Une nouvelle méthode multi-échelle pour un problème de transport en milieux poreux

Sommaire

Dans ce chapitre, on reprend les résultats montrés au chapitre 7 pour mettre en place une méthode multi-échelle adaptée à un problème de transport plus général.

8.1 Construction de la méthode multi-échelle

8.1.1 Hypothèses de départ

Nous souhaitons appliquer les résultats obtenus au chapitre 7 pour construire une méthode multi-échelle. Cependant, ces résultats théoriques ont été montrés en considérant l'espace $\mathbb{R}^N$. Nous ne pouvons évidemment pas mailler l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier et il nous est donc impossible de faire des simulations numériques pour résoudre le problème (7.6). Nous allons donc considérer un pavé $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aux bords duquel on impose des conditions de périodicité. Les résultats d'homogénéisation qu'on obtiendrait avec des conditions aux bords de type Dirichlet seraient différents (voir [APP12]). Cela est principalement dû au terme de grande dérive $\frac{b^*}{\varepsilon}$ qui pose un problème sur le bord du domaine. Les hypothèses de périodicité sur les conditions aux limites sont donc nécessaires pour l'étude théorique de la méthode mais, en pratique, cette méthode sera aussi appliquée avec des conditions aux bords plus classiques.

On se donne un entier $k \geqslant 1$ qui sera l'ordre de la méthode numérique multi-échelle. On cherche

$$u_\varepsilon \in \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2_\#(\Omega)\right) \cap L^2\left((0,T), H^1_\#(\Omega)\right)$$

solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll}\rho^{\varepsilon}(x)\,\partial_t u_{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}b^{\varepsilon}(x)\cdot\nabla u_{\varepsilon}-\operatorname{div}\left(A^{\varepsilon}(x)\,\nabla u_{\varepsilon}\right) & = & 0 & \text{dans } (0,T)\times\Omega\\ u_{\varepsilon}(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega\\ u_{\varepsilon} \text{ est } \Omega\text{-périodique.} & & & \end{array}\right. \tag{8.1}$$

Pour pouvoir appliquer les résultats présentés au chapitre 7, on doit au moins reprendre les hypothèses 7.1 en supposant que l'on a

$$\rho^{\varepsilon}(x)=\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad A^{\varepsilon}(x)=A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),\quad b^{\varepsilon}(x)=b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Cependant, comme dans le cas elliptique, pour appliquer les résultats sur un ouvert borné et obtenir une estimation d'erreur de la méthode multi-échelle il faut ajouter des hypothèses. Ainsi, on fait les hypothèses suivantes.

Hypothèses 8.1 :

1. On considère une suite de réels ε tendant vers 0 en rapport rationnel avec les dimensions de Ω. Ainsi, on peut toujours écrire Ω sous la forme
$$\Omega=\prod_{i=1}^{N}(n_i^{\varepsilon}\varepsilon,m_i^{\varepsilon}\varepsilon),\quad n_i^{\varepsilon},m_i^{\varepsilon}\in\mathbb{N}\text{ avec } n_i^{\varepsilon}<m_i^{\varepsilon}.$$
2. Les fonctions b, A et ρ sont des fonctions Y-périodiques.
3. La fonction ρ est dans l'espace $L^{\infty}(Y)$.
4. Les fonctions b, A et ρ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et les interfaces de discontinuités sont $\mathcal{C}^2$.
5. La divergence de la fonction b est nulle :
$$\operatorname{div}(b)=0.$$
6. Il existe un réel $\rho_{min}>0$ tel que $\forall y\in Y,\quad \rho(y)\geqslant\rho_{min}$.
7. La matrice A est coercive : il existe une constante $C_{sta}>0$ telle que
$$\forall\xi\in\mathbb{R}^N,\qquad A\xi\cdot\xi\geqslant C_{sta}\left|\xi\right|^2$$
la norme $|\cdot|$ étant la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.
8. La fonction u^0 est dans l'espace $W_{\#}^{k+3,\infty}(\Omega)$.

Remarques 8.1 :

Les hypothèses 3 et 4 permettent d'assurer que les fonctions w_i solutions des problèmes de cellule (7.10) sont dans l'espace $W_{\#}^{1,\infty}(Y)$ (voir lemme 4.1).

La fonction u est la solution du problème homogénéisé (7.11). Cette équation présente un problème parabolique avec un opérateur elliptique constant car A^* ne dépend pas du temps. Cette fonction est donc au moins aussi régulière que la condition initiale (voir annexe A.2.3), en particulier :

$$u\in L^{\infty}\left((0,T),W_{\#}^{k+3,\infty}(\Omega)\right).$$

8.1.2 Idée de la méthode

On introduit des *fonctions tests oscillantes* $\widehat{w}_i^{\varepsilon}$ telles que

$$\widehat{w}_i^{\varepsilon}(x)=x_i+\varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où les fonctions w_i sont les solutions Y-périodiques et à moyenne nulle des problèmes de cellule (7.10). On remarque qu'avec cette définition, $e_i+(\nabla_y w_i)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\nabla\widehat{w}_i^{\varepsilon}(x)$. De plus, en remplaçant div_y par $\varepsilon\operatorname{div}$, l'équation (7.10) devient :

$$b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon(x)-\varepsilon\mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon(x)\right)=\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)b^*\cdot e_i.$$

Les fonctions $\widehat{w}_i^\varepsilon$ sont des solutions ε-périodiques de l'équation :

$$\frac{1}{\varepsilon}b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon-\mathrm{div}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\right)=\frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)b^*\cdot e_i\quad\text{dans } \varepsilon Y. \tag{8.2}$$

L'approximation (7.42) peut alors se réécrire :

$$u_\varepsilon(t,x)\approx u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)+\sum_{i=1}^N\left(\widehat{w}_i^\varepsilon(x)-x_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right).$$

On remarque que le membre de droite correspond à un développement de Taylor à l'ordre 1 en espace. On va donc écrire :

$$u_\varepsilon(t,x)\approx u\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right).$$

On introduit la fonction $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifiant :

$$\tilde{u}_\varepsilon(t,x)=u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right). \tag{8.3}$$

Dans ce cas,

$$u\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)=\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)),$$

et on a donc l'approximation :

$$u_\varepsilon(t,x)\approx\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)). \tag{8.4}$$

La formule d'approximation (8.4) est le point de départ de la définition d'une nouvelle méthode d'éléments finis multi-échelles adaptée au problème (8.1). Comme pour la méthode Allaire-Brizzi présentée au chapitre 4, on va construire des fonctions de base multi-échelles en utilisant cette composition.

8.1.3 Définition de la méthode

On souhaite trouver $u_\varepsilon\in\mathcal{C}^0\left((0,T),L^2_\#(\Omega)\right)\cap L^2\left((0,T),H^1_\#(\Omega)\right)$ solution du problème (8.1) en faisant les hypothèses 8.1. Le but, ici, est de mettre en place une méthode multi-échelle qui pourrait s'appliquer à des cas non-périodiques. On ne va donc pas utiliser le fait que les fonctions ρ^ε, A^ε et b^ε sont des fonctions Y-périodiques de $\frac{x}{\varepsilon}$ ni que le domaine Ω est muni de conditions aux bords périodiques pour définir la méthode. Cependant, l'erreur d'approximation de cette méthode ne peut être calculée que dans le cas périodique.

On considère une famille de maillages grossiers $\mathcal{K}_H$ de résolution H vérifiant les hypothèses 4.2. On suppose également que $H>\varepsilon$. En pratique, on choisira H au moins de l'ordre de $100\times\varepsilon$. On introduit ensuite V_H, un sous-espace de $H^1_\#(\Omega)$ de dimension finie D_H et associé au maillage grossier $\mathcal{K}_H$. V_H est, dans notre cas, l'espace associé à la méthode aux éléments finis $\mathbb{P}_k$ Lagrange. On note donc $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$ l'ensemble des nœuds associés à cette méthode. Pour chaque maille $K\in\mathcal{K}_H$, on calcule les fonctions $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ en reprenant l'équation (8.2) :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\cdot\nabla\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}-\mathrm{div}\left(A^\varepsilon(x)\nabla\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}\right)&=&\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b^{*,K}\cdot e_i\quad\text{dans } K,\\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}&=&x_i\quad\text{sur }\partial K,\end{array}\right. \tag{8.5}$$

où

$$b^{*,K}=\frac{\int_K b^\varepsilon(x)dx}{\int_K\rho^\varepsilon(x)dx}.$$

Les fonctions $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ sont des approximations de $\widehat{w}_i^{\varepsilon}$ dans le cas périodique, les conditions aux bords étant différentes. On construit également le vecteur $\widetilde{w}^{\varepsilon,K}$ ayant pour composantes les solutions des problèmes (8.5). On définit ensuite la fonction $\widetilde{w}^{\varepsilon,H}$ telle que

$$\forall K \in \mathcal{K}_H, \quad \widetilde{w}^{\varepsilon,H}_{|K} = \widetilde{w}^{\varepsilon,K}.$$

On construit alors l'espace $V_{\varepsilon,H}$ engendré par les fonctions de base définies, pour chaque nœud $l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$, par

$$\Phi_l^{\varepsilon,H} = \Phi_l^H \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H},$$

où les Φ_l^H sont les fonctions de base de V_H. On rappelle que les fonctions de base d'une méthode aux éléments finis $\mathbb{P}_k$ Lagrange sont des polynômes d'ordre k dans chaque maille K vérifiant

$$\forall l,l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}, \quad \Phi_l^H(l') = \delta_{l,l'}.$$

Soit π_H l'opérateur d'interpolation sur V_H :

$$\pi_H v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l)\, \Phi_l^H(x).$$

On définit ensuite l'opérateur d'interpolation $\pi_{\varepsilon,H}$ sur $V_{\varepsilon,H}$, par :

$$\pi_{\varepsilon,H} v(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l)\Phi_l^{\varepsilon,H}(x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} v(l)\Phi_l^H \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x) = (\pi_H v) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x). \tag{8.6}$$

On souhaite résoudre la formulation variationnelle du problème (8.1) sur l'espace $V_{\varepsilon,H}$ qui est de dimension finie D_H. On va donc calculer la solution $u_{\varepsilon,H}$ dans $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}, \quad \displaystyle\int_\Omega \left(\rho^\varepsilon \partial_t u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,H} \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} \right) dx & = & 0 \\ u_{\varepsilon,H}(0,x) & = & \pi_{\varepsilon,H} u^0(x). \end{array} \right. \tag{8.7}$$

Remarques 8.2 :

On suppose ici que les problèmes de cellules (8.5) sont résolus de manière exacte sur chaque maille grossière K.

Le problème (8.7) est en fait un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants car l'espace $V_{\varepsilon,H}$ est de dimension finie et ρ^ε, b^ε et A^ε ne dépendent pas du temps. Ce problème a donc bien une solution unique dans $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$.

On peut reprendre ici la première des remarques 4.2.
Pour $k \leqslant 2$, comme on a $w^{\varepsilon,K} = x$ sur ∂K et que tous les nœuds se situent sur le bord des mailles, on a pour tout $l' \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}$,

$$\left(\Phi_l^{\varepsilon,H}\right)_{|K}(l') = \delta_{l,l'}.$$

On a donc, pour $k \leqslant 2$,

$$\pi_{\varepsilon,H} v(l) = v(l), \quad \text{pour tout } l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}. \tag{8.8}$$

Pour des ordres $k \geqslant 3$, les nœuds de la méthode aux éléments finis $\mathbb{P}_k$ Lagrange ne sont pas tous sur le bord des mailles, l'égalité (8.8) n'est donc plus vraie.

8.2 Estimation *a priori* en temps continu

On se place dans le cas périodique et on calcule la solution $u_{\varepsilon,H}$ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty((0,T), V_{\varepsilon,H})$ du problème (8.7). On considère ici une discrétisation uniquement en espace. On suppose donc que le système d'équations aux dérivées ordinaires en temps (8.7) est résolu de manière exacte. L'objectif de la suite est d'estimer l'erreur entre la solution u_ε du problème (8.1) et la fonction $u_{\varepsilon,H}$ solution du problème (8.7).

Théorème 8.1. *Soit* u_ε *la solution du problème* (8.1)*. On considère un maillage* $\mathcal{K}_H$ *de résolution* H *vérifiant les hypothèses 4.2. Sur chaque maille* $K \in \mathcal{K}_H$ *on résout les problèmes de cellule* (8.5) *de manière exacte. Chaque maille* $K \in \mathcal{K}_H$ *est une réunion de cubes de taille* ε*. On suppose, de plus, que* $H > \varepsilon$*. On suppose également que les hypothèses 8.1 sont vérifiées. On peut alors construire les fonctions de base multi-échelles* $\Phi_l^{\varepsilon,H}$*. On note alors* $u_{\varepsilon,H}$ *la solution numérique du problème* (8.7)*.*

Il existe une constante C_{16} *indépendante de* ε *et* H *telle que*

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C_{16}\left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon}\left(H^{k+1} + \varepsilon\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right), \tag{8.9}$$

où

$$\|u\|^2_{\Omega_T} = \|u\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} + |u|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}.$$

Remarques 8.3 :

La présence du terme en $\frac{b^*}{\varepsilon}$ peut sembler décevante car, *stricto sensu*, si b^* est une grandeur d'ordre 1, l'estimation d'erreur ne tend pas vers zéro avec ε et H. Néanmoins, il faut se souvenir que dans le problème homogénéisé (7.16) (écrit dans un repère fixe) la vitesse homogénéisée est justement $\frac{b^*}{\varepsilon}$. Par conséquent, d'un point de vue "physique" on peut dire que c'est le terme $\frac{b^*}{\varepsilon}$ qui est une grandeur d'ordre 1, et dans ce cas l'estimation d'erreur 8.9 prouve bien la convergence de la méthode multi-échelle. D'un autre point de vue, ce facteur doit obligatoirement apparaître dans l'erreur du fait que la méthode utilisée est semi-discrète et ne traite pas spécifiquement le terme de convection. En effet, de manière générale, si on souhaite résoudre un problème de convection-diffusion avec une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_k$ Lagrange classique, la norme de la vitesse de convection va nécessairement intervenir dans les estimations *a priori* possibles. Un certain nombre de méthodes numériques adaptées à cette classe de problèmes ont déjà été proposées. On peut citer les méthodes de décentrement [BH82] ou la méthode des caractéristiques [BPS83]. On peut donc penser que l'utilisation de telles méthodes couplées avec les éléments finis multi-échelles présentés dans ce chapitre pourraient donner des résultats plus satisfaisants en terme d'estimations d'erreur. Cela reste un problème ouvert difficile.

P. Henning et M. Ohlberger ont construit dans [HO10] une méthode multi-échelle hétérogène pour résoudre le problème (8.1). Ils obtiennent une estimation *a priori* en considérant une résolution totalement discrète (en temps et en espace). Cette estimation est plus forte que (8.9) puisqu'elle ne comporte pas de terme en $\frac{b^*}{\varepsilon}$. Cependant, dans cet article, les solutions sont calculées dans le repère mobile

$$x \mapsto x - \frac{b^* t}{\varepsilon}. \tag{8.10}$$

Ainsi, il faudrait théoriquement appliquer ce changement de variable aux paramètres physiques ρ^ε, b^ε et A^ε ce qui modifie les problèmes de cellule à résoudre pour chaque itération en temps. En fait, dans [HO10], une hypothèse supplémentaire est supposée vérifiée : ces propriétés physiques dépendent uniquement de la variable $\frac{x}{\varepsilon}$ et ne varient donc pas à l'échelle grossière. Sous cette hypothèse, le changement de repère (8.10) ne modifie pas les solutions des différents problèmes de cellule. Cette hypothèse est très contraignante et ne pourrait pas s'appliquer dans le cadre de la simulation de réservoir.

Le théorème 8.1 se démontre en grâce au lemme suivant qui s'inspire d'un résultat montré dans [Whe73].

Lemme 8.1. *On définit le sous-espace de* $H^1_\#(\Omega)$

$$\dot{H}^1_\#(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1_\#(\Omega) \mid \int_\Omega \varphi = 0\right\}.$$

On introduit alors son dual $\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)$ *auquel on associe la norme*

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega u\varphi}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$

Il existe une constante $C_{17} > 0$ indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C_{17} \inf_{v_{\varepsilon,H}\in\mathcal{C}^\infty((0,T),V_{\varepsilon,H})} \Bigg(\|u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} + \|D_t (u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H})\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)} + \left\| \int_\Omega D_t (u_\varepsilon - v_{\varepsilon,H}) \right\|_{L^2((0,T))} + \|(u_{\varepsilon,H} - v_{\varepsilon,H})(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \Bigg), \quad (8.11)$$

où $D_t = \rho^\varepsilon \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla$ et $\|\cdot\|_{\Omega_T}$ est défini dans le théorème 8.1.

Ce lemme est démontré dans l'annexe B. On va appliquer cette inégalité en prenant comme fonction particulière $v_{\varepsilon,H} = \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon$ où $\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$, u étant la solution du problème homogénéisé (7.11). Dans la suite, on va donc successivement majorer les termes

$$\begin{aligned} X_1 &= |u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}, \\ X_2 &= \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}, \\ X_3 &= \|D_t (u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)} \\ X_4 &= \left\| \int_\Omega D_t (u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon) \right\|_{L^2((0,T))} \\ \text{et} \quad X_5 &= \|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Et on a

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C_{18} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5). \quad (8.12)$$

Le reste de la section 8.2 est consacrée à la démonstration du théorème 8.1 en majorant les uns après les autres les termes du membre de droite de l'inégalité (8.12).

8.2.1 Terme en gradient X_1

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition 8.1. *Soient u_ε la solution du problème* (8.1) *et $\tilde{u}_\varepsilon$ définie par* (8.3)*, on a*

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{19} \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \quad (8.13)$$

où $\pi_{\varepsilon,H}$ est l'opérateur d'interpolation sur $V_{\varepsilon,H}$ défini par l'équation (8.6)*.*

L'intégralité de ce paragraphe sera consacrée à la démonstration de cette proposition. Pour ce faire, on décompose la norme du gradient de la façon suivante :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant G_1 + G_2 + G_3, \quad (8.14)$$

où

$$\begin{aligned} G_1 &= \|\nabla u_\varepsilon - \nabla (\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}, \\ G_2 &= \|\nabla ((\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}, \\ \text{et} \quad G_3 &= \|\nabla (\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}, \end{aligned}$$

la fonction $\widehat{w}^\varepsilon$ est définie pour chaque composante par

$$\widehat{w}^\varepsilon_i(x) = x_i + \varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

et les fonctions w_i sont les solutions des problèmes de cellule (7.10).

Le terme G_1 est un terme d'homogénéisation globale qui peut être majoré en précisant l'approximation (8.4). Le terme G_2 est un terme d'interpolation sur le maillage grossier. Le terme G_3 peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation sur chaque maille grossière.

Terme d'homogénéisation globale G_1

Nous montrons ici le lemme suivant.

Lemme 8.2. *En reprenant les hypothèses de la proposition 8.1, on a l'inégalité*

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{20}\varepsilon. \tag{8.15}$$

Démonstration. Le problème est défini sur un parallélépipède Ω sur lequel on impose des conditions aux bords de périodicité, l'inégalité (7.39) montrée sur $\mathbb{R}^N$ reste alors valable :

$$\left\| u_\varepsilon(t,x) - u\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x-\frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))} \leqslant C_4\varepsilon. \tag{8.16}$$

On va alors décomposer le terme que l'on veut majorer en deux parties :

$$\begin{aligned}\|\nabla u_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} &\leqslant \|\nabla u_\varepsilon - \nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \\ &\quad + \|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}\end{aligned} \tag{8.17}$$

Le premier terme peut être majoré en utilisant l'inégalité (8.16). En effet,

$$\begin{aligned}\nabla\left(u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)+\varepsilon u_1\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) &= \nabla\tilde{u}_\varepsilon(t,x) + \varepsilon\nabla\left(w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon(t,x) + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon.\end{aligned}$$

La fonction $\widehat{w}_i^\varepsilon$ est définie par

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

donc

$$\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Et

$$\nabla\left(u_\varepsilon(t,x) - u\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t,x-\frac{b^*t}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = \nabla u_\varepsilon - \nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon - \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon.$$

On a alors, en reprenant l'inégalité (8.16)

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_4\varepsilon + \varepsilon\left\|w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}.$$

Puis, en utilisant le fait que $u \in L^\infty\left((0,T), W^{k+2,\infty}(\Omega)\right)$ et $w \in L^\infty(Y)^N$, on obtient

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{21}\varepsilon. \tag{8.18}$$

Pour majorer l'autre terme de (8.17), on remarque d'abord que

$$\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon - \nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right) = \nabla\widehat{w}_i^\varepsilon(x)\left(\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\left(t,x\right) - \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\|\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon(x)\left(\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\left(t,x\right) - \partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \\ &\qquad \leqslant \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N\times N}}\|\nabla\tilde{u}_\varepsilon\left(t,x\right) - \nabla\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}.\end{aligned} \tag{8.19}$$

On écrit alors le développement de Taylor avec reste intégral de $\nabla\tilde{u}_\varepsilon$:

$$\nabla\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x) = \nabla\tilde{u}_\varepsilon(t,x) + \varepsilon\int_0^1 w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\partial_{x_i}\tilde{u}_\varepsilon\left(t, x+\varepsilon s w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)ds.$$

Ainsi

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant \varepsilon \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T),W^{2,\infty}(\Omega))} \|w\|_{L^\infty(Y)^N} .$$

Puisque $\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$ et que les conditions imposées aux bords de Ω sont périodiques,

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T),W^{2,\infty}(\Omega))} = \|u\|_{L^2((0,T),W^{2,\infty}(\Omega))} \leqslant \sqrt{T}\, \|u\|_{L^\infty((0,T),W^{2,\infty}(\Omega))} ,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc

$$\|\nabla \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \nabla \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{22}\varepsilon.$$

Finalement, en insérant cette inégalité dans (8.19), on a

$$\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon(x) \left(\partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\,(t,x) - \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon\,(t, \widehat{w}^\varepsilon(x))\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{23}\varepsilon. \tag{8.20}$$

Puis, en reprenant les inégalités (8.18) et (8.20) dans (8.17), on a l'inégalité voulue. □

Terme d'interpolation G_2

On veut maintenant montrer le lemme suivant

Lemme 8.3. *En reprenant les hypothèses de la proposition 8.1, on a*

$$\|\nabla\left((\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{24} H^k \|u\|_{L^\infty((0,T),W^{k+1,\infty}(\Omega))} , \tag{8.21}$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|\nabla\left((\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right)&\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \\ &= \|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \partial_{x_i} \left(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon\right)(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \\ &\leqslant \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N\times N}} \|(\nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon\right))(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} ,\end{aligned} \tag{8.22}$$

les fonctions w_i étant dans l'espace $W^{1,\infty}_\#(Y)$. La fonction u est dans $L^\infty\left((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega)\right)$, et, en appliquant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla\left((\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right)&\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \\ &\leqslant \sqrt{T\,|\Omega|}\, \|Id + \nabla_y w\|_{L^\infty(Y)^{N\times N}} \|\nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon\right)\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)^N} .\end{aligned}$$

Puis, en utilisant des résultats d'interpolation classiques (voir annexe A.3.5) et le fait que

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T),W^{k+1,\infty}(\Omega))} = \|u\|_{L^\infty((0,T),W^{k+1,\infty}(\Omega))}$$

on obtient le résultat voulu. □

Terme d'homogénéisation locale G_3

Il nous reste enfin à majorer le terme

$$G_3 = \|\nabla\left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} .$$

Pour cela, nous allons d'abord caractériser l'erreur entre $\widehat{w}^\varepsilon$ et $\widetilde{w}^{\varepsilon,K}$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 8.4. *Il existe une constante C_{25} indépendante de ε et de la maille K telle que*

$$\left|\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right|_{H^1(K)^N} \leqslant C_{25}\sqrt{\varepsilon\,|\partial K|}.$$

De plus, il existe une constante C_{26} indépendante de ε et de la maille K telle que

$$\left\|\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right\|_{L^2(K)^N} \leqslant C_{26}\varepsilon\sqrt{|K|} \tag{8.23}$$

et

$$\left\|\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right\|_{L^\infty(K)^N} \leqslant \|w\|_{L^\infty(Y)^N}\,\varepsilon. \tag{8.24}$$

Ce lemme est démontré en annexe C. Cette démonstration est similaire à celle faite pour un cas elliptique (voir [BLP78] et [TYHC99]).

Nous allons maintenant montrer le lemme suivant.

Lemme 8.5. *Soient $\tilde{u}_\varepsilon$ et $\pi_{\varepsilon,H}$ définis comme dans la proposition 8.1. Il existe une constante $C_{27} > 0$ indépendante de ε, k et H telle que*

$$\|\nabla\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^{\varepsilon}(x)\right) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\right)\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{27}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}, \tag{8.25}$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H.

Démonstration. Le terme dont nous allons majorer la norme est

$$\begin{aligned}\nabla\left(\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\left(t,\widehat{w}^{\varepsilon}(x)\right) - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\right) &= \nabla\left(\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\left(t,\widehat{w}^{\varepsilon}(x)\right) - \left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\\ &= \nabla\widehat{w}^{\varepsilon}_i(x)\partial_{x_i}\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\left(t,\widehat{w}^{\varepsilon}(x)\right) - \nabla\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_i(x)\partial_{x_i}\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right).\end{aligned}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla\widehat{w}^{\varepsilon}_i\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^{\varepsilon} - \nabla\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_i\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}\\ &\qquad\leqslant \left\|\left(\nabla\widehat{w}^{\varepsilon}_i - \nabla\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_i\right)\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}\\ &\qquad\quad + \left\|\nabla\widehat{w}^{\varepsilon}_i\left(\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^{\varepsilon} - \partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N}.\end{aligned} \tag{8.26}$$

Or, on a

$$\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{N\times N}} = \sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right)\right\|^2_{L^2(K)^{N\times N}}.$$

On applique ensuite le lemme 8.4 sur chaque maille K. Donc

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{N\times N}} &= \sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right)\right\|^2_{L^2(K)^{N\times N}}\\ &\leqslant \sum_{K\in\mathcal{K}_H} C_{25}^2\varepsilon\,|\partial K|\\ &\leqslant C_{28}\varepsilon H^{N-1}H^{-N},\end{aligned}$$

en utilisant le fait que le périmètre d'une maille est de l'ordre de H^{N-1} et que le nombre de mailles nécessaires au recouvrement de Ω est de l'ordre de H^{-N}. On a donc montré que

$$\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon} - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(\Omega)^{N\times N}} \leqslant \sqrt{C_{28}\frac{\varepsilon}{H}}. \tag{8.27}$$

Et donc

$$\left\|\nabla\left(\widehat{w}^{\varepsilon}_i - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}_i\right)\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \sqrt{C_{28}\frac{\varepsilon}{H}}\,\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}.$$

De plus, utilisant le fait que $\|\pi_H u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ est bornée (voir remarque 4.4), on a

$$\left\|\nabla\left(\widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H}\right)\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_{29}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

D'où

$$\left\|\nabla\left(\widehat{w}_i^\varepsilon - \widetilde{w}_i^{\varepsilon,H}\right)\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2((0,T)\times\Omega)^N} \leqslant C_{30}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \tag{8.28}$$

Pour le deuxième terme de (8.26), on va d'abord utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 et l'estimation (8.23). Or, pour pouvoir faire ce développement de Taylor, il faut que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^2$ dans l'ensemble considéré. Les fonctions Φ_l^H et donc $\pi_H u$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque maille K. Il faut donc trouver, comme dans le cas elliptique un sous-ensemble de K dans lequel les valeurs $\widehat{w}^\varepsilon$ et $\widetilde{w}^{\varepsilon,K}$ soient dans K. En fait, en reprenant l'estimation (8.24), on a

$$\left\|\widehat{w}^\varepsilon - x - \left(\widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x\right)\right\|_{L^\infty(K)^N} \leqslant \|w\|_{L^\infty(Y)^N}\,\varepsilon.$$

Donc

$$\left\|\widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x\right\|_{L^\infty(K)^N} \leqslant \|w\|_{L^\infty(Y)^N}\,\varepsilon + \|\widehat{w}^\varepsilon - x\|_{L^\infty(K)^N}.$$

Or $\widehat{w}^\varepsilon - x = \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, donc

$$\left\|\widetilde{w}^{\varepsilon,K} - x\right\|_{L^\infty(K)^N} \leqslant 2\,\|w\|_{L^\infty(Y)^N}\,\varepsilon. \tag{8.29}$$

On construit alors l'ensemble

$$C_K = \left\{x \in K \mid d(x,\partial K) > 2\varepsilon\,\|w\|_{L^\infty(Y)^N}\right\}.$$

On remarque que si $x \in C_K$,

$$\widehat{w}^\varepsilon(x) \in K$$

et

$$\widetilde{w}^{\varepsilon,K}(x) \in K.$$

On va donc majorer le deuxième terme de (8.26) en le séparant en deux

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\left(\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(K)^N}\\
&\qquad= \left\|\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\left(\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(C_K)^N}\\
&\qquad\quad+ \left\|\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\left(\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(K\setminus C_K)^N}.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Sur l'ensemble C_K, on peut appliquer une inégalité de Taylor.

Remarque 8.4 : Comme à la remarque 4.4, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^2\pi_H u\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}} &\leqslant \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}} + \left\|\nabla^2\left(u - \pi_H u\right)\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}}\\
&\leqslant \left\|\nabla^2 u\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}} + CH^{k-1}\,|u|_{W^{k+1,\infty}(K)}
\end{aligned}$$

en reprenant des résultats d'interpolation (voir annexe A.3.5). Comme $k \geqslant 1$, on montre bien que

$$\left\|\nabla^2\pi_H u\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}}$$

est bornée.

On a donc les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\widehat{w}_i^\varepsilon\left(\partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}\left(\pi_H u\right)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(C_K)^N}\\
&\qquad\leqslant \|\nabla\widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(K)^{N\times N}}\left\|\nabla^2\left(\pi_H u\right)\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}}\left\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right\|_{L^2(C_K)^N}\\
&\qquad\leqslant C_{31}\left\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,K}\right\|_{L^2(K)^N}\\
&\qquad\leqslant C_{31}C_{26}\varepsilon\sqrt{|K|}\\
&\qquad\leqslant C_{32}\varepsilon\sqrt{H^N},
\end{aligned} \tag{8.31}$$

en utilisant le fait que les volumes des mailles sont de l'ordre de H^N. Sur $K \setminus C_K$, on utilise le fait que

$$|K \setminus C_K| = \left|\left\{x \in K \mid d(x, \partial K) \leqslant 2\varepsilon \|w\|_{L^\infty(Y)^N}\right\}\right| \leqslant C_{33} |\partial K| \varepsilon.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(K \setminus C_K)^N} \\
&\qquad\qquad \leqslant 2 \|\nabla \widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(K)^N} \|\nabla(\pi_H u)\|_{L^\infty(K)^N} \sqrt{C_{33} |\partial K| \varepsilon} \\
&\qquad\qquad \leqslant C_{34} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}},
\end{aligned} \tag{8.32}$$

en utilisant le fait que les périmètres des mailles sont de l'ordre de H^{N-1}. En insérant les inégalités (8.32) et (8.31) dans (8.30), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(K)^N} &\leqslant C_{35} \varepsilon H^{N-1} (\varepsilon H + 1) \\
&\leqslant C_{36} \varepsilon H^{N-1},
\end{aligned}$$

car ε et H sont bornés. En calculant la norme L^2 sur tout l'espace, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} &= \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{L^2(K)^N} \\
&\leqslant \sum_{K \in \mathcal{K}_H} C_{36} \varepsilon H^{N-1} \\
&\leqslant C_{37} \frac{\varepsilon}{H}
\end{aligned}$$

car le nombre de mailles pour recouvrir Ω est de l'ordre de H^{-N}. On a donc montré que

$$\left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \sqrt{C_{37}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

D'où, on déduit

$$\left\|\nabla \widehat{w}_i^\varepsilon \left(\partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_i}(\pi_H u) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leqslant C_{38} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}. \tag{8.33}$$

Ainsi en reprenant les inégalités (8.28) et (8.33) dans (8.26), on a l'inégalité voulue. □

On conclut la démonstration de la proposition 8.1 en mettant bout à bout les résultats des lemmes 8.2, 8.3 et 8.5 c'est-à-dire les inégalités (8.15), (8.21) et (8.25) dans (8.14), on obtient :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leqslant C_{39} \left(\varepsilon + H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right).$$

En utilisant le fait que $\varepsilon \leqslant C_{40} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ car $\sqrt{\varepsilon H}$ est borné, on aboutit à la majoration annoncée dans la proposition 8.1 :

$$\|\nabla u_\varepsilon - \nabla \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon\|_{L^2((0,T) \times \Omega)^N} \leqslant C_{19} \left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right).$$

8.2.2 Terme de dérivée convective X_3

On veut majorer les termes

$$X_3 = \|D_t (u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2\left((0,T), \dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}$$

et

$$X_4 = \left\| \int_\Omega D_t \left(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon \right) \right\|_{L^2((0,T))}.$$

Or, on remarque d'abord que, pour une fonction f donnée, les termes en

$$\|f\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}$$

et en

$$\left\| \int_\Omega f \right\|_{L^2((0,T))}$$

peuvent être majorés de la même manière en prenant des fonctions tests différentes. En effet, rappelons que, par définition,

$$\|f\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega f\varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$

On remarque que

$$\frac{\left|\int_\Omega f\varphi\right|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \left| \int_\Omega f \right| \quad \text{si } \varphi = 1.$$

Et pour $\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)$, par l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, la semi-norme $|\varphi|_{H^1(\Omega)}$ est équivalente à la norme $\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$. On va donc se contenter de majorer $\frac{\left|\int_\Omega f\varphi\right|}{\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}}$. Les résultats qui sont montrés dans le cas où $\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)$ s'appliquent assez naturellement au cas où $\varphi = 1$.

On va donc ici montrer uniquement la proposition suivante.

Proposition 8.2. *Soient u_ε la solution du problème* (8.1) *et $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifiant* (8.3). *Il existe une constante $C_{41} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\|D_t \left(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}(\Omega)\right)} \leqslant C_{41} \left(H^k + H^{k+1} \frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right), \tag{8.34}$$

où $\pi_{\varepsilon,H}$ est l'opérateur d'interpolation sur $V_{\varepsilon,H}$ défini par l'équation (8.6).

Ce paragraphe établit la preuve de cette proposition. Comme au paragraphe 8.2.1, on décompose d'abord ce terme en trois parties :

$$\|D_t \left(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}(\Omega)_\#\right)} \leqslant D_1 + D_2 + D_3, \tag{8.35}$$

où

$$\begin{aligned} D_1 &= \|D_t u_\varepsilon - D_t \left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}, \\ D_2 &= \|D_t \left(\left(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon \right)(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}, \\ \text{et} \quad D_3 &= \|D_t \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H} \tilde{u}_\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}. \end{aligned}$$

Le terme D_1 est un terme d'homogénéisation globale. Le terme D_2 est un terme d'interpolation sur le maillage grossier. Le terme D_3 peut être majoré en utilisant un résultat d'homogénéisation sur chaque maille grossière.

Terme d'homogénéisation globale D_1

On va montrer ici le lemme suivant.

Lemme 8.6. *Soient u_ε la solution du problème* (8.1) *et $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifiant* (8.3). *Il existe une constante $C_{42} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\|D_t u_\varepsilon - D_t \left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon \right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)} \leqslant C_{42}\varepsilon. \tag{8.36}$$

Démonstration. Pour majorer $\|D_t u_\varepsilon - D_t\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}$ prenons une fonction test

$$\varphi \in L^2\left((0,T),\dot{H}^1_{\#}(\Omega)\right).$$

On cherche alors à majorer l'intégrale

$$\int_\Omega D_t\left(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\varphi dx.$$

On rappelle que $D_t = \rho^\varepsilon \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla$. On a

$$D_t u_\varepsilon = \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right).$$

On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
\rho^\varepsilon(x)\partial_t\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)(x) &= \rho^\varepsilon(x)\partial_t\left(u\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right)\\
&= \rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&\qquad - \frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right)(x) &= \nabla\left(u\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right)\\
&= \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_{x_i} u\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
D_t\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ \widehat{w}^\varepsilon\right) &= \rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_{x_i} u\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On définit alors

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot (\nabla u)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
I_2 &= \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\partial_{x_i} u\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On utilise le fait que u vérifie l'équation (7.11), on a

$$\begin{aligned}
\rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) &= \bar{\rho}\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&\qquad + \left(\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&= \operatorname{div}\left(A^*\left(\nabla u\right)\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\\
&\qquad + \left(\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x+\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

On note

$$I_3 = \operatorname{div}\left(A^*\left(\nabla u\right)\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$$

$$I_4 = \left(\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

D'où

$$D_t\left(\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

On utilise le lemme 7.2, pour majorer le terme I_4. En effet, puisque $\int_Y \left(\rho(y) - \bar{\rho}\right) dy = 0$, il existe une fonction $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$ telle que $-\operatorname{div}_y \zeta(y) = \rho(y) - \bar{\rho}$.

Remarque 8.5 : On rappelle que $\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et que

$$\Omega = \prod_{i=1}^N (n_i^\varepsilon \varepsilon, m_i^\varepsilon \varepsilon), \quad n_i^\varepsilon, m_i^\varepsilon \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $\widehat{w}^\varepsilon$ est égal à l'identité à laquelle on ajoute une fonction Ω-périodique. Donc, pour toute fonction f Ω-périodique, $f \circ \widehat{w}^\varepsilon$ est aussi Ω-périodique. De plus, pour tout $x \in \partial\Omega$, $\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x) = x$. On en déduit que, pour toute fonction f Ω-périodique, $f \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}$ est aussi Ω-périodique.

On montre alors que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\rho^\varepsilon(x) - \bar{\rho}\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \\
&\quad = -\int_\Omega \operatorname{div}_y \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \\
&\quad = -\int_\Omega \varepsilon \operatorname{div}\left(\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)dx \\
&\quad = \int_\Omega \varepsilon \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla\left(\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\right) dx,
\end{aligned}$$

par intégrations par parties et en utilisant la périodicité des différentes fonctions (voir remarque 8.5). Comme $\partial_t u = \frac{1}{\bar{\rho}}\operatorname{div}\left(A^* \nabla u\right)$ et $u \in L^\infty\left((0,T), W^{k+3,\infty}(\Omega)\right)$,

$$\partial_t u \in L^\infty\left((0,T), W^{k+1,\infty}(\Omega)\right) \subset L^\infty\left((0,T), W^{1,\infty}(\Omega)\right).$$

De plus, $\zeta \in L^2_\#(Y)^N$ donc $\zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \in L^2(\Omega)^N$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \varepsilon \zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla\left(\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\right) dx\right| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \left\|\zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(\Omega)^N} \left\|\nabla\left(\left(\partial_t u\right)\left(t, x + \varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\right)\right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))^N} \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \left\|\zeta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(\Omega)^N} \left\|\partial_t u\right\|_{L^\infty((0,T),W^{1,\infty}(\Omega))} \left\|\varphi\right\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\left\|I_4\right\|_{L^\infty\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)} \leqslant C_{43}\varepsilon. \tag{8.37}$$

On applique ensuite un développement de Taylor sur les termes I_1, I_2 et I_3 en utilisant le fait que $u \in L^\infty\left((0,T), W^{3,\infty}(\Omega)\right)$:

$$\begin{aligned}
I_1 = &-\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \left(\nabla u\right)\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
&+ \varepsilon \int_0^1 w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial^2_{x_i,x_j} u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)(1-s)ds.
\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial_{x_i} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i,x_j} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)$$
$$+ \varepsilon \int_0^1 b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_k \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^3_{x_i,x_j,x_k} u \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) (1-s) ds.$$

$$I_3 = \operatorname{div}\left(A^* \left(\nabla u\right)\right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \int_0^1 w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{div}\left(A^* \left(\nabla \partial_{x_i} u\right)\right) \left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon} + \varepsilon s w \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) ds.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
D_t\left(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right) = {}& \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A^* \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
& - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon \\
& - b^\varepsilon \cdot \left(Id + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i,x_j} \tilde{u}_\varepsilon \\
& + \varepsilon C_{44}(t,x) - I_4 \\
= {}& \operatorname{div}\left(\left(\left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - A^*\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
& - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon \\
& - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i,x_j} \tilde{u}_\varepsilon \\
& + \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \\
& + \varepsilon C_{44}(t,x) - I_4,
\end{aligned}$$

où $\|C_{44}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)}$ est indépendante de ε car $u \in W^{3,\infty}(\Omega), w_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\rho^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et $b^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)^N$. Notons

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(t,x) = {}& \operatorname{div}\left(\left(\left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - A^*\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \tilde{u}_\varepsilon + \rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
& - \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i,x_j} \tilde{u}_\varepsilon
\end{aligned}$$

et

$$J_{\varepsilon,\varphi} = \int_\Omega \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \varphi.$$

On a alors

$$\int_\Omega D_t\left(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right) \varphi = \int_\Omega I_\varepsilon \varphi + J_{\varepsilon,\varphi} + \varepsilon \int_\Omega C_{44}(t,x) \varphi - \int_\Omega I_4 \varphi. \tag{8.38}$$

On a d'abord

$$\left| \int_\Omega C_{44}(t,x) \varphi \right| \leqslant \|C_{44}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|C_{44}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} |\varphi|_{H^1(\Omega)} \tag{8.39}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré-Wirtinger associée à Ω.

On s'intéresse ensuite au terme $\int_\Omega I_\varepsilon \varphi$. On remarque alors que

$$\operatorname{div}\left(\left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) = \left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \left(\left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right), \tag{8.40}$$

où : est le produit de contraction défini pour deux matrices $M_{i,j}$ et $N_{i,j}$ par

$$M : N = \sum_{i,j} M_{i,j} N_{i,j}.$$

De plus, dans l'équation (8.40), $\tilde{u}_\varepsilon$ ne dépend pas de y. Ainsi, le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ de I_ε est

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\left(\mathrm{div}_y\left(\left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e_i\right) + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot e_i - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right) = 0$$

en utilisant le problème de cellule (7.10). I_ε peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon - A^* : \nabla^2 \tilde{u}_\varepsilon + \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^* \cdot \nabla \partial_{x_i} \tilde{u}_\varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\qquad - b^\varepsilon \cdot \left(e_i + \nabla_y w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon \\ &= \Bigg(A_{i,j} + A_{i,k} \partial_{y_k} w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^*_j - b_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\qquad - b_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{y_k} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - A^*_{i,j}\Bigg) : \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Par définition de A^* (voir (7.25)), on a

$$\int_Y \left(A_{i,j} + A_{i,k} \partial_{y_k} w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \left(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) b^*_j - b_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dy = A^*_{i,j}.$$

Il reste à identifier le terme

$$b_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{y_k} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon.$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j}$, on a

$$\begin{aligned} b_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{y_k} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon &= \frac{1}{2} b_k \left(\partial_{y_k} w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \partial_{y_k} w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) w_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2} b_k \partial_{y_k}\left(w_i w_j\right) \partial^2_{x_i, x_j} \tilde{u}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Et, les fonctions w et b étant Y-périodiques,

$$\frac{1}{2}\int_Y b_k(y) \frac{\partial}{\partial y_k}\left(w_i w_j\right)(y) = -\frac{1}{2}\int_Y \mathrm{div}\left(b\right) w_i w_j = 0,$$

car $\mathrm{div}(b) = 0$. On peut donc écrire I_ε sous la forme

$$I_\varepsilon = P^\varepsilon_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^2_{x_i, x_j} u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right),$$

avec

$$\int_Y P^\varepsilon_{i,j}(y) dy = 0.$$

On applique alors le lemme 7.2 pour chaque i, j. Ainsi, les $P^\varepsilon_{i,j}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$P^\varepsilon_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \mathrm{div}_x\left(\varepsilon Z_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),$$

avec $Z_{i,j} \in L^2\left(Y\right)^N$. Donc, pour $\varphi \in \dot{H}^1_{\#}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega I_\varepsilon \varphi &= \int_\Omega \mathrm{div}_x\left(\varepsilon Z_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \partial^2_{x_i, x_j} u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \varphi(x) dx \\ &= -\int_\Omega \varepsilon Z_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla\left(\varphi(x) \partial^2_{x_i, x_j} u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right) dx. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le fait que $Z_{i,j}$ est bornée, on a

$$\left|\int_\Omega I_\varepsilon \varphi\right| \leqslant C_{45}\varepsilon \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty((0,T),W^{3,\infty}(\Omega))}. \tag{8.41}$$

On veut ensuite majorer le terme $|J_{\varepsilon,\varphi}|$. On rappelle que

$$J_{\varepsilon,\varphi} = \int_\Omega \operatorname{div}\left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla \tilde{u}_\varepsilon\right)\varphi.$$

Donc, par intégration par parties,

$$J_{\varepsilon,\varphi} = -\int_\Omega \left(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla \tilde{u}_\varepsilon\right)\cdot\nabla\varphi.$$

On montre d'abord que :

$$\left\|A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla \tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_{46}\varepsilon.$$

Pour cela, reprenons l'inégalité (8.16). On a alors

$$\left\|\nabla u_\varepsilon - \left(\nabla\tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon\nabla\left(u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_4\varepsilon.$$

Cela peut donc se réécrire

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla\tilde{u}_\varepsilon + \nabla_y u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\nabla_x u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right) + g_\varepsilon, \tag{8.42}$$

avec

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_{47}\varepsilon.$$

En multipliant l'égalité (8.42) par A^ε, et en réutilisant la définition de u_1 dans l'équation (7.13), on a

$$A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\tilde{u}_\varepsilon = \varepsilon A^\varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla\partial_{x_i} u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) + A^\varepsilon g_\varepsilon.$$

Les fonctions w et la matrice A étant bornées, on a

$$\left\|A^\varepsilon w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla^2 u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant \|w\|_{L^\infty(Y)^N} C_{bnd}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\Omega)^{N\times N}} \leqslant C_{48}$$

car $u \in L^\infty\left((0,T), W^{2,\infty}(\Omega)\right)$. De plus, en utilisant les propriétés de g_ε et le caractère borné de A^ε

$$\|A^\varepsilon g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_{bnd}C_{47}\varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\left\|A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon - A\left(Id + \nabla_y w\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla \tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant C_{46}\varepsilon.$$

On en déduit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|J_{\varepsilon,\varphi}| = \left|\int_\Omega \left(A^\varepsilon - \left(A\left(Id + \nabla_y w\right)\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\nabla\tilde{u}_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\right| \leqslant C_{46}\varepsilon\,|\varphi|_{H^1(\Omega)}. \tag{8.43}$$

Alors, en insérant les inégalités (8.37), (8.39), (8.41) et (8.43) dans (8.38)

$$\left|\int_\Omega D_t\left(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right)\varphi\right| \leqslant C_{49}\varepsilon\,|\varphi|_{H^1(\Omega)}.$$

Donc

$$\left\|D_t\left(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right)\right\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \leqslant C_{49}\varepsilon.$$

D'où le résultat voulu. □

Terme d'interpolation D_2

On veut montrer ici le lemme suivant

Lemme 8.7. *Soient u_ε la solution du problème* (8.1) *et $\tilde{u}_\varepsilon$ vérifiant* (8.3). *Il existe une constante $C_{50} > 0$ indépendante de ε et H telle que*

$$\left\| D_t\left((\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right)\right\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)} \leqslant C_{50}\left(H^k + H^{k+1}\frac{|b^*|}{\varepsilon}\right), \tag{8.44}$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H et la fonction $\widehat{w}^\varepsilon$ est définie pour chaque composante par

$$\widehat{w}_i^\varepsilon(x) = x_i + \varepsilon w_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

les fonctions w_i étant les solutions des problèmes de cellule (7.10).

Démonstration.

$$\begin{aligned} D_t &\left(u\left(t, \widehat{w}^\varepsilon(x) - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} u\left(t, l - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\Phi_l\left(\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\right) \\ &= \rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \pi_H\left(\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right)\right) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \\ &\quad - \frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x) b^* \cdot \left(\nabla \tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\left(b^\varepsilon(x)\left(\tilde{u}_\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon\right) \circ \widehat{w}^\varepsilon(x)\right). \end{aligned} \tag{8.45}$$

Pour le premier terme, on utilise la remarque suivante.
Remarque 8.6 : La norme $\|\cdot\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)}$ est définie par

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} = \inf_{\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\left|\int_\Omega u\varphi\right|}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^N}}.$$

Or, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a, pour toute fonction $\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)$,

$$\frac{\left|\int_\Omega u\varphi\right|}{\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)^N}} \leqslant C_\Omega \frac{\left|\int_\Omega u\varphi\right|}{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}} \leqslant C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On a donc, en passant à la borne inférieure,

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

On va donc majorer la norme L^2 de ce premier terme :

$$\begin{aligned} &\left\|\rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \pi_H\left(\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right)\right) \circ \widehat{w}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}} \rho_{max}\left\|\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) - \pi_H\left(\partial_t u\left(t, \cdot - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right)\right)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leqslant C_{24}|\Omega|^{\frac{1}{2}} \rho_{max} H^{k+1}\|\partial_t u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}, \end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois un résultat d'interpolation. Étant donné que

$$\partial_t u = \frac{1}{\bar{\rho}}\mathrm{div}\left(A^* \nabla u\right),$$

on a

$$\|\partial_t u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} \leqslant C_{51} \|u\|_{W^{k+3,\infty}(\Omega)} .$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\left(t,\cdot-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)-\pi_H\left(\partial_t u\left(t,\cdot-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right)\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}\\
&\quad\leqslant\left\|\rho^\varepsilon(x)\left(\partial_t u\left(t,\cdot-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)-\pi_H\left(\partial_t u\left(t,\cdot-\frac{b^*t}{\varepsilon}\right)\right)\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}\\
&\quad\leqslant C_{52}H^{k+1}.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

Pour le deuxième terme, on utilise le fait que

$$\|(\nabla\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^N} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|(\nabla\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N} .$$

Et

$$\|(\nabla\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N} = \|\nabla\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)^N} \leqslant C_{24}H^{k+1}\|\nabla u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)^N} .$$

On a donc

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b^*\cdot(\nabla\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_{53}H^{k+1}\frac{|b^*|}{\varepsilon}\|u\|_{W^{k+2,\infty}(\Omega)} \tag{8.47}$$

Pour le troisième terme, on va considérer une fonction test $\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)$. Les différentes fonctions étant Ω-périodiques (voir remarque 8.5), on peut intégrer par parties et on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\left(b^\varepsilon(x)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\varphi(x)dx = -\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

On va séparer cette intégrale en deux :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx &= \int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}b^*\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\\
&\quad+\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-b^*\right)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

Pour la première intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}b^*\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right| &\leqslant \frac{|b^*|}{\varepsilon}\|(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}|\varphi|_{H^1(\Omega)}\\
&\leqslant C_{24}\frac{|b^*|}{\varepsilon}H^{k+1}\|u\|_{L^\infty((0,T),W^{k+1,\infty}(\Omega))}|\varphi|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{8.49}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des inégalités d'interpolation. Pour la deuxième intégrale, on utilise le lemme suivant montré dans [MPP85].

Lemme 8.8. *Soit une fonction $g \in L^2_\#(Y)^N$ telle que $\int_Y g(y)dy = 0$ et $\mathrm{div}(g) = 0$. Il existe une matrice $\zeta \in L^2_\#(Y)^{N\times N}$ antisymétrique telle que $g = \mathrm{div}(\zeta)$. La matrice ζ peut être définie par*

$$\zeta_{i,j} = (-\Delta)^{-1}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}-\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right).$$

On applique alors ce lemme à $b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*$ et on note ζ la matrice antisymétrique ainsi obtenue. On a donc

$$\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega\mathrm{div}\left(\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx.$$

Toutes les fonctions étant Ω-périodiques (voir remarque 8.5), on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx \\ =\int_\Omega \zeta_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\big(\partial_{x_i}(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\partial_{x_j}\varphi(x)+(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\partial_{x_i,x_j}\varphi(x)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Comme ζ est une matrice antisymétrique et que $\partial_{x_i,x_j}\varphi=\partial_{x_j,x_i}\varphi$, le deuxième terme de l'intégrale est nul et on a

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx=\int_\Omega \zeta_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}\left((\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\partial_{x_j}\varphi(x)dx.$$

De plus,

$$\partial_{x_i}\left((\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)=\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k(x)\partial_{x_k}(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x).$$

Et donc

$$\begin{aligned}\left|\partial_{x_i}\left((\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\right| &\leqslant \|w\|_{W^{1,\infty}(Y)}\|\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \\ &\leqslant \|w\|_{W^{1,\infty}(Y)}H^k\|u\|_{L^\infty((0,T),W^{k+1,\infty}(\Omega))}.\end{aligned}$$

Comme $\zeta\in L^2(\Omega)^{N\times N}$, on a alors

$$\left|\int_\Omega \zeta_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}\left((\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\partial_{x_j}\varphi(x)dx\right|\leqslant C_{54}H^k|\varphi|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\leqslant C_{54}H^k|\varphi|_{H^1(\Omega)}. \tag{8.50}$$

En insérant les inégalités (8.49) et (8.50) dans l'équation (8.48), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\left(b^\varepsilon(x)(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\right)\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)(\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right| \\ &\leqslant C_{55}H^k|\varphi|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{8.51}$$

Ainsi, en regroupant les inégalités (8.46), (8.47) et (8.51) dans l'équation (8.45), on obtient

$$\|D_t\left((\tilde{u}_\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon)\circ\widehat{w}^\varepsilon\right)\|_{L^\infty\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}\leqslant C_{56}\left(H^k+H^{k+1}\frac{|b^*|}{\varepsilon}\right).$$

Puis, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité voulue. □

Terme d'homogénéisation locale D_3

On montre maintenant le lemme suivant

Lemme 8.9. *On reprend les définitions de la proposition 8.2. Il existe une constante $C_{57}>0$*

$$\|D_t\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\right)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)}\leqslant C_{57}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}+\varepsilon\frac{|b^*|}{\varepsilon}\right), \tag{8.52}$$

où π_H est l'opérateur d'interpolation sur V_H.

Démonstration. On veut majorer la norme de

$$D_t\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\right)=D_t\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right).$$

On introduit la fonction $\tilde{u}_{t,\varepsilon}$ définie par

$$\tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,x) = \partial_t u\left(t, x - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} D_t\left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right) & \\ = \rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right) & \\ + \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}\left(b^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right) & \\ - \frac{1}{\varepsilon} \rho^\varepsilon b^* \cdot \left(\left(\pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right)(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \left(\pi_H \nabla \tilde{u}_\varepsilon\right)(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right). & \quad (8.53) \end{aligned}$$

Pour le premier terme de cette somme, on applique une nouvelle fois la remarque 8.6.

$$\begin{aligned} \left\|\rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|^2_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)} & \\ \leqslant \rho^2_{max} C^2_\Omega \left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(\Omega)} & \\ \leqslant \rho^2_{max} C^2_\Omega \sum_{K \in \mathcal{K}_H} \left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(K)}. & \quad (8.54) \end{aligned}$$

Comme au paragraphe 8.2.1, sur chaque maille K, on va séparer cette norme en deux en considérant l'ensemble C_K et son complémentaire. Sur $K \setminus C_K$, on majore simplement de la manière suivante

$$\begin{aligned} \left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K \setminus C_K)} & \leqslant C_{58} \left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}\right\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \sqrt{\varepsilon\,|\partial K|} \\ & \leqslant C_{59} \sqrt{\varepsilon H^{N-1}}, \quad (8.55) \end{aligned}$$

car

$$\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,x) = \sum_{l \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_k,H}} \partial_t u\left(t, l - \frac{b^* t}{\varepsilon}\right) \Phi^H_l(x)$$

et les Φ^H_l et $\partial_t u$ sont bornés.
Sur C_K, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on utilise une inégalité de Taylor

$$\left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(C_K)} \leqslant C_{60} \left\|\nabla \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}\right\|_{L^\infty(K)^N} \left\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)^N}.$$

On a déjà vu que $\tilde{u}_{t,\varepsilon} \in W^{k+1,\infty}(\Omega)$ car $u \in W^{k+3,\infty}(\Omega)$. On en déduit, en utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe 4.3.3, que $\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}$ est borné en norme $W^{1,\infty}(\Omega)$. Et donc

$$\left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(C_K)} \leqslant C_{61} \varepsilon \sqrt{H^N}. \quad (8.56)$$

On déduit des inégalités (8.56) et (8.55)

$$\left\|\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(K)} \leqslant C_{62} \varepsilon H^{N-1} (1 + \varepsilon H).$$

Et donc, en reprenant l'inégalité (8.54)

$$\left\|\rho^\varepsilon \left(\pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widehat{w}^\varepsilon - \pi_H \tilde{u}_{t,\varepsilon}(t,\cdot) \circ \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)} \leqslant C_{63} \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}, \quad (8.57)$$

car le nombre de mailles dans $\mathcal{K}_H$ est de l'ordre de H^N et le produit εH est borné.

Pour majorer le deuxième terme de l'inégalité (8.53), on considère une fonction test $\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega)$. On utilise la remarque 8.5 pour effectuer l'intégration par parties sur Ω

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\left(b^\varepsilon(x)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right)\right)\varphi(x)dx$$
$$= -\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx,$$

le terme de bord étant nul car b^ε, $\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon$, $\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}$ et φ sont Ω-périodiques. On introduit une nouvelle fois la matrice antisymétrique $\zeta \in L^2_\#(Y)^{N\times N}$ telle que $b(y)-\rho(y)b^* = \mathrm{div}(\zeta(y))$. Alors

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx$$
$$= \int_\Omega \mathrm{div}\left(\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx$$
$$= -\int_\Omega \zeta_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}\left(\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\partial_{x_j}\varphi(x)\right)dx,$$

les termes de bord étant nuls en utilisant les mêmes remarques que précédemment. La matrice ζ étant antisymétrique le terme en $\partial^2_{x_i,x_j}\varphi$ est nul et

$$\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx$$
$$= -\int_\Omega \zeta_{i,j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_{x_i}\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\partial_{x_j}\varphi(x)dx. \quad (8.58)$$

On écrit ensuite

$$\partial_{x_i}\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right) = \partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k(x)\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \partial_{x_i}\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_k(x)\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)$$
$$= \left(\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k(x) - \partial_{x_i}\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_k(x)\right)\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)$$
$$+ \partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k(x)\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widehat{w}^\varepsilon(x)\right) - \partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right). \quad (8.59)$$

En reprenant les mêmes calculs que précédemment, on a

$$\left\|\left(\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k - \partial_{x_i}\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_k\right)\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\left(\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k - \partial_{x_i}\widetilde{w}^{\varepsilon,H}_k\right)\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(K)}$$
$$\leqslant \sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\nabla\widehat{w}^\varepsilon - \nabla\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|^2_{L^2(K)^{N\times N}}\left\|\nabla\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right\|^2_{L^\infty(\Omega)^N}$$
$$\leqslant C_{64}\sum_{K\in\mathcal{K}_H}\varepsilon H^{N-1}$$
$$\leqslant C_{65}\frac{\varepsilon}{H}. \quad (8.60)$$

De plus, on peut faire un développement de Taylor sur les C_K :

$$\left\|\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(C_K)}$$
$$\leqslant \left\|\widehat{w}^\varepsilon\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)^N}\left\|\widehat{w}^\varepsilon - \widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)^N}\left\|\nabla^2\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K)^N}$$
$$\leqslant C_{66}\varepsilon\sqrt{H^N}. \quad (8.61)$$

Sur $K\setminus C_K$, on utilise le fait que $|K\setminus C_K| \leqslant C_{33}\,|\partial K|\,\varepsilon$ et on a

$$\left\|\partial_{x_i}\widehat{w}^\varepsilon_k\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon - \partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(K\setminus C_K)}$$
$$\leqslant 2\left\|\widehat{w}^\varepsilon\right\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\left\|\nabla\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\right\|_{L^\infty(K)^{N\times N}}\sqrt{C_{33}\,|\partial K|\,\varepsilon}$$
$$\leqslant C_{67}\sqrt{\varepsilon H^{N-1}}. \quad (8.62)$$

D'où, en regroupant les inégalités (8.61) et (8.62) :

$$\left\|\partial_{x_i}\widehat{w}_k^\varepsilon\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(K)}\leqslant C_{68}\sqrt{\varepsilon H^{N-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_{x_i}\widehat{w}_k^\varepsilon\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\qquad=\sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\partial_{x_i}\widehat{w}_k^\varepsilon\left(\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\partial_{x_k}\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right)\right\|_{L^2(K)}^2\\
&\qquad\leqslant\sum_{K\in\mathcal{K}_H}C_{69}\varepsilon H^{N-1}\\
&\qquad\leqslant C_{70}\frac{\varepsilon}{H}.
\end{aligned}\tag{8.63}$$

En insérant les inégalités (8.60) et (8.63) dans (8.59), on a

$$\left\|\partial_{x_i}\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C_{71}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.$$

Et, en utilisant l'égalité (8.58) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left|\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x)-\rho^\varepsilon(x)b^*\right)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right|\leqslant C_{72}\left|\varphi\right|_{H^1(\Omega)}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}.\tag{8.64}$$

$\pi_H\tilde{u}_\varepsilon$ étant borné dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, on peut montrer que

$$\left\|\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)}\leqslant C_{73}\left\|\widehat{w}^\varepsilon-\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)}.$$

Puis, en appliquant le lemme 8.4, on a

$$\left\|\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)}\leqslant C_{73}C_{26}\varepsilon\sqrt{|K|}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(\Omega)}^2&=\sum_{K\in\mathcal{K}_H}\left\|\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widetilde{w}^{\varepsilon,H}\right\|_{L^2(K)}^2\\
&\leqslant C_{73}^2C_{26}^2\varepsilon^2\sum_{K\in\mathcal{K}_H}|K|\\
&\leqslant C_{73}^2C_{26}^2\left|\Omega\right|\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b^*\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right|\leqslant C_{74}\frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon\left|\varphi\right|_{H^1(\Omega)}.\tag{8.65}$$

En regroupant les équations (8.65) et (8.64), on a

$$\left|\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))-\pi_H\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx\right|\leqslant C_{75}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}+\frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon\right)\left|\varphi\right|_{H^1(\Omega)}.\tag{8.66}$$

De plus, on peut montrer, avec les mêmes arguments que ceux qui ont abouti à l'inégalité (8.65)

$$\left|\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b^*\cdot\left(\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon(t,\widehat{w}^\varepsilon(x))-\pi_H\nabla\tilde{u}_\varepsilon\left(t,\widetilde{w}^{\varepsilon,H}(x)\right)\right)\varphi(x)dx\right|\leqslant C_{76}\frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon\left\|\varphi\right\|_{L^2(\Omega)}.\tag{8.67}$$

En reprenant les inégalités (8.54), (8.66) et (8.67) et en les utilisant dans (8.53), on obtient

$$\left\|D_t\left(\pi_H\tilde{u}_\varepsilon(t,\cdot)\circ\widehat{w}^\varepsilon-\pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\right)\right\|_{\dot{H}_\#^{-1}(\Omega)}\leqslant C_{77}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}+\frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon\right).$$

On en déduit le résultat voulu. □

On peut donc démontrer la proposition 8.2 en insérant les résultats des lemmes 8.6, 8.7 et 8.9 c'est-à-dire les inégalités (8.36), (8.44) et (8.52) dans l'inégalité (8.35), on obtient alors :

$$\|D_t\,(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}(\Omega)\right)} \leqslant C_{41}\left(\varepsilon + H^k + H^{k+1}\frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right).$$

En utilisant le fait que $\varepsilon \leqslant C_{40}\sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}$ on en déduit la proposition 8.2.

8.2.3 Termes X_2 et X_4

Nous avons expliqué au début du paragraphe 8.2.2 comment le terme X_4 pouvait être majoré en utilisant la même démonstration que pour le terme X_3 (voir proposition 8.2). Donc

$$\left\|\int_\Omega D_t\,(u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\right\|_{L^2(0,T)} \leqslant C_{78}\left(H^k + H^{k+1}\frac{|b^*|}{\varepsilon} + \frac{|b^*|}{\varepsilon}\varepsilon + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right), \tag{8.68}$$

où C_{78} est une constante positive indépendante de ε et H.

Le terme X_2 peut être majoré de la même manière que le terme X_1. Cependant, au lieu d'utiliser l'estimation *a priori* (8.16), nous devons utiliser l'estimation (7.41), ce qui nous permet de déduire qu'il existe une constante $C_{79} > 0$ telle que :

$$\left\|u_\varepsilon(t,x) - u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon u_1\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} \leqslant C_{79}\varepsilon. \tag{8.69}$$

La démonstration de la proposition 8.1 peut donc facilement s'adapter pour ce terme : il existe une constante positive C_{80} indépendante de ε et H :

$$X_2 = \|u_\varepsilon - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T)L^2(\Omega))} \leqslant C_{80}\left(H^k + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}}\right). \tag{8.70}$$

La majoration pourrait même être plus fine car ce terme ne fait pas intervenir le gradient des fonctions.

8.2.4 Erreur initiale X_5

Il nous reste à majorer l'erreur initiale

$$X_5 = \|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\,(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

On a défini la condition initiale sur $u_{\varepsilon,H}$ par

$$\forall x \in \Omega, \quad u_{\varepsilon,H}\,(0,x) = \pi_{\varepsilon,H}u^0(x).$$

Or, la fonction $\tilde{u}_\varepsilon$ est définie par

$$\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u\left(t, x - \frac{b^*t}{\varepsilon}\right)$$

où la fonction u est la solution du problème de cellule (7.11) :

$$\begin{cases} \bar{\rho}\partial_t u - \operatorname{div}(A^*\nabla u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(0,x) \quad = \quad u^0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Donc

$$\pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon(0,\cdot) = \pi_{\varepsilon,H}u^0.$$

D'où

$$\|(u_{\varepsilon,H} - \pi_{\varepsilon,H}\tilde{u}_\varepsilon)\,(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{8.71}$$

8.3 Conclusion

En ajoutant les inégalités (8.13), (8.70), (8.34), (8.68) et (8.71) dans l'inégalité (8.12) on obtient bien le résultat annoncé dans le théorème 8.1 : il existe une constante $C_{16} > 0$ indépendante de ε et H telle que

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,H}\|_{\Omega_T} \leqslant C_{16} \left(H^k + \frac{|b^*|}{\varepsilon} \left(H^{k+1} + \varepsilon \right) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{H}} \right),$$

où

$$\|u\|^2_{\Omega_T} = \|u\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} + |u|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}.$$