout les problèmes de cellule (4.15) numériquement en appliquant une méthode aux éléments finis  $\mathbb{P}_{k'}$  Lagrange sur un maillage fin local  $\mathcal{K}_h^K$  de résolution  $h$  et vérifiant les hypothèses 4.2. On suppose de plus que  $h < \varepsilon < H$ . On peut alors construire l'espace aux éléments finis multi-échelles  $V_{\varepsilon, H}$  défini au paragraphe 4.2.4. On note alors  $u_{\varepsilon, H}$  la solution numérique du problème (4.16).*

*On suppose que  $u \in W^{k+1, \infty}(\Omega)$  et on fait les hypothèses 4.1. On suppose, de plus, que les coefficients de  $A$  sont de classe  $C^{k'}$ . Il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$ ,  $H$  et  $h$  telle que*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon, H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left( H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'} \right).$$

**Remarques 4.3 :**

Cette estimation *a priori* nous permet de vérifier que la fonction  $u_{\varepsilon,H}$ , obtenue avec la méthode aux éléments finis multi-échelles, est une bonne approximation de la solution  $u_\varepsilon$  du problème initial (4.13) si  $H$ ,  $\frac{\varepsilon}{H}$  et  $\frac{h'}{\varepsilon}$  sont faibles. On peut d'abord remarquer que cela est cohérent avec notre hypothèse  $h < \varepsilon < H$ . Pour avoir une erreur la plus petite possible il faut même que

$$h \ll \varepsilon \ll H.$$

Le terme en  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$  montre que si les hétérogénéités sont du même ordre de grandeur que le maillage grossier ( $\frac{\varepsilon}{H} \approx 1$ ), la méthode ne peut pas converger. Ce terme est souvent appelé *terme de résonance*.

Pour  $k = 1$ , cette méthode est en fait équivalente à celle présentée par Th.Y. Hou et X.H. Wu dans [HW97] (voir paragraphe 4.1.2). L'estimation *a priori* obtenue est elle aussi en accord avec celle présentée dans (4.3).

*Démonstration.* Tout d'abord, en appliquant le lemme de Céa (voir annexe A.3.1) au problème (4.16), on a :

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}} \|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$  et  $H$ . On choisit  $v_{\varepsilon,H} = \pi_{\varepsilon,H}u$ . On a

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

On veut donc majorer

$$\|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}u)\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On décompose alors ce terme de la manière suivante

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H}u)\|_{L^2(\Omega)^N} &\leq \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla(\pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Il nous reste à majorer ces quatre termes pour obtenir une estimation a priori. On définit donc

$$\begin{aligned} G_1 &= \|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ G_2 &= \|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ G_3 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } G_4 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

La majoration du terme  $G_1$  est liée à un résultat d'homogénéisation périodique et à une approximation de Taylor. Le terme  $G_2$  utilise un résultat d'interpolation en éléments finis  $\mathbb{P}_k$  Lagrange sur le maillage grossier. Le terme  $G_3$  peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation pour les fonctions oscillantes locales. Enfin, le terme  $G_4$  sera majoré à l'aide d'une estimation d'erreur de la méthode aux éléments finis  $\mathbb{P}_{k'}$  Lagrange utilisée pour calculer les fonctions tests oscillantes.

### 4.3.1 Terme d'homogénéisation globale $G_1$

On s'intéresse d'abord au terme  $G_1$ . Pour majorer ce terme, on va montrer le lemme :

**Lemme 4.2.** *On suppose que  $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$  et  $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$ . Alors, il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

*Démonstration.* On a d'abord l'inégalité

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla (u \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \left\| \nabla u_\varepsilon - [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)^N} + \left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (4.19)$$

On remarque que  $[\nabla \tilde{w}^\varepsilon](x) = Id + [\nabla_y w] \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ . Le premier terme du membre de droite de l'inégalité est donc égal à

$$\left\| \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x) - \left[ \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

De plus, si on applique (3.21), on obtient :

$$\left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \\ = \left\| \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x) - \left[ \nabla_y w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \nabla u_\varepsilon - [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)^N} &\leq \left\| u_\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

En utilisant le fait que  $w_i \in W^{1,\infty}(Y)$ , on peut majorer le deuxième terme de l'inégalité (4.19) de la manière suivante

$$\left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + [\nabla_y w]\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\nabla u - (\nabla u) \circ \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On effectue un développement de Taylor avec reste intégral :

$$(\nabla u) \circ \tilde{w}^\varepsilon = \nabla u + \varepsilon \int_0^1 \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( x + \varepsilon t w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) dt.$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$\left\| [\nabla \tilde{w}_i^\varepsilon] \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \circ \tilde{w}^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \varepsilon \|Id + [\nabla_y w]\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (4.21)$$

En insérant (4.21) et (4.20) dans (4.19), on obtient le résultat annoncé.  $\square$

### 4.3.2 Terme d'interpolation $G_2$

On s'intéresse maintenant à (4.18) :

$$G_2 = \|\nabla ((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \|\{\nabla (u - \pi_H u)\} \circ \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

On s'aide une nouvelle fois d'un développement de Taylor avec reste intégral :

$$\{\nabla(u - \pi_H u)\} \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) = \nabla(u - \pi_H u)(x) + \varepsilon \int_0^1 \nabla \frac{\partial(u - \pi_H u)}{\partial x_i} \left(x + \varepsilon t w \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dt.$$

On a donc

$$\|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N \times N}} \left( \|u - \pi_H u\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|u - \pi_H u\|_{H^2(\Omega)} \|w\|_{L^\infty(\Omega)^N} \right).$$

D'où

$$\|\nabla((u - \pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} \left( H^k + \varepsilon H^{k-1} \|w\|_{L^\infty(\Omega)^N} \right) \quad (4.22)$$

en utilisant des résultats classiques sur les éléments finis  $\mathbb{P}_k$  Lagrange (voir annexe A.3.3).

### 4.3.3 Terme d'homogénéisation locale $G_3$

Le terme  $G_3$  nécessite l'introduction du lemme suivant démontré dans [BLP78] et [TYHC99].

**Lemme 4.3.** *Soit  $\omega$  un ouvert borné et régulier. Soient  $f \in L^2(\omega)$  et  $g \in H^1(\omega)$ . On définit  $v_\varepsilon$  solution de*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla v_\varepsilon \right) = f & \text{dans } \omega, \\ v_\varepsilon = g & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

et  $v^*$  solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (A^* \nabla v^*) = f & \text{dans } \omega, \\ v^* = g & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Il existe une constante  $C$  indépendante de  $\varepsilon$  et  $\omega$  et des fonctions  $f$  et  $g$  telle que :

$$\left| v_\varepsilon - v^* - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial v^*}{\partial x_i} (x) \right|_{H^1(\omega)} \leq C \left( \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|\partial\omega|} \|\nabla v^*\|_{L^\infty(\omega)^N} + \varepsilon \|\nabla^2 v^*\|_{L^2(\omega)^{N \times N}} \right).$$

$|\partial\omega|$  étant borné et  $\omega$  assez régulier, on a même, par une inégalité de Poincaré

$$\left\| v_\varepsilon - v^* - \varepsilon \sum_{i=1}^N w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial v^*}{\partial x_i} (x) \right\|_{H^1(\omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|\partial\omega|} \|v^*\|_{W^{2,\infty}(\omega)}.$$

Le terme  $G_3$  est majoré en le décomposant en deux parties :

$$\begin{aligned} G_3 &= \|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \hat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \left\| \left( \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\quad + \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

On note

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\| \left( \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \hat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } N_2 &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \hat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

On va écrire

$$\|\nabla(\tilde{w}^\varepsilon - \widehat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla(\tilde{w}^\varepsilon - \widehat{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2.$$

On applique ensuite le lemme 4.3 sur chaque maille  $K$  avec  $v_\varepsilon = \widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ ,  $f = 0$  et  $g(x) = x_i$ . Dans ce cas, la solution du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla w_i^*) = 0 & \text{dans } K, \\ w_i^* = x_i & \text{sur } \partial K, \end{cases}$$

est clairement  $w_i^* = x_i$  (car  $A^*$  est constante). On obtient donc

$$\left\| \widehat{w}_i^{\varepsilon,K}(x) - x_i - \varepsilon w_i \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(K)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \sqrt{|\partial K|}.$$

Or, par définition,  $\tilde{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$ . Donc, en utilisant le fait que la norme  $H^1$  est supérieure à la semi-norme  $H^1$ , on obtient

$$\|\nabla(\widehat{w}^\varepsilon - \tilde{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \leq C \varepsilon |\partial K|.$$

Comme la longueur de  $K$  est de l'ordre de  $H$  la surface de sa frontière  $|\partial K|$  est de l'ordre de  $H^{N-1}$  et le nombre de mailles  $K$  pour mailler l'espace  $\Omega$  est de l'ordre de  $H^{-N}$ . On arrive à

$$\|\nabla(\tilde{w}^\varepsilon - \widehat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 \leq C \frac{\varepsilon}{H}.$$

Or, on a

$$N_1 = \left\| \left( \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|\nabla(\tilde{w}^\varepsilon - \widehat{w}^{\varepsilon,K})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

**Remarque 4.4 :** En utilisant les inégalités d'interpolation (voir annexe A.3.5), on montre que

$$\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(K)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(K)} + C H^k |u|_{W^{k+1,\infty}(K)}.$$

Comme  $k \geq 1$  et  $H$  est faible, on en déduit que  $\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$  est borné.

On a donc

$$N_1 \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.24)$$

Pour le terme  $N_2$ , on écrit

$$\begin{aligned} N_2 &= \left\| \nabla \tilde{w}_i^\varepsilon \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \tilde{w}^\varepsilon - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ &\leq \|\nabla \tilde{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^{N \times N}} \|\nabla(\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla(\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

On veut d'abord majorer le terme

$$\|\nabla(\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla(\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla(\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla(\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N}^2. \quad (4.26)$$

On voudrait ici appliquer un développement de Taylor mais  $\pi_H u$  n'est pas une fonction  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ . C'est cependant une fonction polynomiale sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$  et donc de classe  $\mathcal{C}^\infty(K)$ . Pour pouvoir appliquer un développement de Taylor, à cette fonction entre les points  $\tilde{w}^\varepsilon(x)$  et  $\widehat{w}^{\varepsilon,K}(x)$  on doit vérifier que ces points sont dans la maille  $K$ . Par le principe du maximum (voir équation (4.15)),  $\widehat{w}^{\varepsilon,K}(x) \in K$ . On construit alors l'ensemble

$$C_K = \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) > \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\}.$$

On remarque que si  $x \in C_K$ ,

$$\tilde{w}^\varepsilon(x) = x + \varepsilon w \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \in K.$$

Ainsi, on va alors séparer la norme  $L^2$  sur chaque maille en deux parties :

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K} \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ &= \int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \\ & \quad + \int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \quad (4.27) \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on peut utiliser une inégalité de Taylor

$$\left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right| \leq \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left| \tilde{w}^\varepsilon(x) - \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|.$$

Donc

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \leq \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}}^2 \left\| \tilde{w}^\varepsilon - \widehat{w}^{\varepsilon, K} \right\|_{L^2(K)^N}^2.$$

Puis, en utilisant la continuité de l'opérateur d'interpolation, le lemme 4.3, ainsi que le fait que  $|\partial C_K| \leq |\partial K|$  on a

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \leq C \|u\|_{W^{2, \infty}(\Omega)}^2 \varepsilon |\partial K|.$$

Et les longueurs de  $K$  étant de l'ordre de  $H$ , on a  $|\partial K| \leq CH^{N-1}$ , donc

$$\int_{C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon H^{N-1}. \quad (4.28)$$

Pour l'autre terme, on écrit

$$\int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \leq 4 \|\pi_H u\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}^2 \int_{K \setminus C_K} dx.$$

On a déjà vu que  $\|\pi_H u\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}$  était bornée. Puis, par construction de  $C_K$

$$K \setminus C_K = \left\{ x \in K \mid d(x, \partial K) \leq \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N} \right\}.$$

Cela correspond à une couronne d'épaisseur  $\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N}$  autour de la frontière  $\partial K$ . On a donc

$$|K \setminus C_K| \leq C |\partial K| \varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N}.$$

D'où

$$|K \setminus C_K| \leq C \varepsilon H^{N-1}.$$

Au final, on obtient

$$\int_{K \setminus C_K} \left| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon(x) - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K}(x) \right|^2 dx \leq C \varepsilon H^{N-1}. \quad (4.29)$$

Puis, en reprenant les inégalités (4.28) et (4.29) dans (4.27), on obtient

$$\left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, K} \right\|_{L^2(K)^N}^2 \leq C \varepsilon H^{N-1}.$$

Et donc, en utilisant l'équation (4.26)

$$\left\| \nabla (\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla (\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon, H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \varepsilon H^{N-1}.$$

De plus, le nombre de mailles de tailles  $H$  pour mailler  $\Omega$  est de l'ordre de  $H^{-N}$ , on a donc

$$\|\nabla(\pi_H u) \circ \tilde{w}^\varepsilon - \nabla(\pi_H u) \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^N}^2 \leq C \frac{\varepsilon}{H}.$$

D'où, en reprenant l'inégalité (4.25)

$$N_2 \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.30)$$

Enfin, en insérant cette inégalité et l'inégalité (4.24) dans (4.23), on a

$$\|\nabla(\pi_H u \circ \tilde{w}^\varepsilon - \pi_H u \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \quad (4.31)$$

#### 4.3.4 Terme d'interpolation locale $G_4$

Enfin, pour traiter le terme  $G_4$ , on le sépare en deux :

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\pi_H u \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \\ & \leq \left\| \left( \nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \\ & \quad + \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

On définit alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| \left( \nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N}, \\ \text{et } I_2 &= \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}. \end{aligned}$$

Pour le terme  $I_1$ , on a

$$I_1 = \left\| \left( \nabla w_i^{\varepsilon,H} - \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \right) \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \|\nabla w^{\varepsilon,H} - \nabla \widehat{w}^{\varepsilon,H}\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}. \quad (4.33)$$

Comme  $A \in C^{k'}(Y)$ , les fonctions tests oscillantes solutions des problèmes elliptiques (4.15) sont dans  $H^{k'+1}(Y)$  (voir [Bre83]). On applique alors les inégalités classiques sur les éléments finis  $\mathbb{P}_{k'}$  Lagrange (voir annexe A.3.5). On a :

$$\begin{aligned} \|\nabla(\widehat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \|\nabla(\widehat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(K)^{N \times N}}^2 \\ &\leq C(h)^{2k'} \sum_{K \in \mathcal{K}_H} |\widehat{w}^{\varepsilon,H}|_{H^{k'+1}(K)^N}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

On va maintenant montrer le lemme suivant.

**Lemme 4.4.** *On rappelle que les fonctions  $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$  sont les solutions des problèmes de cellules (4.15) :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A^\varepsilon \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = 0 & \text{sur } K, \\ \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} = x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

La fonction  $A \in C_{\#}^{k'}(Y)$  et vérifie les hypothèses 4.1. On a alors, pour tout  $0 \leq n \leq k'$

$$|\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}|_{H^{n+1}(K)^N} \leq C \varepsilon^{-n} \sqrt{|K|}.$$

*Démonstration.* On le montre par récurrence. Pour  $n = 0$  on réécrit la définition des fonctions  $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$  pour obtenir une équation aux dérivées partielles pour les fonctions  $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i$

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A^\varepsilon \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right) = \operatorname{div} (A^\varepsilon e_i) & \text{sur } K, \\ \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i = 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

On multiplie la première équation par  $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i$  et on intègre par parties sur  $K$ . On obtient

$$\int_K A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \cdot \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) = \int_K A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) e_i \cdot \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right).$$

On utilise alors le fait que  $\|e_i\|_{L^2(K)^N} = \sqrt{|K|}$ , la continuité et la coercivité de  $A$  et on obtient

$$C_{sta} \left\| \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right\|_{L^2(K)^N} \leq C_{bnd} \left\| \nabla \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right\|_{L^2(K)^N} \sqrt{|K|}.$$

On obtient donc

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - e_i \right\|_{L^2(K)^N} \leq \frac{C_{bnd}}{C_{sta}} \sqrt{|K|}.$$

En réutilisant le fait que  $\|e_i\|_{L^2(K)^N} = \sqrt{|K|}$ , on a

$$\left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \sqrt{|K|}.$$

Supposons maintenant que l'hypothèse soit vérifiée pour tout  $k \leq n \leq k' - 1$ . Nous voulons maintenant montrer que cela reste vrai pour  $n+1 \leq k'$ . On se fixe un multi-indice  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = n+1$  (voir annexe A.1.2 pour la définition d'un multi-indice). On applique l'opérateur  $\partial^\alpha$  à l'équation (4.15) définissant  $\widehat{w}_i^{\varepsilon,K}$ , on a donc le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) = \operatorname{div} \left( \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \partial_y^k A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) & \text{sur } K, \\ \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} = \partial^\alpha x_i & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Ce qui peut se réécrire

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \right) = \operatorname{div} \left( \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \partial_y^k A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right) & \text{sur } K, \\ \partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) = 0 & \text{sur } \partial K, \end{cases} \quad (4.35)$$

car  $\nabla \partial^\alpha x_i = 0$  puisque  $|\alpha| \geq 1$ . On multiplie alors la première équation du système (4.35) par  $\partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right)$  et on intègre par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_K A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \cdot \nabla \partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right) \\ &= \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} \int_\Omega \partial_y^k A \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \cdot \nabla \partial^\alpha \left( \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

les termes de bords étant nuls car  $\partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i)$  est nul sur le bord. Par constructions des différents multi-indice  $k$ , on a  $|k| \leq |\alpha| = n + 1 \leq k'$ . Ainsi,  $A$  étant de classe  $C^{k'}$ , la fonction  $\partial_y^k A$  est bornée. On définit alors la constante  $C_{bnd,n+1}$  telle que pour tout multi-indice  $k$  tel que  $|k| \leq n + 1$

$$\|\partial_y^k A\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \leq C_{bnd,n+1}.$$

En appliquant cette propriété ainsi que la coercivité de  $A$  dans l'équation (4.36), on a

$$\begin{aligned} & C_{sta} \left\| \nabla \partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i) \right\|_{L^2(K)^N}^2 \\ & \leq \sum_{\substack{k \text{ multi-indice} \\ k_i \leq \alpha_i \\ |k| \neq 0}} C_{\alpha_1}^{k_1} \dots C_{\alpha_N}^{k_N} \frac{1}{\varepsilon^{|k|}} C_{bnd,n+1} \left\| \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \left\| \nabla \partial^\alpha (\widehat{w}_i^{\varepsilon,K} - x_i) \right\|_{L^2(K)^N}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left\| \nabla \partial^{\alpha-k} \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \varepsilon^{-|\alpha|+|k|} \sqrt{|K|},$$

car  $|k| \neq 0$  donc  $|\alpha - k| \leq n$ . De plus, comme écrit auparavant,  $\nabla \partial^\alpha x_i = 0$ . Donc l'inégalité (4.37) implique

$$\left\| \nabla \partial^\alpha \widehat{w}_i^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N} \leq C \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sqrt{|K|}. \quad (4.38)$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifié au rang  $n + 1$ . On a donc montré le résultat voulu.  $\square$

On en déduit que

$$\|\widehat{w}^{\varepsilon,K}\|_{H^{k'+1}(K)^N} \leq C \varepsilon^{-k'} \sqrt{|K|}.$$

De plus,

$$\sum_{K \in \mathcal{K}_H} |K| = |\Omega|.$$

Ce volume étant borné, on a, en utilisant l'inégalité (4.34),

$$\left\| \nabla (\widehat{w}^{\varepsilon,H} - w^{\varepsilon,H}) \right\|_{L^2(\Omega)^{N \times N}} \leq C \left( \frac{h}{\varepsilon} \right)^{k'}.$$

Puis, en reprenant l'équation (4.33), on a

$$I_1 \leq C \left( \frac{h'}{\varepsilon} \right)^{k'}. \quad (4.39)$$

Il reste à majorer le terme

$$I_2 = \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, ce terme peut être borné en utilisant un développement de Taylor sur chaque maille  $K \in \mathcal{K}_H$ . Ici, le principe du maximum est respecté pour les deux fonctions :

$$\forall x \in K, \quad w^{\varepsilon,H}(x) \in K \quad \text{et} \quad \widehat{w}^{\varepsilon,H}(x) \in K.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\| \nabla \widehat{w}_i^{\varepsilon,H} \left( \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \frac{\partial \pi_H u}{\partial x_i} \circ w^{\varepsilon,H} \right) \right\|_{L^2(K)^N} \\ &\leq C \left\| \widehat{w}^{\varepsilon,H} \right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \left\| \nabla^2 (\pi_H u) \right\|_{L^\infty(K)^{N \times N}} \left\| w^{\varepsilon,K} - \widehat{w}^{\varepsilon,K} \right\|_{L^2(K)^N}. \end{aligned}$$

**Remarque 4.5 :** On reprend ici la remarque 4.4 pour la norme  $W^{2,\infty}(K)$  :

$$\|\pi_H u\|_{W^{2,\infty}(K)} \leq \|u\|_{W^{2,\infty}(K)} + CH^{k-1} |u|_{W^{k+1,\infty}(K)}.$$

Comme  $k \geq 1$ , on en déduit que  $\|\nabla^2(\pi_H u)\|_{L^\infty(K)^{N \times N}}$  est bornée. Et, comme précédemment, on a, par des inégalités classiques

$$\|w^{\varepsilon,K} - \widehat{w}^{\varepsilon,K}\|_{L^2(K)^N} \leq Ch^{k'} |\widehat{w}^{\varepsilon,H}|_{H^{k'}(K)}.$$

On a donc montré que

$$I_2 \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'}. \quad (4.40)$$

D'où, en reprenant les inégalités (4.39) et (4.40) dans (4.32)

$$\|\nabla(\pi_H u \circ \widehat{w}^{\varepsilon,H} - \pi_H u \circ w^{\varepsilon,H})\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'}. \quad (4.41)$$

### 4.3.5 Conclusion

On insérant les inégalités (4.21), (4.22), (4.31) et (4.41) dans l'inégalité (4.18) on montre

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H} u)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left( \sqrt{\varepsilon} + H^k + \varepsilon H^{k-1} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'} \right).$$

Cela peut se réécrire sous la forme

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla(\pi_{\varepsilon,H} u)\|_{L^2(\Omega)^N} \leq C \left( H^k \left(1 + \frac{\varepsilon}{H}\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} (1 + \sqrt{H}) + \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{k'} \right).$$

Comme  $H > \varepsilon$  et  $H$  est borné, on en déduit l'inégalité voulue.  $\square$

## 4.4 Présentation des résultats obtenus avec cette méthode

### 4.4.1 Remarques préliminaires

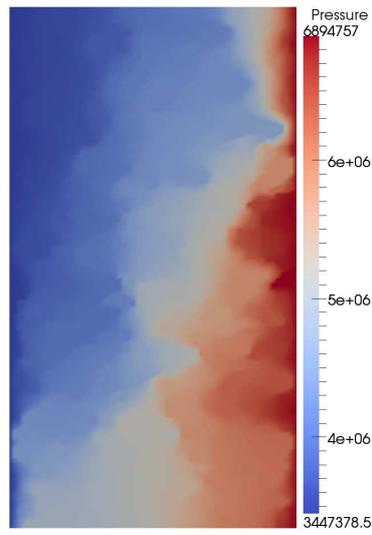
Comme nous allons le voir, la méthode Allaire-Brizzi, testée dans [AB05] sur des problèmes périodiques et aléatoires, permet d'obtenir une bonne approximation d'un champ de pression. Cette méthode ne peut toutefois pas être couplée à la résolution du problème de transport en saturations. En effet, les flux totaux donnés par cette méthode ne sont pas tels que la somme de leurs valeurs sur l'ensemble des faces d'une maille soit nulle. Or, cette condition est indispensable pour pouvoir assurer le principe du maximum lors du calcul des saturations par un des deux schémas volumes finis introduits précédemment.

### 4.4.2 Application à la couche 85 du cas SPE 10

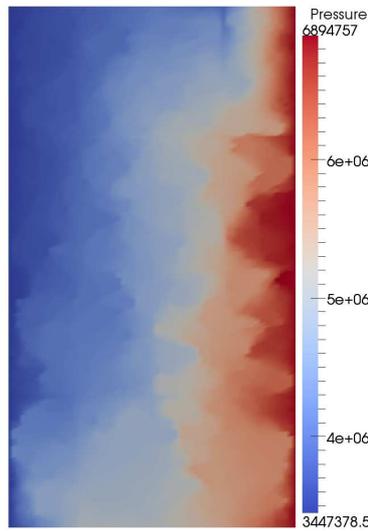
Considérons le cas présenté au paragraphe 2.5.1. Nous comparons ici les champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi et ceux obtenus avec une méthode éléments finis classique. Notons que, pour les résultats présentés ici, nous avons utilisé des méthodes aux éléments finis de Lagrange d'ordre 1 à l'échelle fine comme à l'échelle grossière ( $k = k' = 1$ ). La figure 4.4 montre les champs de pressions obtenus en fonction de la taille du maillage grossier. Le tableau 4.1 indique les différents écarts relatifs observés en normes  $L^2$  et  $H^1$  entre la solution fine et les solutions multi-échelles obtenues pour différents maillages grossiers. On peut ici remarquer que le raffinement du maillage grossier n'améliore pas toujours la qualité des résultats. Cela a également été observé dans un cas périodique dans [AB05] et se justifie théoriquement par la présence du terme dit de résonance en  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$  dans l'estimation d'erreur *a priori* donnée par le théorème 4.1.

Maillage grossier	Erreur relative en norme $L^2$	Erreur relative en norme $H^1$
$4 \times 4$	5,74%	5,75%
$6 \times 10$	5,14%	5,14%
$12 \times 20$	4,48%	4,48%
$12 \times 44$	6,64%	6,64%

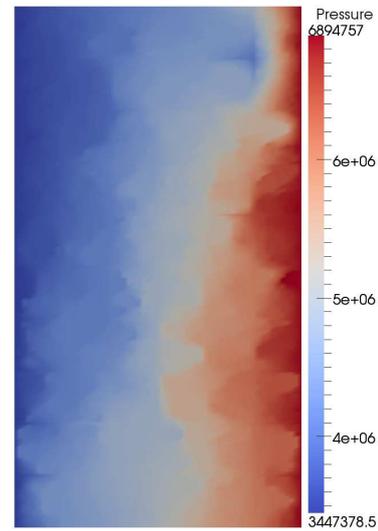
TABLE 4.1 – Écarts relatifs entre le champ de pressions obtenu avec une résolution fine et celui obtenu avec la méthode Allaire-Brizzi pour différentes tailles du maillage grossier



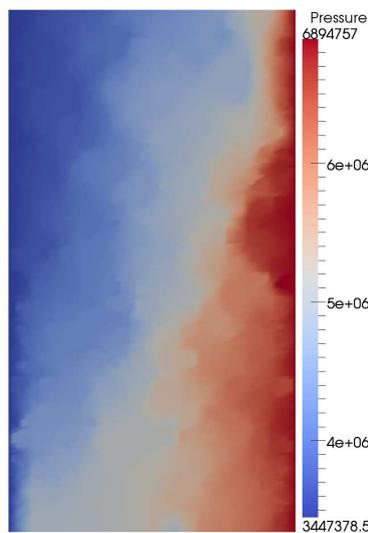
(a) Fine



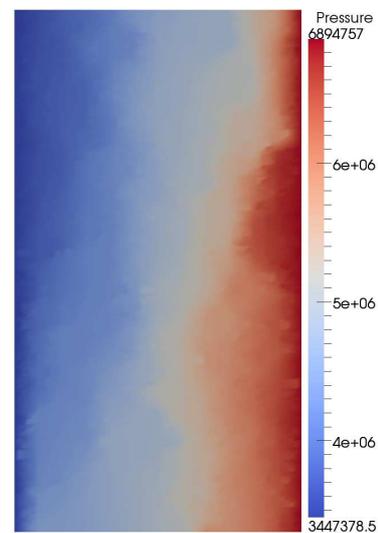
(b) 4×4



(c) 6×10



(d) 12×20



(e) 12×44

FIGURE 4.4 – Comparaison des champs de pression obtenus avec la méthode Allaire-Brizzi pour différents maillages grossiers.

