

# Définition des problèmes modèles

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Problème modèle d'écoulement diphasique</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Définition du maillage et notations</b>	<b>32</b>
<b>2.3</b>	<b>Schéma IMPES</b>	<b>34</b>
2.3.1	Résolution du problème en pression	34
2.3.2	Résolution du problème en saturation	35
<b>2.4</b>	<b>Schéma IMPIMS</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>37</b>
2.5.1	Présentation des cas étudiés	37
2.5.2	Présentation des résultats	39

Ce chapitre a pour but d'introduire le problème physique modèle considéré dans ce manuscrit et, en particulier, aux chapitres 3, 4 et 5. Nous présentons également deux méthodes classiques de type volumes finis pour résoudre ce problème numériquement. Nous définissons ensuite dans ce chapitre des exemples de réservoirs et montrons les résultats obtenus avec ces deux méthodes. Ces résultats serviront de référence pour évaluer la qualité des méthodes multi-échelles développées aux chapitres suivants.

## 2.1 Problème modèle d'écoulement diphasique

Considérons un fluide diphasique composé d'une phase aqueuse notée  $w$  et d'une phase hydrocarbure notée  $o$  s'écoulant dans un milieu poreux. L'approche classique de modélisation d'un écoulement diphasique en milieu poreux se base sur l'application de la loi de Darcy [Dar56] pour chaque phase  $\alpha \in \{w, o\}$  avec des facteurs adimensionnels  $kr_\alpha$  devant la perméabilité  $k$ , appelés perméabilités relatives des phases, qui tiennent compte de la réduction de section de passage due à la présence des phases. Pour des fluides incompressibles, les équations décrivant la conservation du volume poreux et du volume des phases, la conservation de la quantité de mouvement, les forces capillaires existant entre les deux phases s'écrivent :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_o) + \operatorname{div} (v_o) = 0 \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} (S_w) + \operatorname{div} (v_w) = 0, \quad (2.1)$$

$$v_o = -\frac{kkr_o(S_o)}{\mu_o} \nabla P_o \quad v_w = -\frac{kkr_w(S_w)}{\mu_w} \nabla P_w, \quad (2.2)$$

$$P_o - P_w = Pc_{o,w} \quad (2.3)$$

$$S_o + S_w = 1 \quad (2.4)$$

où  $S_\alpha$  est la saturation de la phase,  $v_\alpha$  la vitesse d'écoulement de la phase dans le milieu poreux,  $\mu_\alpha$  la viscosité de la phase,  $P_\alpha$  la pression de la phase,  $Pc_{o,w}$  la pression capillaire et  $\phi$  la porosité du milieu.

Les perméabilités relatives  $kr_\alpha(S_\alpha)$  pour  $\alpha \in \{w, o\}$  sont des fonctions croissantes de la saturation seule. Dans notre modèle, on suppose que la perméabilité  $k$  et la porosité  $\phi$  varient en espace mais sont constantes

au cours du temps. On suppose de plus que les viscosités  $\mu_\alpha$  sont constantes et que les saturations vérifient les relations :

$$S_{or} \leq S_o \leq 1 - S_{wi} \quad \text{et} \quad S_{wi} \leq S_w \leq 1 - S_{or},$$

où  $S_{or}$  est la saturation résiduelle en huile et  $S_{wi}$  la saturation irréductible en eau.

La mobilité  $\lambda_\alpha$  de la phase  $\alpha \in \{o, w\}$  est définie par :

$$\lambda_\alpha(S_\alpha) = \frac{k r_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}$$

et la mobilité totale  $\lambda_T$  se définit comme :

$$\lambda_T = \lambda_w + \lambda_o.$$

Considérons  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  pour  $N = 2$  ou  $3$ , typiquement, le réservoir et  $T > 0$  un temps donné. En utilisant les définitions et hypothèses précédentes et en insérant (2.2) dans (2.1), le problème d'écoulement (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) considéré dans  $\Omega$  peut se reformuler comme suit :

$$\begin{cases} v + k(\lambda_T(S) \nabla P_w + \lambda_o(S) \nabla P_{c_{o,w}}(S)) & = 0 \\ \operatorname{div}(v) & = 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S)(v - k\lambda_o(S) \nabla P_{c_{o,w}}(S))) & = 0 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.5)$$

où  $S = S_w$  est la saturation en eau,  $v$  est la vitesse totale :

$$v = v_w + v_o = -k(\lambda_T \nabla P_w + \lambda_o \nabla P_{c_{o,w}})$$

et  $f_w$  est le flux fractionnaire en eau :

$$f_w(S) = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w}.$$

Dans la suite de ce mémoire, on suppose que la pression capillaire  $P_{c_{o,w}}$  est nulle. Ainsi, d'après la formule (2.3), la pression est la même dans les deux phases et on note

$$P = P_o = P_w.$$

Le système (2.5) peut alors être simplifié :

$$\begin{cases} v + k\lambda_T(S) \nabla P & = 0 \\ \operatorname{div}(v) & = 0 \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_w(S) v) & = 0. \end{cases} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2.6)$$

Soit  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  une frontière du domaine  $\Omega$ . La fermeture du problème (2.6) est assurée en imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P & = P_b(x) & \text{sur } \Gamma_D, \\ S & = S_b(x) & \text{sur } \Gamma_D \text{ si } v \cdot n < 0, \\ v \cdot n & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $n$  est la normale sortante au domaine  $\Omega$ , la pression  $P_b(x)$  et la saturation en eau  $S_b(x)$  sont données.

## 2.2 Définition du maillage et notations

Soit  $\mathcal{K}_h$  un ensemble fini de polyèdres non vides, ouverts et disjoints formant une partition de  $\Omega$  telle que  $h = \max_{k \in \mathcal{K}_h} h_k$  où  $h_k$  est le diamètre de l'élément  $k \in \mathcal{K}_h$ . L'ensemble  $\mathcal{K}_h$  forme donc un maillage de

$\Omega$  dont les éléments  $k \in \mathcal{K}_h$  sont les mailles. On définit  $N_h$  le nombre de mailles dans le maillage  $\mathcal{K}_h$ . De même, on note  $\mathcal{N}_h$  l'ensemble de nœuds et  $\mathcal{F}_h$  l'ensemble des faces du maillage.

On définit  $\mathcal{N}_{h,k}^i$  l'ensemble des nœuds  $n \in \mathcal{N}_h$  qui se trouvent sur le bord de la maille  $k \in \mathcal{K}_h$ . De plus, on définit  $\mathcal{F}_h^i$  l'ensemble des faces *internes* du maillage

$$\mathcal{F}_h^i = \{\sigma \subset \partial k_1 \cap \partial k_2 \mid k_1, k_2 \in \mathcal{K}_h\}.$$

De même, on note  $\mathcal{F}_h^b$  l'ensemble des faces *de bords* :

$$\mathcal{F}_h^b = \{\sigma \subset \partial k \cap \partial \Omega \mid k \in \mathcal{K}_h\}.$$

L'ensemble des faces  $\mathcal{F}_h$  du maillage  $\mathcal{K}_h$  vérifie alors  $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$ . On note  $\mathcal{F}_{h,k}$  l'ensemble des faces d'une maille  $k \in \mathcal{K}_h$  :

$$\mathcal{F}_{h,k} = \{\sigma \in \mathcal{F}_h \mid \sigma \subset \partial k\}.$$

De plus, on note  $\mathcal{F}_{h,k}^i$  l'ensemble des faces internes d'une maille  $k \in \mathcal{K}_h$  :

$$\mathcal{F}_{h,k}^i = \mathcal{F}_{h,k} \cap \mathcal{F}_h^i,$$

et  $\mathcal{F}_{h,k}^b$  l'ensemble des faces de bord d'une maille  $k \in \mathcal{K}_h$  :

$$\mathcal{F}_{h,k}^b = \mathcal{F}_{h,k} \cap \mathcal{F}_h^b.$$

Dans le problème présenté au paragraphe précédent, des conditions de Dirichlet sont imposées sur un bord  $\Gamma_D \subset \Omega$ . On note alors  $\mathcal{F}_h^D$  l'ensemble des faces de bord incluses dans  $\Gamma_D$  :

$$\mathcal{F}_h^D = \{\sigma \in \mathcal{F}_h^b \mid \sigma \subset \Gamma_D\}$$

et  $\mathcal{F}_{h,k}^D$  l'ensemble des faces du bord de la maille  $k \in \mathcal{K}_h$  incluses dans  $\Gamma_D$  :

$$\mathcal{F}_{h,k}^D = \{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^b \mid \sigma \subset \Gamma_D\}.$$

On introduit également les ensembles :

$$\mathcal{F}_h^{i\vee D} = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{h,k}^{i\vee D} = \mathcal{F}_{h,k}^i \cup \mathcal{F}_{h,k}^D.$$

De manière symétrique à  $\mathcal{F}_{h,k}$ , on note  $\mathcal{K}_{h,\sigma}$  l'ensemble des mailles  $k \in \mathcal{K}_h$  situées de part et d'autre d'une face  $\sigma \in \mathcal{F}_h$  :

$$\mathcal{K}_{h,\sigma} = \{k \in \mathcal{K}_h \mid \sigma \subset \partial k\}.$$

En particulier, l'ensemble  $\mathcal{K}_{h,\sigma}$  est composé exactement de deux éléments si  $\sigma \in \mathcal{F}_h^i$  et d'un élément si  $\sigma \in \mathcal{F}_h^b$ . Pour chaque interface  $\sigma \in \mathcal{F}_h^i$ , nous définissons une normale unitaire  $\mathbf{n}_\sigma$  orientée de manière arbitraire mais fixée. Pour une maille  $k \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$ , on note  $\mathbf{n}_{\sigma,k}$  la normale à  $\sigma$  unitaire sortante de  $k$  et on définit :

$$\varepsilon_{\sigma,k} = \mathbf{n}_{\sigma,k} \cdot \mathbf{n}_\sigma$$

valant 1 si la normale de la face est sortante pour  $k$  et  $-1$  sinon. Sur une face de bord  $\sigma \in \mathcal{F}_h^b$ ,  $\mathbf{n}_\sigma$  est la normale sortante de  $\Omega$ .

Pour une maille  $k \in \mathcal{K}_h$ , on identifie le centre de la maille  $\mathbf{x}_k$ . De même, pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_h$ ,  $\mathbf{x}_\sigma$  est le centre de la face. Pour toute maille  $k \in \mathcal{K}_h$ , et pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}$ , on note :

$$d_{k,\sigma} = \text{dist}(\mathbf{x}_k, \sigma).$$

De même, pour tous  $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_h$ , on note :

$$d_{k_1, k_2} = \text{dist}(\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}).$$

Pour une face  $\sigma \in \mathcal{F}_h$ , on note  $|\sigma|$  l'aire de la face. De la même manière, pour une maille  $k \in \mathcal{K}_h$ ,  $|k|$  correspond au volume de la maille.

**Remarque 2.1 :** Les maillages que nous considérons dans toute la suite sont, en pratique, cartésiens. Toutefois, nos travaux s'appliquent également à des maillages non structurés.

## 2.3 Schéma IMPES

On présente ici un schéma numérique classique de résolution du problème (2.6) sur le maillage fin  $\mathcal{K}_h$  visant à nous fournir des résultats de référence. En particulier, on utilise le schéma *IMPES* (*Implicit Pressure, Explicit Saturation* [AS79], [SGJ61] et [SZC59]) qui consiste à découpler les résolutions en pression et saturation. Le principe de ce schéma est d'effectuer une intégration en temps de type Euler en choisissant d'être implicite en pression et explicite en saturation. À l'itération  $n$ , le système (2.6) se réécrit comme suit :

$$\operatorname{div} (v (P^{n+1}, S^n)) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \quad (2.8)$$

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \operatorname{div} (f_w(S^n) v (P^{n+1}, S^n)) = 0 \quad (2.9)$$

associé aux conditions aux limites présentées dans l'équation (2.7),  $\delta t$  étant le pas de discrétisation en temps de la méthode.

Dans la suite, on définit, de manière classique, pour une grandeur  $X$ , pour une maille  $k \in \mathcal{K}_h$  et un temps  $t^n = n \delta t$  :

$$X_k^n = X(\mathbf{x}_k, t^n).$$

Similairement, pour une face  $\sigma \in \mathcal{F}_h$  et un temps  $t^n = n \delta t$ , on note :

$$X_\sigma^n = X(\mathbf{x}_\sigma, t^n).$$

### 2.3.1 Résolution du problème en pression

On s'intéresse, dans un premier temps, au calcul de la pression  $P^{n+1}$ . Pour cela, l'équation (2.8) est intégrée sur une maille  $k \in \mathcal{K}_h$ . On applique ensuite la formule de Green :

$$\int_k \operatorname{div} v \, dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^b} \int_\sigma v \cdot \mathbf{n}_\sigma \, ds.$$

On choisit ici de calculer les flux diffusifs par un schéma volumes finis deux points [EGH00] consistant pour les maillages cartésiens (ou de type Voronoï). Dans le cadre de maillages non structurés, les flux peuvent être approchés par des schémas multi-points [ABBM98], [ER98].

#### Flux diffusifs sur les faces internes

Soit  $k \in \mathcal{K}_h$ . Pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i$  telle que  $k, l \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$ , on a :

$$\int_\sigma v (P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} \, ds \simeq \Phi_{k,\sigma}^i$$

avec

$$\Phi_{k,\sigma}^i = \lambda_{T,\sigma}^i T_\sigma^i (P_k^{n+1} - P_l^{n+1})$$

où la transmissivité  $T_\sigma^i$  est calculée par une moyenne harmonique :

$$T_\sigma^i = |\sigma| \frac{k_k k_l}{k_l d_{k,\sigma} + k_l d_{l,\sigma}}$$

et la mobilité totale  $\lambda_{T,\sigma}^i$  est calculée au moyen d'un décentrement amont par rapport au gradient de pression :

$$\lambda_{T,\sigma}^i = \begin{cases} \lambda_T(S_k^n) & \text{si } P_k^{n+1} \geq P_l^{n+1} \\ \lambda_T(S_l^n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Flux diffusifs sur les faces de bord

Soit  $k \in \mathcal{K}_h$ . Pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D$ , on a :

$$\int_{\sigma} v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{\sigma} ds \simeq \Phi_{k,\sigma}^D$$

avec

$$\Phi_{k,\sigma}^D = \lambda_{T,\sigma}^D T_{\sigma}^D (P_k^{n+1} - P_{\sigma})$$

où la transmissivité  $T_{\sigma}^D$  est donnée par :

$$T_{\sigma}^D = |\sigma| \frac{k_k}{d_{k,\sigma}} \text{ pour } k \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$$

et la mobilité totale  $\lambda_{T,\sigma}^D$  est calculée au moyen d'un décentrement amont par rapport au gradient de pression :

$$\lambda_{T,\sigma}^D = \begin{cases} \lambda_T(S_k^n) & \text{si } P_k^{n+1} \geq P_{\sigma} \\ \lambda_T(S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Résolution du système linéaire

Finalement, l'équation discrète associée à la maille  $k \in \mathcal{K}_h$  pour le problème en pression est :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} \Phi_{k,\sigma}^i + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} \Phi_{k,\sigma}^D = 0. \quad (2.10)$$

Après assemblage, on obtient un système linéaire  $Ax = b$  de taille  $N_h$  où :

- $x \in \mathbb{R}^{N_h}$  est un vecteur dont les composantes sont les valeurs de la pression  $P^{n+1}$  dans chaque maille  $k \in \mathcal{K}_h$  ;
- $A \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$  est une matrice symétrique définie positive.

Notons que le système a une solution unique si  $|\Gamma_D| > 0$ .

### 2.3.2 Résolution du problème en saturation

Une fois la pression  $P^{n+1}$  obtenue par résolution du problème (2.8), il convient de calculer la saturation  $S^{n+1}$  en résolvant l'équation de transport (2.9). L'intégration de l'équation (2.9) sur une maille  $k \in \mathcal{K}_h$  donne :

$$\int_k \left( \phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \text{div} (f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n)) \right) dx = 0.$$

Puis, en appliquant la formule de la divergence :

$$\int_k \left( \phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} \right) dx + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_k} \int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} d\sigma = 0.$$

Dans la suite, on introduit la notation  $(u)^+ = \max(u, 0)$  et  $(u)^- = \min(u, 0)$ .

### Terme d'accumulation

On fait l'approximation suivante du terme d'accumulation :

$$\int_k \left( \phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} \right) dx \simeq |k| \phi_k \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\delta t}.$$

### Termes de flux

Soit une maille  $k \in \mathcal{K}_h$ . Pour toute face  $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i$  telle que  $k, l \in \mathcal{K}_{h,\sigma}$ , le flux est discrétisé de la manière suivante :

$$\int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{k,\sigma} d\sigma \simeq F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n)$$

avec

$$F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n) = f_w(S_k^n) (\Phi_{k,\sigma}^i)^+ + f_w(S_l^n) (\Phi_{k,\sigma}^i)^-.$$

Pour les faces  $\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D$ , on a :

$$\int_{\sigma} f_w(S^n) v(P^{n+1}, S^n) \cdot \mathbf{n}_{\sigma} d\sigma \simeq F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma}))$$

avec

$$F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) = f_w(S_k^n) (\Phi_{k,\sigma}^D)^+ + f_w(S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) (\Phi_{k,\sigma}^D)^-.$$

### Résolution

Finalement, l'équation discrète associée à la maille  $k \in \mathcal{K}_h$  pour le problème en saturation est :

$$|k| \phi_k \frac{S_k^{n+1} - S_k^n}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^i + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^D = 0.$$

Les saturations sont calculées de façon explicite et ne nécessitent pas l'inversion d'un système linéaire :

$$S_k^{n+1} = S_k^n - \frac{\delta t}{|k| \phi_k} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^i(S_k^n, S_l^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^D(S_k^n, S_b(\mathbf{x}_{\sigma})) \right). \quad (2.11)$$

On rappelle que les valeurs des saturations  $S^{n+1}$  restent bornées si le pas de temps vérifie une condition CFL [CFL28].

**Théorème 2.1.** *Soit  $S^{n+1}$  le champ de saturation vérifiant le problème (2.9). On suppose que le pas de temps  $\delta t$  vérifie la condition suivante*

$$\delta t \leq \frac{\inf_{k \in \mathcal{K}_h} (|k| \phi_k)}{\sup_{k \in \mathcal{K}_h} \left( - \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} (F_{w,\sigma}^i)^- - \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} (F_{w,\sigma}^D)^- \right) \sup_{S \in [0,1]} (f'_w(S))}. \quad (2.12)$$

Alors

$$\forall n \geq 0, \forall k \in \mathcal{K}_h, \quad \min(S^0, S_b) \leq S_k^n \leq \max(S^0, S_b).$$

La condition (2.12) est appelée condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

## 2.4 Schéma IMPIMS

Dans cette partie, on présente le schéma *IMPIMS* (*IMplicit Pressure, IMplicit Saturation* [Far98] et [Coa00]). Comme pour le schéma IMPES, les résolutions en pression et saturation sont découplées. Dans ce schéma l'intégration en temps est aussi de type Euler, la pression est toujours implicite mais la saturation est implicite pour calculer le flux fractionnaire. On résout donc le système

$$\operatorname{div}(v(P^{n+1}, S^n)) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T) \quad (2.13)$$

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\delta t} + \operatorname{div}(f_w(S^{n+1}) v(P^{n+1}, S^n)) = 0. \quad (2.14)$$

Ainsi, la pression est calculée de la même manière que dans le paragraphe 2.3. Cela nous permet d'obtenir les flux de la vitesse totale  $v$  à travers les faces  $\sigma \in \mathcal{F}_h^{i \vee D}$  (les flux à travers les autres faces étant nuls). Pour calculer les saturations à l'instant  $n + 1$ , on effectue une discrétisation en volumes finis de l'équation (2.14). Pour toute maille  $k \in \mathcal{K}_h$ , on a alors

$$S_k^{n+1} = S_k^n - \frac{\delta t}{|k| \phi_k} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^i} F_{w,\sigma}^{i,n+1} + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_{h,k}^D} F_{w,\sigma}^{D,n+1} \right). \quad (2.15)$$

avec les flux discrets définis en utilisant un décentrement amont de la même manière qu'au paragraphe 2.3 :

$$\begin{aligned} F_{w,\sigma}^{i,n+1} &= f_w(S_k^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^i)^+ + f_w(S_l^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^i)^- \\ F_{w,\sigma}^{D,n+1} &= f_w(S_k^{n+1}) (\Phi_{k,\sigma}^D)^+ + f_w(S_b(\mathbf{x}_\sigma)) (\Phi_{k,\sigma}^D)^- \end{aligned}$$

Le calcul des saturations  $S_k^{n+1}$  nécessite la résolution d'un système non linéaire du fait de l'expression de la fonction  $f_w$ . Cette résolution s'effectue par une méthode de Newton [WR67]. En évaluant les flux de manière implicite, la solution obtenue respecte le principe du maximum quel que soit le pas de temps choisi.

**Théorème 2.2.** *Soit  $\delta t > 0$ . Soit  $S^{n+1}$  le champ de saturation vérifiant le problème (2.15). Alors*

$$\forall n \geq 0, \forall k \in \mathcal{K}_h, \quad \min(S^0, S_b) \leq S_k^n \leq \max(S^0, S_b).$$

## 2.5 Résultats numériques

Tous les résultats présentés dans ce paragraphe ainsi que ceux du paragraphe 5.4 ont été obtenus à partir d'un code prototype écrit en *C++* basé sur la plate-forme *Arcane* [GL09]. Plus de détails sur cette plate-forme et notre implémentation sont présentés au chapitre 6.

### 2.5.1 Présentation des cas étudiés

#### Présentation du cas SPE 10

Pour comparer les différents schémas de discrétisation du modèle *Dead-Oil* introduit dans ce manuscrit, nous considérons le cas présenté dans [CB01] que nous désignerons par cas *SPE 10*. Ce cas a été introduit pour comparer différentes méthodes d'*upscaling*. Il est composé de 60 mailles dans la direction  $x$ , 220 mailles dans la direction  $y$  et 85 mailles dans la direction  $z$ . Cela correspond à un total de plus d'un million de mailles. Chaque maille est un parallélépipède de taille 6,096 m dans la direction  $x$ , 3,048 m dans la direction  $y$  et 0,6096 m dans la direction  $z$ . Les autres paramètres du modèle sont fixés de la façon suivante :

- $S_{wi} = S_{or} = 0,2$ ,
- $\mu_o = 1$  cp et  $\mu_w = 0,3$  cp ,
- 

$$kr_w = \left( \frac{S - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^2 \quad \text{et} \quad kr_o = \left( \frac{1 - S - S_{or}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \right)^2.$$

Contrairement au jeu de données original, les perméabilités utilisées pour nos tests sont scalaires. Ainsi, les valeurs définies sur la direction  $x$  dans [CB01] seront, dans notre cas, celles utilisées pour toutes les directions. De plus, pour éviter de trop grands écarts de perméabilités, on considère que toutes les perméabilités inférieures à 0,1 millidarcy sont égales à 0,1 millidarcy. La porosité a été choisie uniforme et égale à 1.

Pour ces premiers résultats, on se limite à un cas à deux dimensions correspondant à la couche 85 du cas SPE 10. Les perméabilités de cette couche sont représentées sur la figure 2.1 (toutes les cartes dans ce manuscrit sont en unités SI). Le cas à trois dimensions complet sera utilisé dans le chapitre 6 pour comparer les temps de calculs de chaque méthode.

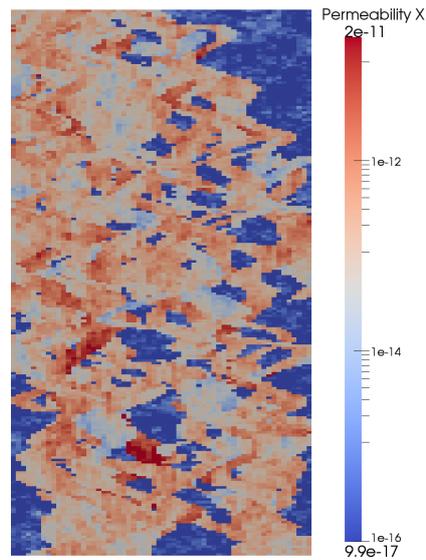


FIGURE 2.1 – Perméabilités de la couche 85 du cas SPE 10

### Présentation d'un cas fracturé

Nous considérons également un deuxième cas réservoir que nous dénommons *cas fracturé*. Ce cas modélise un réservoir fracturé pour lequel les fluides se déplacent majoritairement le long des fractures. Ce cas comporte 200 mailles dans la direction  $x$  et 100 mailles dans la direction  $y$ . Chaque maille est un carré de 100 m de côté. Le champ de perméabilité est très hétérogène et ses valeurs sont très différentes selon la direction considérée (voir figure 2.2).

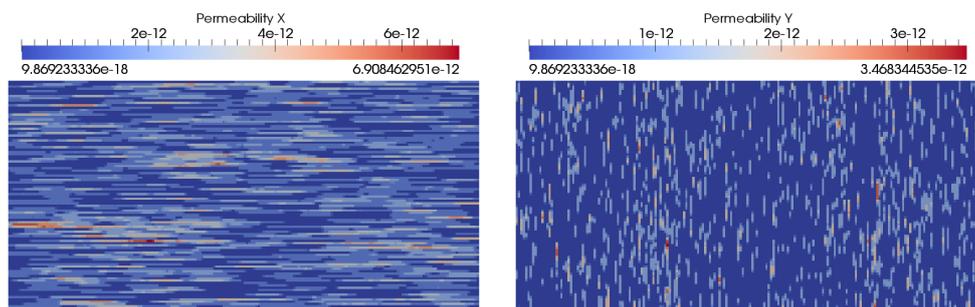


FIGURE 2.2 – Perméabilités dans les directions  $x$  et  $y$  pour le cas fracturé

Dans ce cas, on considère un champ de porosité également très hétérogène (voir figure 2.3). Les autres paramètres physiques sont les mêmes que ceux utilisés pour le cas SPE 10.

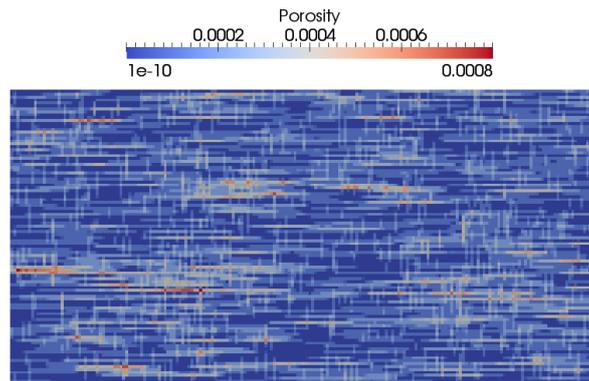


FIGURE 2.3 – Porosités du cas fracturé

### 2.5.2 Présentation des résultats

Les solutions présentées ici seront comparées avec celles obtenues avec les différentes méthodes multi-échelles dans la suite.

#### Couche 85 du cas SPE 10

On considère la couche 85 du cas SPE 10 présenté au paragraphe précédent. Dans ce cas, on impose une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord de droite. Sur le bord de gauche, une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0 sont fixées. Sur les autres bords, une condition de flux nul est imposée.

La figure 2.4 présente les champs de pression et de saturation obtenus lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 25% du volume poreux total. Le solveur linéaire utilisé pour résoudre le système en pression est un solveur itératif *BiCGStab* [vdV92] avec un préconditionneur de type *AMG* (Algebraic MultiGrid [Stü01]). Pour la méthode IMPIMS, ce solveur est également utilisé dans le calcul des saturations pour résoudre le système linéaire à chaque itération de la méthode de Newton mais le préconditionneur est dans ce cas de type *ILU0* [MvdV77].

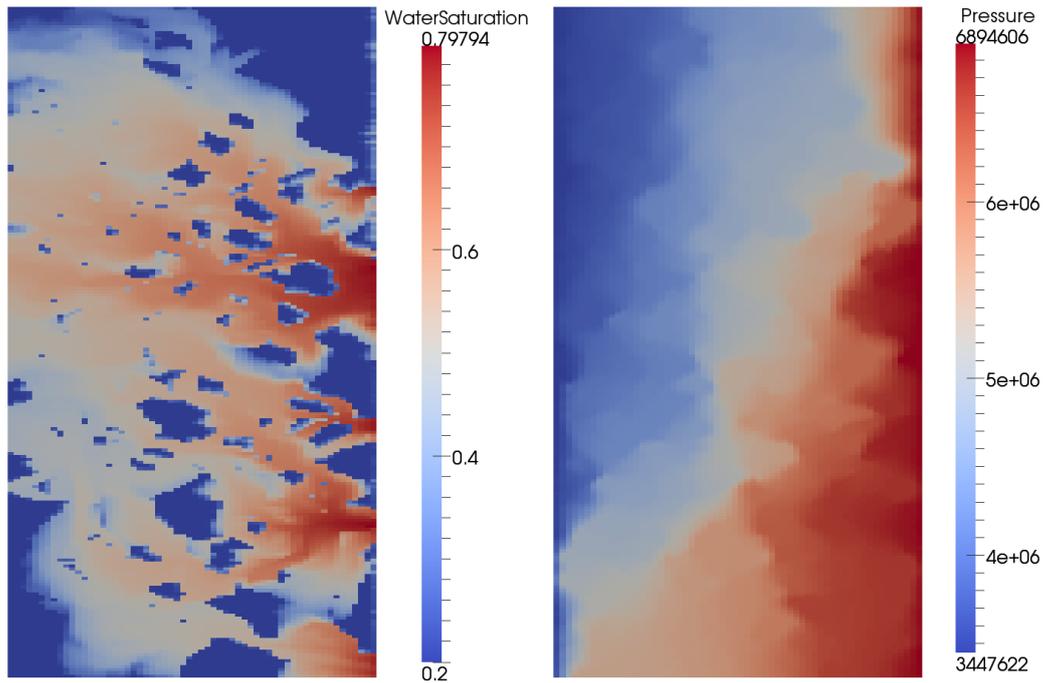


FIGURE 2.4 – Résultats obtenus avec le solveur fin pour la couche 85 du cas SPE 10

### Cas fracturé

On reprend le cas fracturé présenté au paragraphe 2.5.1. On impose une pression de 1000 psi et une saturation en eau égale à 1 sur le bord de gauche. Sur le bord de droite, une pression de 500 psi et une saturation en eau égale à 0 sont fixées. Sur les autres bords, une condition de flux nul est imposée.

La figure 2.5 présente les champs de pression et de saturation obtenus lorsque le volume poreux d'eau injecté est égal à 10% du volume poreux total. Les solveurs utilisés sont les mêmes que dans le cas précédent.

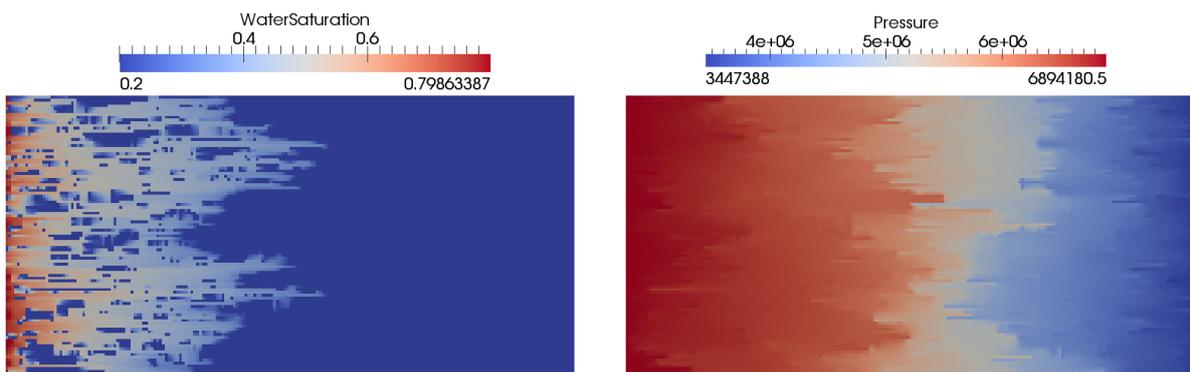


FIGURE 2.5 – Résultats obtenus avec le solveur fin pour le cas fracturé