

# Théorie d'un diagnostic de défauts par ACP

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>97</b>
<b>4.2</b>	<b>Isolation et isolabilité de défauts par reconstruction</b>	<b>98</b>
4.2.1	Généralisation de l'isolation et l'isolabilité de défauts	98
4.2.1.1	Isolation de défauts	98
4.2.1.2	Isolabilité de défauts	101
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>SPE</i>	102
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>SWE</i>	103
	Isolabilité par reconstruction de l'indice <i>T2</i> de Hotelling	103
	Isolabilité par reconstruction de l'indice de Mahalanobis	104
	Isolabilité par reconstruction de l'indice combiné	105
4.2.2	Analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de <i>SPE</i> et <i>T2</i> de Hotelling	105
<b>4.3</b>	<b>Diagnostic de défauts simples par les contributions</b>	<b>107</b>
4.3.1	Contributions par décomposition complète : <i>CDC</i>	109
4.3.2	Contributions par décomposition partielle : <i>PDC</i>	109
4.3.2.1	<i>PDC</i> à l'indice <i>T2</i> de Hotelling	109
4.3.2.2	<i>PDC</i> à l'indice <i>SPE</i> basée sur les résidus	110
4.3.2.3	<i>PDC</i> à l'indice <i>SPE</i> basée sur les CPs résiduelles	111
4.3.2.4	<i>PDC</i> à un indice quadratique	111
4.3.3	Contributions diagonales : <i>DC</i>	112
4.3.4	Contributions par reconstruction : <i>RBC</i>	112
4.3.5	Contributions par angle : <i>ABC</i>	113
4.3.6	Analyse de diagnosticabilité	113
4.3.6.1	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>CDC</i>	114
4.3.6.2	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>PDC</i>	114
4.3.6.3	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>DC</i>	114
4.3.6.4	Diagnosticabilité de défauts par l'approche <i>RBC</i>	115

<b>4.4</b>	<b>Nouvelles approches pour un diagnostic de défauts multiples</b>	<b>115</b>
4.4.1	Contributions par reconstruction multidimensionnelle . . . . .	116
4.4.2	<i>RBC ratio</i> . . . . .	117
<b>4.5</b>	<b>Exemple de synthèse</b> . . . . .	<b>119</b>
4.5.1	Diagnostic d'un défaut simple . . . . .	122
4.5.2	Diagnostic de défauts multiples . . . . .	123
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>131</b>

---

## 4.1 Introduction

La détection et le diagnostic de défauts sur les processus forment une démarche essentielle afin de leur assurer un fonctionnement sûr et efficace. Selon [Kariwala et al. \(2010\)](#) et [Kourti \(2005\)](#), une telle démarche peut se baser généralement sur des modèles quantitatifs, des modèles qualitatifs ou l'historique de processus qui représente l'intérêt de cette thèse. Dans ce contexte, le contrôle statistique de processus a reçu une attention ainsi qu'un succès considérables aux niveaux des applications. Ce succès peut être attribué à la disponibilité en permanence d'une grande quantité de données collectées lors du fonctionnement normal de processus. Ainsi, ces données favorisent le développement des modèles statistiques qui peuvent atteindre une grande précision dans la détection de toutes déviations par rapport à un fonctionnement normal. Dans ce cadre, l'ACP est une approche très adaptée pour un contrôle statistique de processus. Ainsi, elle a été intensément explorée dans le suivi et le diagnostic de plusieurs processus ([Nomikos et MacGregor, 1995](#); [Qin, 2003](#); [Tharrault et al., 2008](#)).

Dans la littérature, le thème du diagnostic de défauts a quand même reçu une attention moins considérable que celui de la détection de défauts. L'approche la plus classique et en même temps très populaire pour un diagnostic est basée sur l'analyse des contributions ([Nomikos et MacGregor, 1995](#); [Yue et Qin, 2001](#); [Qin, 2003](#); [Alcala et Qin, 2009](#); [Kariwala et al., 2010](#); [Alcala et Qin, 2011](#)). Le principe des contributions s'appuie généralement sur la quantification de la part de chaque variable dans le calcul d'un indice de détection donné. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle forme de contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE* ([Mnassri et al., 2008b, 2009b](#)). Une analyse de diagnosticabilité de défauts basée sur les contributions montre que celles-ci garantissent un diagnostic correct uniquement si les défauts sont simples (unidimensionnels) et de grandes amplitudes. Dans le cas contraire, les approches des contributions peuvent généralement considérer d'autres variables en défaut. Ainsi, il sera difficile d'isoler celles réellement en défaut. En outre, les contributions ne permettent pas d'isolation des défauts multiples où plusieurs variables sont simultanément en défaut en raison de la corrélation entre les variables. Cette corrélation a été la clé d'un diagnostic mieux décisif basé sur l'approche de reconstruction des indices de détection ([Dunia et al., 1996](#); [Dunia et Qin, 1998b,c,a](#); [Yue et Qin, 2001](#); [Qin, 2003](#); [Alcala et Qin, 2009, 2011](#)). Le principe d'une telle méthode s'est fondé sur l'élimination de l'influence de défauts sur l'indice de détection par une reconstruction des variables à l'aide d'un modèle ACP.

Le succès de l'utilisation de l'ACP pour le diagnostic de défauts sur les processus en utilisant l'approche de reconstruction a été enrichi par le développement d'un concept fondamental qui représente l'isolabilité de défauts. On définit l'isolabilité comme étant la capacité d'un diagnostic à retrouver les origines de défauts. Dans la littérature, un tel concept a été négligemment étudié dans le cadre de l'ACP en le développant uniquement pour une reconstruction de l'indice *SPE* ([Dunia et Qin, 1998b,c,a](#); [Qin, 2003](#)). Ce chapitre a pour objectif d'étendre et d'unifier un tel concept à tout indice de détection ayant une forme quadratique. Ainsi, cette idée nous a permis la réalisation d'une analyse théorique d'isolabilité de défauts par reconstruction de la distance combinée versus celles des indice que combine en mettant en avant l'avantage que peut jouer une telle distance dans l'isolation de défauts plus complexes ([Mnassri et al., 2012a](#)).

La contribution par reconstruction (*reconstruction based contribution* : *RBC*) a été récemment proposée pour diagnostiquer les défauts simples ayant de grandes amplitudes (Alcala et Qin, 2009, 2011). On note qu'une telle approche fait partie des méthodes des contributions. Mnassri et al. (2012b) ont étendu cette approche afin d'assurer un diagnostic de défauts multiples. Pour cela, nous proposons dans ce chapitre une analyse de diagnosticabilité montrant que la nouvelle contribution multidimensionnelle garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. Afin de ne pas se limiter uniquement à ce type de défauts, l'objectif de ce chapitre représente également la proposition d'une nouvelle méthode basée sur celle de *RBC* pour garantir une identification et isolation de défauts détectables plus complexes. Généralement, l'isolation de ce type de défauts s'appuie sur des seuils de validation. Pour cela, nous avons proposé une approche dite *RBC ratio* (*RBCr*) (Mnassri et al., 2012b). Une diagnosticabilité de défauts basée sur cette nouvelle méthode prouve une garantie d'un diagnostic correct sous la contrainte que les amplitudes de tels défauts satisfont une condition suffisante d'isolabilité.

## 4.2 Isolation et isolabilité de défauts par reconstruction

En suivant une démarche semblable à celle de la détectabilité de défauts évoquée dans la section 3.2 du troisième chapitre, nous pouvons ainsi généraliser l'étude d'isolation et isolabilité de défauts par reconstruction d'un indice de détection quelconque ayant une forme quadratique.

### 4.2.1 Généralisation de l'isolation et l'isolabilité de défauts

En s'appuyant sur l'approche de reconstruction, nous notons que les défauts simples (unidimensionnels) représentent un cas particulier. Pour cela, nous envisageons une étude plus généralisée en considérant des défauts multiples (multidimensionnels). Nous avons supposé à partir de l'équation (2.59) qu'un  $\mathcal{J}$ ème ensemble composé de  $r$  variables est théoriquement affecté par un défaut réel noté  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ . Dans la pratique, un tel défaut est inconnu ce qui a suscité une démarche pour son isolation.

#### 4.2.1.1 Isolation de défauts

Afin d'identifier et isoler le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  qui est par hypothèse inconnu, le principe de l'approche de reconstruction présume un défaut supposé ou assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  affectant un  $\mathcal{I}$ ème ensemble composé de  $r$  variables supposées en défaut. Ainsi, des reconstructions d'état en se basant les indices de détection et un modèle ACP peuvent conduire à l'isolation du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ . Nous rappelons que la reconstruction consiste à estimer un vecteur  $\mathbf{x}_{\mathcal{I}}$  de données reconstruites censées être insensibles au défaut assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) &= \mathbf{x}(k) - \Xi_{\mathcal{I}}\mathbf{f}(k) \\ &= \mathbf{x}(k) - \Xi_{\mathcal{I}}\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k)$  est une estimation optimale de  $\mathbf{f}(k)$  qui représente le vecteur d'amplitudes des composants du défaut dans les directions des variables constituant le  $\mathcal{I}$ ème ensemble. Une telle estimation est obtenue par une minimisation d'un indice de détection  $\gamma_{\mathcal{I}}$  insensible à un tel défaut :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) = \arg \min_{\mathbf{f}(k)} \{\gamma_{\mathcal{I}}(k)\} \quad (4.2)$$

où

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 \quad (4.3)$$

On peut déduire que l'estimé du vecteur d'amplitudes du défaut supposé ainsi que le vecteur de données reconstruites projeté dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice  $\mathcal{M}$  de  $\gamma$  sont respectivement donnés par :

$$\hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k) = (\Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \Xi_{\mathcal{I}})^{-1} \Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) = (\mathbf{I}_m - \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} (\Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M} \Xi_{\mathcal{I}})^{-1} \Xi_{\mathcal{I}}^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.5)$$

Le  $\mathcal{I}$ ème ensemble de variables n'est reconstructible que si la matrice  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$  est de plein rang colonne. Cela implique que les variables constituant un tel ensemble ne doivent pas être colinéaires.

Dans le but d'une simplification d'écritures, une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$  mène au résultat suivant :

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} = \Xi_{\mathcal{I}}^o \mathbf{D}_{\mathcal{I}} \mathbf{V}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.6)$$

où  $\Xi_{\mathcal{I}}^o \in \mathbb{R}^{m \times r}$  et  $\mathbf{V}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  sont deux matrices orthonormées.  $\mathbf{D}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est une matrice diagonale contenant les  $r$  valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}$ . Ainsi, l'équation (4.5) peut être réécrite comme suit :

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) = (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.7)$$

On note que  $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$  est une matrice idempotente. Par conséquent, l'indice de détection insensible au défaut supposé peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{I}}(k) &= \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Puisque le numéro  $\mathcal{I}$  correspond à un ensemble composé de  $r$  variables supposées en défaut, il représente alors un numéro combinatoire de scénarii de défauts à considérer :

$$\mathcal{I} = \left\{1, \dots, \frac{m!}{r!(m-r)!}\right\} \quad (4.9)$$

où ! représente l'opérateur factoriel. Dans le cas de défauts simples,  $\mathcal{I} = i = \{1, \dots, m\}$ .

En considérant le vecteur d'observation de l'équation (2.59) qui est composé du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ , l'indice de détection insensible au défaut supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  pourra être exprimé en fonction de celui réel comme suit :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \Xi_{\mathcal{J}} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(k)\|^2 \quad (4.10)$$

A partir de cette expression, deux déductions sont envisageables :

- i. Si la direction de reconstruction  $\Xi_{\mathcal{I}}$  est celle du défaut réel, i.e.  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ , on peut montrer que :

$$\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^o \Xi_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\|^2 \leq \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2 \quad (4.11)$$

où  $\Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2$  est un seuil de contrôle défini de la même manière que celui exprimé dans l'équation (4.13).

L'expression de l'indice  $\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}$  implique que l'influence du défaut réel est complètement annulée. Egalement, les valeurs d'un tel indice reconstruit sont inférieures au seuil de détection  $\Gamma^2$  donné par l'équation (3.2).

- ii. Si la direction de reconstruction  $\Xi_{\mathcal{I}}$  est différente de celle du défaut réel  $\Xi_{\mathcal{J}}$  alors l'indice reconstruit est probablement supérieur à un seuil de contrôle approprié. Autrement dit, le principe de reconstruction assure qu'un défaut assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  ne peut pas être identifié comme un candidat si :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 > \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (4.12)$$

$\Gamma_{\mathcal{I}}^2$  représente une limite de contrôle pour l'indice reconstruit  $\gamma_{\mathcal{I}}$ . Puisque ce dernier est caractérisé par une forme quadratique, l'expression appropriée d'un tel seuil peut être déterminée en s'appuyant sur les travaux de Box (1954) :

$$\Gamma_{\mathcal{I}}^2 = g_{\gamma_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{\gamma_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.13)$$

avec

$$g_{\gamma_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]}{\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}]} \quad (4.14)$$

et

$$h_{\gamma_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}])^2}{\text{tr}[(\Sigma \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}})^2]} \quad (4.15)$$

Ainsi, tout défaut supposé ne vérifiant pas l'inégalité (4.12) est identifié avec celui du défaut réel. Par conséquent, on peut soupçonner des variables outre celles réellement en défaut. Selon l'indice  $\gamma$  avec lequel la reconstruction est réalisée, les ensembles  $\hat{\mathcal{I}}_{\gamma}$  de variables considérées en défaut sont déterminés en obéissant à l'argument suivant :

$$\hat{\mathcal{I}}_{\gamma} = \arg_{\mathcal{I} \in \mathfrak{J}} \{ \gamma_{\mathcal{I}}(k) \leq \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \} \quad (4.16)$$

où  $\mathfrak{J}$  représente l'ensemble des combinaisons des directions de reconstructions possibles.

L'isolation du défaut réel consiste dans la réduction de l'ensemble  $\hat{\mathcal{I}}_{\gamma}$  en le rendant composé uniquement de l'ensemble des variables réellement en défaut. Pour cela, plusieurs facteurs entrent en vigueur tels que l'amplitude du défaut lui-même, l'ampleur de la corrélation entre les variables ainsi que l'indice de détection considéré. Par conséquent, l'élaboration d'un concept de performance qui représente l'isolabilité de défauts semblerait cruciale.

### 4.2.1.2 Isolabilité de défauts

Dans le cadre de l'isolabilité, l'amplitude du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  doit être suffisamment importante afin de garantir que les valeurs de  $\gamma_{\mathcal{I}}$  soient supérieures à  $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$ . Cette contrainte peut nous mener à la détermination d'une condition suffisante d'isolabilité de défauts.

Puisque le défaut réel étant  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ , on peut alors en se référant aux équations (4.7) et (3.5) déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)) \\ &= (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k) + (\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Celle-ci peut nous permettre d'écrire

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \quad (4.18)$$

Puisque  $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$  est une matrice idempotente, on peut donc montrer en se basant sur l'équation (3.7) que :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})\| \times \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}^*(k)\| \leq \Gamma \quad (4.19)$$

Ainsi, la substitution de (4.19) dans (4.18) en considérant la positivité de la norme euclidienne mène à l'inégalité suivante :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\| \geq \|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma \geq 0 \quad (4.20)$$

Afin que le défaut actuel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  soit suffisamment isolable de celui assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ , la condition nécessaire donnée par l'inégalité (4.12) doit être satisfaite. Par conséquent, l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 \geq (\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| - \Gamma)^2 > \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \quad (4.21)$$

Ainsi, on déduit que l'amplitude du défaut réel doit satisfaire la condition suivante :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > \Gamma + \Gamma_{\mathcal{I}} \quad (4.22)$$

Néanmoins, le concept de l'isolabilité d'un défaut doit être établi une fois que le défaut lui-même est garanti détectable. En considérant l'idempotence de la matrice  $(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT})$ , on montre que :

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \leq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \quad (4.23)$$

En se référant à l'inégalité (4.22), on peut déduire que :

$$\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > \Gamma + \Gamma_{\mathcal{I}} \quad (4.24)$$

D'après l'annexe E, nous montrons d'une manière générale que  $\Gamma \geq \Gamma_{\mathcal{I}}$ . En s'appuyant sur une telle relation ainsi que l'inégalité (3.10), la condition exprimée par (4.24) prouve que le défaut  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  n'est pas garanti détectable. Cela signifie que la condition nécessaire

donnée par (4.12) est insuffisante pour garantir l'isolabilité d'un défaut. Pour cela, on doit imposer l'hypothèse suivante :

$$\gamma_{\mathcal{I}}(k) > \Gamma^2 \quad (4.25)$$

Celle-ci représente la nouvelle condition nécessaire qui doit être considérée plutôt que celle de donnée par l'inégalité (4.12). Après reformulation du problème en considérant une telle condition, le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est garanti isolable de celui assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par reconstruction d'un indice quadratique  $\gamma$  quelconque si

$$\|(\mathbf{I}_m - \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\Gamma \quad (4.26)$$

L'inégalité précédente représente la condition suffisante de l'isolabilité d'un défaut tout en satisfaisant également sa détectabilité. Evidemment, elle représente une expression unifiée vérifiant tout indice de détection ayant une forme quadratique (Mnassri et al., 2012a).

En s'appuyant sur cette généralisation, nous pouvons aisément développer dans la suite le concept d'isolation et isolabilité de défauts relatif à chacun des indices de détection présentés dans le tableau 3.1.

**Isolabilité par reconstruction de l'indice  $SPE$**  En présence d'un défaut  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  détectable par l'indice  $SPE$ , i.e.  $SPE(k) > \delta^2$ , tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$  est considéré en défaut par reconstruction d'un tel indice si :

$$SPE_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \delta_{\mathcal{I}}^2 = g_{SPE_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{SPE_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.27)$$

où les paramètres  $g_{SPE_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{SPE_{\mathcal{I}}}$  sont déterminés en utilisant respectivement les équations (4.14) et (4.15) et en remplaçant les matrices  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  et  $\Xi_{\mathcal{I}}^o$  respectivement par  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ . Notamment, cette dernière est calculée en se basant sur l'équation (4.6), i.e.

$$\tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{I}} = \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.28)$$

Le développement des expressions correspondantes aux paramètres  $g_{SPE_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{SPE_{\mathcal{I}}}$ , nous a permis de déduire que :

$$g_{SPE_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2] - 2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}] + \text{tr}[(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})^2]}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}] - \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}]} \quad (4.29)$$

et

$$h_{SPE_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\tilde{\Lambda}] - \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}])^2}{\text{tr}[\tilde{\Lambda}^2] - 2 \text{tr}[\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^2 \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}] + \text{tr}[(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})^2]} \quad (4.30)$$

Par déduction de l'inégalité (4.26), le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est garanti isolable de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par l'indice  $SPE$  si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\delta \quad (4.31)$$

Nous rappelons qu'une telle condition d'isolabilité de défauts par reconstruction de l'indice  $SPE$  est l'unique proposée dans la littérature par Dunia et Qin (1998b,c,a) et Qin (2003). Dans ce cadre et grâce à l'équation (4.26), nous avons pu étendre une telle étude au reste des indices (Mnassri et al., 2012a,b).

**Isolabilité par reconstruction de l'indice  $SWE$**  Lorsque l'indice  $SWE$  détecte la présence du défaut  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  qui est supposé inconnu, i.e.  $SWE(k) > \epsilon^2$ , des reconstructions successives d'un tel indice peuvent conduire à l'isolation du défaut. En revanche, il considère tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$  en défaut si :

$$SWE_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \epsilon_{\mathcal{I}}^2 = g_{SWE_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{SWE_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.32)$$

Les coefficients  $g_{SWE_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{SWE_{\mathcal{I}}}$  peuvent être calculés en se référant respectivement aux équations (4.14) et (4.15) et en substituant les matrices  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  et  $\Xi_{\mathcal{I}}^o$  respectivement par  $\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T$  et  $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ . En se basant sur l'équation (4.6), la matrice  $\tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$  est déterminée comme suit :

$$\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{I}} = \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \tilde{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.33)$$

Ainsi, on peut montrer que :

$$g_{SWE_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.34)$$

et

$$h_{SWE_{\mathcal{I}}} = m - \ell - r \quad (4.35)$$

où  $r$  représente le nombre des variables constituant l'ensemble  $\mathcal{I}$ .

D'après l'inégalité (4.26), l'indice  $SWE$  garantit l'isolation du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\epsilon \quad (4.36)$$

**Isolabilité par reconstruction de l'indice  $T2$  de Hotelling** Un défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  ayant une amplitude qui satisfait la condition donnée par l'inégalité (3.16) est nécessairement détecté par l'indice  $T2$  de Hotelling. Si à la *kème* observation on a  $T2(k) > \tau^2$ , alors tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$  est considéré responsable d'une telle situation si :

$$T2_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \tau_{\mathcal{I}}^2 = g_{T2_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{T2_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.37)$$

De la même manière qu'aux autres indices, les coefficients  $g_{T2_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{T2_{\mathcal{I}}}$  sont calculés en se basant sur les équations (4.14) et (4.15) respectivement et en remplaçant les matrices  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  et  $\Xi_{\mathcal{I}}^o$  respectivement par  $\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T$  et  $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ . Cette dernière est déterminée à partir de l'équation (4.6) comme suit :

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{I}} = \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \check{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.38)$$

Une simplification dans les expressions des deux coefficients permet de montrer que :

$$g_{T2_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.39)$$

et

$$h_{T2_{\mathcal{I}}} = \ell - r \quad (4.40)$$

Par définition, l'équation précédente représente le nombre de degrés de liberté relatifs à l'indice  $T2$  où  $r$  variables ont été reconstruites. Un tel nombre doit être positif ou nul,

ce qui implique que le nombre maximal des variables qui peuvent être reconstruites simultanément en utilisant la statistique  $T2$  de Hotelling doit respecter l'inégalité suivante :

$$r \leq \ell \quad (4.41)$$

D'autre part,  $\ell$  représente le nombre optimal des CPs constituant le modèle ACP. Un tel nombre est généralement très inférieur au nombre des variables du processus. Cela peut limiter l'utilisation d'un tel indice dans la procédure d'isolation de défauts plus particulièrement lorsque le nombre de variables qui sont simultanément en défaut est plus grand que  $\ell$ .

Selon l'inégalité (4.26), l'indice  $T2$  de Hotelling peut garantir l'isolation du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\tau \quad (4.42)$$

**Isolabilité par reconstruction de l'indice de Mahalanobis** En se basant sur l'inégalité (3.39), tout défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  ayant une amplitude qui peut satisfaire une telle inégalité est garanti détectable par l'indice  $D$  de Mahalanobis. Le moment où cette distance détecte l'existence d'un défaut, i.e.  $D(k) > \varrho^2$ , alors tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \mathfrak{J}$  est considéré en défaut lorsque :

$$D_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \Sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \varrho_{\mathcal{I}}^2 = g_{D_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{D_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.43)$$

En s'appuyant sur l'équation (4.6), la matrice  $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$  est calculée comme suit :

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} = \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \check{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.44)$$

Les paramètres  $g_{D_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{D_{\mathcal{I}}}$  sont déterminés en utilisant respectivement les équations (4.14) et (4.15) et en remplaçant les matrices  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  et  $\Xi_{\mathcal{I}}^o$  respectivement par  $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$  et  $\check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ . Cela nous a permis de déduire que :

$$g_{D_{\mathcal{I}}} = 1 \quad (4.45)$$

et

$$h_{D_{\mathcal{I}}} = m - r \quad (4.46)$$

Selon l'équation précédente, nous remarquons que le seul indice de détection permettant une reconstruction simultanée d'un maximum de nombre des variables ( $r \leq m$ ) est celui de Mahalanobis. Etant donné que le défaut réel est  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ , celui-ci est garanti isolable de celui assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  au travers un tel indice si :

$$\|(\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \Sigma^{-\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\varrho \quad (4.47)$$

**Isolabilité par reconstruction de l'indice combiné** Outre que la reconstruction de la distance de Mahalanobis, la reconstruction de l'indice combiné peut être également utilisée pour l'isolation des défauts en se basant sur l'ensemble de l'espace. Lorsque le processus est détecté en fonctionnement anormal à la *k*ème observation par la distance combinée, i.e.  $\varphi(k) > \beta^2$ , alors tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \mathcal{J}$  vérifiant l'inégalité suivante est identifié en défaut :

$$\varphi_{\mathcal{I}}(k) = \|(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \mathbf{x}(k)\|^2 \leq \beta_{\mathcal{I}}^2 = g_{\varphi_{\mathcal{I}}} \chi_{(h_{\varphi_{\mathcal{I}}}, \alpha)}^2 \quad (4.48)$$

Evidemment, la matrice orthonormée  $\bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \in \mathbb{R}^{m \times r}$  est obtenue en vérifiant selon (4.6) l'équation suivante :

$$(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \bar{\Xi}_{\mathcal{I}} = \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\mathbf{D}}_{\mathcal{I}} \bar{\mathbf{V}}_{\mathcal{I}}^T \quad (4.49)$$

En substituant dans les équations (4.14) et (4.15) les matrices  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  et  $\Xi_{\mathcal{I}}^o$  respectivement par  $(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)$  et  $\bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o$ , on peut déterminer les expressions associées aux paramètres  $g_{\varphi_{\mathcal{I}}}$  et  $h_{\varphi_{\mathcal{I}}}$  comme suit :

$$g_{\varphi_{\mathcal{I}}} = \frac{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T))^2]}{\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})]} \quad (4.50)$$

et

$$h_{\varphi_{\mathcal{I}}} = \frac{(\text{tr}[\Sigma(\delta^{-2} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-2} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})])^2}{\text{tr}[(\Sigma(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T)(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T))^2]} \quad (4.51)$$

D'après la condition généralisée d'isolabilité exprimée dans l'inégalité (4.26), un défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est garanti isolable de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par reconstruction de l'indice combiné lorsque :

$$\|(\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT})(\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \bar{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| > 2\beta \quad (4.52)$$

## 4.2.2 Analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de *SPE* et *T2* de Hotelling

L'avantage majeur le plus communément connu par l'utilisation de l'indice combiné se résume dans la surveillance de processus à travers un seul indicateur en considérant le sous-espace principal ainsi que celui résiduel. Néanmoins, nous ignorons encore d'autres avantages que peut présenter une telle distance. Evidemment, cette dernière combine l'indice *SPE* et celui du *T2* de Hotelling. L'intérêt d'une telle combinaison est négligemment justifié théoriquement. Dans ce cadre, Mnassri et al. (2011b, 2012a) ont montré à travers une analyse théorique que la reconstruction de l'indice combiné peut bénéficier d'un atout plus avantageux dans la détection et l'isolation de défauts que les statistiques *SPE* et *T2*. Plus précisément, les travaux de Mnassri et al. (2011b) représentent une analyse de détectabilité de défauts par l'indice combiné versus celles des indices que combine. Puisque l'isolabilité de défauts représente un concept plus généralisé que celui de la détectabilité,

nous limitons dans cette thèse à une analyse d'isolabilité par reconstruction de l'indice combiné versus celles de *SPE* et *T2* de Hotelling.

A partir des inégalités (4.31), (4.42) et (4.52), on peut poser les vecteurs  $\tilde{\mathbf{u}}(k)$ ,  $\check{\mathbf{u}}(k)$  et  $\bar{\mathbf{u}}(k)$  dont les normes conditionnent à la  $k$ ème observation l'isolabilité du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par reconstruction des indices *SPE*, *T2* et  $\varphi$  respectivement :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\mathbf{C}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \tilde{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \check{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.54)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}(k) &= (\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) (\delta^{-1} \tilde{\mathbf{C}} + \tau^{-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}^T) \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \\ &= (\mathbf{I}_m - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT}) \bar{\Xi}_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\end{aligned}\quad (4.55)$$

Dans ce cadre, Mnassri et al. (2012a) ont montré que :

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \delta^{-1} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \tau^{-1} \check{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (4.56)$$

avec

$$\mathbf{u}(k) = (\delta^{-1} \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \tilde{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \tilde{\Xi}_{\mathcal{J}} + \tau^{-1} \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \check{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \check{\Xi}_{\mathcal{J}} - \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^o \bar{\Xi}_{\mathcal{I}}^{oT} \bar{\Xi}_{\mathcal{J}}) \mathbf{f}(k) \quad (4.57)$$

En montrant également qu'à tout instant  $k$ , les vecteurs  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\check{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{u}$  sont orthogonaux deux à deux :

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) \perp \check{\mathbf{u}}(k), \quad \tilde{\mathbf{u}}(k) \perp \mathbf{u}(k) \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{u}}(k) \perp \mathbf{u}(k) \quad (4.58)$$

D'après (4.58), (4.56) et (4.52), la garantie d'isolabilité du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  de celui assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par reconstruction de la distance combinée peut être réécrite de la manière suivante :

$$\|\bar{\mathbf{u}}(k)\|^2 = (\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\|)^2 + (\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\|)^2 + \|\mathbf{u}(k)\|^2 > (2\beta)^2 \quad (4.59)$$

Puisque la norme euclidienne est positive ou nulle, le domaine de définition de l'inégalité précédente représente la zone externe d'un quart de sphère de rayon  $2\beta$  et caractérisée par ses trois variables principales telles que  $\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\|$ ,  $\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\|$  et  $\|\mathbf{u}(k)\|$  (voir figure 4.1). Ainsi, le vecteur  $\bar{\mathbf{u}}(k)$  peut être exprimé dans une base orthonormée  $\mathbb{B}$  d'un espace vectoriel euclidien  $\mathbb{E}_3$  de dimension 3 comme suit :

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\| \\ \tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\| \\ \|\mathbf{u}(k)\| \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Autrement dit, tout défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est garanti isolable de celui supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  par reconstruction de l'indice combiné si le point correspondant ayant comme coordonnées celles du vecteur (4.60) est situé en dehors du quart de la sphère (figure 4.1). En particulier, un tel défaut n'est garanti isolable ni par l'indice *SPE* ni par la distance *T2* de Hotelling si  $\delta^{-1} \|\tilde{\mathbf{u}}(k)\| \leq 2$  et  $\tau^{-1} \|\check{\mathbf{u}}(k)\| \leq 2$  respectivement. Lorsqu'un tel point est situé dans la

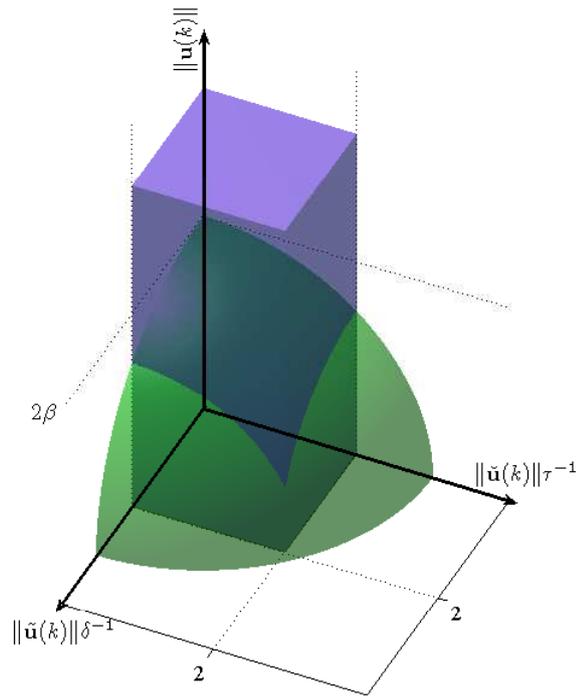


FIGURE 4.1 – Sous-espace d’isolabilité de défauts par reconstruction de l’indice combiné en fonction de ceux des indices  $SPE$  et  $T2$  de Hotelling

zone bleue en dessus du quart de la sphère de la figure 4.1, cela implique que le défaut considéré est isolable uniquement par reconstruction de l’indice combiné. Par conséquent, on peut déduire qu’il peut exister des défauts qui ne sont isolables ni par l’indice  $SPE$  ni par celui de  $T2$  de Hotelling mais ils sont isolables par la distance combinée. Si  $\beta \leq 1$  et le défaut est garanti isolable par reconstruction de l’indice  $SPE$  et/ou  $T2$ , alors le même défaut est également garanti isolable par reconstruction de l’indice combiné.

Bien qu’un tel indice combine les statistiques  $SPE$  et  $T2$  de Hotelling, on constate théoriquement que son avantage en terme d’isolabilité de défauts par reconstruction ne dépend pas de ceux des indices que combine. En outre, la distance combinée peut encore être privilégiée dans ce cadre lorsque sa limite de contrôle  $\beta$  est faible.

### 4.3 Diagnostic de défauts simples par les contributions

Les approches les plus classiques et largement utilisées dans le cadre de l’ACP pour un diagnostic de défauts se fondent sur le calcul des contributions (MacGregor et Kourti, 1995; Westerhuis et al., 2000a; Kourti, 2005; Conlin et al., 2000). Le principe de ces méthodes consiste à calculer les contributions des différentes variables aux indicateurs utilisés pour la détection de défauts. Ainsi, la variable ayant la plus grande contribution est probablement en défaut. Bien entendu, les contributions sont dédiées au diagnostic de

Méthode	Indice			
	<i>SPE</i>	<i>T2</i>	$\varphi$	$\gamma$
<i>CDC</i>	Miller et al. (1998)	Wise et al. (2006)	Alcala et Qin (2011)	
<i>PDC</i>	Mnassri et al. (2008b, 2009b)	Nomikos et MacGregor (1995)	Alcala et Qin (2011)	
<i>DC</i>	Alcala et Qin (2011)	Qin et al. (2001)	Cherry et Qin (2006)	Alcala et Qin (2011)
<i>RBC</i>	Alcala et Qin (2009)			
<i>ABC</i>	Raich et Çinar (1996) et Yoon et MacGregor (2001)		Alcala et Qin (2011)	

TABLE 4.1 – Différentes méthodes de contributions

défauts uniquement de type simple.

Dès leurs apparitions, les contributions n'ont pas cessé d'avoir une diversité dans leurs expressions bien qu'elles n'aient eu ni définitions ni types uniques qui font l'unanimité. Dans ce contexte, Alcala et Qin (2011) ont publié récemment un travail très intéressant dans lequel ils ont distingué cinq principales familles de contributions. Les intérêts majeurs d'un tel travail représentent le regroupement des contributions ainsi que l'appellation des différents groupes ou familles distingués, la reformulation des expressions de telles contributions sous une notation vectorielle simple ainsi que leur généralisation à tout indice de détection ayant une forme quadratique.

Les différents groupes des contributions qui ont été distingués comprennent les contributions par décomposition complète (*complete decomposition contributions* : *CDC*), les contributions par décomposition partielle (*partial decomposition contributions* : *PDC*), les contributions diagonales (*diagonal contributions* : *DC*), les contributions par reconstruction (*reconstruction-based contributions* : *RBC*) et les contributions par angle (*angle-based contributions* : *ABC*).

Dans le but de généraliser les contributions à tout indice de détection ayant une forme quadratique, Alcala et Qin (2011) se sont positionnés tout d'abord par rapport à ce qui existe dans la littérature en mentionnant dans un tableau les auteurs ainsi que les indices de détection sur lesquels se sont basées les différentes contributions existantes dans chaque famille. Dans ce cadre, nous voudrions rectifier et compléter les informations contenues dans un tel tableau en précisant que la contribution par décomposition partielle de l'indice *SPE* et qui fait partie des contributions de type *PDC* a été initialement proposée et appliquée à de différents exemples par Mnassri et al. (2008b,a). Puis, cette contribution a été reformulée sous une autre forme par Mnassri et al. (2009b,a). Sous cette optique, nous proposons à travers le tableau 4.1 un récapitulatif sur les différentes contributions existantes dans la littérature, leurs auteurs ainsi que les indices de détection sur lesquels ont été basées.

Avant d'entamer les descriptions théoriques de ces approches, nous précisons qu'elles ont été proposées pour un diagnostic de défauts simples. Autrement dit, on doit supposer qu'il ne peut y exister qu'une seule variable en défaut au *kème* instant. Notons par  $\mathcal{F}_j$  un défaut réel affectant la *jème* variable à un tel instant, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^*(k) + \xi_j f(k) \quad (4.61)$$

où  $\xi_j$  représente la  $j$ ème colonne de la matrice identité indiquant la direction du défaut.  $f(k)$  est un scalaire qui vaut l'amplitude du défaut à la  $k$ ème observation.

De la même manière que pour l'approche de reconstruction, un tel défaut est réellement inconnu. Afin de le localiser en utilisant les approches des contributions, on calcule la contribution de la  $i$ ème variable tout en considérant que celle ayant la plus grande contribution est probablement en défaut.

### 4.3.1 Contributions par décomposition complète : CDC

Un indice de détection donné peut être interprété comme une sommation des contributions de toutes les variables suite à une décomposition complète. Ce type des contributions est largement utilisé dans l'industrie. Elles ont été initialement proposées par Miller et al. (1998) en décomposant l'indice  $SPE$  ensuite par Wise et al. (2006) en décomposant la distance  $T2$  de Hotelling. Récemment, Alcalá et Qin (2011) ont généralisé ce type de décomposition à tout indice de détection ayant une forme quadratique en montrant d'après (3.1) qu'un tel indice peut s'écrire comme suit :

$$\gamma(k) = \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \right)^2 = \sum_{i=1}^m CDC_i^\gamma(k) \quad (4.62)$$

où  $\xi_i$  représente la  $i$ ème colonne de la matrice identité. Ainsi, la contribution de type  $CDC$  de la  $i$ ème variable à l'indice  $\gamma$  au  $k$ ème instant est la suivante :

$$CDC_i^\gamma(k) = \left( \xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \right)^2 = \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \quad (4.63)$$

### 4.3.2 Contributions par décomposition partielle : PDC

La contribution par décomposition partielle décompose partiellement un indice de détection. Cette notion de décomposition a été initialement proposée par Nomikos et MacGregor (1995) pour l'indice  $T2$  de Hotelling.

#### 4.3.2.1 PDC à l'indice $T2$ de Hotelling

En effet, la distance  $T2$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$T2(k) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{a=1}^{\ell} \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \right) \quad (4.64)$$

où  $\ell$  est le nombre des CPs constituant le sous-espace principal.  $t_a(k)$  représente la  $k$ ème mesure de la  $a$ ème CP.  $\lambda_a$  est la  $a$ ème valeur propre.  $p_{ai}$  désigne le  $i$ ème élément du  $a$ ème vecteur propre.  $x_i(k)$  représente la  $k$ ème mesure de la  $i$ ème variable.

Posons  $c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}$  comme étant la contribution de la  $i$ ème variable dans le calcul du carré de la  $a$ ème CP normalisée :

$$c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}(k) = \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \quad (4.65)$$

On peut déduire que :

$$PDC_i^{T^2}(k) = \sum_{a=1}^{\ell} c_i^{(t_a/\lambda_a^{1/2})^2}(k) = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{t_a(k)}{\lambda_a} p_{ai} x_i(k) \quad (4.66)$$

Puisque une telle contribution peut avoir des valeurs négatives, [Nomikos et MacGregor \(1995\)](#) ont proposé d'annuler toutes les valeurs négatives données par (4.65) car leurs signes sont opposés aux signes des carrés des CPs normalisées.

Dans ce cadre, nous avons constaté qu'il est possible de proposer selon deux façons différentes une contribution de type *PDC* à l'indice *SPE*. Nous notons que leurs expressions sans la négligence des valeurs négatives aboutissent à des résultats identiques. En revanche, la différence se manifeste dans la manière d'éviter telles valeurs. En se basant sur le fait que la statistique *SPE* peut être exprimée en fonction des résidus, la première forme de contribution est calculée relativement à ces résidus ([Mnassri et al., 2008b,a](#)). Également, on peut exprimer la même statistique en fonction des CPs résiduelles. Par conséquent, la deuxième forme de cette contribution est déterminée en s'appuyant sur ces CPs ([Mnassri et al., 2009b,a](#)).

#### 4.3.2.2 *PDC* à l'indice *SPE* basée sur les résidus

En partant du principe que :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i^2(k) = \sum_{i=1}^m (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2 \quad (4.67)$$

on remarque qu'une variable donnée contribue dans le calcul de son propre résidu ainsi qu'aux résidus des autres ( $m - 1$ ) variables. Ainsi, on peut montrer que la  $i$ ème variable contribue dans le carré de son propre résidu par :

$$C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) = x_i(k)\tilde{x}_i(k)(1 - \hat{c}_{ii}) = x_i(k)\tilde{x}_i(k)\tilde{c}_{ii} \quad (4.68)$$

D'autre part, la même variable contribue dans le calcul du carré du résidu d'une autre variable  $n \neq i$  par :

$$c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = -x_i(k)\tilde{x}_n(k)\hat{c}_{ni} = x_i(k)\tilde{x}_n(k)\tilde{c}_{ni} \quad (4.69)$$

D'après l'expression précédente, nous remarquons que :

$$C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) = c_i^{\tilde{x}_{n=i}^2}(k) \quad (4.70)$$

Par conséquent, la  $i$ ème variable contribue par décomposition partielle de l'indice *SPE* en se basant sur les résidus par la quantité suivante :

$$PDC_i^{SPE}(k) = C_i^{\tilde{x}_i^2}(k) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^m c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = \sum_{n=1}^m c_i^{\tilde{x}_n^2}(k) = \sum_{n=1}^m x_i(k)\tilde{x}_n(k)\tilde{c}_{ni} \quad (4.71)$$

où  $\tilde{c}_{ni}$  représente le  $n$ ème élément de la  $i$ ème colonne de la matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$ .  $\tilde{x}_n(k)$  est la  $n$ ème mesure du vecteur résiduel  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ .

Notamment, une telle contribution peut avoir des valeurs négatives. Pour cela, [Mnassri et al. \(2008b,a\)](#) ont décidé d'annuler toute valeur négative donnée par  $c_i^{\tilde{x}_n^2}(k)$  (4.69) afin qu'elle ne soit pas opposée au signe du carré du résidu correspondant.

### 4.3.2.3 PDC à l'indice SPE basée sur les CPs résiduelles

En utilisant le même principe que celui utilisé par [Nomikos et MacGregor \(1995\)](#) pour le calcul d'une contribution à l'indice  $T2$  de Hotelling, on note que la statistique  $SPE$  peut être exprimée en fonction des CPs résiduelles. Ainsi, elle peut être décomposée comme suit :

$$SPE(k) = \|\tilde{\mathbf{t}}(k)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{a=\ell+1}^m t_a(k) p_{ai} x_i(k) \right) \quad (4.72)$$

Dans ce cadre, [Mnassri et al. \(2009b,a\)](#) ont montré que la contribution de la  $i$ ème variable dans le calcul du carré de la  $a$ ème CP résiduelle est donnée par :

$$c_i^{t_a^2}(k) = t_a(k) p_{ai} x_i(k) \quad (4.73)$$

Par conséquent, la contribution de la  $i$ ème variable par décomposition partielle de l'indice  $SPE$  en se basant sur les CPs résiduelles est exprimée comme suit :

$$PDC_i^{SPE}(k) = \sum_{a=\ell+1}^m c_i^{t_a^2}(k) = \sum_{a=\ell+1}^m t_a(k) p_{ai} x_i(k) \quad (4.74)$$

Afin qu'une telle contribution soit positive ou nulle, [Mnassri et al. \(2009b,a\)](#) ont proposé d'annuler toute valeur négative donnée par l'expression (4.73) car elle est opposée au signe du carré de la CP correspondante.

### 4.3.2.4 PDC à un indice quadratique

D'après l'équation (4.66), [Alcala et Qin \(2011\)](#) ont montré que la contribution à l'indice  $T2$  de Hotelling peut s'écrire sous une forme vectorielle comme suit :

$$PDC_i^{T2}(k) = \mathbf{x}^T(k) \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.75)$$

On remarque qu'avec une telle écriture on ne peut pas appliquer le principe d'annulation des contributions négatives par rapport à une CP normalisée.

Pour les deux formes de contributions proposées par décomposition partielle de l'indice  $SPE$  en s'appuyant sur les résidus (4.71) ou sur les CPs résiduelles (4.74), nous avons montré d'après l'annexe F qu'elles sont identiques. Toutefois, la différence dans leurs résultats apparaîtra quand on annule les contributions négatives d'une variable donnée relativement à un résidu ou à une CP résiduelle selon le principe de la technique utilisée. Sans considération de ces annulations, nous avons montré que :

$$PDC_i^{SPE}(k) = \mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{C}} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.76)$$

D'après les équations (4.75) et (4.76), on peut déduire que tout indice de détection  $\gamma$  ayant une forme quadratique peut se décomposer partiellement comme suit :

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.77)$$

Ainsi, [Alcala et Qin \(2011\)](#) ont eu l'idée de déduire que la *ième* variable contribue par décomposition partielle d'un indice quelconque ayant une forme quadratique par :

$$PDC_i^\gamma(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.78)$$

On note que ce type des contributions peut donner des valeurs négatives.

### 4.3.3 Contributions diagonales : *DC*

La contribution diagonale par bloc a été initialement proposée par [Qin et al. \(2001\)](#) en décomposant l'indice *T2* de Hotelling afin d'assurer une surveillance de processus par multi-blocs. Evidemment, les blocs sont indépendants les uns des autres. Dans ce cadre, [Cherry et Qin \(2006\)](#) ont étendu cette idée en utilisant la distance combinée.

Dans le cas particulier où chaque bloc est constitué d'une seule variable, l'indice *T2* de Hotelling correspondant est considéré comme une contribution diagonale qui peut être définie de la manière suivante :

$$DC_i^{T2}(k) = \mathbf{x}^T(k) \xi_i \xi_i^T \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^T \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.79)$$

Une telle contribution a été utilisée pour la surveillance d'un bloc donné qui est supposé indépendant des autres blocs. Par conséquent, les contributions diagonales se réduisent à une surveillance univariée. Dans le cas où un processus n'est pas décomposable en des blocs, ces contributions ne sont pas recommandées pour une détection de défaut car elles ignorent les corrélations entre les variables. Cependant, elles peuvent être utilisées comme des techniques d'analyse des contributions pour un diagnostic de défauts.

D'après [Alcala et Qin \(2011\)](#), la contribution diagonale de la *ième* variable à un indice  $\gamma$  ayant une forme quadratique peut se présenter comme suit :

$$DC_i^\gamma(k) = \mathbf{x}^T(k) \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathbf{x}(k) \quad (4.80)$$

### 4.3.4 Contributions par reconstruction : *RBC*

Parmi les méthodes dédiées au diagnostic de défauts, [Alcala et Qin \(2009\)](#) ont récemment proposé une approche de contributions par reconstruction. Elle est basée sur une utilisation simultanée du principe de la contribution et celui de la reconstruction. Une telle méthode est exceptionnellement proposée pour diagnostiquer les défauts simples.

Le principe de la contribution par reconstruction considère la quantité reconstruite d'un indice de détection le long d'une direction d'une variable donnée comme étant la contribution d'une telle variable. Dans le cas particulier où le défaut supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  est de type simple ou unidimensionnel, i.e.  $\mathcal{I} = i$  et  $\Xi_{\mathcal{I}} = \xi_i$ , l'équation (4.8) correspond à l'indice insensible à un tel défaut se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_i(k) &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I}_m - \xi_i^o \xi_i^{oT}) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i^o \xi_i^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \hat{f}_i(k)\|^2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

où  $f_i$  est une estimation optimale de l'amplitude du défaut dans la direction de la  $i$ ème variable par reconstruction de l'indice  $\gamma$ . Le vecteur  $\xi_i^o$  est déterminé en utilisant le principe de l'équation (4.6).

Selon [Alcala et Qin \(2009\)](#), la contribution de la  $i$ ème variable par reconstruction de l'indice  $\gamma$  représente le carré de la norme de l'amplitude estimée du défaut comme suit :

$$\begin{aligned} RBC_i^\gamma(k) &= \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \hat{f}_i(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i (\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i)^{-1} \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k) \\ &= \frac{\mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k)}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} \end{aligned} \quad (4.82)$$

### 4.3.5 Contributions par angle : ABC

Dans le but d'extraire plus d'informations utiles sur les défauts, [Raich et Çinar \(1996\)](#) et [Yoon et MacGregor \(2001\)](#) ont suggéré une contribution basée sur le calcul d'un angle permettant ainsi un diagnostic plus facile. La contribution de la  $i$ ème variable est liée à l'angle entre le vecteur d'observation  $\mathbf{x}(k)$  et le vecteur  $\xi_i$  qui représente la direction d'une telle variable après qu'ils ont été projetés dans le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice  $\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}$  de l'indice de détection. Cette contribution n'est autre que le carré du cosinus d'un tel angle comme suit :

$$\begin{aligned} ABC_i^\gamma(k) &= \left( \frac{\left( \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i \right)^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\| \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|} \right)^2 = \frac{\mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \mathbf{x}(k)}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \mathbf{x}(k)} \\ &= \frac{RBC_i^\gamma(k)}{\gamma(k)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

On note que la contribution par reconstruction et celle par angle ne diffèrent que par une constante près qui est l'indice  $\gamma$ . Ce dernier est indépendant de la  $i$ ème variable. Par conséquent, les résultats d'un diagnostic de défauts basé sur ces deux approches sont identiques. Dans le reste du chapitre, seule la contribution par reconstruction sera considérée.

### 4.3.6 Analyse de diagnosticabilité

Afin d'analyser la diagnosticabilité de défauts en utilisant les méthodes des contributions, on peut considérer un type de défauts le plus simple et qui peut arriver souvent dans un processus. Dans ce cas, l'utilisation de l'une de ces méthodes des contributions pour un diagnostic de défauts de ce type doit nécessairement pointer vers la variable réellement en défaut. Si la méthode désignée n'est pas en mesure d'accomplir cette tâche, alors il n'y a aucune garantie qu'elle peut diagnostiquer correctement des défauts complexes.

En effet, les défauts les plus simples représentent souvent des biais. Puisque le défaut réel affecte la  $j$ ème variable (4.61), on peut supposer que son amplitude est très grande

par rapport aux mesures obtenues lors du fonctionnement normal. Ainsi, le vecteur d'observation en défaut se réécrit comme suit :

$$\mathbf{x}(k) \approx \xi_j f(k) \quad (4.84)$$

#### 4.3.6.1 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *CDC*

La substitution de l'équation (4.84) dans celle de (4.63) mène aux résultats suivants :

$$CDC_i^\gamma(k) = \begin{cases} (\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 f^2(k) & \text{pour } i \neq j \\ (\xi_j^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 f^2(k) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.85)$$

Ainsi, le diagnostic d'un tel défaut est garanti correct par l'utilisation de l'approche *CDC* si :

$$(\xi_j^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 \geq (\xi_i^T \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^2 \quad (4.86)$$

Malheureusement, une telle inégalité n'est pas toujours vérifiée. Par conséquent, la méthode *CDC* ne peut pas garantir un diagnostic correct de défauts.

#### 4.3.6.2 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *PDC*

En remplaçant l'équation (4.84) dans celle de (4.78), on peut montrer ce qui suit :

$$PDC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \xi_j^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0 & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) \geq 0 & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.87)$$

où  $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0$  car  $\xi_i^T \xi_j = 0 \forall i \neq j$ .

D'après les résultats de l'équation précédente, on remarque que les variables qui ne sont pas réellement en défaut ne contribuent pas. Ainsi, seule la variable en défaut qui contribue. Puisque  $\xi_j^T \mathcal{M} \xi_j \geq 0$ , nous constatons également qu'une telle variable contribue positivement. Par conséquent, l'approche *PDC* garantit un diagnostic correct de défauts simples de grandes amplitudes.

#### 4.3.6.3 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *DC*

En s'appuyant sur le même principe utilisé avec les autres approches, la substitution de l'expression de l'équation (4.84) dans celle de (4.80) nous permet de montrer que :

$$DC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \xi_j^T \xi_i \xi_i^T \mathcal{M} \xi_i \xi_i^T \xi_j f^2(k) = 0 & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) \geq 0 & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.88)$$

D'après cette équation, on constate que seule la variable réellement en défaut qui contribue. Cela implique qu'une telle approche garantit un diagnostic correct de défauts simples de grandes amplitudes.

#### 4.3.6.4 Diagnosticabilité de défauts par l'approche *RBC*

La considération de l'équation (4.82) en tenant en compte de l'expression donnée par l'équation (4.84) nous permet de déduire que :

$$RBC_i^\gamma(k) = \begin{cases} \frac{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f^2(k) & \text{pour } i \neq j \\ \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j f^2(k) & \text{pour } i = j \end{cases} \quad (4.89)$$

Evidemment, un diagnostic de défauts par l'approche *RBC* est garanti correct si  $RBC_{i=j}^\gamma(k) \geq RBC_{i \neq j}^\gamma(k)$ . Pour cela, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{(\xi_j^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} &= \left( \frac{(\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j)^T (\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i)}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_j\| \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|}{\|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \xi_i\|} \right)^2 = \xi_j^T \mathcal{M} \xi_j \end{aligned} \quad (4.90)$$

Cette inégalité implique que les défauts simples d'importantes amplitudes sont garantis correctement diagnosticables en utilisant la méthode *RBC*.

Pour un tel type de défauts, et selon les équations (4.87), (4.88) et (4.89), les contributions qui correspondent à la variable réellement en défaut sont identiques en utilisant les approches *PDC*, *RBC* et *DC*. En outre, les variables qui ne sont pas en défaut ne contribuent pas en se basant plus particulièrement sur les deux méthodes *PDC* et *DC*. Une telle propriété présente un avantage car la variable en défaut peut se distinguer plus facilement des autres variables en utilisant ces deux approches plutôt que la *RBC*.

## 4.4 Nouvelles approches pour un diagnostic de défauts multiples

En analysant toutes les formes des contributions présentées dans ce chapitre, nous constatons qu'elles ont été toutes exceptant celle de *RBC* déterminées par décomposition d'un indice de détection. Ainsi et pour chaque type de contribution, la somme des contributions individuelles de toutes les variables doit reconstituer l'indice décomposé.

Néanmoins, les défauts peuvent être de type multiple. Par conséquent, l'utilisation de ces approches des contributions pour un diagnostic de défauts multiples mène certainement à des résultats erronés. Ainsi, la solution envisageable est d'étendre ces contributions aux cas multidimensionnels. Cependant, une décomposition multidimensionnelle d'un indice de détection et qui doit également reconstituer la valeur d'un tel indice n'est pas faisable. Puisque l'approche *RBC* n'est pas fondée sur le principe de décomposition, nous nous sommes rendus compte qu'il est possible de l'étendre pour un diagnostic de défauts multiples.

#### 4.4.1 Contributions par reconstruction multidimensionnelle

Avant de commencer la présentation de la nouvelle approche multidimensionnelle, il semblerait utile de montrer théoriquement l'invalidité d'un diagnostic basé sur la *RBC* classique lors de la présence d'un défaut multiple. Pour cela, nous considérons le cas le plus simple de défauts multidimensionnels en supposant que leurs amplitudes sont largement supérieures aux mesures collectées lors du fonctionnement normal. L'équation (2.59) peut être approximée par :

$$\mathbf{x}(k) \approx \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) \quad (4.91)$$

Sans perte de généralité, nous supposons également que seules deux variables sont réellement en défaut. Dans ce cadre, l'équation précédente peut se réécrire comme suit :

$$\mathbf{x}(k) \approx \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} \xi_{j_1} & \xi_{j_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{j_1}(k) \\ f_{j_2}(k) \end{bmatrix} = \xi_{j_1} f_{j_1}(k) + \xi_{j_2} f_{j_2}(k) \quad (4.92)$$

où les vecteurs  $\xi_{j_1}$  et  $\xi_{j_2}$  représentent respectivement les  $j_1$ ème et  $j_2$ ème colonnes de la matrice identité. Les scalaires  $f_{j_1}(k)$  et  $f_{j_2}(k)$  correspondent aux amplitudes des composants du défaut réel dans les directions de la  $j_1$ ème et la  $j_2$ ème variable respectivement.

La substitution de l'équation (4.92) dans celle de (4.82) nous permet de déduire que :

$$RBC_{i \neq \{j_1, j_2\}}^{\gamma}(k) = \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_1}^2(k) + 2 \frac{\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_i \xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_i}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_i)^2}{\xi_i^T \mathcal{M} \xi_i} f_{j_2}^2(k) \quad (4.93)$$

$$RBC_{i=j_1}^{\gamma}(k) = \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_1} f_{j_1}^2(k) + 2 \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2})^2}{\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_1}} f_{j_2}^2(k) \quad (4.94)$$

$$RBC_{i=j_2}^{\gamma}(k) = \xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_2}^2(k) + 2 \xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2} f_{j_1}(k) f_{j_2}(k) + \frac{(\xi_{j_1}^T \mathcal{M} \xi_{j_2})^2}{\xi_{j_2}^T \mathcal{M} \xi_{j_2}} f_{j_1}^2(k) \quad (4.95)$$

Les équations (4.93), (4.94) et (4.95) représentent les contributions par reconstructions unidimensionnelles respectivement de la  $i$ ème variable qui n'est pas en défaut, de la  $j_1$ ème et la  $j_2$ ème variable réellement toutes les deux en défaut. Malgré que le défaut est caractérisé par une grande amplitude, l'analyse de la relation entre ces équations montre que les contributions des variables en défaut ne peuvent pas être garanties supérieures à celles des variables saines. Par conséquent, la contribution par reconstruction unidimensionnelle ne garantit pas un diagnostic correct de défauts multiples.

Puisque le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est inconnu, on adopte le même principe que dans la deuxième section de ce chapitre en supposant un défaut assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$  affectant un  $\mathcal{I}$ ème ensemble de variables. D'après l'équation (4.8), l'indice insensible à un tel défaut peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{I}}(k) &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \\ &= \gamma(k) - \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Par déduction, [Mnassri et al. \(2012b\)](#) ont proposé que la contribution du  $\mathcal{I}^{\text{ème}}$  ensemble de variables par reconstruction multidimensionnelle de l'indice  $\gamma$  est la suivante :

$$\begin{aligned} RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) &= \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}} \hat{\mathbf{f}}_{\mathcal{I}}(k)\|^2 = \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k)\|^2 \\ &= \mathbf{x}^T(k) \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Afin d'établir une analyse de diagnosticabilité de défauts multiples de grandes amplitudes en utilisant cette approche, la considération du défaut réel exprimé par l'équation (4.91) nous a permis de montrer que :

$$RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \begin{cases} \|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 & \text{pour } \mathcal{I} \neq \mathcal{J} \\ \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|^2 & \text{pour } \mathcal{I} = \mathcal{J} \end{cases} \quad (4.98)$$

Puisque  $\|\Xi_{\mathcal{I}}^o \Xi_{\mathcal{I}}^{oT} \mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\| \leq \|\mathcal{M}^{\frac{1}{2}} \Xi_{\mathcal{J}} \mathbf{f}(k)\|$ , alors :

$$RBC_{\mathcal{J}}^{\gamma}(k) \geq RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) \quad (4.99)$$

Cette inégalité implique que l'approche proposée garantit un diagnostic correct de défauts multiples ayant de grandes amplitudes.

#### 4.4.2 *RBC ratio*

D'après les analyses de diagnosticabilité, les approches des contributions peuvent garantir un diagnostic correct que dans le cas de défauts de grandes amplitudes. En revanche, les défauts sont en réalité plus complexes. Autrement dit, ils peuvent avoir des faibles amplitudes comme ils peuvent être difficilement isolables les uns des autres (colinéarités entre les variables). Pour cela, la comparaison d'un indicateur qui a pour objectif un diagnostic de défauts par rapport à un seuil de décision ou de contrôle semblerait une solution avantageuse.

Dans ce cadre, [Alcala et Qin \(2009\)](#) ont proposé une limite de contrôle pour la *RBC* unidimensionnelle en se basant sur le fait qu'une telle approche dispose d'une forme quadratique. Cependant, ils ont mentionné que ce seuil ne peut malheureusement pas être utilisé pour l'identification de la variable en défaut à cause de l'effet de propagation de celui-ci dans le calcul des contributions des autres variables. Ils ont montré comment le défaut se propage dans les contributions sans pour autant montrer ses conséquences pour une utilisation de la limite de contrôle.

Pour cette raison, nous avons établi théoriquement dans l'annexe G une condition sur l'amplitude du défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  permettant de garantir le dépassement de la *RBC* d'un  $\mathcal{I}^{\text{ème}}$  ensemble de variables son correspondant seuil de contrôle. Une telle condition prouve qu'à partir d'une amplitude donnée, il est possible d'identifier tous les ensembles de variables comme étant en défaut si on choisit un diagnostic par l'approche *RBC* comparée à ses limites de contrôle. Par conséquent, l'utilisation d'une telle approche afin de diagnostiquer les défauts demeure valide uniquement par évaluation de l'ampleur des contributions des ensembles de variables.

Afin de remédier aux problèmes de diagnostic liés aux défauts complexes, nous avons proposé une nouvelle approche de diagnostic plus performante en s'appuyant sur la  $RBC$  multidimensionnelle comme suit :

$$RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \frac{\gamma(k)}{RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) + \Gamma_{\mathcal{I}}^2} \quad (4.100)$$

avec  $\Gamma_{\mathcal{I}}^2$  représente le seuil de contrôle (4.13) de l'indice insensible au défaut supposé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ .

Nous avons appelé cette méthode par  $RBC$  ratio (Mnassri et al., 2012b) car elle dispose de l'indice  $\gamma$  au numérateur comme un facteur commun pour les  $RBC$  ratio de tous les ensembles de variables. Cependant, les termes de son dénominateur dont principalement la  $RBC$  dépendent de l'ensemble de variables étudiées.

La théorie d'une diagnosticabilité de défauts en se basant sur cette méthode se déroulera en deux étapes. Pour cet objectif, il est possible d'exprimer la  $RBCr$  en fonction des indices  $\gamma$  et  $\gamma_{\mathcal{I}}$  comme suit :

$$RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - \gamma(k) + RBC_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) + \Gamma_{\mathcal{I}}^2} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} \quad (4.101)$$

- 1<sup>er</sup> cas :  $\mathcal{I} = \mathcal{J}$

A partir de l'inégalité (4.11), nous pouvons montrer que :

$$\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2) \geq \gamma(k) \quad (4.102)$$

Puisque  $\gamma(k) \geq 0$ , l'inégalité suivante est vraie

$$\frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^2)} \leq \frac{\gamma(k)}{\gamma(k)} = 1 \quad (4.103)$$

ainsi

$$RBCr_{\mathcal{I}=\mathcal{J}}^{\gamma}(k) \leq 1 \quad (4.104)$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $\mathcal{I} \neq \mathcal{J}$

L'inégalité (4.25) présente la condition nécessaire afin que le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  soit garanti isolable de celui assumé  $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ . Par conséquent, on peut montrer que :

$$0 \leq \Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2 < \gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2 \leq \gamma(k) \quad (4.105)$$

Celle-ci nous permet de déduire que :

$$0 \leq \gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2) < \gamma(k) - (\Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2) \leq \gamma(k) \quad (4.106)$$

Puisque  $\gamma(k) \geq 0$ , alors

$$\frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\gamma_{\mathcal{I}}(k) - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} > \frac{\gamma(k)}{\gamma(k) - (\Gamma^2 - \Gamma_{\mathcal{I}}^2)} \geq \frac{\gamma(k)}{\gamma(k)} = 1 \quad (4.107)$$

ce qui implique que

$$RBCr_{\mathcal{I} \neq \mathcal{J}}^{\gamma} > 1 \quad (4.108)$$

Il est clair que la limite de contrôle de l'approche proposée est égale à l'unité. La diagnosticabilité de défauts par une telle méthode montre que les valeurs de la  $RBCr$  des variables réellement en défaut sont garanties inférieures à un tel seuil. Autrement dit, le défaut réel  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  est garanti identifiable. En outre, elle garantit de rejeter la possibilité qu'un défaut assumé soit identifié comme un candidat si la condition nécessaire d'isolabilité de défauts de l'inégalité (4.25) est satisfaite. Nous rappelons qu'une telle condition est équivalente à celle déduite dans l'inégalité (4.26). Par conséquent, les défauts complexes et qui sont détectables sont garantis identifiables par l'approche  $RBCr$ . Ainsi, ils sont garantis isolables si leurs amplitudes vérifient l'inégalité (4.26). Entre autre, tout ensemble de variables  $\mathcal{I} \in \hat{\mathcal{I}}_{RBCr}$  est considéré en défaut par l'approche  $RBCr$  avec  $\hat{\mathcal{I}}_{RBCr}$  vérifie l'argument suivante :

$$\hat{\mathcal{I}}_{RBCr} = \arg_{\mathcal{I} \in \mathfrak{J}} \{RBCr_{\mathcal{I}}^{\gamma}(k) \leq 1\} \quad (4.109)$$

où  $\mathfrak{J}$  représente l'ensemble de toutes les combinaisons des directions de reconstructions possibles.

## 4.5 Exemple de synthèse

Afin d'illustrer l'étude théorique de ce chapitre, nous avons considéré la simulation d'un exemple de processus dont les variables sont décrites par leurs équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(k) &= 1 + u(k)^2 + \sin\left(\frac{k}{3}\right) \quad \text{avec} \quad u(k) \sim \mathcal{N}(0, (0.02)^2) \\ \dot{x}_2(k) &= 2 \sin\left(\frac{k}{6}\right) \cos\left(\frac{k}{4}\right) \exp\left(-\frac{k}{N}\right) \\ \dot{x}_3(k) &= \log(\dot{x}_2(k)^2) \\ \dot{x}_4(k) &= \dot{x}_1(k) + \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_5(k) &= \dot{x}_1(k) - \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_6(k) &= 2\dot{x}_1(k) + \dot{x}_2(k) \\ \dot{x}_7(k) &= \dot{x}_1(k) + \dot{x}_3(k) \\ \dot{x}_8(k) &\sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (4.110)$$

On note que  $u$  et  $\dot{x}_8$  représentent deux variables aléatoires normales centrées et d'écart types de 0,02 et 1 respectivement. Un bruit blanc  $\mathbf{v}$  constitué de 8 variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyennes nulles et d'écart types identiques de 0,7 a été superposé aux variables de l'équation (4.110). Ainsi, le  $k$ ème vecteur d'observation à 8 composantes est généré de la façon suivante :

$$\mathbf{x}(k) = \dot{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (4.111)$$

où

$$\dot{\mathbf{x}}(k) = [\dot{x}_1(k), \dots, \dot{x}_8(k)]^T \quad (4.112)$$

et

$$\mathbf{v}(k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_8, (0.7)^2 \mathbf{I}_8) \quad (4.113)$$

$\mathbf{I}_8$  représente une matrice identité d'ordre 8.

Une matrice de données  $\mathbf{X}$  a été constituée de  $N = 3000$  observations dont les 1500 premières qui représentent un fonctionnement normal du processus ont été réservées pour

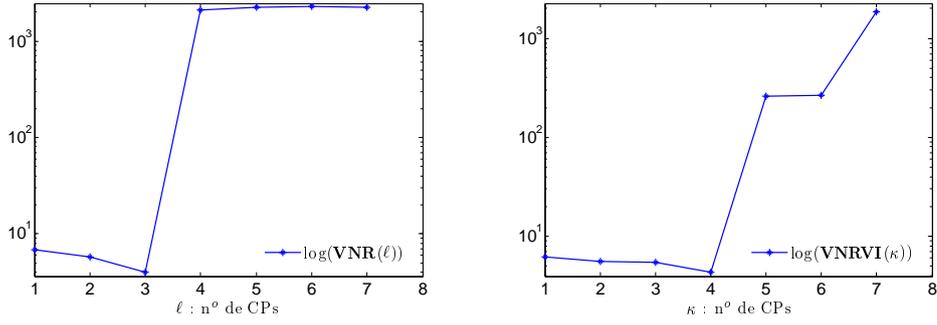


FIGURE 4.2 – Sélection du nombre optimal des CPs

la construction d'un modèle ACP. Notamment, les données d'une telle matrice sont centrées et réduites en utilisant les moyennes et les écarts types des données réservées au modèle. Selon la figure 4.2, un tel modèle doit être constitué de 4 CPs. Le minimum du critère **VNR** correspond à 3 CPs, ce qui implique l'existence de 3 importantes sources de corrélation. Ainsi, le critère **VNRVI** indique l'existence d'une variable indépendante. En effet, son minimum a été atteint pour  $\kappa_{op} = 4$  CPs dans les données transformées de  $\mathbf{Y}$ , ce qui signifie selon le principe d'un tel critère que le nombre optimal des CPs dans les données de  $\mathbf{X}$  est  $q = 8 - \kappa_{op} = 4$  CPs.

Dans le but d'illustrer un diagnostic de défauts en utilisant les différentes méthodes décrites dans ce chapitre, trois défauts sont introduits aux données de la matrice  $\mathbf{X}$ . Le premier noté  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  représente un défaut simple ayant une forme d'une dérive affectant la troisième variable ( $x_3$ ) entre les instants 1550 et 1800 :

$$\mathcal{F}_{\{3\}} = \xi_3 f_{x_3}(k) \quad (4.114)$$

Le vecteur  $\xi_3$  représente la troisième colonne de la matrice identité. Ainsi, le scalaire  $f_{x_3}(k)$  désigne l'amplitude d'un tel défaut à la  $k$ ème observation :

$$f_{x_3}(k) = 0.1(k - 1550) \quad \text{pour } 1550 \leq k \leq 1800 \quad (4.115)$$

Le deuxième et le troisième défaut notés respectivement  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  et  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  sont de type multiple ayant également des formes de dérives.  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  a été ajouté entre les observations 2000 à 2400 simultanément pour la première et la septième variable :

$$\mathcal{F}_{\{1,7\}} = \Xi_{\{1,7\}} \mathbf{f}(k) = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_1}(k) \\ f_{x_7}(k) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

où  $\Xi_{\{1,7\}}$  est une matrice orthonormée composée de la première ( $\xi_1$ ) et la septième ( $\xi_7$ ) colonne de la matrice identité.  $\mathbf{f}(k)$  est un vecteur constitué de  $f_{x_1}(k)$  et  $f_{x_7}(k)$  qui représentent les amplitudes au  $k$ ème instant des composants du défaut dans les directions des variables correspondantes, avec :

$$\begin{cases} f_{x_1}(k) = 0.3(k - 2000) & \text{pour } 2000 \leq k \leq 2400 \\ f_{x_7}(k) = 0.02(2k - 2000) & \text{pour } 2000 \leq k \leq 2400 \end{cases} \quad (4.117)$$

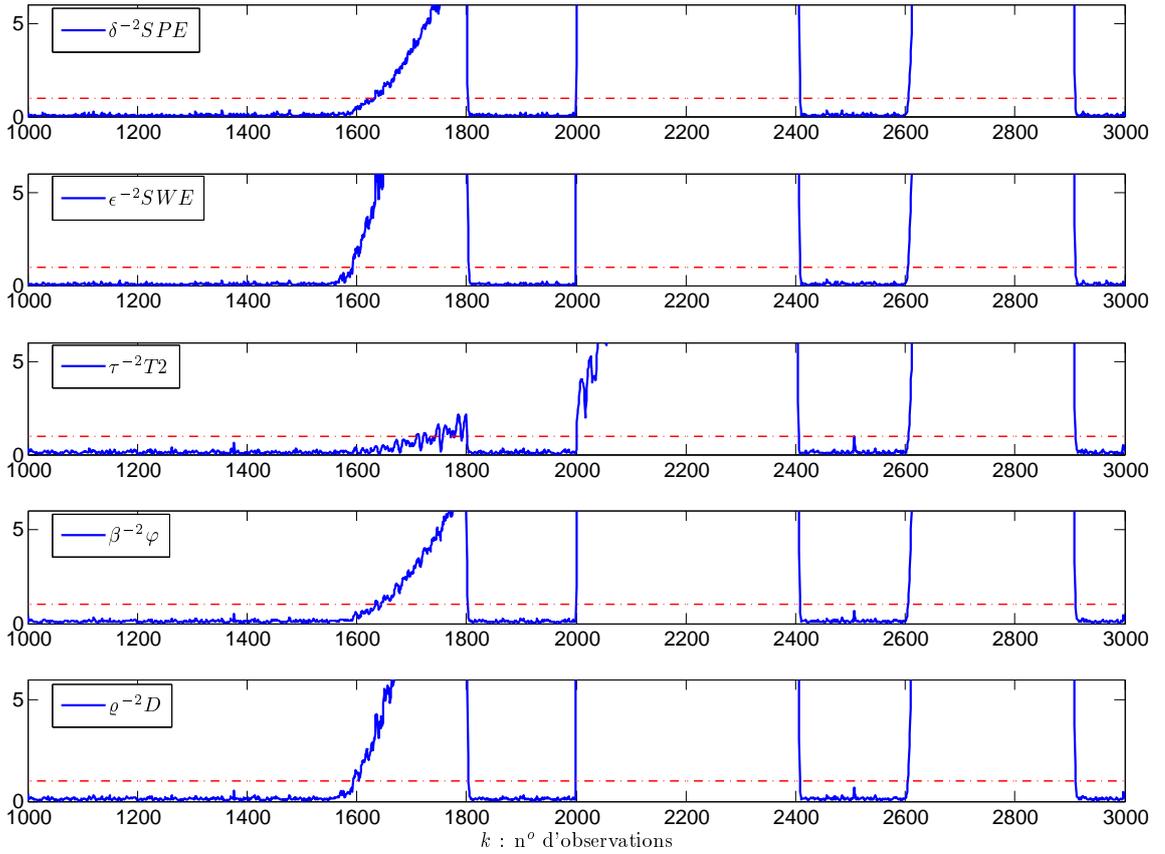


FIGURE 4.3 – Détection des défauts avec les différents indices

Le troisième défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  est introduit simultanément dans la sixième et la huitième variable entre les instants 2600 et 2900 :

$$\mathcal{F}_{\{6,8\}} = \Xi_{\{6,8\}} \mathbf{f}(k) = [\xi_6 \quad \xi_8] \begin{bmatrix} f_{x_6}(k) \\ f_{x_8}(k) \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Les amplitudes des composants d'un tel défaut dans les directions des variables correspondantes sont identiques :

$$f_{x_6}(k) = f_{x_8}(k) = k - 2600 \quad \text{pour } 2600 \leq k \leq 2900 \quad (4.119)$$

Pour une interprétation plus facile des résultats, nous suggérons que tout indicateur ayant pour objectifs la détection ou l'isolation d'un défaut suite à une comparaison par rapport à un seuil soit pondéré par la valeur d'un tel seuil afin que la comparaison s'effectue par rapport à l'unité. Pour les méthodes des contributions, l'affichage de leurs courbes pour toutes les variables est très encombrant rendant ainsi la distinction d'une courbe parmi d'autres très difficile voire impossible dans la même figure. Puisque nous avons une connaissance *a priori* sur les défauts, nous proposons d'afficher dans les figures les différences entre la contribution de la variable réellement en défaut et celles des autres variables :

$$Cont_j^\gamma(k) - Cont_i^\gamma(k) \quad (4.120)$$

où  $Cont_j^l$  représente une contribution donnée. Dans le cas des défauts simples,  $j$  représente le numéro de la variable réellement en défaut. En revanche et pour le cas des défauts multiples, l'index  $j$  devient  $\mathcal{J}$  afin d'exprimer l'ensemble des variables réellement en défaut. Si l'équation (4.120) aboutit à des valeurs négatives, cela implique que la contribution de la (l'ensemble des) variable(s) réellement en défaut n'est pas la plus grande.

A partir de la figure 4.3, on constate que les défauts  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  et  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  ont été remarquablement détectés dès leurs apparitions par tous les indices de détection. Cependant, celui du  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  qui représente un défaut simple a été détecté avec des retards. Sa détection a commencé à partir des instants 1634, 1593, 1645 et 1593 respectivement par les indicateurs  $SPE$ ,  $SWE$ ,  $\varphi$  et  $D$ . L'amplitude de ce défaut n'a pas permis celui-ci d'être détectable en très grande partie plus particulièrement par l'indice  $T2$  de Hotelling.

### 4.5.1 Diagnostic d'un défaut simple

En interprétant les résultats obtenus par les approches dont l'objectif étant l'isolation des défauts en se basant sur une comparaison de leurs valeurs par rapport à des seuils de contrôle comme la reconstruction des indices de détection et la  $RBCr$ , le défaut simple  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  est non isolable en utilisant les statistiques  $SPE$ ,  $SWE$  et  $T2$  (figures 4.4, 4.5 et 4.6 respectivement). D'après ces deux approches exprimées avec de tels indices de détection, la septième variable est également considérée en défaut. Cela s'explique par une forte colinéarité dans les sous-espaces engendrés par les vecteurs colonnes des matrices de tels indices entre la variable  $x_7$  et celle réellement en défaut ( $x_3$ ). En se basant sur l'indice combiné et celui de Mahalanobis (figures 4.7 et 4.8 respectivement), le défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  devient isolable dans une grande partie d'observations. Une telle situation illustre clairement l'analyse théorique d'isolabilité de défauts réalisée dans la sous-section 4.2.2 en montrant que la reconstruction de la distance combinée peut jouer un rôle plus avantageux dans l'isolation de défauts que des reconstructions séparées des indices que combine.

En se référant aux figures 4.4, 4.5 et 4.6, un diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  mené par l'approche  $CDC$  en utilisant les indices  $SPE$ ,  $SWE$  et  $T2$  n'est pas en mesure d'être correct. Selon les courbes qui représentent les différences des contributions en respectant l'équation (4.120), on remarque l'existence des valeurs négatives durant les observations défectueuses. Cela implique que la contribution de la variable réellement en défaut par décomposition complète de tels indices ne présente pas des valeurs plus supérieures que les contributions des autres variables. Néanmoins, l'utilisation de cette approche en se basant sur des décompositions de l'indice combiné ainsi que la distance de Mahalanobis a permis une identification correcte de la variable en défaut à partir de la 1643<sup>ième</sup> observation (figures 4.7 et 4.8 respectivement). Dans le cadre de ce défaut simple, l'interprétation des résultats d'un diagnostic utilisant la méthode de contribution par reconstruction unidimensionnelle  $RBC$  est la même que celle de  $CDC$ .

D'autre part, les contributions par décomposition partielle  $PDC$  et diagonale  $DC$  de tous les indices de détection sans exception ont abouti à un diagnostic correct en identifiant la variable réellement en défaut à partir de la 1643<sup>ième</sup> observation (figures 4.4 jusqu'à 4.8). Selon les analyses théoriques de diagnosticabilité, cela signifie que l'amplitude de ce défaut a été considérée importante dès cette observation.

D'après les figures correspondantes, on déduit qu'un diagnostic basé sur une évaluation

Défaut	Indice				
	$SPE$	$SWE$	$T2$	$\varphi$	$D$
$\mathcal{F}_{\{1,7\}}$	{1, 7} et {1, 3}		{1, 7}, {1, 3} et {3, 7}	{1, 7}	{1, 7}
$\mathcal{F}_{\{6,8\}}$	{1, 6}, {2, 6}, {3, 6}, {4, 6}, {5, 6}, {6, 7} et {6, 8}		{6, 8}	{6, 8}	{6, 8}

TABLE 4.2 – Ensembles des variables identifiés responsables des défauts multiples correspondants par l’approche de reconstruction et la  $RBCr$  relativement aux indices

de l’ampleur des contributions peut conduire à des résultats erronés. Cela s’est justifiée plus particulièrement par les contributions  $PDC$  et  $DC$  en utilisant les indices  $SPE$ ,  $SWE$  et  $D$  et les contributions  $CDC$  et  $RBC$  basées sur l’indice  $D$ . Ces indices de détection ont détecté l’existence du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  plus tôt avant que celui-ci ne soit correctement identifié par de telles contributions. Cependant, la méthode de reconstruction des indices et celle de la  $RBCr$  garantissent une identification correcte de la variable en question dès l’apparition du défaut. Tout dépend de la nature et de l’amplitude d’un tel défaut, celui-ci peut ne pas être isolable. En effet, ces deux méthodes peuvent identifier également d’autres variables en défaut.

## 4.5.2 Diagnostic de défauts multiples

En considérant les défauts multiples, les approches des contributions telles que  $CDC$ ,  $PDC$  et  $DC$  ne sont plus valables. En effet, seules la  $RBC$  multidimensionnelle, la reconstruction des indices et la  $RBCr$  peuvent être considérées.

Nous rappelons que le deuxième défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  a été introduit entre les instants 2000 et 2400 simultanément dans les directions des variables  $x_1$  et  $x_7$ . En investiguant les figures 4.9, 4.10 et 4.11, l’approche de reconstruction ainsi que la  $RBCr$  ont correctement identifié le défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  en utilisant les indices  $SPE$ ,  $SWE$  et  $T2$  de Hotelling. Néanmoins, un tel défaut est non isolable car l’ensemble des variables  $\{1, 3\}$  est également identifié en défaut par ces deux méthodes en se basant sur les mêmes indices. En outre, ces deux approches ont aussi identifié l’ensemble  $\{3, 7\}$  comme un candidat au défaut correspondant en considérant exceptionnellement l’indice  $T2$  de Hotelling (figure 4.11). Le défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  a été correctement isolé par les deux méthodes en utilisant l’indice combiné ainsi que la distance de Mahalanobis (figures 4.12, 4.13 respectivement).

On note que dans le cas des défauts multiples, l’affichage de toutes les courbes dans les figures correspondantes est parfois illisible. Pour cette raison, nous avons proposé le tableau récapitulatif 4.2 présentant les résultats de ces deux approches pour les cas des défauts multiples.

Un diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par évaluation de l’ampleur de la contribution  $RBC$  basée sur les indices  $SPE$ ,  $SWE$  et  $T2$  n’est pas garanti correct (figures 4.9, 4.10 et 4.11 respectivement). En effet, l’utilisation de l’équation (4.120) a engendré des valeurs négatives entre les instants 2000 et 2400, ce qui implique que l’ensemble des variables réellement en défaut ne dispose pas de la plus grande contribution. D’après les figures

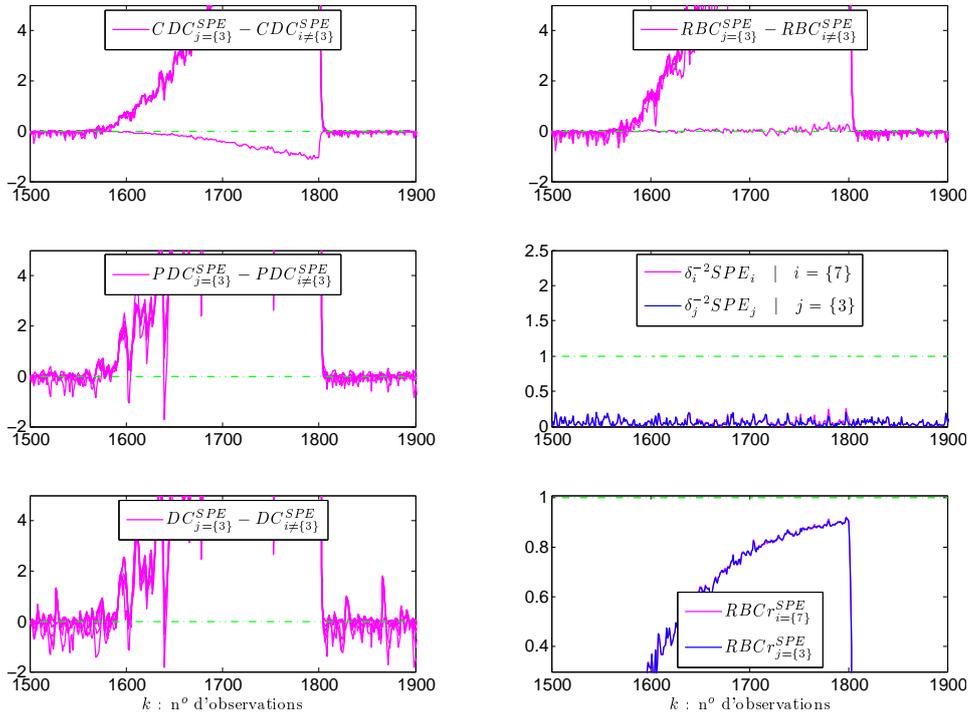


FIGURE 4.4 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SPE$

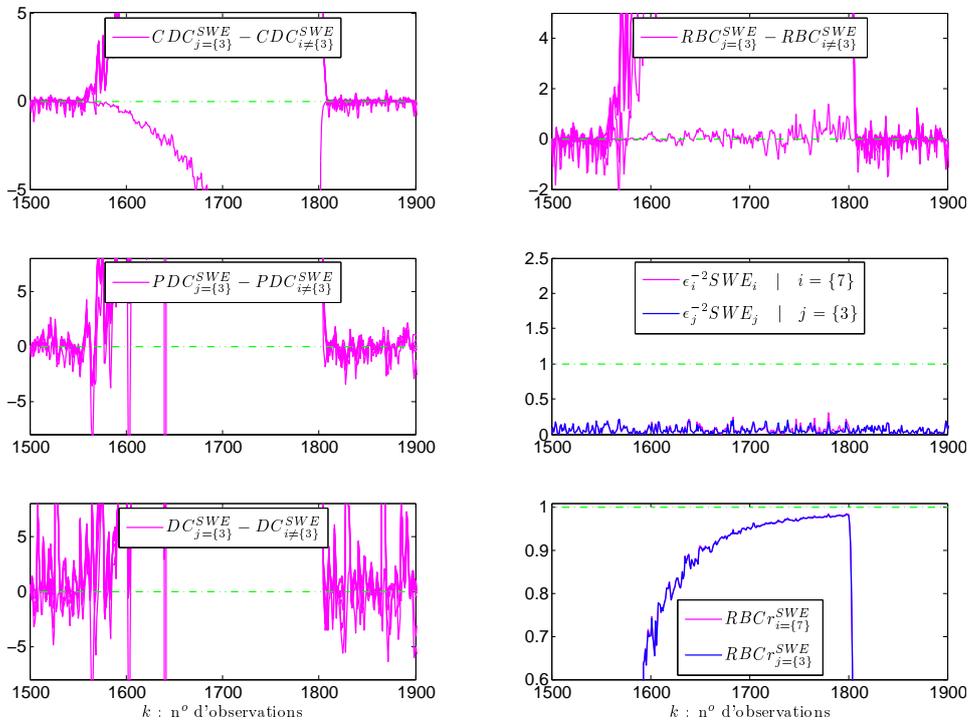


FIGURE 4.5 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SWE$

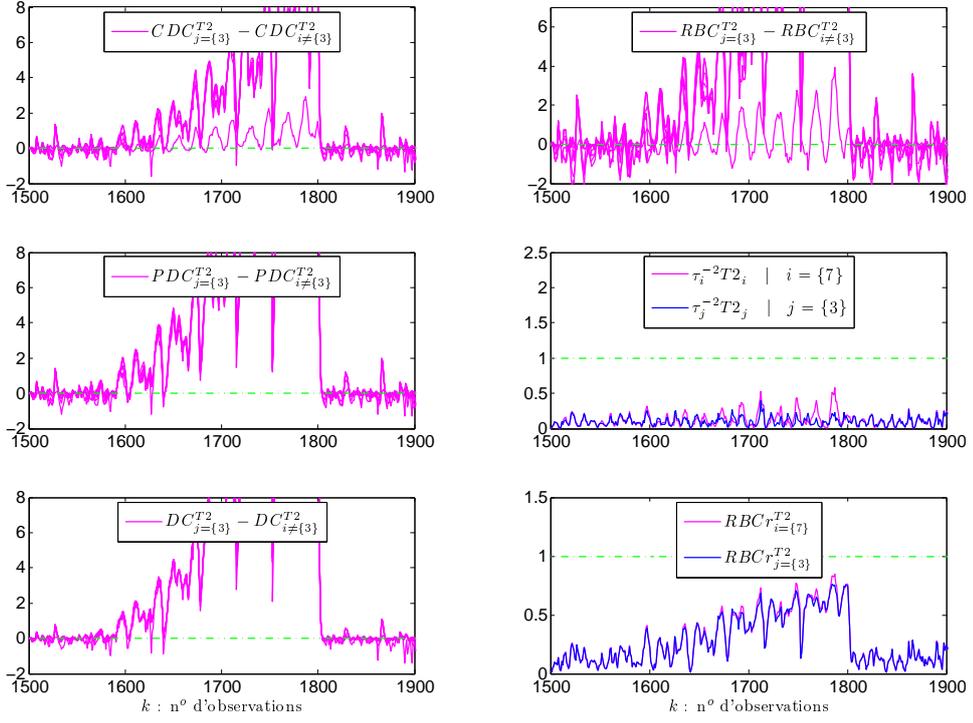


FIGURE 4.6 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $T_2$

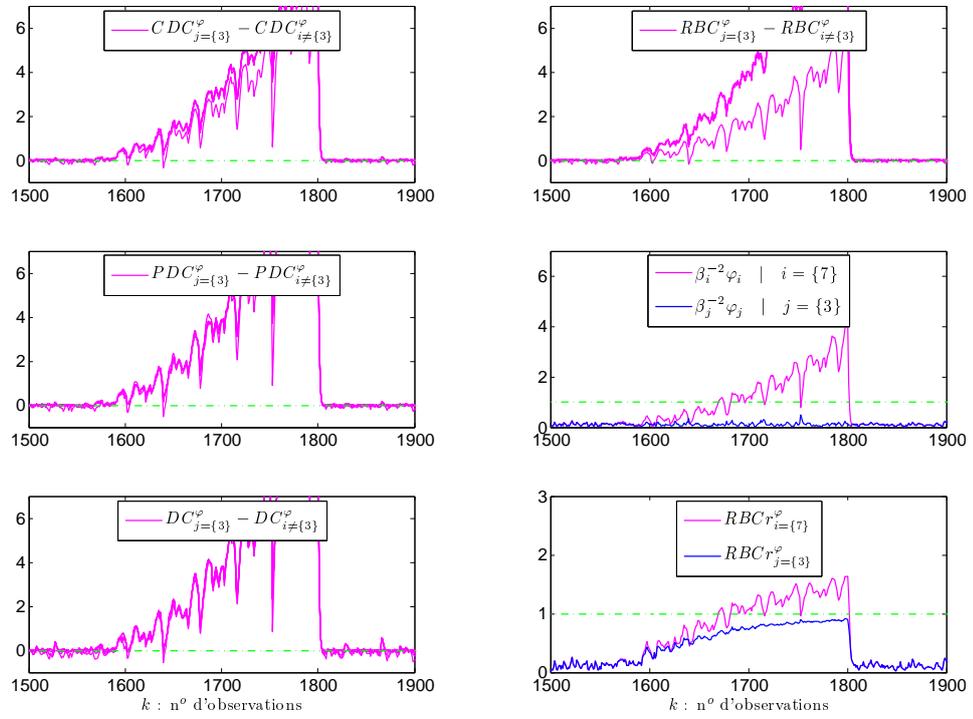


FIGURE 4.7 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $\varphi$

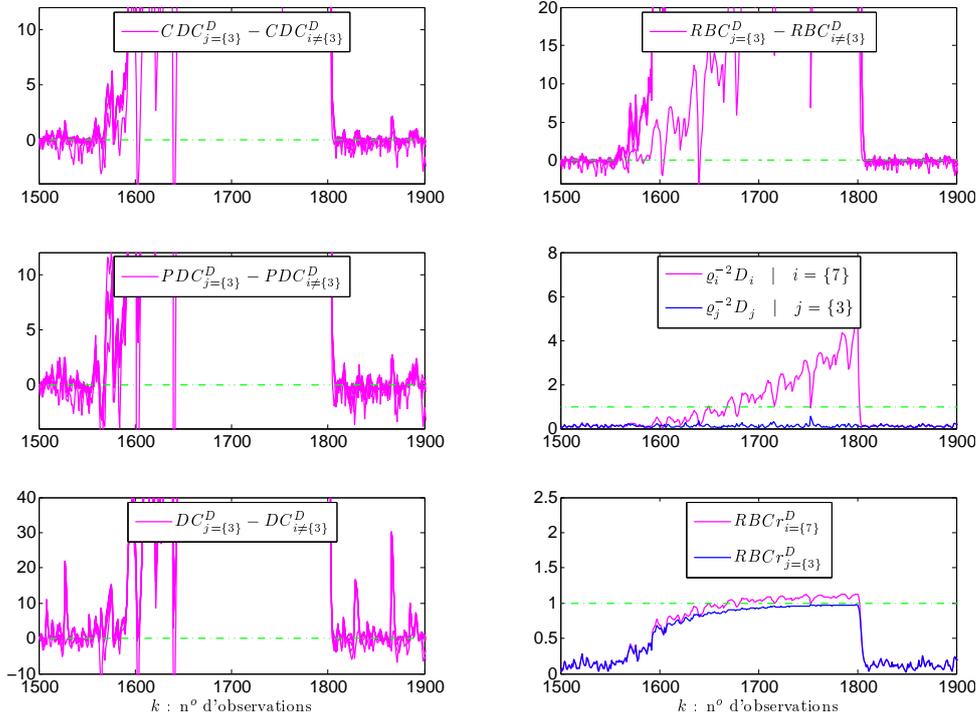


FIGURE 4.8 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{3\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $D$

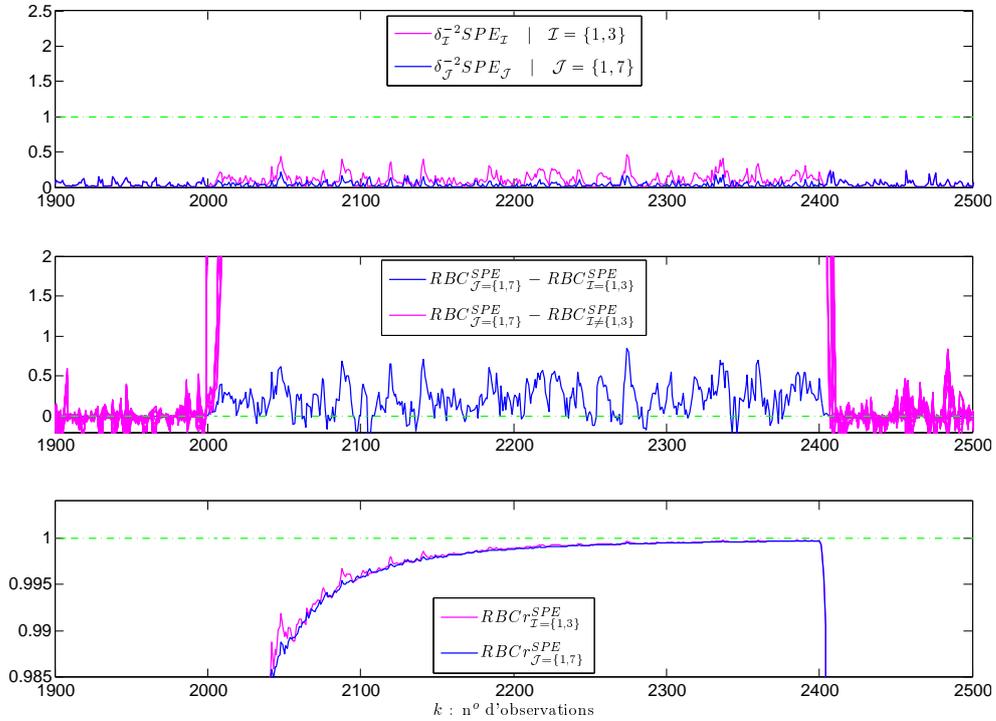


FIGURE 4.9 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SPE$

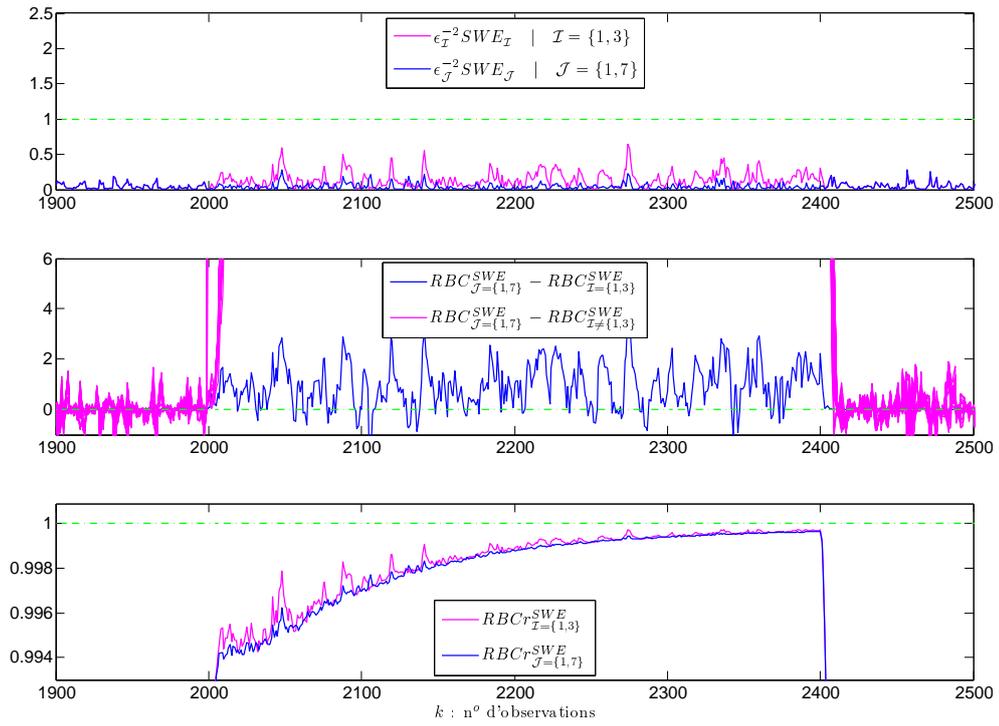


FIGURE 4.10 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SWE$

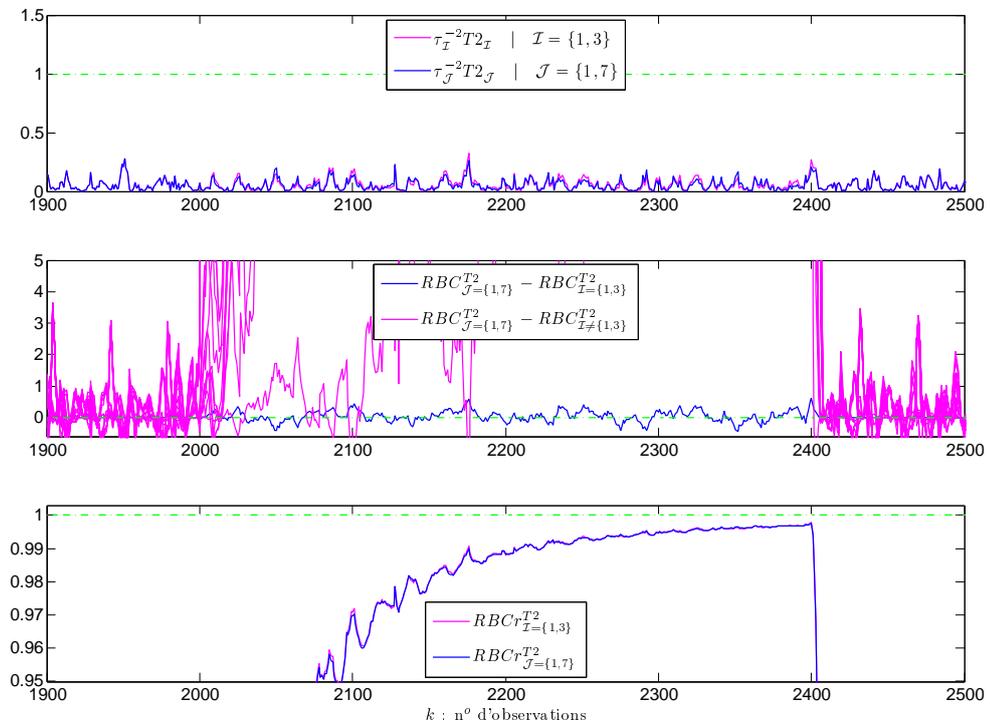


FIGURE 4.11 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $T2$

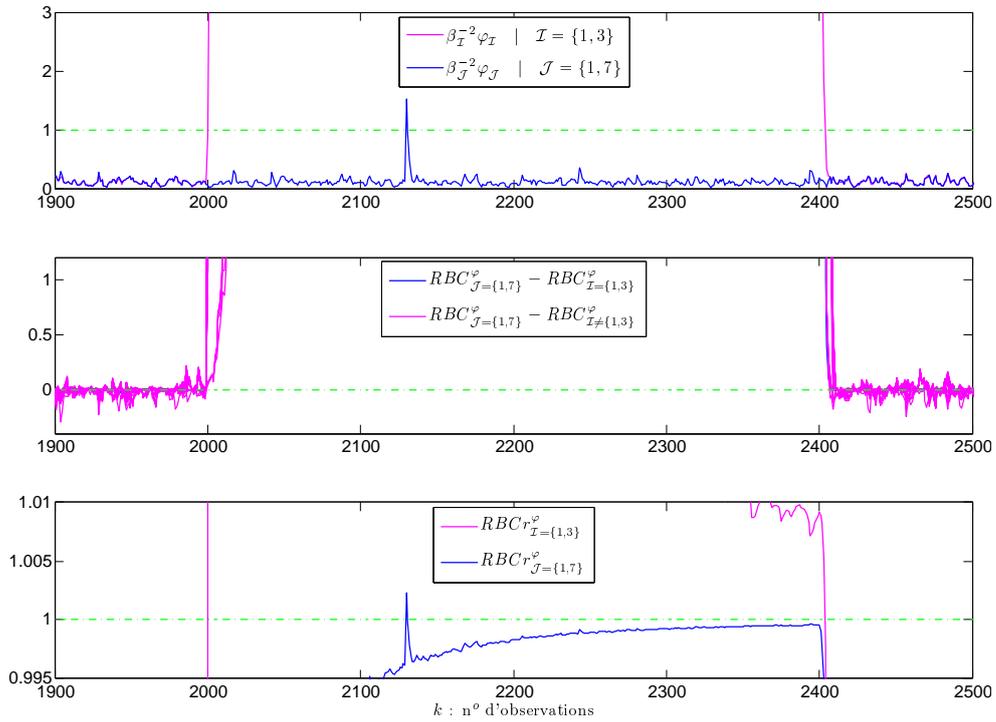


FIGURE 4.12 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $\varphi$

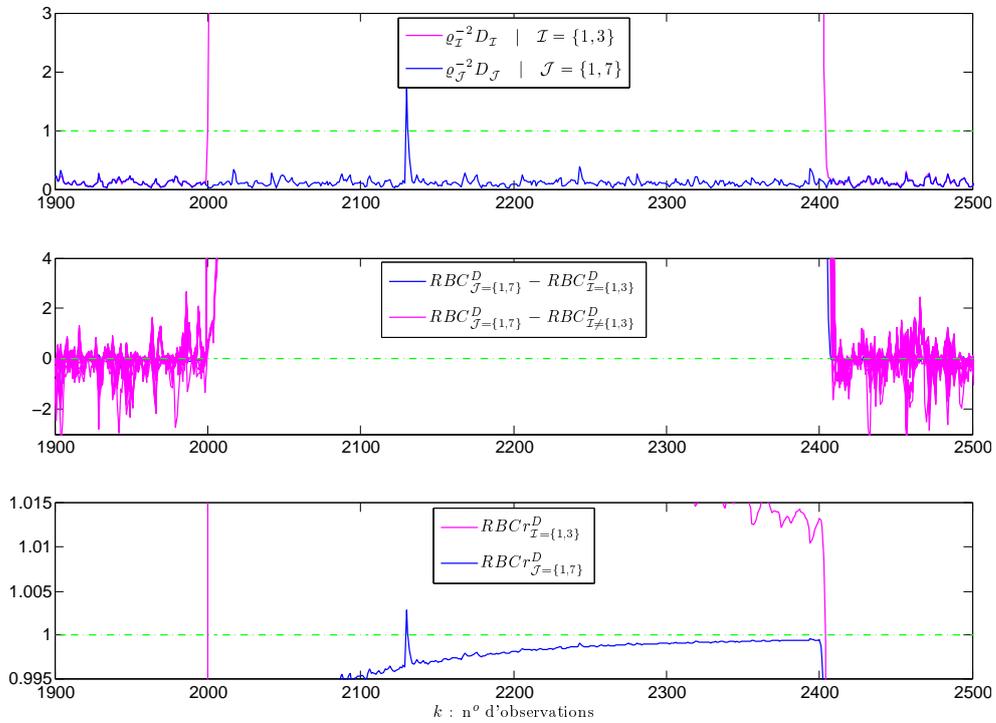


FIGURE 4.13 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $D$

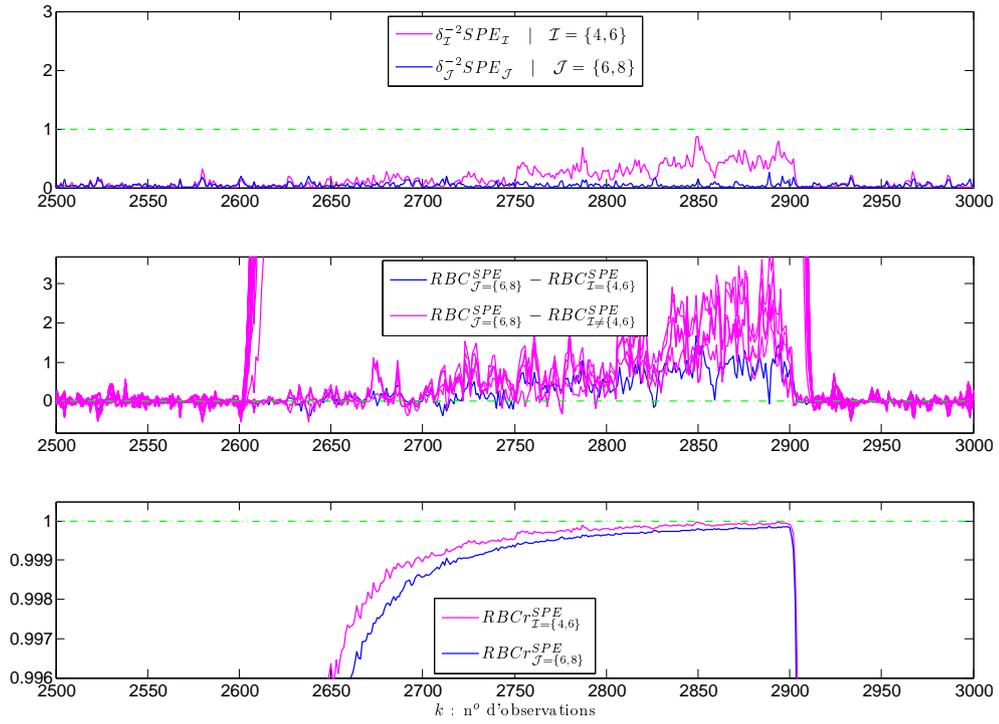


FIGURE 4.14 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SPE$

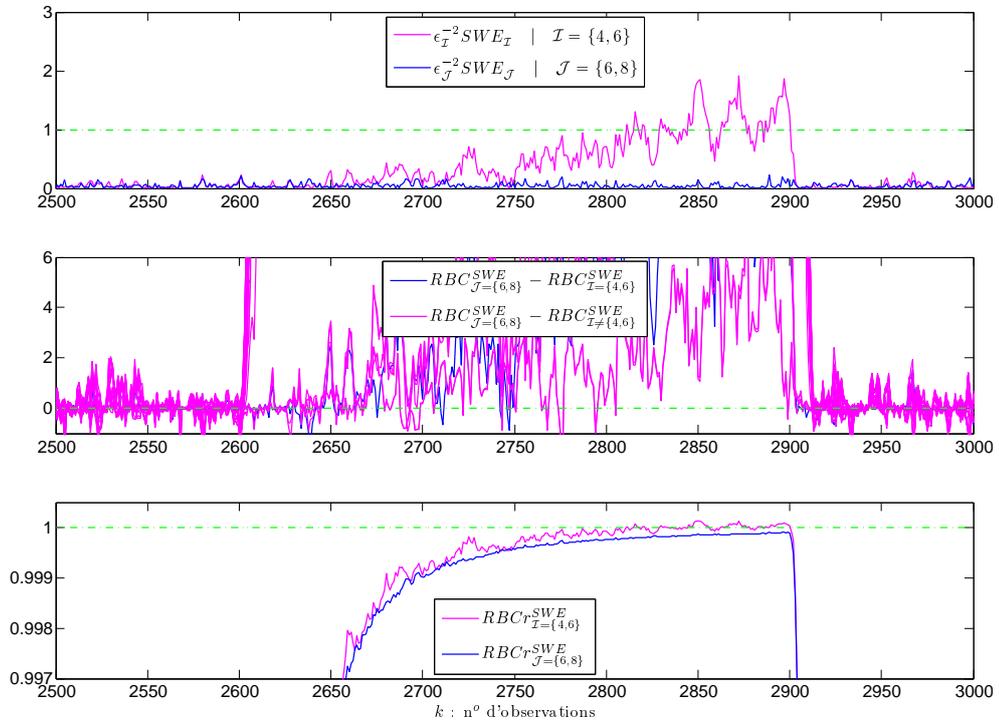


FIGURE 4.15 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $SWE$

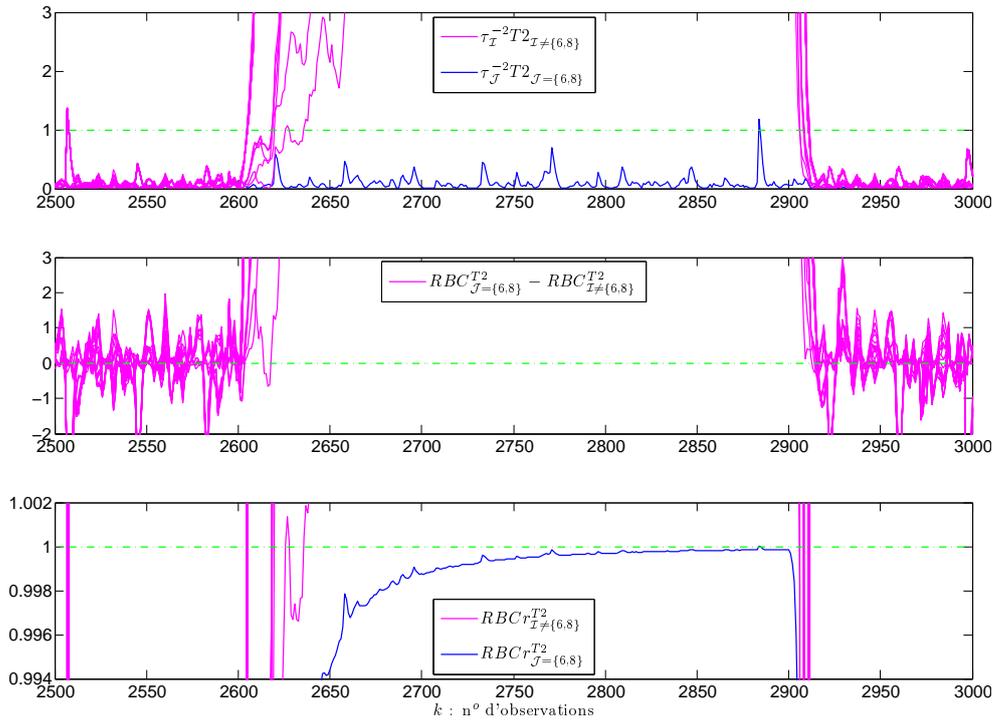


FIGURE 4.16 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $T_2$

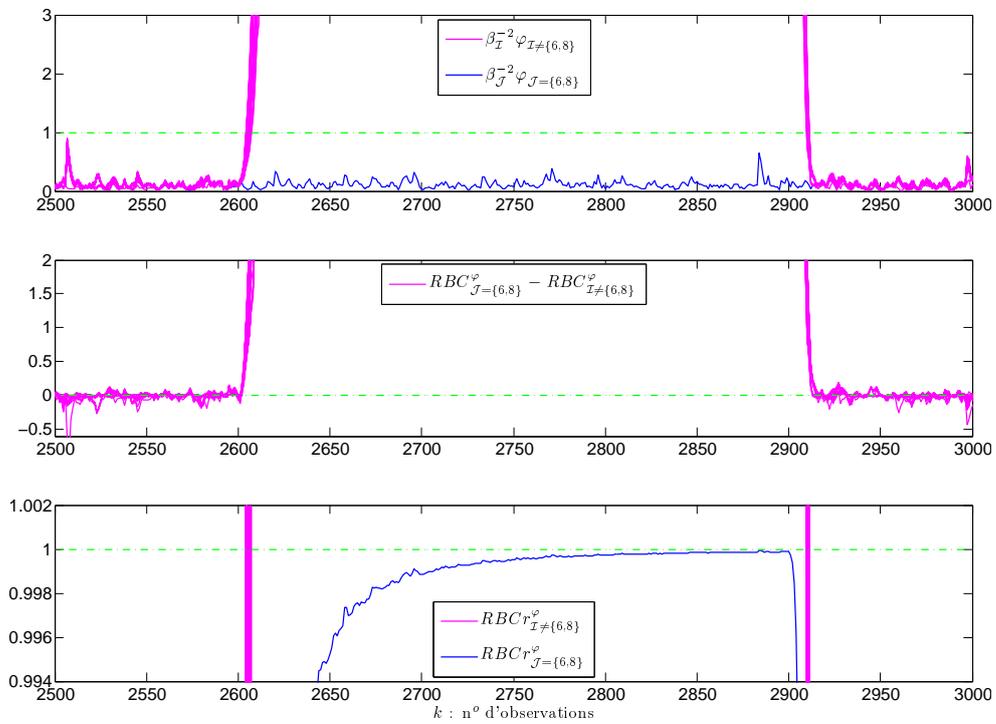


FIGURE 4.17 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $\varphi$

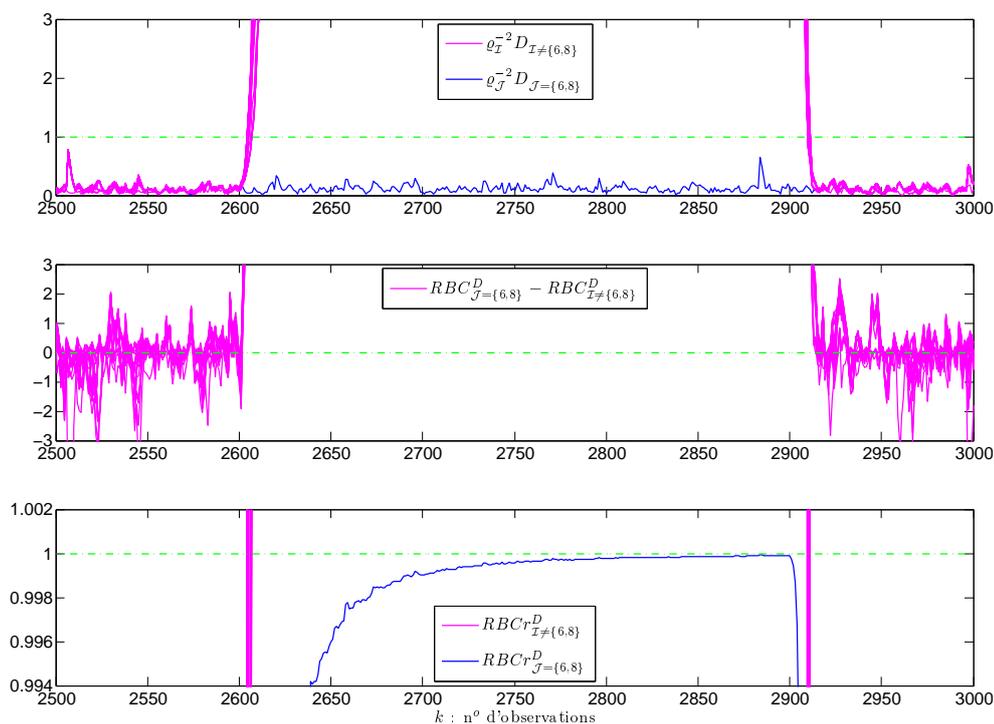


FIGURE 4.18 – Diagnostic du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  par différentes méthodes basées sur l'indice  $D$

4.12, 4.13, nous constatons que cette méthode a assuré une plus grande contribution pour l'ensemble des variable  $\{1, 7\}$ , ce qui signifie que le défaut  $\mathcal{F}_{\{1,7\}}$  est correctement identifié par la  $RBC$  en utilisant les indices  $\varphi$  et  $D$ .

D'après le tableau 4.2 ainsi que les figures 4.16, 4.17 et 4.18, le défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  qui a été introduit aux niveaux des variables  $x_6$  et  $x_8$  a été correctement localisé par les trois approches en utilisant les indices  $T^2$  de Hotelling,  $\varphi$  et  $D$ . Par ailleurs, l'investigation de ce défaut avec l'approche de reconstruction et la  $RBCr$  en s'appuyant sur les indices  $SPE$  et  $SWE$  a abouti à l'identification de sept ensembles de variables en défaut (voir tableau 4.2). Les figures 4.14 et 4.15 montrent que l'ensemble  $\{6, 8\}$  composé des variables réellement en défaut ainsi qu'à titre d'exemple l'ensemble  $\{4, 6\}$  disposent des courbes qui sont au dessous de l'unité en particulier avec l'indice  $SPE$ . En se référant à l'équation (4.120), l'approche de contribution multidimensionnelle ( $RBC$ ) utilisant les indices  $SPE$  et  $SWE$  a assuré des valeurs positives exceptionnellement durant les dernières observations du défaut (figures 4.14 et 4.15). D'après l'analyse de diagnosticabilité, l'amplitude du défaut  $\mathcal{F}_{\{6,8\}}$  durant ces quelques dernières observations est importante permettant ainsi à la  $RBC$  de garantir un diagnostic correct.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu le concept d'isolabilité de défauts par l'approche de reconstruction à tout indice de détection ayant une forme quadratique. Une telle généralisation nous a permis d'élaborer une analyse théorique d'isolabilité de défauts par

reconstruction de l'indice combiné versus celles des indices  $SPE$  et  $T2$  de Hotelling. Cette analyse a mis en avant l'avantage que peut jouer la distance combinée dans l'isolation des défauts affectant plus particulièrement des variables colinéaires. Malgré qu'une telle distance combine les indices  $SPE$  et  $T2$  de Hotelling, les propriétés qui peuvent caractériser l'un comme l'autre de ces deux indices ne font pas nécessairement partie de celles de l'indice combiné. En effet, il peut y exister des défauts qui ne sont garantis isolables ni par l'indice  $SPE$  ni par celui du  $T2$ , mais ils peuvent être garantis isolables par la distance combinée.

Les contributions sont parmi les approches les plus classiquement utilisées pour un diagnostic de défauts plus particulièrement de type simple. Dans ce cadre, nous avons proposé une nouvelle forme de contribution basée sur la décomposition de l'indice  $SPE$  et qui fait partie des contributions de type  $PDC$ . En considérant des défauts simples ayant de grandes amplitudes, l'analyse de diagnosticabilité basée sur les approches des contributions montre que seule la contribution de type  $CDC$  ne peut pas garantir un diagnostic correct.

Puisque les défauts simples représentent un cas particulier, nous avons étendu la méthode  $RBC$  au cas multidimensionnel en montrant que la nouvelle forme garantit un diagnostic correct de défauts multiples de grandes amplitudes. Néanmoins, les défauts peuvent être réellement beaucoup plus complexes (faibles amplitudes, colinéarités entre des variables, etc.). Dans ce cas, un diagnostic basé sur l'évaluation de l'ampleur des contributions aboutit sans doute à des conclusions erronées. Ainsi, les méthodes qui sembleraient plus avantageuses représentent celles qui s'appuient sur des seuils de contrôle pour conclure une décision comme l'approche de reconstruction des indices de détection.

Afin d'exploiter la méthode  $RBC$  pour un diagnostic de défauts complexes, nous avons proposé une nouvelle approche appelée  $RBCr$  dont le seuil de contrôle est égale à l'unité. La diagnosticabilité théorique basée sur une telle méthode montre qu'un défaut détectable est garanti identifiable. Cependant, il est garanti isolable si son amplitude vérifie la même condition suffisante d'isolabilité établie pour la méthode de reconstruction des indices de détection.

En se basant sur un exemple simulé, toutes les approches présentées garantissent un diagnostic correct dans le cas des défauts de grandes amplitudes. En revanche, les défauts les plus complexes et qui sont détectables sont garantis uniquement identifiables par la méthode de reconstruction des indices ainsi que la  $RBCr$ . L'approche  $RBC$  ne peut pas garantir un diagnostic correct de ce type de défauts. Nous avons constaté également que ces défauts ont été plus particulièrement mieux isolables en utilisant l'indice combiné ainsi que celui de Mahalanobis. Dans ce cadre, on peut conclure que la méthode de reconstruction des indices de détection et la  $RBCr$  sont plus avantageuses que l'approche  $RBC$  afin d'aboutir à un diagnostic de défauts mieux décisif. Toutefois, la prise en considération des résultats de toutes les approches peut conduire à distinguer les défauts.