
Étude de la luminance dans un milieu purement absorbant

Le développement de méthodes de Monte-Carlo appliquées à des problématiques de transfert radiatif date des années 1960 avec les travaux de J.R. Howell et de M. Perlmutter [Howell et Perlmutter, 1964a, Howell et Perlmutter, 1964b, Perlmutter et Howell, 1964, Howell, 1969]. Bénéficiant des progrès méthodologiques et informatiques, elles sont aujourd'hui bien maîtrisées dans les applications ayant trait au rayonnement thermique dans les milieux participants [Farmer et Howell, 1998, Howell, 1998, Modest, 2003b] où elles occupent le rôle de méthodes de référence et de validation.

Plutôt que de poursuivre la présentation des méthodes de Monte-Carlo en toute généralité, nous allons désormais les appliquer à des problématiques radiatives en présence de milieu participant. Le cas d'étude, simple au début, sera progressivement complexifié dans le but d'introduire les différentes techniques et approches qui seront utilisées dans la suite de ce manuscrit.

Pour commencer, plaçons-nous dans le cas particulier d'un milieu semi-transparent purement absorbant (les phénomènes de diffusion sont négligés). Puisque dans une telle configuration, le rayonnement ne se propage qu'en ligne droite jusqu'à ce qu'il soit absorbé, il est possible de ramener ce problème à un cas monodimensionnel. L'équation du transfert radiatif en régime stationnaire est alors donnée par :

$$\frac{dL_\eta(x, u)}{dx} = k_{a,\eta}(x) [L_\eta^{eq}(x, u) - L_\eta(x, u)] \quad (3.46)$$

3.3.1 Luminance dans un milieu infini, purement absorbant

Considérons dans un premier temps ce milieu absorbant comme infini et étudions la luminance en un point et dans une direction donnés (voir Fig. 3.3). La luminance au point x_0 dans la direction u_0 correspond alors à l'intégrale spatiale sur le chemin $]-\infty, x_0]$ d'un terme d'émission $k_{a,\eta}(x)L_\eta^{eq}(x)dx$ atténué selon la loi de Beer-Lambert entre x et x_0 d'un facteur $\exp(-\int_x^{x_0} k_{a,\eta}(x')dx')$:

$$L_\eta(x_0, u_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx k_{a,\eta}(x)L_\eta^{eq}(x) \exp\left(-\int_x^{x_0} k_{a,\eta}(x')dx'\right) \quad (3.47)$$

Comme introduit à la Sec. 2.2.4.2, il est possible de penser l'extinction exponentielle comme une densité de probabilité et ainsi d'exprimer statistiquement $L_\eta(x_0, u_0)$:

$$L_\eta(x_0, u_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx p_X(x)L_\eta^{eq}(x) \quad (3.48)$$

où $p_X(x) = k_{a,\eta}(x) \exp(-\int_x^{x_0} k_{a,\eta}(x')dx')$ est la fonction densité de probabilité caractéristique de la loi de Beer-Lambert (exprimée ici en position plutôt qu'en libre

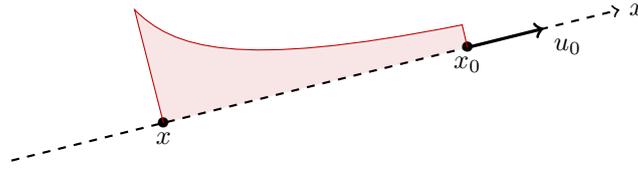


FIGURE 3.3 – Milieu infini, monodimensionnel et purement absorbant. La luminance au point x_0 dans la direction u_0 est égale à l’intégrale spatiale sur le chemin $]-\infty, x_0]$ d’un terme d’émission atténué selon la loi de Beer-Lambert entre les points d’émission x et d’intérêt x_0 .

parcours).

La luminance $L_\eta(x_0, u_0)$ correspond alors à l’espérance de la variable aléatoire $W(X) = L_\eta^{eq}(X)$:

$$L_\eta(x_0, u_0) = \mathbb{E}(W(X)) = \mathbb{E}(L_\eta^{eq}(X)) \quad (3.49)$$

où X est la variable aléatoire associée aux positions d’émission. Cette équation illustre simplement le fait que la luminance en x_0 est définie comme la moyenne pondérée par la loi de Beer-Lambert des luminances d’équilibre de tous les points se situant sur la demi-droite $]-\infty, x_0]$ définie par rapport à u_0 .

Réaliser un algorithme de Monte-Carlo pour ce problème revient donc à échantillonner la variable aléatoire poids $W(X) = L_\eta^{eq}(X)$ et donc à réaliser un nombre important N_{mc} de réalisations indépendantes (indiquées i), chacune composée des étapes suivantes :

ALGORITHME

1. On échantillonne de façon indépendante une position d’émission x_i selon la fonction densité de probabilité $p_X(x)$. Cela consiste à échantillonner un nombre aléatoire r_i entre 0 et 1 de façon uniforme et à résoudre l’équation $r_i = \int_{-\infty}^{x_i} p_X(x) dx$. Dans le cas où le coefficient d’absorption est homogène, la position de collision est donnée par $x_i = x_0 + \ln(r_i)/k_{a,\eta}$.
2. On calcule la luminance d’équilibre au point x_i : $w_i = L_\eta^{eq}(x_i)$ qui correspond alors à un échantillon de la variable aléatoire poids : $W(X)$.

Une estimation non biaisée $\tilde{L}_\eta(x_0, u_0)$ de la luminance par cet algorithme de Monte-Carlo est alors donnée par la moyenne arithmétique des échantillons w_i de la variable aléatoire $W(X)$: $\tilde{L}_\eta(x_0, u_0) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} w_i$. Il est également possible de calculer l’écart-type d’échantillon $s(\tilde{L}_\eta(x_0, u_0))$ et d’autres indicateurs statistiques comme ceux présentés à la [Sec. 3.2.3.2](#).

Nous nous sommes volontairement placés ici dans un formalisme monodimensionnel pour des motivations de didactique et de légèreté d’écriture. Toutefois, dans la perspective de traiter des problèmes multidimensionnels, il est possible de généraliser ce formalisme en faisant intervenir l’idée de libre parcours d’absorption, noté ici l .

Les positions \mathbf{x} et les directions \mathbf{u} deviennent ainsi des grandeurs vectorielles. La formulation intégrale de la luminance s'écrit alors :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} dl k_{a,\eta}(\mathbf{x}_0 - l\mathbf{u}_0) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0 - l\mathbf{u}_0) \exp\left(-\int_0^l k_{a,\eta}(\mathbf{x}_0 - l'\mathbf{u}_0) dl'\right) \quad (3.50)$$

On utilisera souvent une forme plus compacte en introduisant $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - l\mathbf{u}_0$:

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} dl k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \exp\left(-\int_0^l k_{a,\eta}(\mathbf{x}_0 - l'\mathbf{u}_0) dl'\right) \quad (3.51)$$

qu'il est possible de reformuler statistiquement en

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{+\infty} p_{\mathcal{L}}(l) dl L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \quad (3.52)$$

La luminance est donc désormais décrite comme l'espérance de la luminance d'équilibre au point d'émission $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathcal{L}\mathbf{u}_0$, fonction de la variable aléatoire \mathcal{L} dont la fonction densité de probabilité est $p_{\mathcal{L}}(l) = k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1) \exp\left(-\int_0^l k_{a,\eta}(\mathbf{x}_0 - l'\mathbf{u}_0) dl'\right)$:

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0 - \mathcal{L}\mathbf{u}_0)] = \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(\mathbf{X}_1)] \quad (3.53)$$

3.3.2 Approche analogue et réciprocité des chemins

L'algorithme de Monte-Carlo proposé précédemment a été établi à partir d'une formulation statistique de l'équation intégrale du transfert radiatif. Cependant, lorsqu'il s'agit de développer des méthodes de Monte-Carlo, il est courant de rencontrer une autre pratique qui s'appuie presque exclusivement sur des images tirées de la physique du transport. On parle de *méthodes de Monte-Carlo analogues*. Cette approche consiste à réaliser numériquement et stochastiquement les expériences physiques que subissent les corpuscules d'intérêt à partir de leurs lois de probabilité, supposées connues. Dans le cas du transfert radiatif, cela signifie que l'on va "lancer" un grand nombre N_{mc} de photons [Starwest, 2014b] ou de "paquets de photons" [Modest, 2013] selon des lois d'émission et suivre leurs interactions avec le milieu et les frontières.

Pour appliquer une telle approche au cas d'étude de la section précédente, il convient de s'attarder sur la notion de réciprocité des chemins optiques [Case, 1957] qui joue un rôle important lorsqu'il s'agit de construire des images physiques associées. Cette réciprocité des chemins, faisant appel aux notions de micro-réversibilité, est une condition nécessaire pour garantir le second principe de la thermodynamique. Cela implique au régime stationnaire, qu'un photon dans la direction \mathbf{u}_1 en \mathbf{x}_1 a la même probabilité d'atteindre le point \mathbf{x}_2 dans la direction \mathbf{u}_2 que celle qu'un photon partant de \mathbf{x}_2 dans la direction $-\mathbf{u}_2$ atteignent le point \mathbf{x}_1 dans la direction $-\mathbf{u}_1$. En d'autres termes, il est possible de "lancer" des photons depuis le point sonde d'intérêt (en le considérant mentalement comme point d'émission) jusqu'à ce qu'ils soient absorbés par le milieu. Ces points d'absorption correspondent alors

aux points d'émission du modèle direct. Dans le cas d'un milieu infini, purement absorbant, l'intérêt de la réciprocité des chemins reste limité. Ce ne sera que lorsque des phénomènes de diffusions ou de réflexions multiples seront pris en compte que cette notion de réciprocité prendra tout son sens.

Il est donc possible de développer un algorithme de Monte-Carlo en s'appuyant uniquement sur la physique du rayonnement, sur les images qu'elle véhicule et sur ce principe de réciprocité. Pour le cas introduit à la [Sec. 3.3](#) dans lequel on souhaite estimer $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, cela consiste à émettre un grand nombre de photons depuis le point \mathbf{x}_0 dans la direction $-\mathbf{u}_0$ et à échantillonner un libre parcours selon la loi de Beer-Lambert conduisant à une position d'absorption \mathbf{x}_1 , interprétée comme la position réelle d'émission. L'estimation de la luminance est alors donnée comme la moyenne d'échantillon de $L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1)$ pour l'ensemble des photons tirés. Un tel algorithme correspond parfaitement à l'algorithme présenté à la section précédente. On trouve dans la littérature internationale ce type d'algorithmes qualifié de *backward* ou *reverse* [[Walters et Buckius, 1992](#), [Walters et Buckius, 1994](#), [Modest, 2003a](#), [Siegel et al., 2011](#)] que nous traduirons ici par *Monte-Carlo réciproque*.

Dans le cas de l'estimation de la luminance pour une configuration multidimensionnelle, il est nécessaire de recourir à la réciprocité des chemins pour la construction d'images physiques. En effet, si l'on suivait une approche directe, la probabilité qu'un photon passe par le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 serait nulle, du fait de la ponctualité du point et de la direction d'intérêt. Cependant, pour l'étude de grandeurs intégrées sur l'espace des phases (*ex* : la puissance radiative absorbée par un élément de surface sur tout l'hémisphère entrant), une vision réciproque n'est plus nécessaire puisque la probabilité qu'un photon soit absorbé par cette surface n'est plus nulle. Toutefois, même dans ces cas, il peut être courant de faire appel au caractère réciproque du rayonnement pour réduire la variance et ainsi les temps de calcul associés par une *reformulation intégrale*. Il suffit d'imaginer une surface très grande S_g émettant vers une surface S_p très petite devant S_g et de considérer la puissance absorbée par S_p . Lancer des photons de S_g en espérant qu'ils soient absorbés par S_p peut être très coûteux en temps de calcul. En effet, un grand nombre de photons émis n'atteindront jamais la petite surface. Au contraire, il semble plus judicieux d'utiliser la réciprocité des chemins : la grande majorité des photons "émis" par S_p seront "absorbés" par la grande surface. On aura par ce biais, en quelque sorte, sélectionné préférentiellement les chemins optiques dignes d'intérêt par une *reformulation intégrale*, réduisant ainsi la variance de l'estimation de cette puissance.

Dans ce manuscrit, nous faisons le choix de privilégier le développement de méthodes de Monte-Carlo à partir des formulations intégrales et statistiques, qui offrent à nos yeux, les plus grandes libertés d'amélioration. Toutefois, ne pouvant pas nous passer d'images physiques pour accréditer nos propositions, ce ne sera qu'a posteriori que nous ferons appel à cette vision analogue. Celle-ci ne conditionnera pas, à proprement parler, le développement des méthodes, mais offrira les images

nécessaires à une bonne analyse des phénomènes en présence et un retour intéressant sur nos propositions méthodologiques.

3.3.3 Prise en compte des frontières du milieu

Considérons à nouveau le cas d'étude introduit à la [Sec. 3.3.1](#) auquel est rajoutée en x_w une paroi noire. Les photons peuvent donc désormais être émis par le milieu mais aussi par la paroi (voir [Fig. 3.4](#)). La luminance $L_\eta(x_0, u_0)$ est donc la somme de la luminance d'équilibre émise par la paroi atténuée exponentiellement sur le chemin $[x_w, x_0]$ et d'un terme source d'émission du milieu atténué lui aussi exponentiellement et intégré entre x_w et x_0 :

$$L_\eta(x_0, u_0) = L_\eta^{eq}(x_w) \exp\left(-\int_{x_w}^{x_0} k_{a,\eta}(x') dx'\right) + \int_{x_w}^{x_0} dx k_{a,\eta}(x) L_\eta^{eq}(x) \exp\left(-\int_x^{x_0} k_{a,\eta}(x') dx'\right) \quad (3.54)$$

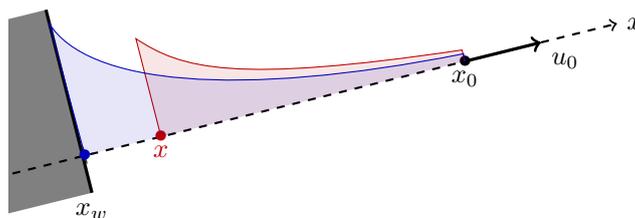


FIGURE 3.4 – Milieu fini, monodimensionnel et purement absorbant. Une paroi noire est placée en x_w . La luminance au point x_0 dans la direction u est égale à la somme d'un terme d'émission à la paroi et d'un terme source d'émission du milieu. Chacun d'entre-eux faisant intervenir une atténuation exponentielle.

L'Eq. 3.54 peut alors être reformulée :

$$L_\eta(x_0, u_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dx k_{a,\eta}(x) \exp\left(-\int_x^{x_0} k_{a,\eta}(x') dx'\right) \times [\mathcal{H}(x_w - x) L_\eta^{eq}(x_w) + \mathcal{H}(x - x_w) L_\eta^{eq}(x)] \quad (3.55)$$

où $\mathcal{H}(a)$ est la fonction de Heaviside, valant 0 si $a < 0$ et 1 si $a > 0$. Cette reformulation revient donc à considérer la paroi comme un milieu semi-transparent infini, purement absorbant, de température uniforme $T = T(x_w)$. Une telle expression est souvent rencontrée en transfert radiatif et présente l'avantage d'être plus facilement manipulable (statistiquement et algorithmiquement) que l'Eq. 3.54. Elle requiert cependant une information sans réel sens : le champ de coefficient d'absorption doit être défini sur $] -\infty; x_0]$ et a fortiori derrière la paroi. Dans la pratique, on définit généralement le coefficient d'absorption comme égal à $k_{a,\eta}(x_w^+)$ pour $x \leq x_w$, mais en théorie tout champ strictement positif peut être accepté.

De la même façon que précédemment, l'atténuation exponentielle peut être

exprimée comme une fonction densité de probabilité. Il vient alors :

$$L_\eta(x_0, u_0) = \int_{-\infty}^{x_0} p_X(x) dx \left[\mathcal{H}(x - x_w) L_\eta^{eq}(x) + \mathcal{H}(x_w - x) L_\eta^{eq}(x_w) \right] \quad (3.56)$$

qui à son tour peut être exprimée sous la forme d'une espérance

$$L_\eta(x_0, u_0) = \mathbb{E} \left[\mathcal{H}(X - x_w) L_\eta^{eq}(X) + \mathcal{H}(x_w - X) L_\eta^{eq}(x_w) \right] = \mathbb{E} [W(X)] \quad (3.57)$$

En définissant X^* comme une variable aléatoire valant X si $X > x_w$ et valant x_w autrement, on obtient

$$L_\eta(x_0, u_0) = \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(X^*)] = \mathbb{E} [W(X^*)] \quad (3.58)$$

Il est alors possible d'estimer $L_\eta(x_0, u_0)$ par un algorithme de Monte-Carlo. Celui-ci consistera à opérer un nombre important N_{mc} de réalisations (indicées i), chacune composée des deux étapes suivantes :

ALGORITHME

1. On échantillonne une position d'émission x_i à partir de la fonction densité de probabilité $p_X(x)$.
2. Si la position échantillonnée est dans le milieu participant : $x_i \in [x_w, x_0]$ alors l'échantillon de la variable aléatoire $W(X)$ est $w_i = L_\eta^{eq}(x)$. Au contraire si x_i est au-delà de la frontière : $x_i < x_w$, l'échantillon est défini comme $w_i = L_\eta^{eq}(x_w)$.

Les images physiques correspondantes sont celles de photons suivis depuis x_0 dans la direction $-u_0$, jusqu'à ce qu'ils soient absorbés entre x_0 et $-\infty$ par le milieu ou par la paroi considérée alors comme un milieu infini purement absorbant et isotherme.

3.3.4 Échantillonnage préférentiel et approche par variance nulle

3.3.4.1 Échantillonnage préférentiel

Il est fréquent, notamment dans des applications de type combustion, de considérer en première approximation que les parois ont une température fixée à $0K$. En d'autres termes, cela consiste à admettre que les parois absorbent mais n'émettent pas de rayonnement : $L_\eta^{eq}(x_w) = 0$. Il peut alors être intéressant, dans une optique de réduction de variance, d'échantillonner les positions d'absorption dans le seul intervalle $]x_w, x_0]$ et non sur $] -\infty, x_0]$. Cette approche d'échantillonnage préférentiel consiste alors à définir sur $]x_w, x_0]$ une nouvelle densité de probabilité associée aux positions d'émission $\tilde{p}_X(x)$. L'Eq. 3.56 est alors reformulée comme :

$$L_\eta(x_0, u_0) = \int_{x_w}^{x_0} \tilde{p}_X(x) dx \left[\frac{p_X(x)}{\tilde{p}_X(x)} L_\eta^{eq}(x) \right] = \mathbb{E} \left[\frac{p_X(X)}{\tilde{p}_X(X)} L_\eta^{eq}(X) \right] = \mathbb{E} [\tilde{W}(X)] \quad (3.59)$$

Les fonctions de Heaviside ont pu être supprimées (avec un changement du domaine d'intégration), puisque l'émission de la paroi est nulle. En faisant intervenir la densité de probabilité $\tilde{p}_X(x)$ on modifie artificiellement la statistique de notre problème. Ce biais est alors compensé par une modification de la variable aléatoire poids qui devient $\tilde{W}(X) = \frac{p_X(X)}{\tilde{p}_X(X)} L_\eta^{eq}(X)$.

Jusqu'ici aucune expression n'a été proposée concernant cette nouvelle densité de probabilité. Ce choix est en effet totalement arbitraire. Une proposition assez simple consiste à normaliser la densité de probabilité originelle $p_X(x)$ sur le segment $]x_w, x_0]$:

$$\tilde{p}_X(x) = \frac{\exp\left(-\int_{x_w}^{x_0} k_{a,\eta}(x') dx'\right)}{\int_{x_w}^{x_0} \exp\left(-\int_{x_w}^{x_0} k_{a,\eta}(x') dx'\right)} \quad (3.60)$$

Cet échantillonnage préférentiel n'induit aucun changement quant à la structure algorithmique : un grand nombre N_{mc} de positions d'émission x_i seront échantillonnées selon $\tilde{p}_X(x)$ (qui ne correspond alors plus à la loi de Beer-Lambert). Une fois cette position d'émission connue, le poids $\tilde{w}_i(x_i) = \frac{p_X(x_i)}{\tilde{p}_X(x_i)} L_\eta^{eq}(x_i)$ sera calculé. L'estimation de $L_\eta(x_0, u_0)$ par l'algorithme de Monte-Carlo sera alors donnée par la moyenne arithmétique des N_{mc} échantillons \tilde{w}_i .

3.3.4.2 Approche par variance nulle

Il est également possible d'appuyer le choix de $\tilde{p}_X(x)$ avec une approche par variance nulle. Cela consiste à exprimer la fonction densité de probabilité $\tilde{p}_{X,\emptyset}(x)$ idéale qui validerait $L_\eta(x_0, u_0) = \tilde{W}_\emptyset(X)$ quelle que soit la valeur prise par X . La variable aléatoire $\tilde{W}_\emptyset(X) = \frac{p_X(X)}{\tilde{p}_{X,\emptyset}(X)} L_\eta^{eq}(X)$ aurait alors une variance nulle. Dans le cas considéré (température de paroi nulle), cette densité de probabilité idéale serait donnée par :

$$\tilde{p}_{X,\emptyset}(x) = \frac{p_X(x) L_\eta^{eq}(x)}{L_\eta(x_0, u_0)} = \frac{p_X(x) L_\eta^{eq}(x)}{\int_{x_w}^{x_0} p_X(x') L_\eta^{eq}(x') dx'} \quad (3.61)$$

Il est évident que nous ne sommes pas capables de calculer cette fonction idéale, puisqu'elle dépend de $L_\eta(x_0, u_0)$ qui est justement l'observable que nous souhaitons estimer. Cependant, s'il est possible d'établir un modèle approché $y(x)$ de $p_X(x) L_\eta^{eq}(x)$ suffisamment fidèle au modèle physique d'intérêt, et dont l'intégrale entre x_w et x_0 est analytiquement calculable, la fonction densité de probabilité

$$\tilde{p}_X(x) = \frac{y(x)}{\int_{x_w}^{x_0} y(x) dx} \quad (3.62)$$

sera proche de $\tilde{p}_{X,\emptyset}(x)$. Ainsi, bien que non nulle, la variance de $\tilde{W}(X)$ aura été sensiblement réduite⁴, ce qui se traduira en pratique par une diminution du nombre de réalisations nécessaires pour parvenir à une même erreur relative. Toute la difficulté

4. Il peut arriver que le choix de $y(x)$ soit à l'origine d'une augmentation de variance, traduisant ainsi une mauvaise représentation de la physique d'intérêt.

de l'approche par variance nulle réside donc dans l'établissement du modèle utilisé pour approcher au mieux $\tilde{p}_{X,\theta}(x)$. Une approche par variance nulle sera réalisée au [Chap. 5](#) pour orienter les choix arbitraires de plusieurs densités de probabilités et probabilités discrètes.

3.4 Étude de la luminance dans un milieu absorbant et diffusant

L'étude d'un milieu purement absorbant a donc permis d'aborder les méthodes de Monte-Carlo réciproques et analogues ainsi que les approches d'échantillonnage préférentiel et par variance nulle. Complexifions désormais ce cas d'étude en rajoutant des phénomènes de diffusions multiples qui vont engendrer une récursivité dans le formalisme statistique et les algorithmes de Monte-Carlo correspondants. L'équation stationnaire du transfert radiatif, relative à de telles considérations, est rappelée ci-dessous :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -k_\eta(\mathbf{x})L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + k_{a,\eta}(\mathbf{x})L_\eta^{eq}(\mathbf{x}) + k_{d,\eta} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\mathbf{u}')L_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}')d\mathbf{u}' \quad (3.63)$$

où $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}|\mathbf{u}')$ est la fonction de phase et $k_\eta(\mathbf{x}) = k_{a,\eta}(\mathbf{x}) + k_{d,\eta}(\mathbf{x})$ est le coefficient d'extinction au point \mathbf{x} .

3.4.1 Luminance dans un milieu absorbant, diffusant, infini

Concentrons-nous tout d'abord sur un milieu tridimensionnel, infini, absorbant, émettant et diffusant le rayonnement. La luminance au point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 est égale à la somme d'une infinité de composantes C_j , atténuées exponentiellement le long de leur chemin de diffusion entre leur position d'émission et le point sonde \mathbf{x}_0 :

- C_1 : la luminance associée aux photons émis en \mathbf{x}_1 dans la direction \mathbf{u}_0 et atteignant directement la position \mathbf{x}_0 sans avoir subi d'événement de diffusion (voir [Fig. 3.5a](#)).
- C_2 : la luminance associée aux photons émis en tout point \mathbf{x}_2 de l'espace dans une direction \mathbf{u}_1 qui atteignent le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 en ayant subi une unique diffusion en \mathbf{x}_1 (voir [Fig. 3.5b](#)).
- C_3 : la luminance associée aux photons émis en tout point \mathbf{x}_3 de l'espace dans une direction \mathbf{u}_2 qui atteignent le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 en ayant subi deux événements de diffusion en \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_1 (voir [Fig. 3.5c](#)).
- $C_{j \geq 4}$: les luminances associées aux photons émis en \mathbf{x}_j dans une direction \mathbf{u}_{j-1} atteignant le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 en ayant subi $j - 1$ événements de diffusion.

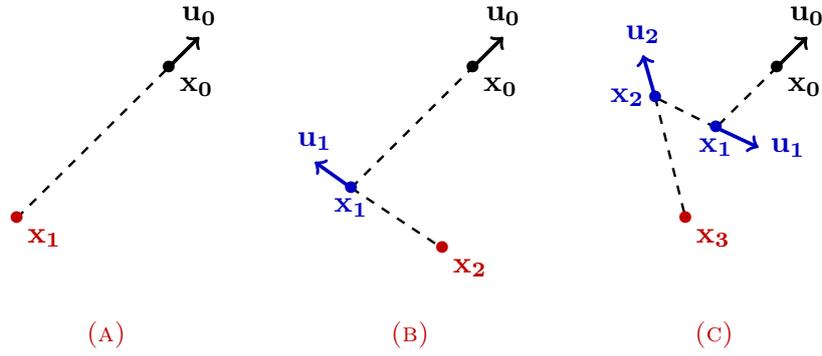


FIGURE 3.5 – Luminance en milieu diffusant. La luminance au point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 peut être perçue comme la somme d’une infinité de composantes. La première d’entre-elles (A) est associée aux photons émis d’un point \mathbf{x}_1 appartenant à la demi droite définie par \mathbf{x}_0 et $-\mathbf{u}_0$ dans la direction \mathbf{u}_0 , sans avoir subi d’événement de diffusion. La seconde composante (B) concerne les photons émis en \mathbf{x}_2 dans le domaine spatial d’intérêt et atteignant le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 suite à un unique événement de diffusion. La troisième composante est associée aux photons ayant subi deux événements de diffusion avant d’atteindre le point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 (C) *etc.*

Considérer la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ comme la somme d’une infinité de contributions, permet alors d’écrire la formulation intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = & \left\{ \int_0^\infty dl_1 \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \right\} \\
& + \left\{ \int_0^\infty dl_1 \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right. \\
& \left. \times \int_0^\infty dl_2 \exp\left(-\int_0^{l_2} k_\eta(\mathbf{x}_1 - l'_2 \mathbf{u}_1) dl'_2\right) k_{a,\eta}(\mathbf{x}_2) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_2) \right\} \\
& + \left\{ \int_0^\infty dl_1 \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \right. \\
& \left. \times \int_0^\infty dl_2 \exp\left(-\int_0^{l_2} k_\eta(\mathbf{x}_1 - l'_2 \mathbf{u}_1) dl'_2\right) k_{d,\eta}(\mathbf{x}_2) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) d\mathbf{u}_2 \right. \\
& \left. \times \int_0^\infty dl_3 \exp\left(-\int_0^{l_3} k_\eta(\mathbf{x}_2 - l'_3 \mathbf{u}_2) dl'_3\right) k_{a,\eta}(\mathbf{x}_3) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_3) \right\} \\
& + \{\dots\}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

où $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - l_{j+1} \mathbf{u}_j$ et où chaque terme entre accolades correspond à une contribution particulière (le premier est relatif à la contribution C_1 , le second à la contribution C_2 , *etc.*). Cette expression met en relief les avantages en termes d’intuitif et de formalisme qu’offre la réciprocity des chemins. Les images associées à ce cas d’étude sont celles de photons émis depuis \mathbf{x}_0 dans la direction $-\mathbf{u}_0$ subissant 0, 1, 2, *etc.* diffusions avant d’être absorbés de façon exponentielle le long de leur chemin optique.

Il est alors possible de factoriser l'Eq. 3.64 :

$$\begin{aligned}
L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \int_0^\infty dl_1 k_\eta(\mathbf{x}_1) \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty dl_2 k_\eta(\mathbf{x}_2) \exp\left(-\int_0^{l_2} k_\eta(\mathbf{x}_1 - l'_2 \mathbf{u}_1) dl'_2\right) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_2)}{k_\eta(\mathbf{x}_2)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_2) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_2)}{k_\eta(\mathbf{x}_2)} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) d\mathbf{u}_2 \times \dots \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

ce qui amène d'autres images, celles-ci récursives : la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ est la somme des luminances associées aux photons émis directement (sans expérimenter de diffusion) vers \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 et des photons ayant subi au moins une diffusion, mais parvenant en \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 ; cette seconde composante est elle-même la somme des luminances associées aux photons émis directement (sans expérimenter de diffusion) vers \mathbf{x}_1 dans la direction \mathbf{u}_1 et des photons ayant subi au moins une diffusion mais parvenant en \mathbf{x}_1 dans la direction \mathbf{u}_1 ; *etc.* L'Eq. 3.65 peut ainsi être formalisée sous une forme récursive :

$$\begin{aligned}
L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \int_0^\infty dl_1 k_\eta(\mathbf{x}_1) \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \quad (3.66)
\end{aligned}$$

où le terme récursif $L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)$ pour $j \geq 1$ est donné par :

$$\begin{aligned}
L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) &= \int_0^\infty dl_{j+1} k_\eta(\mathbf{x}_{j+1}) \exp\left(-\int_0^{l_{j+1}} k_\eta(\mathbf{x}_j - l'_{j+1} \mathbf{u}_j) dl'_{j+1}\right) \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_{j+1})}{k_\eta(\mathbf{x}_{j+1})} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_{j+1})}{k_\eta(\mathbf{x}_{j+1})} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

L'atténuation exponentielle, dépendant désormais du coefficient d'extinction k_η , garde son caractère statistique et pourra être exprimée comme une fonction densité de probabilité de libres parcours : $p_{\mathcal{L}_{j+1}}(l_{j+1}) = k_\eta(\mathbf{x}_{j+1}) \exp\left(-\int_0^{l_{j+1}} k_\eta(\mathbf{x}_j - l'_{j+1} \mathbf{u}_j) dl'_{j+1}\right)$. Dans cette expression intégrale, de nouveaux termes ayant une valeur statistique sont également apparus : les albédos d'absorption $\omega_{a,\eta}(\mathbf{x}_j) = k_{a,\eta}(\mathbf{x}_j)/k_\eta(\mathbf{x}_j)$ et de diffusion $\omega_{d,\eta}(\mathbf{x}_j) = k_{d,\eta}(\mathbf{x}_j)/k_\eta(\mathbf{x}_j)$. Ils

représentent respectivement les probabilités qu'un photon qui collisionne en \mathbf{x}_j d'être absorbé ou émis : $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_j)$ (selon qu'on regarde le problème de façon directe ou réciproque) et d'être diffusé : $1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_j)$. Ces considérations nous permettent alors d'exprimer statistiquement l'Eq. 3.66 comme :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^\infty p_{\mathcal{L}_1}(l_1) dl_1 \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \quad (3.68)$$

où le terme récursif $L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)$ est donné par

$$L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \int_0^\infty p_{\mathcal{L}_{j+1}}(l_{j+1}) dl_{j+1} \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1})) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \quad (3.69)$$

L'Eq. 3.68 ne constitue qu'une expression de l'espérance de la luminance d'équilibre au point d'émission du photon. En effet, la récursivité due aux événements de diffusion ne joue un rôle que sur la longueur du chemin optique et sur les propriétés rencontrées le long de ce chemin (coefficient d'absorption, de diffusion, température, etc.). On peut alors écrire :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(\mathbf{X}^*)] = \mathbb{E} [W(\mathbf{X}^*)] \quad (3.70)$$

avec \mathbf{X}^* la variable aléatoire associée aux positions d'émission. Celle-ci peut être exprimée de la façon suivante⁵ :

$$\mathbf{X}^* = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \mathbf{X}_j \prod_{q=1}^{j-1} (1 - A_q) \quad (3.71)$$

où A_q est une variable aléatoire valant 1 avec une probabilité $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_q)$ et 0 avec une probabilité $1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_q)$. Ce formalisme récursif ainsi que les images physiques associées seront intensivement utilisés dans les prochains chapitres de ce document.

Il est alors possible de proposer un algorithme de Monte-Carlo constitué de N_{mc} réalisations indépendantes, chacune composée des étapes suivantes :

5. Le formalisme utilisé pour exprimer la variable aléatoire de position d'émission dans l'Eq. 3.71, a été choisi afin de mettre en avant l'idée de chemin de multi-diffusion. La somme infinie $\sum_{j=1}^{\infty}$ permet de rendre compte de l'ensemble des collisions probables. L'introduction de la variable aléatoire A_j , associée à un événement d'émission/absorption (valant 1 avec une probabilité $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_q)$), permet de s'assurer, grâce au terme $\prod_{q=1}^{j-1} (1 - A_q)$ que seule une position (celle d'émission) soit retenue pour la définition de \mathbf{X}^* .

ALGORITHME

1. L'indice de collision j est initialisé : $j = 0$.
2. On échantillonne un libre parcours l_{j+1} selon la fonction densité de probabilité $p_{\mathcal{L}_{j+1}}(l_{j+1})$, ce qui permet de calculer la position de collision $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - l_{j+1}\mathbf{u}_j$.
3. On procède à un test de Bernoulli pour déterminer le type de collision : une émission ou une diffusion. Pour cela on tire uniformément un nombre aléatoire r_{j+1} .
 - 3a. Si $r_{j+1} < \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1})$, la collision est une émission. On calcule alors la luminance d'équilibre au point \mathbf{x}_1 qui correspond à l'échantillon w_i de cette réalisation. La récursivité est alors stoppée.
 - 3b. Si $r_{j+1} > \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1})$, la collision est une diffusion. Une nouvelle direction de propagation \mathbf{u}_{j+1} est alors échantillonnée à partir de la fonction de phase $\phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1})$; l'indice de la collision est incrémenté : $j \equiv j + 1$ et l'algorithme boucle à l'étape 2.

Dans la suite du manuscrit, du fait de la lourdeur engendrée par ce type de récursivité, nous présenterons les algorithmes sous forme de logigrammes. Une transposition directe de cet algorithme est donnée à la [Fig. 3.6](#).

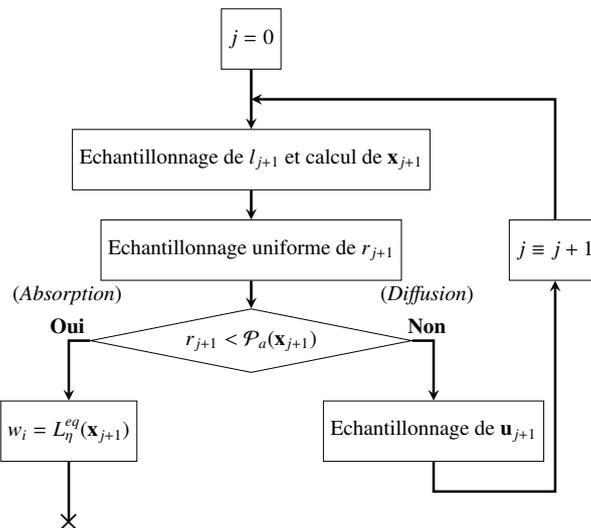


FIGURE 3.6 – Algorithme de Monte-Carlo estimant $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ dans un milieu infini absorbant, diffusant et émettant. Un libre parcours l_1 est d'abord échantillonné, conduisant à une position de collision \mathbf{x}_1 . Cette collision pouvant être soit une émission soit une diffusion, un test de Bernoulli est effectué : un nombre aléatoire r_1 est échantillonné. Si $r_1 < \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)$, il y a émission en \mathbf{x}_1 , le poids de Monte-Carlo est alors $w_1 = L_{\eta}^{eq}(\mathbf{x}_1)$. Si $r_1 > \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)$, la collision est une absorption, une direction \mathbf{u}_1 et un nouveau libre parcours l_2 sont alors échantillonnés, menant ainsi à un nouveau point de collision \mathbf{x}_2 où un test de Bernoulli sera effectué pour déterminer le type de collision. L'algorithme continuera ainsi, jusqu'à ce qu'une absorption soit identifiée.

Les images physiques correspondantes sont encore celles de photons suivis depuis la position \mathbf{x}_0 dans la direction opposée à \mathbf{u}_0 , jusqu'à ce qu'ils soient absorbés en \mathbf{x}^* . Mais le chemin optique est désormais un chemin de multi-diffusion. Au premier point de collision \mathbf{x}_1 , il y a une probabilité $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)$ que les photons soient absorbés. Dans ce cas $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1$. Autrement, ils diffusent dans une direction \mathbf{u}'_1 avec une probabilité $(1 - \mathcal{P}_a(x_1))$. Les photons sont alors suivis jusqu'à la prochaine collision en \mathbf{x}_2 qui peut, à son tour, être soit une nouvelle diffusion, soit une absorption et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un point d'absorption soit identifié. La luminance d'équilibre en ce point est alors considérée.

Une autre manière d'aborder ce problème consiste à le définir dans l'espace des chemins [Dauchet, 2012]. Cet espace est défini comme l'ensemble des chemins de multi-diffusion possibles passant en \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 . Les images statistiques correspondantes consistent alors à considérer un chemin optique appartenant à cet espace et à suivre les photons le long de ce chemin, de la même façon qu'ils le seraient dans le cas d'un milieu purement absorbant/émettant.

3.4.2 Traitement déterministe des tests de Bernoulli ou méthode dite d'*Energy partitioning*

Comme présenté précédemment, toutes les contributions à la variable aléatoire $W(\mathbf{X}^*)$ sont uniquement liées aux événements d'émission : $W(\mathbf{X}^*) = L_\eta^{eq}(\mathbf{X}^*)$. Imaginons désormais que le milieu considéré soit fortement diffusant et peu absorbant/émissif : l'essentiel du temps de calcul sera alors consacré à traiter les événements de diffusion qui n'ont aucun autre rôle que de permettre un échantillonnage de l'espace des chemins. À de très rares moments, des émissions seront prises en compte, mettant ainsi fin à la réalisation.

Une manière de répondre à ce problème est d'employer une méthode qui consiste à ôter le caractère probabiliste des albédos d'émission $\frac{k_{a,\eta}}{k_\eta}$ et de diffusion $\frac{k_{d,\eta}}{k_\eta}$ en les traitant de façon déterministe. Ainsi, à chaque collision, une contribution d'absorption/émission sera prise en compte. Cette approche, initialement développée pour calculer l'émittance apparente de cavités isothermes [Shamsundar *et al.*, 1973], est connue sous différentes dénominations : "Energy partitioning" [Modest, 2003b], "Absorption suppression" [Walters et Buckius, 1992] ou encore "Pathlength method" [Farmer et Howell, 1998]. L'utilisation de cette technique consiste donc à reformuler l'Eq. 3.68 en :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^\infty p_{\mathcal{L}_1}(l_1) dl_1 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \quad (3.72)$$

où les grandeurs $\frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)}$ et $\frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)}$ sont utilisés de manière déterministe. La luminance d'intérêt $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ est alors définie comme l'espérance d'une variable aléatoire un

peu plus complexe :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k_{a,\eta}(\mathbf{X}_j)}{k_\eta(\mathbf{X}_j)} L_\eta^{eq}(\mathbf{X}_j) \prod_{q=1}^{j-1} \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{X}_q)}{k_\eta(\mathbf{X}_q)} \right) \right] \quad (3.73)$$

Les images physiques associées à ce traitement déterministe des albédos sont alors sensiblement modifiées. Plutôt que de suivre des photons depuis \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 jusqu'à ce qu'ils soient absorbés en un point \mathbf{x}_j , ils sont ici absorbés de façon progressive le long de leur chemin optique.

L'Eq. 3.73 pose cependant dans notre cas d'étude (milieu infini) un problème majeur lorsqu'il s'agit de la traduire algorithmiquement : la récursion est infinie, le calcul ne s'arrête donc jamais (voir Fig. 3.7). En partant du constat que plus l'indice

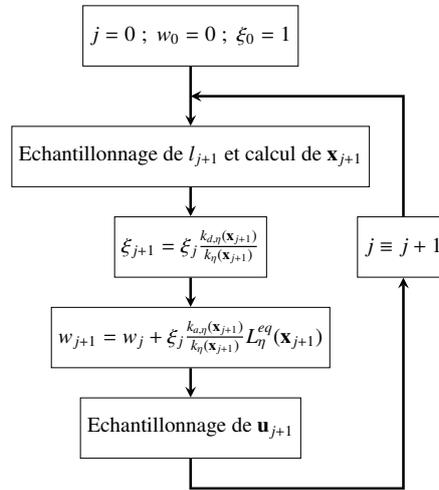


FIGURE 3.7 – Algorithme de Monte-Carlo avec traitement déterministe pur des albédos. Un libre parcours d'extinction l_1 est échantillonné à partir de \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 , menant ainsi à un point de collision \mathbf{x}_1 . En ce point de collision, une contribution d'émission $\frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1)$ est prise en compte. Puis une nouvelle direction \mathbf{u}_1 et un nouveau libre parcours l_2 sont échantillonnés, menant à un nouveau point de collision \mathbf{x}_2 pour lequel une contribution d'émission $\frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_2)}{k_\eta(\mathbf{x}_2)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_2) \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)}$ est à nouveau ajoutée au poids de Monte-Carlo w_i . L'algorithme poursuit ainsi cette boucle indéfiniment. Il est alors nécessaire de définir un critère d'arrêt pour y mettre fin (voir Fig. 3.8).

de collision j est grand, plus le terme $\xi_j = \prod_{q=1}^{j-1} \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_q)}{k_\eta(\mathbf{x}_q)}$ est faible, deux alternatives sont envisageables pour répondre à cette infinité de boucles :

- lorsque ξ_j devient suffisamment proche de zéro, on stoppe la réalisation, tronquant ainsi la somme infinie. Un léger biais est alors créé, faisant ainsi perdre à l'algorithme de Monte-Carlo son caractère de méthode de référence.
- lorsque ξ_j passe en dessous d'un seuil ζ défini arbitrairement entre 0 et 1, on rétablit le caractère probabiliste des albédos : on bascule alors à l'algorithme présenté à la Sec. 3.4.1. L'algorithme résultant d'un tel choix, privilégié dans la suite du manuscrit, est décrit par la Fig. 3.8.

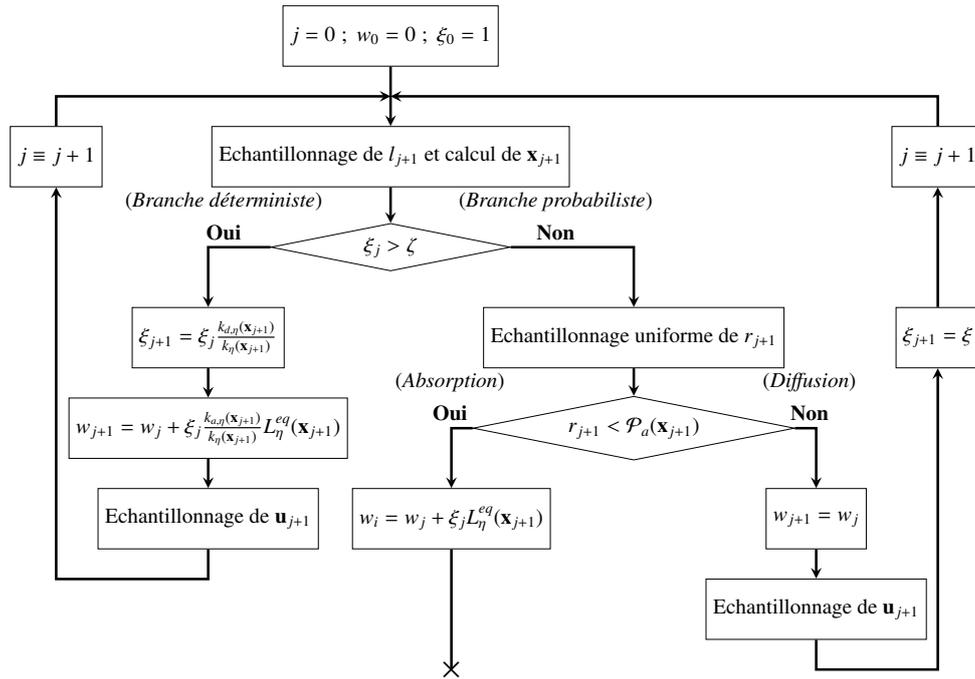


FIGURE 3.8 – Algorithme de Monte-Carlo avec traitement déterministe puis stochastique des albédos. Tant que le critère d’extinction $\xi_j = \prod_{q=1}^{j-1} \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_q)}{k_{\eta}(\mathbf{x}_q)}$ est supérieur au seuil arbitraire ζ , l’algorithme est identique à celui présenté à la Fig. 3.7. Une fois ce seuil atteint, l’algorithme bascule sur une branche dans laquelle les albédos de diffusion et d’absorption sont traités de façon statistique (similaire à l’algorithme présenté à la Fig. 3.6) pour mettre fin à la réalisation.

3.4.3 Calcul de sensibilités paramétriques

Les méthodes de Monte-Carlo offrent également l'avantage de pouvoir estimer des sensibilités paramétriques⁶ en parallèle du calcul de l'observable radiative, sans augmenter de manière sensible le temps de calcul. En effet, du fait de la linéarité de l'expression intégrale considérée, la structure algorithmique correspondante ne sera pas altérée lorsqu'il s'agira d'estimer une sensibilité paramétrique de cette même grandeur. Pour illustrer cette possibilité offerte par les méthodes de Monte-Carlo, repartons de l'Eq. 3.68 et exprimons la sensibilité paramétrique $\partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ de la luminance $L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, selon un paramètre ϖ ayant une influence sur la seule fonction de phase (le paramètre d'asymétrie par exemple). Exprimer cette sensibilité paramétrique revient alors à dériver $L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ par rapport à ϖ :

$$\begin{aligned} \partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \int_0^{\infty} dl_1 p_{\mathcal{L}_1}(l_1) \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1) \times 0 \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)) \int_{4\pi} d\mathbf{u}_1 \left\{ \begin{array}{l} \partial_{\varpi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \\ + \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) \partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Pour garder la même structure statistique et algorithmique que celle de l'estimation de la luminance $L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, l'Eq. 3.74 peut être reformulée en :

$$\partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^{\infty} dl_1 p_{\mathcal{L}_1}(l_1) \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1) \times 0 \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_1)) \int_{4\pi} d\mathbf{u}_1 \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) \\ \times \left[\begin{array}{l} \partial_{\varpi} [\ln(\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1))] L_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \\ + \partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (3.75)$$

Cette équation comporte désormais deux termes récursifs : $L_{\eta}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)$ et $\partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)$. Le premier est le même que pour l'estimation de la luminance $L_{\eta}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ (voir Eq. 3.69) et le second est donné par :

$$\begin{aligned} \partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) &= \int_0^{\infty} dl_{j+1} p_{\mathcal{L}_{j+1}}(l_{j+1}) \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1}) \times 0 \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1})) \int_{4\pi} d\mathbf{u}_{j+1} \phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) \\ \times \left[\begin{array}{l} \partial_{\varpi} [\ln(\phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}))] L_{\eta}(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) \\ + \partial_{\varpi} L_{\eta}(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.76)$$

6. Dans [De La Torre *et al.*, 2014], les auteurs distinguent plusieurs familles de sensibilités paramétriques : 1/ celles où seul le poids de Monte-Carlo dépend du paramètre d'intérêt 2/ celles où le paramètre n'intervient que dans les probabilités de la formulation intégrale 3/ celles où le domaine d'intégration est dépendant du paramètre par rapport auquel est calculée la sensibilité 4/ une combinaison des trois cas précédents. Dans le cadre de ces travaux de thèse, seul le second cas - illustré dans la présente section - sera abordé.

Toutefois, ces deux termes, ayant une même structure d'un point de vue statistique, peuvent être pris en compte simultanément. Il est ainsi possible d'exprimer la sensibilité de la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ au paramètre ϖ comme une unique espérance :

$$\begin{aligned} \partial_\varpi L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) &= \mathbb{E} \left[L_\eta^{eq}(\mathbf{X}^*) \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \prod_{q=1}^{j-1} (1 - A_q) \right) \left(\sum_{m=1}^{j-1} \partial_\varpi [\ln(\phi(\mathbf{X}_m, \mathbf{U}_{m-1} | \mathbf{U}_m))] \right) \right] \\ &= \mathbb{E} [W_\varpi(\mathbf{X}^*)] \end{aligned} \quad (3.77)$$

où A_q est une variable aléatoire valant 1 avec une probabilité $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_q)$ et 0 avec une probabilité $1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_q)$ et où \mathbf{X}^* est définie de la même façon que pour l'estimation de $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ (voir Eq. 3.71). Le détail de ces calculs est donné en Annexe A.

Il est alors possible d'estimer cette sensibilité paramétrique de la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ conjointement à l'estimation de cette luminance. La description d'une réalisation de l'algorithme de Monte-Carlo correspondant est donnée à la Fig. 3.9.

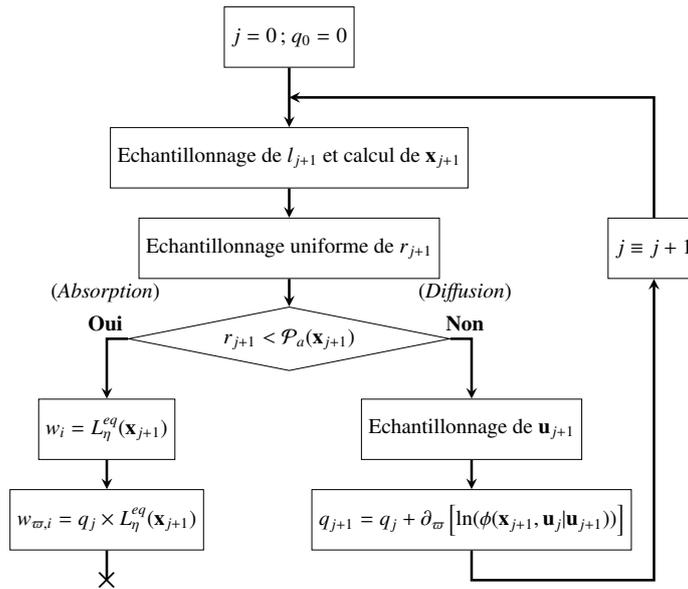


FIGURE 3.9 – Algorithme de Monte-Carlo estimant de façon simultanée une luminance $L(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ dans un milieu participant infini et sa sensibilité à un paramètre ϖ de la fonction de phase. La structure algorithmique est identique à celle de la Fig. 3.3 ; seul un facteur incrémental q_j est rajouté pour calculer l'expression du poids de Monte-Carlo w_i .

L'estimation de $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ pour N_{mc} réalisations de Monte-Carlo est alors donnée par $\tilde{L}_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \sum_{i=1}^{N_{mc}} w_i / N_{mc}$ et l'estimation de sa sensibilité au paramètre ϖ par $\tilde{\partial}_\varpi L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{N_{mc}} w_{\varpi,i} / N_{mc}$.

3.4.4 Luminance dans un milieu purement absorbant, diffusant et entouré de parois réfléchissantes

Reprenons le cas présenté à la [Sec. 3.4.1](#) : un milieu absorbant, émettant et diffusant et considérons le désormais comme fini et entouré par des parois partiellement réfléchissantes (voir [Fig. 3.10](#)). À partir de l'[Eq. 3.65](#), il est possible de faire

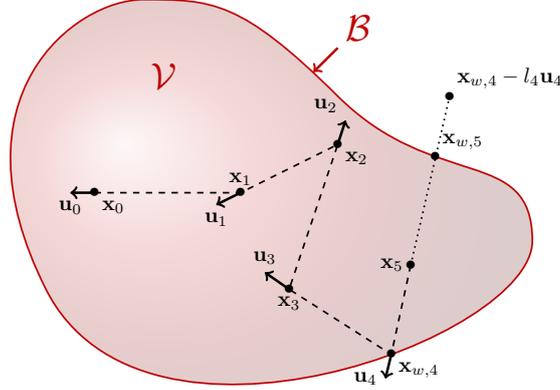


FIGURE 3.10 – Milieu absorbant, émettant et diffusant, clos par des parois partiellement réfléchissantes. Les images physiques associées à l'estimation de la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ sont celles de photons suivis depuis \mathbf{x}_0 dans la direction $-\mathbf{u}_0$ jusqu'à leur point d'émission à la paroi \mathcal{B} (voir $\mathbf{x}_{w,5}$) ou dans le milieu \mathcal{V} (voir \mathbf{x}_5). Le long de leur chemin optique, ces photons sont susceptibles de subir des événements de diffusion multiple (voir $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) ou de réflexion (voir \mathbf{x}_4).

apparaître une prise en compte des parois comme proposée à la [Sec. 3.3.3](#). La seule différence concerne les conditions aux frontières : dans la [Sec. 3.3.3](#) les parois étaient considérées comme noires, désormais elles sont partiellement réfléchissantes. Dans des considérations réciproques, seule une proportion $\varepsilon(\mathbf{x}_w)$ des photons est absorbée par la paroi, autrement ces photons sont réfléchis et continuent leur chemin dans une nouvelle direction selon une distribution directionnelle de réflexion $\psi(\mathbf{x}_{w,1}, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1)$. On se ramène donc aux parois, à une expression très proche de celle rencontrée lors de multi-diffusions. La luminance au point \mathbf{x}_0 dans la direction \mathbf{u}_0 est alors donnée par la formulation intégrale récursive suivante :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \int_0^\infty dl_1 k_\eta(\mathbf{x}_1) \exp\left(-\int_0^{l_1} k_\eta(\mathbf{x}_0 - l'_1 \mathbf{u}_0) dl'_1\right) \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(\mathbf{x}_1 \notin \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\mathbf{x}_{w,1}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{w,1}) \\ +(1 - \varepsilon(\mathbf{x}_{w,1})) \int_{2\pi} \psi(\mathbf{x}_{w,1}, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_\eta(\mathbf{x}_{w,1}, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \\ + \mathcal{H}(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_1) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_1)}{k_\eta(\mathbf{x}_1)} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1) L_\eta(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (3.78)$$

où le point $\mathbf{x}_{w,j+1}$ correspond à la première intersection entre la frontière et la demi-droite définie par le point \mathbf{x}_j et la direction $-\mathbf{u}_j$. Le terme récursif $L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j)$, présent

à deux reprises dans l'Eq. 3.78, est donné par :

$$L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \int_0^\infty dl_{j+1} k_\eta(\mathbf{x}_{j+1}) \exp\left(-\int_0^{l_{j+1}} k_\eta(\mathbf{x}_j - l'_{j+1} \mathbf{u}_j) dl'_1\right) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(\mathbf{x}_{j+1} \notin \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\mathbf{x}_{w,j+1}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{w,j+1}) \\ +(1 - \varepsilon(\mathbf{x}_{w,j+1})) \int_{2\pi} \psi(\mathbf{x}_{w,j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{w,j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \\ + \mathcal{H}(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_{a,\eta}(\mathbf{x}_{j+1})}{k_\eta(\mathbf{x}_{j+1})} L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \\ + \frac{k_{d,\eta}(\mathbf{x}_{j+1})}{k_\eta(\mathbf{x}_{j+1})} \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (3.79)$$

Il est alors possible de remplacer les termes d'extinction, d'émissivité, de réflectivité et albedos de diffusion et d'absorption par leur notation sous forme de probabilité. Il vient alors la formulation statistique :

$$L_\eta(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \int_0^\infty p_{\mathcal{L}_{j+1}}(l_{j+1}) dl_{j+1} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(\mathbf{x}_{j+1} \notin \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_e(\mathbf{x}_{w,j+1}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{w,j+1}) \\ +(1 - \mathcal{P}_e(\mathbf{x}_{w,j+1})) \int_{2\pi} \psi(\mathbf{x}_{w,j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{w,j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \\ + \mathcal{H}(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1}) L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \\ +(1 - \mathcal{P}_a(\mathbf{x}_{j+1})) \int_{4\pi} \phi(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j+1}) L_\eta(\mathbf{x}_{j+1}, \mathbf{u}_{j+1}) d\mathbf{u}_{j+1} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (3.80)$$

pour laquelle l'observable où $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ est un cas particulier (validant $j = 0$) et où $\mathcal{P}_e(\mathbf{x}_{w,1}) = \varepsilon(\mathbf{x}_{w,1})$ correspond à la probabilité que le photon soit émis par la paroi.

À nouveau, cette expression de la luminance correspond à l'espérance de la luminance d'équilibre au point d'émission \mathbf{X}^* :

$$L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(\mathbf{X}^*)] = \mathbb{E} [W(\mathbf{X}^*)] \quad (3.81)$$

Toutefois, la variable aléatoire \mathbf{X}^* intègre désormais l'idée de réflexion aux parois. Elle peut être exprimée comme :

$$\mathbf{X}^* = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\mathcal{H}(X_j \in \mathcal{V}) A_j X_j + \mathcal{H}(X_j \notin \mathcal{V}) E_j X_{w,j} \right] \prod_{q=1}^{j-1} (1 - A_q - E_q) \quad (3.82)$$

où A_j est une variable aléatoire valant 1 avec une probabilité $\mathcal{P}_a(\mathbf{x}_j)$, 0 sinon, et E_j une variable aléatoire valant 1 avec une probabilité $\mathcal{P}_e(\mathbf{x}_{w,j})$, 0 sinon. Une réalisation indépendante de la traduction algorithmique de l'Eq. 3.82 est donnée à la Fig. 3.11.

Ce cas d'étude constitue le cas le plus général rencontré dans ce manuscrit (absorption, réflexion, diffusion, émission). Les trois configurations décrites précédemment dans ce chapitre ne sont que des cas particuliers du cas d'étude présent :

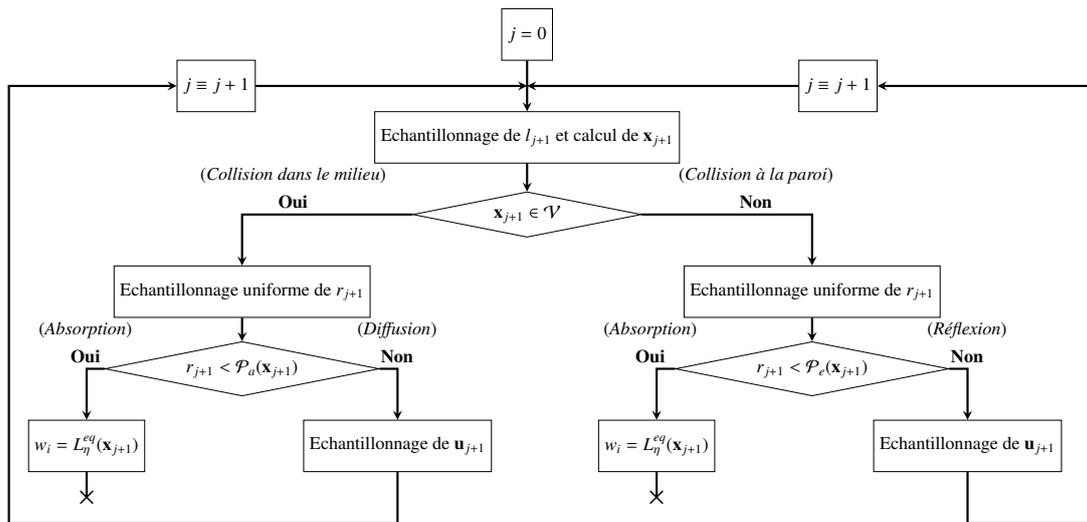


FIGURE 3.11 – Algorithme estimant $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ dans un milieu absorbant, émettant et diffusant, clos par des parois partiellement réfléchissantes. Une position de collision \mathbf{x}_1 est tout d’abord déterminée par l’échantillonnage d’un libre parcours l_1 selon la loi de Beer-Lambert. Le point \mathbf{x}_1 peut être dans le milieu participant ou non. S’il appartient au milieu participant, un test de Bernoulli est effectué pour déterminer le type de collision. Si c’est une absorption, le poids de Monte-Carlo est calculé et la réalisation s’arrête. Dans le cas d’une diffusion, une nouvelle direction \mathbf{u}_1 est échantillonnée selon la fonction de phase $\phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1)$ et l’algorithme boucle à l’étape d’échantillonnage des libres parcours. Dans le cas où le point \mathbf{x}_1 n’appartient pas au milieu participant, un test de Bernoulli est effectué pour déterminer si la collision à la paroi en $\mathbf{x}_{w,1}$ est une absorption ou une réflexion. S’il s’agit d’une absorption, la réalisation s’arrête et le poids de Monte-Carlo est calculé. S’il s’agit d’une réflexion, une direction \mathbf{u}_1 est échantillonnée selon le modèle probabiliste de réflexion $\psi(\mathbf{x}_{w,1}, \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_1)$ et l’algorithme boucle à l’étape d’échantillonnage des libres parcours. Ces boucles se poursuivent jusqu’à ce qu’une absorption par le milieu ou à la frontière se produise.

- La suppression des termes de parois mène au cas d'étude de la [Sec. 3.4.1](#).
- Lorsque le coefficient de diffusion est nul et l'émissivité à la paroi est de 1 cela correspond au cas d'étude de la [Sec. 3.3.3](#).
- La suppression des termes de parois et un coefficient de diffusion nul mènent au cas d'étude de la [Sec. 3.3.1](#).

3.5 Étude d'une grandeur intégrée de la luminance

Jusqu'alors, tous les cas d'étude consistaient à évaluer la luminance en un point en échantillonnant des positions d'émission et en moyennant les luminances d'équilibre en ces points. Les représentations des différents phénomènes faisaient apparaître de façon directe des grandeurs probabilisées (atténuation exponentielle, albédos d'absorption / de diffusion ou encore émissivité / réflectivité). Cette dernière section a pour but de présenter l'approche statistique relative à une intégration de cette luminance. En guise d'illustration, reprenons la configuration de la [Sec. 3.4.4](#) et étudions le bilan radiatif d'un sous-volume homogène et isotherme $\delta\mathcal{V}$ du milieu \mathcal{V} . Celui-ci s'exprime comme :

$$\Phi(\delta\mathcal{V}) = \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} d\eta \int_{\delta\mathcal{V}} d\mathbf{x}_0 \int_{4\pi} d\mathbf{u}_0 k_a(\mathbf{x}_0) (L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0) - L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)) \quad (3.83)$$

Formulées ainsi, on note que les intégrations sur la plage spectrale $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$, le volume d'intérêt V et l'ensemble des directions 4π ne constituent que de simples sommes déterministes, ne nous permettant pas, en l'état, d'approcher ce problème de façon purement statistique. Pour répondre à cette limite, il est possible de considérer les variables η_0 , \mathbf{x}_0 et \mathbf{u}_0 comme aléatoires en leur associant à chacune une densité de probabilité : respectivement $p_H(\eta)$, $p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0)$ et $p_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}_0)$. Ces densités de probabilité peuvent désormais être introduites dans l'expression intégrale. Pour rétablir le caractère intégral de $\Phi(\delta\mathcal{V})$, la grandeur $k_a(\mathbf{x}_0) (L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0) - L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0))$ est alors divisée par ces trois probabilités :

$$\begin{aligned} \Phi(\delta\mathcal{V}) &= \int_{\Delta\eta} p_H(\eta) d\eta \int_{\delta\mathcal{V}} p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \int_{4\pi} p_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_0) (L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0) - L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0))}{p_H(\eta) p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) p_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}_0)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_0) (L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0) - L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0))}{p_H(\eta) p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) p_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}_0)} \right] \end{aligned} \quad (3.84)$$

Le problème, à l'origine exprimé de façon déterministe, a ainsi pu être reformulé dans des considérations purement statistiques. Ne reste alors plus qu'à exprimer la luminance $L_\eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$. Si l'on reprend la configuration de la [Sec. 3.4.4](#), il est possible d'écrire à partir des équations [3.81](#) et [3.84](#)

$$\Phi(\delta\mathcal{V}) = \mathbb{E} \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_0) (L_\eta^{eq}(\mathbf{x}_0) - \mathbb{E} [L_\eta^{eq}(\mathbf{X}^*)])}{p_H(\eta) p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) p_{\mathbf{u}_0}(\mathbf{u}_0)} \right] = \mathbb{E} [W(X^*)] \quad (3.85)$$

méthodologiques, l'étude d'un problème radiatif, progressivement complexifié, a permis d'aborder les différentes approches, techniques et formalismes qui seront employés dans la suite de ce manuscrit. La prise en compte des frontières, des phénomènes de diffusion (et donc de la récursivité), les approches d'échantillonnage préférentiel, de variance nulle, ainsi que les techniques d'*energy-partitioning* ont ainsi pu être présentées.