Homogénéisation d'un problème de transport

Sommaire

Une fois les pressions et les vitesses calculées avec la méthode multi-échelle définie au chapitre5, le transport des fluides peut être réalisé en appliquant un schéma explicite en saturation à l'échelle fine comme pour la discrétisation IMPES (voir paragraphe 2.3). Cependant, pour obtenir des valeurs de saturation en eau comprises entre S_{wi} et $1 - S_{or}$, c'est-à-dire pour respecter le principe du maximum, la condition CFL (2.12) sur le pas de temps doit être respectée ce qui peut conduire à des pas de temps relativement faibles. On peut également appliquer un schéma IMPIMS (voir paragraphe 2.4) mais cela revient à résoudre un système non linéaire de très grande taille. Une méthode multi-échelle simulant un transport à l'échelle grossière par un schéma explicite avant de reconstruire la solution en saturation à l'échelle fine permet d'augmenter les valeurs de ce pas de temps.

7.1 Construction du problème modèle

Le problème en saturation que l'on souhaite résoudre est la troisième équation du système (2.5) :

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(f_w(S)\left(v - k\lambda_o(S)\nabla Pc_{o,w}(S)\right)\right) = 0.$$

Ce problème est, *a priori*, non linéaire. Dans ce travail, nous nous limitons à un problème de transport linéaire sur un ouvert $(0,\mathcal{T}) \times \Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\mathcal{T} > 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho^*(x^*)\dfrac{\partial c^*}{\partial t^*}(t^*,x^*) + b^*(x^*)\cdot\nabla c^*(t^*,x^*) - \operatorname{div}\left(A^*(x^*)\nabla c^*(t^*,x^*)\right) & = & 0 \text{ dans } (0,\mathcal{T})\times\Omega \\ c^*(0,x^*) & = & c^0(x^*) \text{ dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Dans (7.1), ρ^* représente la porosité, b^* la vitesse, A^* le tenseur de diffusion, c^* une concentration et on suppose que

$$\operatorname{div}(b^*) = 0.$$

Cette équation modèle intervient, par exemple, lorsque l'on simule l'évolution de la concentration d'un traceur à l'intérieur d'une phase (voir [Bea88]). Dans ce cas, A^* correspond au coefficient de diffusion moléculaire et de dispersion et b^* est la vitesse de déplacement de la phase. L'objectif est ici de savoir sous quelle forme peut se mettre cette équation si on considère que les différentes propriétés varient à une échelle beaucoup plus faible que la taille du domaine.
Nous allons maintenant mettre à l'échelle le système (7.1) comme cela a été présenté dans [AR07], [DP05] et [ABMP10]. La variable x^* représente, ici, la variable d'espace à l'échelle fine. Nous notons l une longueur caractéristique de cette échelle et L_R une longueur caractéristique de la taille du domaine Ω. Nous définissons alors $\varepsilon = \frac{l}{L}$ qui est supposé faible. Nous prenons ensuite T_R pour définir notre échelle de temps. Nous notons alors ρ_R, b_R, c_R, A_R les grandeurs caractéristiques de la porosité, la vitesse, la concentration et la diffusion. Les variables adimensionnées sont alors définies ainsi

$$\begin{array}{l} x = \frac{x^*}{L_R}, \quad t = \frac{t^*}{T_R}, \quad \rho^\varepsilon(x) = \frac{\rho^*(x^*)}{\rho_R}, \\ b^\varepsilon(x) = \frac{b^*(x^*)}{b_R}, \quad A^\varepsilon(x) = \frac{A^*(x^*)}{A_R}, u_\varepsilon(t,x) = \frac{c^*(t^*,x^*)}{c_R}. \end{array}$$

Le système d'équations sans dimension obtenu à partir de (7.1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{b_R T_R}{L_R \rho_R} b^\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \frac{A_R T_R}{L_R^2 \rho_R} \mathrm{div}_x \left(A^\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon\right) & = & 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{7.2}$$

où $\Omega_\varepsilon = \left\{ \frac{x^*}{L_R} \mid x^* \in \Omega \right\}$ et $T = \frac{\mathcal{T}}{T_R}$. Pour ce problème on peut définir un nombre de Péclet sur chaque échelle :

- à l'échelle fine, on note
$$\mathbf{Pe}_{loc} = \frac{l b_R}{A_R},$$
- à l'échelle macroscopique, on définit
$$\mathbf{Pe} = \frac{L_R b_R}{A_R}.$$

On a alors $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{Pe}_{loc}$. Nous allons nous placer dans le cas où
- $Pe_{loc} = 1$,
- et $T_R = \frac{L_R^2 \rho_R}{A_R}$.

On considère donc une échelle de temps correspondant au temps de diffusion et on suppose que la diffusion est du même ordre que la convection à l'échelle fine. Le système (7.2) se réécrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \rho^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{Pe}\, b^\varepsilon \cdot \nabla_x u_\varepsilon - \mathrm{div}_x \left(A^\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon\right) & = & 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right.$$

Le nombre de Péclet local étant égal à 1, $\mathbf{Pe} = \frac{1}{\varepsilon}$, et le système initial (7.1) se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \mathrm{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon\right) & = & 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \tag{7.3}$$

Dans la suite, on considérera uniquement ce problème adimensionné.

7.2 Remarques préliminaires sur la mise à l'échelle

Des travaux de recherche ont également été menés pour homogénéiser le problème de transport (7.1) en considérant des échelles différentes. Ainsi, on peut remarquer que, dans les travaux présentés par A. Bourgeat, M. Jurak et A. Piatnitski dans [BJP03], l'équation étudiée est sous la forme

$$\rho^\varepsilon(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \varepsilon \mathrm{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon\right) = 0. \tag{7.4}$$

Pour arriver à cette équation, l'échelle d'espace et le nombre de Péclet choisis sont les mêmes que dans notre cas mais l'échelle de temps est différente : un temps d'ordre 1 dans (7.4) est équivalent à un temps d'ordre ε dans (7.3). En fait, l'échelle de temps choisie dans [BJP03] est celle correspondant au temps de convection. Cela reviendrait à prendre $T_R = \frac{L_R \rho_R}{b_R}$ dans la mise à l'échelle faite au paragraphe précédent. Les résultats obtenus avec ces hypothèses montrent que la solution homogénéisée est uniformément nulle à partir d'un temps assez long même si on considère les termes d'ordre supérieurs dans le développement asymptotique. Cela justifie donc notre choix d'échelle temporelle.

Dans [HL09], T.Y. Hou et D. Liang étudient l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + b^\varepsilon(x) \cdot \nabla u_\varepsilon - \varepsilon^m \mathrm{div}\left(A^\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon\right) & = & 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \end{array} \right. \tag{7.5}$$

où $m \in [2, +\infty[$. L'échelle en temps est ici la même que dans [BJP03] mais le nombre de Péclet local considéré est de l'ordre de ε^{-m+1}.

7.3 Définition du problème périodique

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que les coefficients ρ^ε, b^ε et A^ε sont périodiques en espace de période ε, et nous rappelons un certain nombre de résultats d'homogénéisation connus. Nous démontrons également une nouvelle estimation *a priori* (Théorème 7.4). Ces résultats sont utilisés au chapitre suivant pour construire une méthode multi-échelle applicable à des cas non périodiques comme cela a été fait dans [AB05] pour des problèmes elliptiques.
Nous considérons le problème de transport qui consiste à chercher u_ε dans l'espace

$$L^2\left(\mathbb{R}_+, H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$$

solution de

$$\left\{ \begin{array}{rll} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u_\varepsilon - \mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon\right) & = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0,x) & = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{7.6}$$

avec les hypothèses suivantes :
Hypothèses 7.1 :

1. Les fonctions b, A et ρ sont Y-périodiques,
2. $\rho \in L^\infty(Y)$,
3. Les fonctions b, A et ρ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et les interfaces de discontinuités sont de classe $\mathcal{C}^2$,
4. $\mathrm{div}(b) = 0$,
5. il existe $\rho_{min} > 0$ tel que $\forall y \in Y, \quad \rho(y) \geqslant \rho_{min}$,
6. A est coercive : il existe une constante $C_{sta} > 0$ telle que

$$\forall y \in Y, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \qquad A(y)\xi \cdot \xi \geqslant C_{sta} |\xi|^2$$

   $|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.
7. $u^0 \in H^3\left(\mathbb{R}^N\right)$.

D'après le théorème de Lions (voir annexe A.2.2), ce problème a une unique solution

$$u_\varepsilon \in L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right).$$

Dans la suite de cette partie, nous allons postuler un développement asymptotique particulier pour la fonction u_ε qui permet d'approcher cette fonction en résolvant deux problèmes : un problème homogénéisé et un problème de cellule. Des résultats de convergence des différentes solutions approchées vers la solution exacte sont ensuite présentés.

7.4 Résultats préliminaires

Comme dans le cas elliptique, on peut montrer que pour une fonction $\varphi \in L^2\left((0,T)\times\mathbb{R}^N, \mathcal{C}^0_\#(Y)\right)$ (voir [AADH06] ou [MPP05, Remarque 2])

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)dxdt = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^N}\int_Y \varphi\left(t,x,y\right)dydxdt. \tag{7.7}$$

L'alternative de Fredholm s'adapte également à ce cas.

Lemme 7.1. *Soit $g \in L^2_\#(Y)$. b et A vérifiant les hypothèses 7.1, le problème*

$$\left\{\begin{array}{l} b(y)\cdot\nabla_y v - \mathrm{div}_y\left(A(y)\nabla_y v\right) \;=\; g \quad \textit{dans } Y, \\ y\mapsto v(y) \ \textit{est une fonction } Y\textit{-périodique}\end{array}\right.$$

admet une solution $v \in H^1_\#(Y)$, unique à l'addition d'une constante près si et seulement si

$$\int_Y g dy = 0.$$

La démonstration est identique à celle faite dans [BLP78] dans le cas elliptique. Le lemme suivant sera également utilisé

Lemme 7.2. *Soit une fonction $g \in L^2_\#(Y)$ telle que $\int_Y g(y)dy = 0$. Il existe $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$ telle que*

$$\left\{\begin{array}{rl} -\mathrm{div}_y\zeta &= g(y), \\ \int_Y \zeta(y)dy &= \quad 0.\end{array}\right.$$

Démonstration. Il suffit de poser $\zeta = -\nabla\theta$ où θ est solution du problème

$$-\Delta\theta = g.$$

L'alternative de Fredholm est vérifiée pour ce problème. On a donc $\theta \in H^1_\#(Y)$ et $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$. □

7.5 Développement asymptotique avec dérive

Comme dans le cas elliptique présenté au chapitre 3, on postule un développement asymptotique pour u_ε. Cependant, nous allons ici y intégrer une dérive. Soit b^* un vecteur constant représentant une homogénéisation de la fonction b. Nous la considérons pour l'instant comme une inconnue à calculer.
On suppose que u_ε peut s'écrire sous la forme :

$$u_\varepsilon(t,x) = \sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i u_i\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{7.8}$$

avec des fonctions u_i Y-périodiques par rapport leur troisième variable y. L'intégration d'une dérive dans la variable d'espace est nécessaire pour homogénéiser l'équation (7.6). En fait, on sait (voir [BJP03]) que si on considère des temps courts, le problème homogénéisé est une équation de transport dont la solution explicite est de la forme

$$u\left(t, x-vt\right).$$

Il nous faut donc intégrer ce transport dans notre terme d'ordre 0 pour des temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. De plus, si ne prend pas en compte cette dérive et qu'on suppose $b^* = 0$ la condition de compatibilité présentée plus tard imposerait que le champs de vitesse $b(y)$ soit à moyenne nulle.

Proposition 7.1. *Soit u_ε la solution du problème* (7.6). *On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. On suppose également que le développement asymptotique* (7.8) *est vrai et que les fonctions u_i sont Y-périodiques par rapport à y et "régulières" (les résultats de cette proposition sont uniquement formels, il n'y a donc pas besoin de préciser les régularités). Alors*

- *la fonction u_0 ne dépend pas de la variable y :*

$$\forall t \in (0,T), \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall y \in Y, \quad u_0(t,x,y) = u(t,x).$$

- *La vitesse homogénéisée b^* peut être définie par :*

$$b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy, \tag{7.9}$$

où $\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy$.

- *On définit les fonctions w_i solutions des* problèmes de cellules

$$\left\{ \begin{array}{lcll} b(y) \cdot (\nabla_y w_i + e_i) - \mathrm{div}_y \left(A(y) \left(\nabla_y w_i + e_i \right) \right) & = & \rho(y) b^* \cdot e_i, & \textit{sur } Y. \\ w_i \textit{ est } Y\textit{-périodique.} & & & \end{array} \right. \tag{7.10}$$

- *La fonction u est solution du* problème homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\rho} \partial_t u - \mathrm{div} \left(A^* \nabla u \right) = 0 & \textit{dans} & (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) \quad = & u^0(x) & \textit{dans } \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{7.11}$$

où A^* est une matrice définie positive telle que

$$A^*_{i,j} = \int_Y A(y) \left(\nabla_y w_i + e_i \right) \cdot \left(\nabla_y w_j + e_j \right) dy. \tag{7.12}$$

- *La fonction u_1 est définie par*

$$u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y) + \tilde{u}_1(x), \tag{7.13}$$

avec une fonction $\tilde{u}_1$ dépendant uniquement de x qui reste à définir.

- *La fonction u_2 est définie par*

$$u_2(t,x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}(t,x), \tag{7.14}$$

où les fonctions $\chi_{i,j}$ sont solutions des problèmes de cellules du deuxième ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} b(y) \cdot \nabla_y \chi_{i,j}(y) - \mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla \chi_{i,j}(y) \right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \left(w_i A_{k,j} \right)(y) + A_{i,k}(y) \frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y) \right) + A_{i,j}(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{\rho(y)}{\bar{\rho}} A^*_{i,j} + \left(\rho(y) b^*_i - b_i(y) \right) w_j(y) \quad \textit{sur } Y \\ \chi_{i,j} \textit{ est } Y\textit{-périodique.} \end{array} \right. \tag{7.15}$$

Remarque 7.1 : On remarque que le calcul du terme d'ordre 0 du développement asymptotique (7.8) est la fonction u calculée en résolvant le problème parabolique (7.11). Ce problème ne fait pas intervenir de convection ce qui semble surprenant puisque l'on cherche à approcher le fonction u_ε solution du problème de convection-diffusion (7.3). Cependant, on remarque que, dans le développement asymptotique (7.8), la fonction u est dans un repère mobile par rapport à u_ε. En fait, la fonction qui approche u_ε est $\tilde{u}_\varepsilon$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall t \in (0,T), \quad \tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right). \tag{7.16}$$

En reprenant l'équation (7.11) on remarque que $\tilde{u}_\varepsilon$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\rho} \partial_t \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon - \mathrm{div} \left(A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon \right) = 0 & \text{dans} & (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ \tilde{u}_\varepsilon(0,x) \qquad\qquad = & u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{array} \right. \tag{7.17}$$

La fonction $\tilde{u}_\varepsilon$ approchant u_ε à l'ordre 0 est donc solution d'un problème de convection-diffusion à convection constante.

Démonstration. Remarquons que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\nabla \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left(\nabla_x u_i + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y u_i \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(u_i \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \left(\partial_t u_i - \frac{b^*}{\varepsilon} \cdot \nabla_x u_i \right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon} \right).$$

On remplace u_ε par son développement asymptotique (7.8) dans (7.6) et on applique les formules précédentes. On identifie ensuite les termes en fonction du degré en ε :

– Terme en ε^{-2}

$$b(y) \cdot \nabla_y u_0 - \operatorname{div}_y \left(A(y) \nabla_y u_0 \right) = 0. \tag{7.18}$$

– Terme en ε^{-1}

$$- \rho(y) b^* \cdot \nabla_x u_0 + b(y) \cdot \left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1 \right) \operatorname{div}_y \left(A(y) \left(\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1 \right) \right) = \operatorname{div}_x \left(A(y) \nabla_y u_0 \right). \tag{7.19}$$

– Terme en ε^0

$$\begin{aligned} b(y) \cdot \nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y \left(A(y) \nabla_y u_2 \right) = & -\rho(y) \partial_t u_0 + \rho(y) b^* \cdot \nabla_x u_1 - b(y) \cdot \nabla_x u_1 \\ & + \operatorname{div}_y \left(A(y) \nabla_x u_1 \right) + \operatorname{div}_x \left(A(y) \left(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0 \right) \right). \end{aligned} \tag{7.20}$$

De l'équation (7.18), on déduit que u_0 ne dépend pas de y. On note donc

$$\boxed{u_0 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right).}$$

L'équation (7.19) peut ensuite être simplifiée :

$$- \rho(y) b^* \cdot \nabla u + b(y) \cdot \left(\nabla u + \nabla_y u_1 \right) - \operatorname{div}_y \left(A(y) \left(\nabla u + \nabla_y u_1 \right) \right) = 0. \tag{7.21}$$

Cette équation nous permet de calculer u_1. En décomposant ∇u dans chaque direction et en appliquant l'alternative de Fredholm, on remarque que u_1 s'écrit :

$$\boxed{u_1 \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, y \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} \right) w_i(y) + \tilde{u}_1(x),}$$

où on a introduit les fonctions w_i, solutions Y-périodiques du problème de cellule

$$b(y) \cdot \left(\nabla_y w_i + e_i \right) - \operatorname{div}_y \left(A(y) \left(\nabla_y w_i + e_i \right) \right) = \rho(y) b^* \cdot e_i, \quad \text{sur } Y.$$

La condition de compatibilité pour assurer l'existence des w_i impose :

$$\boxed{b^* = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_Y b(y) dy,}$$

où $\bar{\rho} = \int_Y \rho(y) dy$.

Remarque 7.2 : Comme dans le cas elliptique, les fonctions w_i sont définies à une constante près. En pratique, on les choisira à moyenne nulle. De plus, on prendra $\tilde{u}_1(x) = 0$. En fait, le terme $\tilde{u}_1(x)$ interviendrait pour vérifier la condition d'existence de u_3.

En utilisant les hypothèses 7.1, on peut montrer que les fonctions w_i définies par (7.10) sont dans l'espace $W^{1,\infty}_{\#}(Y)$ (voir lemme 4.1).

Enfin, la condition d'existence de u_2 solution de l'équation (7.20) s'écrit :

$$\int_Y \Big(\rho(y) b^* \cdot \nabla_x u_1 - b(y) \cdot \nabla_x u_1 + \mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_x u_1 \right) \\ + \mathrm{div}_x \left(A(y) \left(\nabla_y u_1 + \nabla_x u \right) \right) - \rho(y) \partial_t u \Big) dy = 0. \quad (7.22)$$

Remarquons, tout d'abord, que :

$$\int_Y \mathrm{div}_y \left(A(y) \nabla_x u_1 \right) dy = \int_{\partial Y} \left(A(y) \nabla_x u_1 \right) \cdot \mathsf{n} \, d\sigma = 0$$

car A et $\nabla_x u_1$ sont Y-périodiques. Nous avons également l'égalité

$$\int_Y \rho(y) \partial_t u dy = \bar{\rho} \partial_t u,$$

car u ne dépend pas de y. L'équation (7.22) devient :

$$\bar{\rho} \partial_t u - \int_Y \left(\left(\rho(y) b^* - b(y) \right) \cdot \nabla_x u_1 \left(\cdot, y \right) + \mathrm{div}_x \left(A(y) \left(\nabla_y u_1 \left(\cdot, y \right) + \nabla_x u \right) \right) \right) dy = 0. \quad (7.23)$$

La fonction $\tilde{u}_1$ ne dépend pas de la variable y donc en reprenant la définition de b^* dans (7.9), on a

$$\int_Y \left(\rho(y) b^* - b(y) \right) \cdot \nabla_x \tilde{u}_1 dy = 0.$$

De plus, en utilisant l'équation (7.13), on remarque que

$$\int_Y \left(\rho(y) b^* - b(y) \right) \cdot \nabla_x u_1 dy$$

est une combinaison linéaire des dérivées secondes de u.
De même, $\int_Y \mathrm{div}_x \left(A(y) \left(\nabla_y u_1 + \nabla_x u \right) \right) dy$ s'exprime linéairement en fonction des dérivées secondes de u. Finalement, l'équation (7.23) peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\bar{\rho} \partial_t u - \mathrm{div} \left(A^* \nabla u \right) = 0,}$$

où la matrice A^* est définie par la formule suivante :

$$\int_Y \left(\mathrm{div}_x \left(A(y) \left(\nabla_y u_1 + \nabla_x u \right) \right) + \left(\rho(y) b^* - b(y) \right) \cdot \nabla_x u_1 \right) = \mathrm{div}_x \left(A^* \nabla_x u \right). \quad (7.24)$$

On remarque d'abord qu'étant donnée la définition de A^* par la formule précédente, on ne s'intéresse qu'au terme $\mathrm{div}_x \left(A^* \nabla_x u \right)$. Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, on pourra choisir de considérer A^*, sa transposée ou sa partie symétrique sans modifier ce terme. On va d'abord montrer que

$$A^*_{i,j} = \int_Y A(y) \left(\nabla_y w_i + e_i \right) \cdot \left(\nabla_y w_j + e_j \right) dy.$$

On prend les conventions de sommation d'Einstein et on notera, pour simplifier l'écriture des équations $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Ainsi

$$u_1(x,y) = \partial_{x_j} u(x) w_j(y).$$

Et

$$\nabla_y u_1(x,y) = \partial_{x_j} u(x) \partial_{y_i} w_j(y) e_i,$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_Y \operatorname{div}_x \left(A(y)\nabla_y u_1\right) dy &= \int_Y \operatorname{div}_x \left(A(y)\left(\partial_{x_j} u(x)\partial_{y_k} w_j(y)e_k\right)\right) dy \\ &= \int_Y \operatorname{div}_x \left(A_{i,k}(y)\partial_{x_j} u(x)\partial_{y_k} w_j(y)e_i\right) dy \\ &= \operatorname{div}_x \left(\left(\int_Y A_{i,k}(y)\partial_{y_k} w_j(y)dy\right)\partial_{x_j} u(x)e_i\right) \\ &= \left(\int_Y A_{i,k}(y)\partial_{y_k} w_j(y)dy\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

De plus, on a clairement

$$\int_Y \operatorname{div}_x \left(A(y)\nabla_x u\right) dy = \left(\int_Y A_{i,j}(y)dy\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Et

$$\int_Y \left(\rho(y)b^* - b(y)\right)\cdot \nabla_x u_1(x,y)dy = \int_Y \left(\rho(y)b_i^* - b_i(y)\right)\partial^2_{x_i,x_j} u(x)w_j(y)dy,$$

où les b_i et les b_i^* sont les composantes respectives de b et b^* sur les e_i. Donc

$$\int_Y \left(\rho(y)b^* - b(y)\right)\cdot \nabla_x u_1(x,y)dy = \left(\int_Y \left(\rho(y)b_i^* - b_i(y)\right)w_j dy\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

En sommant tous ces termes et en reprenant l'équations (7.24), on peut alors définir la matrice A^* par

$$A^*_{i,j} = \int_Y \left(\rho(y)b_i^* - b_i(y)\right)w_j dy + \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_j + e_j\right)\cdot e_i dy. \tag{7.25}$$

Si on multiplie l'équation (7.10) par w_j et qu'on l'intègre sur Y, on a :

$$\int_Y \left(b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j - \operatorname{div}_y \left(A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right)\right)w_j\right)dy = \int_Y \left(\rho(y)b_i^* - b_i(y)\right)w_j dy.$$

En intégrant par parties, on a donc :

$$\int_Y \left(\rho(y)b_i^* - b_i(y)\right)w_j dy = \int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j dy + \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right)\cdot\nabla_y w_j dy.$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$,

$$\int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j dy\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_j w_i dy\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Or

$$\int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_j w_i dy = \int_Y b(y)\cdot\nabla_y (w_j w_i)dy.$$

On effectue ensuite une intégration par parties (les termes de bord sont nuls car les w_i et b sont Y-périodiques)

$$\int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_i w_j dy + \int_Y b(y)\cdot\nabla_y w_j w_i dy = -\int_Y \operatorname{div}(b(y))w_j w_i dy = 0$$

car $\operatorname{div}(b) = 0$. En reprenant l'équation (7.25), on peut donc définir de manière équivalente A^* par

$$A^*_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right)\cdot\nabla_y w_j dy\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_j + e_j\right)\cdot e_i dy\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Quitte à inverser les indices i et j pour un des termes, on a donc

$$\boxed{A^*_{i,j} = \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right) \cdot \left(\nabla_y w_j + e_j\right) dy.}$$

On remarque que A^* définie ainsi est symétrique si, pour tout $y \in Y, A(y)$ l'est. On veut résoudre le problème homogénéisé :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \bar{\rho}\partial_t u - \operatorname{div}\left(A^*\nabla u\right) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) \quad = \quad u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Il reste à prouver que ce problème admet bien une solution. Le caractère borné de A^* se déduit directement de (7.12) et du fait que les w_i sont à gradients bornés (en fait, il suffirait d'avoir $w_i \in H^1(Y)$). Montrons maintenant le lemme suivant.

Lemme 7.3. *La matrice A^* est définie positive.*

Démonstration. il reste à montrer les deux autres propriétés. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. On définit

$$w_\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i.$$

w_ξ est une solution périodique du problème

$$b(y) \cdot (\nabla_y w_\xi + \xi) - \operatorname{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_y w_\xi + \xi\right)\right) = \rho(y) b^* \cdot \xi, \quad \text{sur } Y.$$

En multipliant cette équation par w_ξ et en intégrant sur Y par parties, on a :

$$\int_Y (b(y) - \rho(y)b^*) \cdot \xi w_\xi dy + \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_\xi(y) + \xi\right) \cdot \nabla_y w_\xi(y) dy = 0, \tag{7.26}$$

car w_ξ est Y-périodique et $\operatorname{div}(b) = 0$. On reprend ensuite (7.25), on a alors

$$\begin{aligned} A^*\xi \cdot \xi &= \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j A^*_{i,j} \\ &= \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j \int_Y \left(\rho(y) b_i^* - b_i(y)\right) w_j dy + \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_j + e_j\right) \cdot e_i \\ &= \int_Y \left(\rho(y) b^* - b(y)\right) \cdot \xi w_\xi + \int_Y A(y)(\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \xi dy. \end{aligned}$$

En ajoutant, la dernière équation et (7.26), on obtient

$$A^*\xi \cdot \xi = \int_Y A(y)(\nabla_y w_\xi(y) + \xi) \cdot \left(\nabla_y w_\xi(y) + \xi\right) dy.$$

Puis en utilisant la coercivité de A, on a

$$A^*\xi \cdot \xi \geqslant C_{sta} \int_Y \left|\nabla_y w_\xi(y) + \xi\right|^2 dy \geqslant 0$$

On a donc la positivité de la matrice. De plus, si $A^*\xi \cdot \xi = 0$, on a, en utilisant l'inégalité précédente :

$$\forall y \in Y, \quad \nabla_y w_\xi(y) + \xi = 0,$$

donc, en intégrant cette égalité : $w_\xi(y) = -\xi y + c, c \in \mathbb{R}$. Or, w_ξ est une fonction Y-périodique, donc $\xi = 0$. A^* est donc bien une matrice définie positive. □

On déduit de ce lemme que le problème (7.11) admet une solution unique

$$u \in L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$$

en appliquant le théorème de Lions une nouvelle fois.

Pour la suite, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 7.4. *À une fonction de x près, la fonction u_2 peut être définie par*

$$u_2(t,x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}(t,x)$$

où les fonctions w_i sont les solutions aux problèmes de cellule (7.10) et les fonctions $\chi_{i,j}$ sont les solutions Y-périodiques aux problèmes de cellule du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} b(y)\cdot\nabla_y \chi_{i,j}(y) - \operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla\chi_{i,j}(y)\right) = &-\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}} A^*_{i,j} + \left(\rho(y) b^*_i - b_i(y)\right) w_j(y) \\ &+ \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\left(w_i A_{k,j}\right)(y) + A_{i,k}(y)\frac{\partial w_j}{\partial y_k}(y)\right) + A_{i,j}(y) \quad \textit{sur } Y. \end{aligned}$$

De plus, de même que pour les w_i, les fonctions $\chi_{i,j}$ ainsi définies sont dans l'espace $W^{1,\infty}_{\#}(Y)$ (voir lemme 4.1).

Démonstration. À partir des équations (7.20) et (7.11), on obtient

$$\begin{aligned} b(y)\cdot\nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_2\right) = &-\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}}\operatorname{div}_x\left(A^*\nabla u\right) + \left(\rho(y) b^* - b(y)\right)\cdot\nabla_x u_1 \\ &+ \operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_x u_1\right) + \operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_y u_1 + \nabla_x u\right)\right). \end{aligned}$$

On remplace u_1 par son expression dans (7.13) sans omettre le terme en $\tilde{u}_1$. L'équation devient

$$\begin{aligned} &b(y)\cdot\nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y u_2\right) \\ &\quad = -\frac{\rho(y)}{\bar{\rho}}\operatorname{div}_x\left(A^*\nabla u\right) + \left(\rho(y) b^*_i - b_i(y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} w_j + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}\right) \\ &\qquad + \operatorname{div}_y\left(A(y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} w_j + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_i}\right) e_i\right) \\ &\qquad + \operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial w_j}{\partial y_i} e_i + \nabla_x u\right)\right). \end{aligned}$$

Par linéarité et du fait que les w_i vérifient (7.10), on remarque que u_2 définie par (7.14) est bien solution de ce problème. Or, la condition de compatibilité est vérifiée puisque u vérifie (7.11), ce problème admet donc une solution unique à une fonction de x près. □

Tous les résultats annoncés dans la proposition 7.1 ont donc été démontrés. □

7.6 Convergence à deux échelles avec dérive

Les calculs faits dans le paragraphe précédent sont formels et ne sont pas justifiés d'un point de vue mathématique. Comme au chapitre 3, on va introduire une nouvelle notion de convergence pour pouvoir démontrer des résultats d'approximation plus précis entre la solution u_ε du problème (7.6) et le début de son développement asymptotique. Étant donné que nous avons introduit une dérive dans ce développement asymptotique, la notion de convergence à deux échelles vue au paragraphe 3.5 ne peut pas s'adapter à notre problème. Ainsi, E. Marušić-Paloka et A. Piatnitski ont défini dans [MPP05] la notion de *convergence à deux échelles avec dérive.*

Définition 7.1. *Soit $b^* \in \mathbb{R}^N$ un vecteur constant. Soit $u_\varepsilon(t,x)$ une suite de fonctions dans $L^2\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N\right)$. On dit que u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers u_0 si $\forall \varphi \in L^2\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \mathcal{C}^0_\#(Y)\right)$,*

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N} u_\varepsilon(t,x)\varphi\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) dxdt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \iiint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times Y} u_0(t,x,y)\varphi(t,x,y) dxdtdy$$

avec $u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \times Y\right)$.

Remarque 7.3 :

1. Si $b^* = 0$ cette définition correspond bien à la convergence à deux échelles rappelée au chapitre 3 et définie dans [Ngu89] et [All92]).
2. La notion de limite à deux échelles avec dérive dépend de la dérive considérée.
3. Cette définition peut également s'appliquer à des ensembles de la forme $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ avec $T > 0$. Si la convergence à deux échelles avec dérive sur un espace $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ est assurée cette convergence est encore vraie sur tous les espaces de la forme $(0,t) \times \mathbb{R}^N$ avec $0 \leqslant t \leqslant T$.

L'introduction de la notion de convergence à deux échelles avec dérive permet d'obtenir plusieurs résultats intéressants dont le théorème :

Théorème 7.1 (Marušić-Paloka, Piatnitski [MPP05])**.** *Soient $b^* \in \mathbb{R}^N$ un vecteur constant et u_ε une suite de fonctions dans $L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ vérifiant*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_2.$$

On suppose, de plus, que les hypothèses 7.1 sont vérifiées.
Alors, il existe une sous-suite et deux fonctions $u_0 \in L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ et $u_1 \in L^2\left((0,T) \times \mathbb{R}^N, H^1(Y)\right)$ telles que, pour cette sous-suite,

$$\begin{array}{rlll} & u_\varepsilon & \text{converge à deux échelles avec la dérive } b^* \text{ vers} & u_0 \\ \text{et} & \nabla u_\varepsilon & \text{converge à deux échelles avec la dérive } b^* \text{ vers} & \nabla u_0(t,x) + \nabla u_1\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \end{array}$$

Le théorème suivant établit que la limite à deux échelles avec la dérive b^* de la solution de l'équation (7.6) est la solution du problème (7.11) :

Théorème 7.2 ([DP05], [AR07], [AMP10])**.** *On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. La suite (u_ε) des solutions du problème (7.6) converge à deux échelles avec la dérive $b^* = \dfrac{1}{\bar{\rho}} \displaystyle\int_Y b(y)dy$ vers la solution $u(t,x) \in L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ de l'équation*

$$\begin{cases} \bar{\rho}\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(A^* \nabla u\right) = 0 & \textit{dans } (0,T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u^0(x) & \textit{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Démonstration. On veut d'abord appliquer le théorème 7.1 à la suite (u_ε). Pour cela on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 7.5. *Soit u_ε une solution faible du problème (7.6). Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} \leqslant C.$$

Idée de la démonstration. Cette inégalité se démontre simplement en multipliant la première équation de (7.6) par u_ε et en intégrant en espace et en temps. ☐

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant T\, \|u_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N}.$$

Que l'on peut réécrire

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_3(T)\left(\|u_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N}\right). \tag{7.27}$$

On a donc montré que la suite (u_ε) est bornée en norme $L^2\left((0,T),H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$.

On teste la première équation de (7.6) avec une fonction φ_ε de la forme

$$\varphi_\varepsilon = \varphi\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\varphi_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N\right)$ et $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \mathcal{C}_\#^\infty(Y)\right)$. On obtient :

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\varphi_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u_\varepsilon\varphi_\varepsilon + A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi_\varepsilon\right)dxdt = 0.$$

On intègre par parties par rapport à t le terme en $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$ et on intègre par parties en espace le terme en $\nabla u_\varepsilon\varphi$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)&\left(u_\varepsilon(T,x)\varphi_\varepsilon(T,x) - u^0(x)\varphi_\varepsilon(0,x)\right)dx\\ &+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\frac{b^*}{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi + b^*\cdot\nabla_x\varphi_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)u_\varepsilon dxdt\\ &\qquad+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{\varepsilon}b\cdot\nabla\varphi u_\varepsilon - b\cdot\nabla\varphi_1 u_\varepsilon + A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi_\varepsilon\right)dxdt = 0.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)&\left(u_\varepsilon(T,x)\left(\varphi(T,x)+\varepsilon\varphi_1(T,x)\right) - u^0(x)\left(\varphi(0,x)+\varepsilon\varphi_1(0,x)\right)\right)dx\\ &+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(b^*\cdot\nabla_x\varphi_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)u_\varepsilon + b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u_\varepsilon\varphi_1\right)dxdt\\ &\qquad+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi u_\varepsilon dxdt\\ &\qquad\quad+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\left(\nabla\varphi + \nabla_y\varphi_1 + \varepsilon\nabla_x\varphi_1\right)dxdt = 0.\end{aligned} \tag{7.28}$$

On veut ensuite étudier la limite de cette expression quand ε tend vers 0. On remarque tout d'abord que la fonction u_ε est bornée dans $L^\infty\left((0,T),L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ (voir lemme 7.5) donc, φ_1, et ρ étant bornées, on a

$$\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(u_\varepsilon(T,x)\varphi_1(T,x) - u^0(x)\varphi_1(0,x)\right)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{7.29}$$

De même, A, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$ et $\nabla_x\varphi_1$ sont bornées et la suite u_ε est bornée dans $L^2\left((0,T),H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ uniformément en ε en norme. Donc

$$-\varepsilon\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}u_\varepsilon dxdt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{7.30}$$

$$\text{et}\quad \varepsilon\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi_1 dxdt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{7.31}$$

On a $\int_Y\left(b(y) - \rho(y)b^*\right)dy = 0$. On applique alors le lemme 7.2 sur chaque composante. On note ζ_i la fonction obtenue en prenant $g(y) = b_i(y) - \rho(y)b_i^*$. On a donc :

$$\begin{aligned}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b_i^* - b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\partial_{x_i}\varphi u_\varepsilon dxdt &= \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{(\mathrm{div}_y\zeta_i)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\partial_{x_i}\varphi u_\varepsilon dxdt \\ &= \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \mathrm{div}_x\left(\zeta_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_{x_i}\varphi u_\varepsilon dxdt \\ &= -\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \zeta_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\left(\partial_{x_i}\varphi\nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon\nabla\partial_{x_i}\varphi\right)dxdt.\end{aligned}$$

Le lemme 7.5 nous permet d'appliquer le théorème (7.1) à (u_ε). Donc, pour une sous-suite, u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers $u(t,x)$ et ∇u_ε vers $\nabla_x u(t,x) + \nabla_y u_1(t,x,y)$. Ainsi, pour une sous-suite :

$$\begin{aligned}&\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi u_\varepsilon dxdt \\ &\qquad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \zeta_i(y)\cdot\Big(\partial_{x_i}\varphi(t,x)\left(\nabla_x u(t,x) + \nabla_y u_1(t,x,y)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + \nabla\partial_{x_i}\varphi(t,x)u(t,x)\Big)dydxdt.\end{aligned}$$

Comme $\int_Y \zeta_i(y)dy = 0$ et u et φ ne dépendent pas de y, un seul de ces termes est non nul et :

$$\begin{aligned}-\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \zeta_i(y)\partial_{x_i}\varphi(t,x)\nabla_y u_1(t,x,y)dydxdt &= \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \mathrm{div}_y\left(\zeta_i(y)\right)\partial_{x_i}\varphi u_1 dxdtdy \\ &= -\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \left(b_i(y) - \rho(y)b_i^*\right)\partial_{x_i}\varphi u_1 dxdtdy.\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi u_\varepsilon dxdt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \left(b_i(y) - \rho(y)b_i^*\right)\partial_{x_i}\varphi u_1 dxdtdy. \tag{7.32}$$

Pour le passage à la limite dans (7.28), on reprend les équations (7.29), (7.30), (7.31) et (7.32) et on utilise les limites à deux échelles avec dérive des fonctions u_ε et ∇u_ε. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(u_\varepsilon(T,x)\varphi(T,x) - u^0(x)\varphi(0,x)\right)dx + \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \rho(y)\left(b^*\cdot\nabla_x\varphi_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)udxdtdy& \\ + \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} b(y)\cdot\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\varphi_1 dxdtdy& \\ - \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \left(b(y) - \rho(y)b^*\right)\cdot\nabla\varphi u_1 dxdtdy& \\ + \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\cdot\left(\nabla\varphi + \nabla_y\varphi_1\right)dxdtdy = 0.&\end{aligned} \tag{7.33}$$

Regardons d'abord le cas où $\varphi = 0$. On a :

$$\begin{aligned}-\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \rho(y)b^*\cdot\nabla_x u\varphi_1 dxdtdy + \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} b(y)\cdot\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\varphi_1 dxdtdy& \\ - \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \mathrm{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\right)\varphi_1 dxdtdy = 0.&\end{aligned}$$

Cela doit être vrai pour tout $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N, \mathcal{C}_\#^\infty(Y)\right)$. Donc :

$$b(y)\cdot\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right) - \mathrm{div}_y\left(A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\right) = \rho(y)b^*\cdot\nabla_x u.$$

Cette équation est en fait la même que (7.21) et elle nous permet donc d'avoir, à une fonction de x près :

$$u_1(t,x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} w_i(y),$$

avec les w_i définis en (7.10).

Prenons maintenant $\varphi_1 = 0$ et φ quelconque. L'équation (7.33) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(u_\varepsilon(T,x)\varphi(T,x) - u^0(x)\varphi(0,x)\right)dx - \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \rho(y)\frac{\partial\varphi}{\partial t} u dxdtdy$$
$$- \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \left(b(y) - \rho(y)b^*\right)\cdot\nabla\varphi u_1 dxdtdy$$
$$+ \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\cdot\nabla\varphi dxdtdy = 0.$$

En intégrant par parties en temps et en espace, on obtient :

$$\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \rho(y)\frac{\partial u}{\partial t}\varphi dxdtdy + \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \left(b(y) - \rho(y)b^*\right)\cdot\nabla_x u_1 \varphi dxdtdy$$
$$- \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y} \operatorname{div}_x\left(A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)\right)\varphi dxdtdy = 0.$$

Les fonctions u et φ ne dépendant pas de y, cela se simplifie :

$$\bar\rho \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial t}\varphi dxdt + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left(\int_Y \left(b(y) - \rho(y)b^*\right)\cdot\nabla_x u_1 dy\right)\varphi dxdt$$
$$- \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x\left(\int_Y A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)dy\right)\varphi dxdt = 0.$$

Comme cela est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N\right)$, on a :

$$\bar\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \int_Y \left(b(y) - \rho(y)b^*\right)\cdot\nabla_x u_1 dy - \operatorname{div}_x\left(\int_Y A(y)\left(\nabla_x u + \nabla_y u_1\right)dy\right) = 0.$$

On retrouve l'équation (7.23) et comme on a la même relation entre u et u_1, on aboutit de la même manière au problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar\rho\partial_t u - \operatorname{div}\left(A^*\nabla u\right) = \ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) \quad\quad = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{array}\right.$$

avec

$$A^*_{i,j} = \int_Y A(y)\left(\nabla_y w_i + e_i\right)\cdot\left(\nabla_y w_j + e_j\right)dy. \tag{7.34}$$

De plus, on a vu que ce problème admet une solution unique

$$u \in L^2\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

Cela montre que, quelle que soit la sous-suite choisie, u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers le même u. Cela est donc vrai pour toute la suite (u_ε). □

7.7 Résultat de convergence

À partir des définitions et des résultats précédents, des résultats de convergences fortes peuvent être montrés. Ainsi, en norme L^2, le résultat suivant indique que la solution homogénéisée est une bonne approximation de u_ε.

Théorème 7.3 ([AMP10])**.** *Soient (u_ε) la suite des solutions de l'équation* (7.6) *et u la solution au problème homogénéisé* (7.11)*. On suppose que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. Alors, on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\| u_\varepsilon(t,x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Démonstration. Nous allons d'abord montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x) - u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt = 0.$$

En testant l'équation (7.6) avec u_ε, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\partial_t u_\varepsilon(t,x)u_\varepsilon(t,x)dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u_\varepsilon(t,x)u_\varepsilon(t,x)dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(t,x)\right)u_\varepsilon(t,x)dx = 0.$$

On intègre par parties en espace en utilisant le fait que $\nabla u_\varepsilon u_\varepsilon = \frac{1}{2}\nabla\left|u_\varepsilon\right|^2$:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\partial_t\left(u_\varepsilon^2(t,x)\right)dx - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(t,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(t,x)dx = 0.$$

On utilise le fait que $\operatorname{div}(b) = 0$ et on intègre l'équation par rapport à t entre 0 et t :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dx + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dsdx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u^0(x)\right|^2 dx.$$

On intègre ensuite par rapport à t entre 0 et T :

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt + \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dsdxdt$$
$$= \frac{T}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u^0(x)\right|^2 dx.$$

On effectue le même calcul pour u en utilisant l'équation (7.11) et on a :

$$\frac{1}{2}\bar\rho\left\|u\right\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)} + \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A^*\nabla u(s,x)\cdot\nabla u(s,x)dsdxdt = \frac{T}{2}\bar\rho\left\|u^0\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Et, en utilisant le résultat (7.7),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u^0(x)\right|^2 dx = \bar\rho\int_{\mathbb{R}^N}\left|u^0(x)\right|^2 dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt\\ + \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dsdxdt\Bigg)\\ = \frac{\bar\rho}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)}\\ + \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A^*\nabla u(s,x)\cdot\nabla u(s,x)dsdxdt.\end{aligned} \quad (7.35)$$

On va maintenant montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt \geqslant \bar{\rho}\left\|u\right\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)}.$$

Pour cela, on va partir du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt &= \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt\\ &+\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt\\ &-2\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)u_\varepsilon(t,x)u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)dxdt. \end{aligned}\tag{7.36}$$

On utilise le résultat (7.7) :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left|u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt\\ &=\iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y}\rho(y)\left|u(t,x)\right|^2 dxdtdy.\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt = \bar{\rho}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left|u(t,x)\right|^2 dxdt.$$

De plus, en prenant $\rho^\varepsilon(x)u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)$ comme fonction test dans la convergence de u_ε avec dérive, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)u_\varepsilon(t,x)u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)dxdt &= \iiint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N\times Y}\rho(y)\left|u(t,x)\right|^2 dxdtdy\\ &=\bar{\rho}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left|u(t,x)\right|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Et $\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt$ étant positif, on obtient, en passant à la limite dans (7.36) :

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt \geqslant \bar{\rho}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left|u(t,x)\right|^2 dxdt.}\tag{7.37}$$

De même, on développe le terme

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)&\left(\nabla u_\varepsilon(s,x)-\nabla\left(u\left(s,x-\frac{b^*s}{\varepsilon}\right)+\varepsilon u_1\left(s,x-\frac{b^*s}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right)\\ &\cdot\left(\nabla u_\varepsilon(s,x)-\nabla\left(u\left(s,x-\frac{b^*s}{\varepsilon}\right)+\varepsilon u_1\left(s,x-\frac{b^*s}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right)dxds\end{aligned}$$

qui est positif car A est coercive. Les calculs sont semblables à ceux effectuées pour le terme en ρ^ε. On obtient, en utilisant le fait que ∇u_ε converge à deux échelles avec la dérive b^* vers $\nabla_x u+\nabla_y u_1$ sur tous les ensembles $(0,t)\times\mathbb{R}^N$ avec $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dxds \geqslant \int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_Y A(y)\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)\cdot\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)dydxds.$$

Et, en intégrant cette inégalité par rapport à t de 0 à T,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dxdsdt$$
$$\geqslant \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_Y A(y)\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)\cdot\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)dydxdsdt.$$

Or, A^* étant défini par (7.12), on a :

$$\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A^*\nabla u(s,x)\cdot\nabla u(s,x)dxdsdt = \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\int_Y A(y)\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)\cdot\left(\nabla_x u+\nabla_y u_1\right)dydxdsdt.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon(s,x)\cdot\nabla u_\varepsilon(s,x)dxdsdt \geqslant \int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} A^*\nabla u(s,x)\cdot\nabla u(s,x)dxdsdt.} \tag{7.38}$$

Les inégalités (7.37) et (7.38), montrent que dans (7.35), chacun des termes de gauche est supérieur à un des termes de droite. Leur somme étant égale, on en déduit que ces inégalités sont des égalités et, en particulier :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)\right|^2 dxdt = \bar\rho\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left|u(t,x)\right|^2 dxdt.$$

On utilise ce résultat pour passer à la limite dans l'équation (7.36), et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt = 0.$$

De plus, en utilisant les hypothèses 7.1, on a

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt \leqslant \frac{1}{\rho_{min}}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\rho^\varepsilon(x)\left|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dxdt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

7.8 Estimation d'erreur *a priori*

On s'intéresse ensuite à l'erreur en norme H^1 en espace et L^2 en temps entre la solution exacte u_ε du problème (7.6) et les deux premiers termes de son développement asymptotiques :

$$u+\varepsilon u_1.$$

Le terme εu_1 d'ordre 1 en ε n'est pas utile pour approcher la solution en norme L^2 mais sa présence est indispensable si on cherche à approcher son gradient. L'estimation *a priori* établie dans le théorème suivant n'a, à notre connaissance, pas été montrée auparavant.

Théorème 7.4. *Soient* (u_ε) *la suite des solutions de l'équation* (7.6)*,* u *la solution au problème homogénéisé* (7.11) *et* u_1 *définie par l'équation* (7.13) *où les fonctions* w_i *sont les solutions à moyenne nulle et* Y*-périodiques des problèmes* (7.10) *et* $\tilde u_1 = 0$*. On suppose, de plus, que les hypothèses 7.1 sont vérifiées. On a alors l'estimation suivante pour une certaine constante* $C_4 > 0$ *indépendante de* ε *mais dépendant du temps final* T *:*

$$\left\|u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)-\varepsilon u_1\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_4\varepsilon. \tag{7.39}$$

On a, de plus,

$$\left\|\nabla\left(u_\varepsilon(t,x)-u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)-\varepsilon u_1\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))^N} \leqslant C_5\varepsilon \tag{7.40}$$

et

$$\left\| u_\varepsilon(t,x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_6 \varepsilon, \tag{7.41}$$

avec des constantes $C_5, C_6 > 0$ *indépendantes de* ε *mais dépendant du temps final* T.

Remarques 7.4 :

Cette estimation est plus forte que celle montrée dans [BLP78] pour un problème elliptique (voir théorème 3.3). En effet, dans cette estimation, la majoration est en $\sqrt{\varepsilon}$. Cete différence vient du fait que l'on se place sur l'espace $\mathbb{R}^N$ et non sur un ouvert Ω borné, ainsi les termes de *couche limite* n'apparaissent pas.

Cette estimation nous montre que la solution u_ε au problème (7.6) peut être approchée de la manière suivante

$$u_\varepsilon(t,x) \approx u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{7.42}$$

pour de faibles valeurs de ε. Cette approximation est intéressante car elle ne nécessite pas de résolution globale à l'échelle fine. En effet, les fonctions w_i sont chacune solution d'un problème de cellule défini sur la cellule unité Y. Ensuite, à partir des fonctions w_i et de leur gradient, on peut calculer A^* et donc résoudre le problème homogénéisé (7.11) pour calculer u. Ce problème ne fait pas intervenir de termes à l'échelle ε, sa résolution est donc plus facilement réalisable numériquement. Enfin, u_1 se déduit des dérivées de u et de celles des fonctions w_i. Dans la suite de ce mémoire, on cherchera donc à mettre en place une méthode numérique capable d'approcher $u + \varepsilon u_1$ pour calculer u_ε.

Démonstration. Cette démonstration a été publiée dans [ADEO12]. Soit r_ε la fonction définie par :

$$r_\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{-1}\left(u_\varepsilon(t,x) - u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right).$$

On veut démontrer que l'on a une inégalité de type

$$\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \leqslant C.$$

On définit $B^\varepsilon(r_\varepsilon)$ par

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t,x)) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t r_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla r_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla r_\varepsilon\right). \tag{7.43}$$

On développe les termes en reprenant la définition de r_ε. Les termes en u_ε se simplifient car u_ε est solution du problème (7.6). On a :

$$\begin{aligned} B^\varepsilon(r_\varepsilon(t,x)) = \varepsilon^{-2}\Bigg(& -b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot(\nabla_x u + \nabla_y u_1) \\ & + \operatorname{div}_y\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\nabla_x u + \nabla_y u_1)\right) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^*\cdot\nabla_x u\Bigg) \\ & + \varepsilon^{-1}\Bigg(-\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_x u_1 + \operatorname{div}_y\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_x u_1\right) \\ & + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\nabla_x u + \nabla_y u_1)\right) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^*\cdot\nabla_x u_1\Bigg) \\ & - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_x u_1\right). \end{aligned}$$

En utilisant (7.21), on remarque que le terme en ε^{-2} est nul. On utilise ensuite l'équation (7.20) pour définir une fonction u_2 et on a :

$$B^\varepsilon(r_\varepsilon(t,x)) = \varepsilon^{-1}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_y u_2 - \operatorname{div}_y\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\right)\right) - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_x u_1\right). \tag{7.44}$$

On rappelle que la condition de compatibilité du problème (7.20) est bien vérifiée et qu'il est donc possible de trouver une telle fonction u_2. L'équation (7.44) peut se réécrire

$$\begin{aligned}B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla(u_2) - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_x u_2 - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\right) \\ + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\right) - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_x u_1\right).\end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant le fait que $\operatorname{div}(b) = 0$:

$$\begin{aligned}B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) = \operatorname{div}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_2\right) - \operatorname{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\right) \\ - b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_x u_2 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\right) \\ - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1 + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_x u_1\right).\end{aligned}$$

On multiplie l'équation par r_ε et on intègre en temps et en espace :

$$\begin{aligned}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt \\ = -\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt \\ + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt \\ + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N}\left(-b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_x u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right. \\ + \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla_y u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_x u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) \\ \left. - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt. \qquad (7.45)\end{aligned}$$

On veut majorer la valeur absolue de cette intégrale. On va donc traiter chacun des termes séparément. Soient

$$\begin{aligned}B_1 &= -\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt, \\ B_2 &= \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla_y u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt, \\ B_3 &= -\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_x u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt, \\ B_4 &= \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \operatorname{div}_x\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla_y u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_x u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt, \\ B_5 &= -\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt.\end{aligned}$$

Avec ces définitions, l'équation (7.45) se réécrit

$$\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5. \qquad (7.46)$$

On rappelle tout d'abord que u est solution d'un problème parabolique avec un opérateur elliptique constant car A^* ne dépend pas du temps. La fonction u est donc au moins aussi régulière que la condition initiale (voir annexe A.2.3). En particulier, dans notre cas et avec les hypothèses 7.1, on a $u^0 \in H^3\left(\mathbb{R}^N\right)$ donc

$$u \in L^\infty\left((0,T), H^3(\mathbb{R}^N)\right). \qquad (7.47)$$

Et, par translation,

$$(t,x) \mapsto u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) \in L^\infty\left((0,T), H^3(\mathbb{R}^N)\right).$$

Nous nous intéressons d'abord à la régularité de la fonction u_2. Nous rappelons que la fonction u_2 solution du problème (7.20) peut aussi s'écrire (voir lemme 7.4) :

$$u_2(t,x,y) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x).$$

où les fonctions $\chi_{i,j}$ sont les solutions des problèmes (7.15). Nous avons également vu que ces fonctions sont dans l'espace $W^{1,\infty}_\#(Y)$. Ainsi, en utilisant cette propriété et la propriété (7.47), on a

$$(t,x) \mapsto u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right) \tag{7.48}$$

$$(t,x) \mapsto \nabla_x u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N \chi_{i,j}(y) \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N \tag{7.49}$$

$$(t,x) \mapsto \nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N \nabla\chi_{i,j}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N \tag{7.50}$$

$$(t,x) \mapsto \nabla_x\nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N \nabla\chi_{i,j}(y) \otimes \nabla \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right)^{N\times N}. \tag{7.51}$$

On déduit des propriétés (7.48) et (7.49) et du fait que la fonction b soit bornée que

$$\begin{aligned} |B_1| &= \left| \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x)\, dxdt \right| \\ &\leqslant \|b\|_{L^\infty(Y)^N} \|u_2\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \end{aligned} \tag{7.52}$$

et

$$\begin{aligned} |B_3| &= \left| \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_x u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t,x)\, dxdt \right| \\ &\leqslant \|b\|_{L^\infty(Y)^N} \|\nabla_x u_2\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))^N} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \tag{7.53}$$

De même, en utilisant la propriété (7.50) et le fait que la matrice A soit bornée, on a

$$\begin{aligned} |B_2| &= \left| \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla_y u_2\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla r_\varepsilon(t,x)\, dxdt \right| \\ &\leqslant C_{bnd} \|\nabla_y u_2\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))^N} \|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Pour les autres termes, nous avons besoin d'étudier la régularité de la fonction u_1. On rappelle d'abord, en reprenant l'équation (7.13), que

$$u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=1}^N w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right).$$

On rappelle également que les fonctions w_i solutions des problèmes de cellule (7.10) sont dans l'espace $W^{1,\infty}_\#(Y)$. On déduit de cette propriété et de la propriété (7.47) que

$$(t,x) \mapsto \nabla_x^2 u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right)^{N\times N}. \tag{7.55}$$

Alors en utilisant les propriétés (7.55) et (7.51) ainsi que le caractère borné de A, on obtient

$$\begin{aligned}|B_4| &= \left|\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \mathrm{div}_x \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\nabla_y u_2\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \nabla_x u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt\right| \\ &\leqslant C_{bnd}\left(\|\nabla_y\nabla_x u_2\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))^{N\times N}} + \left\|\nabla_x^2 u_1\right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))^{N\times N}}\right)\|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}. \quad (7.56)\end{aligned}$$

Pour majorer $|B_5|$ on doit étudier la régularité de $\partial_t u_1$. Comme $\partial_t u = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left(A^*\nabla u\right)$ et $u \in L^\infty\left((0,T), H^3\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, on a

$$\partial_t u \in L^\infty\left((0,T), H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

Donc

$$(t,x) \mapsto \partial_t u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \sum_{i,j=1}^N w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla^2\frac{\partial\partial_t u}{\partial x_i}\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right) \in L^\infty\left((0,T), L^2(\mathbb{R}^N)\right). \quad (7.57)$$

On utilise alors cette propriété et le caractère borné de ρ et on montre que

$$\begin{aligned}|B_5| &= \left|\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt\right| \\ &\leqslant \rho_{max}\|\partial_t u_1\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}\|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}. \quad (7.58)\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant les inégalités (7.52), (7.54), (7.53), (7.56) et (7.58) dans (7.46), on obtient :

$$\left|\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt\right| \leqslant C_7\|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))}.$$

On a donc

$$\left|\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt\right| \leqslant C_8(T)\left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N}\right).$$

De plus, si on revient à la définition de B^ε dans (7.43), en intégrant en temps et en espace et en effectuant des intégrations par parties en espace, on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x)dxdt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(T,x)^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(0,x)^2 dx \\ + \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla r_\varepsilon\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt.\end{aligned}$$

On a, en utilisant la coercivité de A,

$$\left|\iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla r_\varepsilon(t,x)\cdot\nabla r_\varepsilon(t,x)dxdt\right| \geqslant C_{sta}\|\nabla r_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)}.$$

De plus, la fonction ρ est bornée supérieurement et inférieurement donc on peut montrer que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(T,x)^2 dx \geqslant C_9\|r_\varepsilon(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

et que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) r_\varepsilon(0,x)^2 dx \leqslant C_{10}\|r_\varepsilon(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

avec $C_9, C_{10} > 0$. On arrive alors à

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} + C_9 \|r_\varepsilon(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C_{10} \|r_\varepsilon(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \leqslant \iint_{(0,T)\times\mathbb{R}^N} B^\varepsilon\left(r_\varepsilon(t,x)\right) r_\varepsilon(t,x) dxdt \\ \leqslant C_8(T) \left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que la norme $\|r_\varepsilon(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ est bornée.
Tout d'abord, par définition,

$$\begin{aligned} r_\varepsilon(0,x) &= \varepsilon^{-1}\left(u_\varepsilon(0,x) - u(0,x) - \varepsilon u_1\left(0,x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= -u_1\left(0,x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^N \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

On a supposé que la condition initiale $u^0 \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ et on a montré que les w_i sont bornés en norme $L^\infty(Y)$. On obtient :

$$\|r_\varepsilon(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_{11}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} + C_9 \|r_\varepsilon(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C_{10}C_{11} \\ \leqslant C_8(T) \left(\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} + \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \right). \end{aligned} \tag{7.59}$$

On montre d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 7.6. *Soit X_ε une suite de réels positifs, vérifiant :*

$$X_\varepsilon^2 - \alpha \leqslant \beta X_\varepsilon, \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

Alors il existe une constante $\gamma > 0$

$$X_\varepsilon \leqslant \gamma(T).$$

Démonstration. Ce polynôme de degré 2 en X_ε est de discriminant $\Delta = \beta(T)^2 + 4\alpha > 0$. On en déduit que X_ε reste entre les racines du polynôme associé et est donc borné. □

Soit $T_0 \leqslant T$ tel que

$$\frac{1}{2} \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leqslant \|r_\varepsilon(T_0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

On applique ensuite l'inégalité (7.59) sur $(0,T_0)$:

$$\begin{aligned} C_{sta} \|\nabla r_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)^N} + \frac{C_9}{2} \|r_\varepsilon\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} - C_{10}C_{11} \\ \leqslant C_8(T) \left(\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \right). \end{aligned}$$

On applique le lemme 7.6 avec

$$X_\varepsilon = \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

On obtient

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_{12}(T),$$

et donc il existe des constantes $C_{13}, C_6 > 0$ dépendant du temps final T telles que

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T_0)\times\mathbb{R}^N)^N} \leqslant C_{13}, \tag{7.60}$$

$$\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_6. \tag{7.61}$$

L'inégalité (7.61) est en fait l'inégalité (7.41). On reprend l'inégalité (7.59) en utilisant le fait que $\|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))}$ est borné pour le membre de droite et en minorant $\|r_\varepsilon(T,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ par 0 pour le membre de gauche :

$$C_{sta}\,\|\nabla r_\varepsilon\|^2_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} + 0 - C_{10}C_{11} \leqslant C_8(T)\left(\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} + C_6(T)\right).$$

En réutilisant le lemme 7.6 avec

$$X_\varepsilon = \|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N},$$

on en déduit l'inégalité (7.40) :

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} \leqslant C_5.$$

On a donc montré que

$$\|\nabla r_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\mathbb{R}^N)^N} + \|r_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_{14}(T).$$

Ainsi, en reprenant (7.27)

$$\|r_\varepsilon\|_{L^2((0,T),H^1(\mathbb{R}^N))} \leqslant C_{15}(T).$$

D'où le résultat voulu. □

Remarque 7.5 : Le cas où le champ de vitesse b n'est pas à divergence nulle a été traité dans [AR07] et [HR13]. Dans notre cas, il n'y a pas de terme de réaction donc on a un résultat plus simple. En fait, dans ce cas, le problème physique que l'on obtient en écrivant la conservation de la masse est de la forme

$$\left\{\begin{array}{lr} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon\right) - \mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u_\varepsilon\right) = 0 & \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0,x) \qquad\qquad = u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{array}\right. \tag{7.62}$$

Dans (7.62) on ne suppose pas que $\mathrm{div}_y b = 0$. On introduit alors le problème spectral suivant

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{div}_y\,(b(y)\psi) - \mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y\psi) & = & \lambda\psi & \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ \psi \text{ est } Y\text{- périodique.} \end{array}\right. \tag{7.63}$$

Le problème adjoint à (7.63) est

$$\left\{\begin{array}{lcll} -b(y)\cdot\nabla_y\psi^* - \mathrm{div}_y\,(A^t(y)\nabla_y\psi^*) & = & \lambda\psi^* & \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ \psi^* \text{ est } Y\text{- périodique,} \end{array}\right. \tag{7.64}$$

où A^t est la transposée de la matrice A. On remarque que le couple $(\lambda = 0, \psi^* = 1)$ est solution de ce problème. 0 est donc aussi valeur propre du problème (7.63). Autrement dit, il existe une fonction ψ_1 non nulle telle que

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{div}_y\,(b(y)\psi_1) - \mathrm{div}_y\,(A(y)\nabla_y\psi_1) & = & 0 & \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ \psi_1 \text{ est } Y\text{- périodique.} \end{array}\right. \tag{7.65}$$

Le théorème de Krein-Rutman (voir, par exemple, [Bre83]) permet même de montrer que l'on peut choisir la fonction ψ_1 pour qu'elle reste strictement positive. On effectue alors un changement de variable en définissant

$$v_\varepsilon(t,x) = \frac{u_\varepsilon(t,x)}{\psi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$

Évidemment, si $\mathrm{div}_y(b) = 0$, $\psi_1 = 1$ est solution du problème (7.65) et il n'est pas nécessaire de faire ce changement de variable. Le problème (7.62) peut alors se réécrire

$$\left\{\begin{array}{lr} \tilde\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t v_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\tilde b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla v_\varepsilon - \mathrm{div}\left(\tilde A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla v_\varepsilon\right) = 0 & \text{dans } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ v_\varepsilon(0,x) \qquad\qquad = \dfrac{u^0(x)}{\psi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{7.66}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(y) &= \psi_1(y)\rho(y),\\ \tilde{A}(y) &= \psi_1(y)A(y),\\ \text{et} \quad \tilde{b}(y) &= \psi_1(y)b(y) - A(y)\nabla_y\psi_1(y).\end{aligned}$$

On vérifie, en utilisant la définition de ψ_1, que $\tilde{b}$ est bien à divergence nulle. On a donc réussi à se ramener au cas considéré dans ce chapitre.