

Construction du modèle

Nous avons vu, lors de l'analyse des résultats expérimentaux réalisée dans la Partie 3, que les suspensions en écoulement peuvent se comporter de différentes manières selon leur vitesse moyenne. Ceci peut s'interpréter par des phénomènes de stratification, lorsque les effets de flottabilité sont suffisamment importants par rapport aux effets d'inertie. Nous cherchons maintenant à décrire, par des simulations numériques, les effets de la stratification sur les profils de vitesse et les pertes de charge en conduites horizontales.

Ce chapitre réalise, dans un premier temps, la description d'un modèle de comportement des suspensions en écoulement. Ce problème est ensuite mis en équations, puis écrit sous forme matricielle.

1. Description du problème physique

On considère un écoulement de fluide entre deux plaques planes parallèles supposées infinies. Le problème est alors invariant selon Oy . La direction principale de l'écoulement est Ox , axe horizontal. L'axe Oz est vertical ascendant, l'accélération de la pesanteur s'écrivant alors : $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$.

La suspension en écoulement est composée d'une phase liquide, de masse volumique et viscosité dynamique connues (ρ_l et μ_l), et d'une phase solide, de masse volumique connue (ρ_s) et différente de la masse volumique du liquide. Au cours de l'écoulement, les particules en suspension, soumises aux effets de la flottabilité et aux forces de traînée, peuvent adopter des trajectoires différentes des lignes de courant de la phase liquide. En effet, si les particules ont, par exemple, une masse volumique inférieure à celle du liquide, elles peuvent, peu à peu, se rassembler sur le haut de la conduite et donner lieu à un écoulement stratifié (Figure 4.1-1).

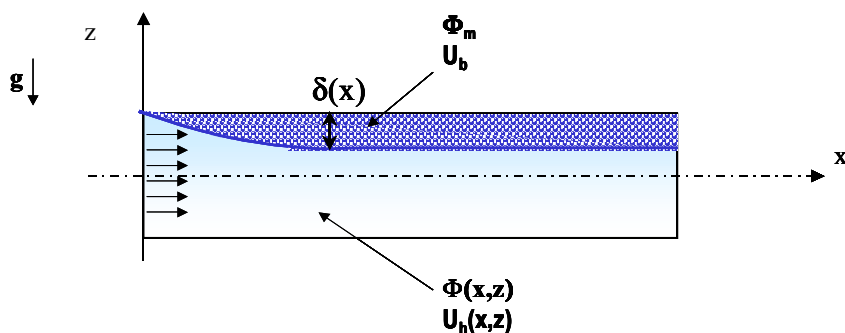


Figure 4.1-1 : Représentation de la formation d'un lit de particules ($\rho_l > \rho_s$)

Comme cela a été discuté dans le Chapitre 1.5, différents paramètres interviennent dans le phénomène de stratification. Ceux-ci sont récapitulés ci-après :

- $\Delta\rho = |\rho_l - \rho_s|$ La flottabilité est la force motrice de la stratification. Ses effets sont d'autant plus importants que la différence de densité entre les deux phases est grande.

- μ_l La stratification est d'autant moins importante que le fluide liquide est visqueux (effet des forces de traînée).
- \bar{U} La stratification sera d'autant moins importante que cette vitesse d'entraînement est grande. Elle agit, en effet, sur les forces de traînée et les phénomènes de mise en suspension par le cisaillement.
- D_p Les plus petites particules se comportent comme des traceurs de l'écoulement et suivent les lignes de courant, alors que les grosses ont plutôt tendance à sédimenter.

Nous cherchons ici à mettre en évidence l'influence de ces différents paramètres et à reconstruire les courbes d'écoulement de suspensions de diverses natures.

1.1. Principe de la modélisation

Les objectifs de la modélisation sont, d'une part, de mettre en évidence les effets de la stratification sur les profils de vitesse et les pertes de charge, d'autre part, de pouvoir définir des conditions de stratification ou de non-stratification d'une suspension sur une distance donnée. Le principe est alors de suivre l'évolution des profils de concentration en particules et de vitesse, en fonction de la distance parcourue par la suspension. Pour ce faire, nous allons construire une modélisation de l'écoulement par une méthode de différences finies sous MATLAB.

1.2. Hypothèses sur l'écoulement

On suppose que l'on a affaire à un écoulement 2D, laminaire, stationnaire, non établi dans le cas général, c'est-à-dire que la répartition des particules dans la conduite peut varier avec la distance parcourue par l'écoulement (x). On note U^l la vitesse de la phase liquide, et U^s celle de la phase solide. Les hypothèses simplificatrices utilisées pour la modélisation sont les suivantes :

H1 : Les particules solides et le liquide ont même vitesse axiale : U_x .

H2 : Les particules solides ont une vitesse de glissement verticale (selon Oz) induite par les forces de flottabilité ; elle est notée w .

H3 : Le mouvement de glissement des particules n'influence pas le mouvement de la phase liquide, dont la seule composante de vitesse non nulle est selon Ox :

$$\mathbf{U}^l \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{U}^l = U_x \mathbf{e}_x .$$

H4 : La vitesse du mélange s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{U}^m = U_x \mathbf{e}_x + w \Phi \mathbf{e}_z \tag{Eq. 4.1-1}$$

H5 : Le débit volumique s'exprime en fonction des vitesses moyennes de chaque phase et de la fraction volumique en particules sous la forme de l'Eq. 4.1-2.

$$Q = AU^m \cdot \mathbf{e}_x = A(\Phi \mathbf{U}^s \cdot \mathbf{e}_x + (1 - \Phi) \mathbf{U}^l \cdot \mathbf{e}_x) = AU_x \quad \text{Eq. 4.1-2}$$

H6 : On distingue deux types d'écoulements :

- Ecoulement homogène ou hétérogène, pour lesquels la fraction volumique en particules est, en tout point d'une section de conduite, inférieure à Φ_m .
- Ecoulement à lit mobile, pour lequel la fraction volumique en particules vaut Φ_m dans une partie de la conduite. Il s'agit du bas de la conduite si $\rho_s > \rho_l$, et du haut si $\rho_s < \rho_l$. Dans ce cas, les particules solides forment un lit compact dont l'épaisseur est notée δ .

2. Mise en équations

2.1. Caractéristiques physiques du mélange

La masse volumique du mélange est définie par l'Eq. 4.1-3 :

$$\rho^m = \Phi \rho_s + (1 - \Phi) \rho_l \quad \text{Eq. 4.1-3}$$

La viscosité du mélange peut être calculée à partir de différentes lois de viscosité des suspensions. Il faudra alors choisir une loi de viscosité adaptée au cas traité.

On peut, par exemple, choisir la relation semi-empirique proposée par Thomas (1965) (Eq. 4.1-4), valable localement en supposant que la suspension est homogène dans un petit volume au voisinage du point considéré.

$$\mu_0(x, z) = \mu_l \left(1 + 2,5\Phi(x, z) + 10,05\Phi(x, z)^2 + 0,00273 \exp(16,6\Phi(x, z)) \right) \quad \text{Eq. 4.1-4}$$

2.2. Equation de continuité

On définit la vitesse barycentrique du mélange (U_ρ) à partir de l'Eq. 4.1-5.

$$\rho^m U_\rho = \Phi \rho_s U^s + (1 - \Phi) \rho_l U^l \quad \text{Eq. 4.1-5}$$

La conservation de la masse du mélange impose l'équation Eq. 4.1-6, qui se simplifie en l'Eq. 4.1-7 avec nos hypothèses et notations.

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^m U_{\rho_x})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^m U_{\rho_z})}{\partial z} = 0 \quad \text{Eq. 4.1-6}$$

$$\frac{\partial \rho^m U_x}{\partial x} + \frac{\partial (\Phi \rho_s w)}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \text{div} (\rho^m U_\rho) = 0 \quad \text{Eq. 4.1-7}$$

2.3. Bilan local de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement peut être écrit pour la phase liquide, la phase solide ou pour le mélange. Dans les deux premiers cas, il fait intervenir une force d'interaction (F^{s-l}) entre les phases continue et dispersée ; il s'agit, entre autres, de la force de traînée. Dans le dernier cas, ces forces d'interactions n'apparaissent pas dans le bilan de quantité de mouvement, mais sont réintroduites par l'écriture d'un bilan de population. La vitesse de flottaison des particules (w) est donnée par l'équilibre des forces de traînée et de pesanteur.

Dans chaque cas, les décompositions des bilans de quantité de mouvement, selon les axes Ox et Oz s'écrivent :

❖ *Phase liquide :*

$$\begin{cases} U_x \frac{\partial}{\partial x} [(1-\Phi)\rho_l U_x] + (1-\Phi) \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left((1-\Phi)\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left((1-\Phi)\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = F_x^{s-l} \\ (1-\Phi) \frac{\partial P}{\partial z} + [(1-\Phi)\rho_l]g = F_z^{s-l} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.1-8}$$

❖ *Phase solide :*

$$\begin{cases} U_x \frac{\partial}{\partial x} [\Phi\rho_s U_x] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s U_x] + \Phi \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -F_x^{s-l} \\ U_x \frac{\partial}{\partial x} [\Phi\rho_s w] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s w] + \Phi \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + [\Phi\rho_s]g = -F_z^{s-l} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.1-9}$$

Par sommation des équations pour les phases solide et liquide (Eq. 4.1-8 et Eq. 4.1-9), on obtient l'équation de bilan de quantité de mouvement pour le mélange (

Eq. 4.1-10).

❖ *Mélange :*

$$\begin{cases} U_x \frac{\partial}{\partial x} [(\Phi\rho_s + (1-\Phi)\rho_l) U_x] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s U_x] + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = 0 \\ U_x \frac{\partial}{\partial x} [\Phi\rho_s w] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s w] + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (\Phi\rho_s + (1-\Phi)\rho_l)g = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 4.1-10}$$

Si l'on introduit la masse volumique du mélange, définie par l'Eq. 4.1-3, le bilan de quantité de mouvement pour le mélange se réécrit sous la forme de l' Eq. 4.1-11.

$$\begin{cases} U_x \frac{\partial}{\partial x} [\rho^m U_x] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s U_x] + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0 \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = 0 \\ U_x \frac{\partial}{\partial x} [\Phi\rho_s w] + w \frac{\partial}{\partial z} [\Phi\rho_s w] + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi\mu_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho^m g = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 4.1-11}$$

De plus, en considérant que la direction privilégiée de l'écoulement est selon Ox, on peut supposer que $w\Phi \ll U_x$ et $\frac{\partial U_x}{\partial x} \ll \frac{\partial U_x}{\partial z}$. Dans ce cas, l'Eq. 4.1-11 se simplifie en l'Eq. 4.1-

12. La projection selon Ox exprime que la perte de charge est liée aux frottements visqueux. Selon Oz, la pression est hydrostatique.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0(\Phi) \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial z} \approx -\rho^m g \end{cases} \quad \text{Eq. 4.1-12}$$

2.4. Bilan de matière

Le bilan de matière prend en compte l'advection des particules par l'écoulement selon Ox (leur diffusion étant négligée dans cette direction) et la diffusion des particules selon Oz. En régime stationnaire, il s'écrit alors sous la forme de l'Eq. 4.1-13.

$$\frac{\partial}{\partial x} (U(x)\Phi(x, z)) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(x, z) \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (w(x, z)\Phi(x, z)) \quad \text{Eq. 4.1-13}$$

Nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement laminaire. Le coefficient de diffusion moléculaire, lié au mouvement brownien, est donc négligeable tandis qu'un coefficient de diffusion turbulent n'est pas adapté. Nous supposons alors que le phénomène de diffusion sera induit par le cisaillement entre les couches, de différentes concentration en particules, glissant les unes sur les autres. Ce coefficient de diffusion est alors supposé proportionnel au cisaillement (Eq. 4.1-14), comme suggéré par Leighon et Acrivos (1986) (voir Chapitre 1.5).

$$D_\gamma \approx \frac{\dot{\gamma} D_p^2}{12} \Phi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \exp(8,8\Phi) \right) \quad \text{Eq. 4.1-14}$$

En ce qui concerne la vitesse de flottaison (ou vitesse de glissement des particules par rapport au fluide), il s'agit de la vitesse terminale de remontée d'une particule isolée dans un milieu au repos (w_0), modifiée par la présence des autres particules. En effet, les particules environnantes sont, de manière générale, un frein à la sédimentation si les particules élémentaires ne s'agrègent pas. L'expression retenue pour cette vitesse de flottaison est basée sur celle proposée par Richardson & Zaki (1954) (voir Chapitre 1.5). On se propose simplement d'en modifier l'expression en introduisant la fraction volumique de compactage maximal Φ_m . En effet, la vitesse de flottaison doit tendre vers 0 lorsque la fraction volumique en particules tend vers Φ_m . On obtient alors une expression de la vitesse de flottaison des particules sous la forme de l'Eq. 4.1-15.

$$w = w_0 \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_m} \right)^n \quad \text{Eq. 4.1-15}$$

avec $w_0 = \frac{D_p^2 (\rho_s - \rho_l) g}{18\mu_l}$, vitesse de Stokes.

L'exposant n , qui est un paramètre déterminé expérimentalement, est compris entre 2,3 et 4,7 pour des particules de forme quasiment sphérique.

La conservation de la phase solide s'écrit selon l'Eq. 4.1-16, en distinguant les couches compactes et hétérogènes dans le cas où l'écoulement est stratifié.

$$A\bar{\Phi} = A_b\Phi_m + \int_{A-A_b} \Phi(z) dz \quad \text{Eq. 4.1-16}$$

où $\bar{\Phi}$ est la fraction volumique moyenne en particules dans une section de la conduite, et A_b la section de passage du lit formé par les particules.

3. Conditions aux limites

3.1. Entrée de la conduite

Le profil de concentration à l'entrée de la conduite est imposé par l'utilisateur. Il peut être choisi uniforme afin de suivre l'évolution de la répartition des particules dans différentes sections de droite de conduite le long de l'écoulement.

Le profil de vitesse est ensuite calculé à partir du profil de concentration imposé à l'entrée de la conduite.

3.2. Vitesse

Des conditions limites sont imposées sur la vitesse de l'écoulement au niveau des parois de la conduite. On distingue deux cas, selon la valeur de la concentration en particules au proche voisinage de la paroi, notée Φ_p .

- Si $\Phi_p < \Phi_m$: La vitesse du mélange est nulle à la paroi, selon la condition de non-glissement. Dans ce cas, tout se passe comme s'il n'y avait que du liquide au voisinage de la paroi, la surface de contact entre les particules solides et la paroi étant négligeable devant la celle entre le fluide porteur et la paroi.
- Si $\Phi_p = \Phi_m$: Dans ce cas, un lit compact de particules s'est formé à l'une ou l'autre des parois. On suppose que celui-ci se déplace à une vitesse uniforme U_b , vitesse de glissement à la paroi, puisque les particules solides et la phase sont supposées avoir la même vitesse axiale U_x . On adopte alors une modélisation à deux couches de l'écoulement. La valeur de cette vitesse U_b est donnée par l'écriture de l'équilibre mécanique du lit mobile. La vitesse moyenne de la phase hétérogène, non compacte, est notée U_h .

La méthode de résolution est inspirée des travaux de Doron & Barnea (1987). Elle consiste à écrire le bilan macroscopique des forces appliquées sur chacune des deux couches : la phase hétérogène (Eq. 4.1- 17) et le lit mobile (Eq. 4.1- 18).

$$A_h \frac{dP}{dx} = -\tau_h S_h - \tau_i S_i \quad \text{Eq. 4.1- 17}$$

$$A_b \frac{dP}{dx} = -F_b + \tau_i S_i \quad \text{Eq. 4.1- 18}$$

A_h et A_b sont respectivement les sections de passage de la phase hétérogène et du lit mobile ; S_i , S_h et S_b les interfaces entre les deux phases, entre la phase hétérogène et la paroi, et entre le lit mobile et la paroi. Les expressions de ces différentes surfaces par unité de longueur sont explicitées dans le cas d'une conduite rectangulaire ou d'une conduite cylindrique dans l'Annexe 6.

L'introduction de la force F_b permet de prendre en compte les interactions entre la paroi de la conduite et le lit mobile. Elle se décompose en plusieurs termes, dont les significations sont rappelées ci-après, et s'exprime sous la forme globale donnée par l'Eq. 4.1- 19.

$$F_b = \underbrace{\tau_b S_b}_1 + \underbrace{\eta |\rho_s - \rho_l| g \Phi_m A_b}_2 + \underbrace{\eta \frac{\tau_i S_i}{\tan(\phi)}}_3 \quad \text{Eq. 4.1- 19}$$

- **1** : Force de résistance hydrodynamique entre le lit mobile et la paroi de la conduite ;
- **2** : Effet des forces de flottabilité (ou poids apparent du lit de particules) ;
- **3** : Transmission par le lit de la contrainte à l'interface lit mobile/hétérogène ; ϕ est l'angle de frottement interne ($0,35 \leq \tan(\phi) \leq 0,75$).

Alors que **1** apparaît lorsque le lit est mobile, **2** et **3** correspondent à des forces résistantes qui existent même si le lit est fixe. η est le coefficient de frottement de Coulomb et est supposé constant pour un solide donné.

Nous utiliserons pour nos calculs les valeurs de η et $\tan(\phi)$ proposées par Doron & Barnea (1995) : $\eta = 0,27$, $\tan(\phi) = 0,60$.

Doron & Barnea (1987) proposent d'exprimer la contrainte de cisaillement τ_b sous la forme de l'Eq. 4.1- 20.

$$\tau_b = \frac{1}{2} f_b \rho_b U_b^2 \quad \text{avec} \quad f_b = 0,046 \left(\frac{\rho_b U_b D_b}{\mu_b} \right)^{-0,2} \quad \text{et} \quad \text{Eq. 4.1- 20}$$

$$D_b = 4A_b / (S_b + S_i)$$

où f_b est le coefficient de perte de charge et D_b le diamètre hydraulique du lit compact de particules. L'expression de f_b donnée précédemment est valable pour un écoulement laminaire. Dans le cas où l'écoulement est turbulent, l'expression proposée est similaire, seuls les coefficients sont différents (Eq.4.1-21)

$$f_b = 16 \left(\frac{\rho_b U_b D_b}{\mu_b} \right)^{-1} \quad \text{Eq. 4.1- 21}$$

3.3. Concentration en particules

Le flux de particules est nul aux parois de la conduite, ces dernières ne pouvant être traversées.

La fraction volumique en particules ne peut dépasser la fraction volumique de compactage maximal, qui est, pour nous, un paramètre ajustable. En toute rigueur, celle-ci dépend des propriétés des particules en suspension et de l'intensité du cisaillement. On doit donc vérifier que, en tout point de la conduite : $0 \leq \Phi(x, z) \leq \Phi_m$.

On peut remarquer que l'intégration de l'Eq. 4.1-13 donne $\int_A \Phi U dz = \overline{\Phi} \overline{U} A$, ce qui exprime la conservation de la fraction de mélange pondérée par la vitesse.

4. Comparaison des deux types d'écoulements

Le Tableau 4.1-1 récapitule ce qui a été dit précédemment et met en évidence les différences entre les deux types d'écoulements considérés dans cette modélisation.

Alors que les équations sont valables dans toute la section de la conduite dans le cas A, nous introduisons un modèle à deux couches dans le cas B.

	Cas A Ecoulement homogène ou hétérogène	Cas B Ecoulement à lit mobile
Allure du profil de concentration		
Allure du profil de vitesse		
Méthode de résolution	L'Eq. 4.1-12 est vraie partout. La position du maximum de vitesse se déplace vers les zones de plus faible viscosité s'il existe un gradient de Φ .	Modèle à deux couches inspiré des travaux de Doron & Barnea (1987) L'Eq. 4.1-12 est vraie dans la zone hétérogène. U_b est calculée par un bilan des forces appliquées sur le lit compact.
Conditions limites	$U_p = 0$: Non-glissement de chaque côté	$U_p = 0$ dans la phase hétérogène U_b uniforme dans le lit de particules
Conservation du débit	$A\bar{U} = \int_A U(x, z) dz$	$A\bar{U} = A_b U_b + A_h U_h$ $A\Phi\bar{U} = A_b U_b \Phi_m + A_h U_h \Phi_h$ $A(1 - \Phi)\bar{U} = A_b U_b (1 - \Phi_m) + A_h U_h (1 - \Phi_h)$
Conservation de la matière	$A\bar{\Phi} = \int_A \Phi(x, z) dz$	$A\bar{\Phi} = A_b \Phi_m + \int_{A_h} \Phi(x, z) dz$
Notations		δ : épaisseur du lit mobile $U_b U_h$: vitesse moyenne du lit compact et de la phase hétérogène

Tableau 4.1-1: Comparaison des deux types d'écoulements

