Résultats obtenus avec la nouvelle méthode multi-échelle

Sommaire

Nous avons construit, au chapitre 8, une nouvelle méthode multi-échelle pour résoudre le problème de transport (7.6). Nous allons maintenant observer les résultats numériques obtenus avec cette méthode. Dans un premier temps, nous présentons les prototypes dans lesquels la méthode a été implémentée. Nous détaillons ensuite les méthodes numériques employées pour résoudre les problèmes non discrétisés dans le chapitre 8. Puis, nous montrons quelques résultats obtenus avec ces implémentations.

9.1 Présentation des deux implémentations

9.1.1 Implémentation sur FreeFem++

FreeFem++ [HPLHO98] est un logiciel permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant des éléments finis. Ce logiciel permet de mettre en place assez facilement la méthode multi-échelle présentée au chapitre 8. Les différentes équations aux dérivées partielles peuvent en effet être résolus par une méthode aux éléments finis de Lagrange en utilisant une fonction déjà programmée. Ce logiciel permet également de calculer numériquement des intégrales de fonctions sur maillage en utilisant des points de quadrature par maille. Cela permet, une fois les fonctions de base calculées, de construire assez facilement le système linéaire à résoudre à chaque pas de temps.

9.1.2 Implémentation sur le prototype *Arcane*

Nous avons également pu implémenter notre nouvelle méthode aux éléments finis multi-échelles sur le prototype présenté au chapitre 6. Cette méthode résout une équation différente de celles traitées dans les

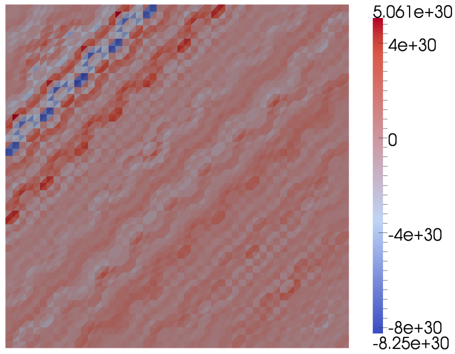


FIGURE 9.1 – Solution du problème de cellule (8.5) obtenue sur le programme FreeFem++ avec des éléments finis $\mathbb{P}_1$ Lagrange

chapitres 2, 4 et 5. Elle utilise donc un *module* différent appelé `Tracer`. Cette implémentation a été plus compliquée car les éléments finis de type Lagrange ont dû être implémentés spécifiquement pour cette méthode. De plus, la notion de degré de liberté n'existe pas encore dans la plate-forme Arcane, l'implémentation est donc ici réduite à celle faite dans le cas où l'espace aux éléments finis initial (V_H dans le chapitre 8) est un espace aux éléments finis de Lagrange d'ordre 1. En effet, dans ce cas, les degrés de liberté correspondent aux nœuds du maillage ce qui simplifie la construction des systèmes linéaires.

9.2 Difficultés dans l'implémentation de la méthode

9.2.1 Résolution des problèmes de cellule

Lors de la définition de la méthode multi-échelle au chapitre 8, nous avons supposé que les différents problèmes de cellules (8.5) étaient résolus de manière exacte. Nous rappelons que ces problèmes consiste, pour une maille $K \in \mathcal{K}_H$ et une direction i, à trouver $\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\cdot\nabla\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x)\nabla\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}\right) & = & \frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b^{*,K}\cdot e_i \quad \text{dans } K,\\ \widetilde{w}_i^{\varepsilon,K} & = & x_i \quad \text{sur } \partial K,\end{array}\right.$$

où

$$b^{*,K} = \frac{\int_K b^\varepsilon(x)dx}{\int_K \rho^\varepsilon(x)dx}.$$

En pratique, ces problèmes doivent être résolus numériquement en utilisant un maillage fin local $\mathcal{K}_h^K$ de taille h petite par rapport à ε. Dans la suite, on note $w^{\varepsilon,K}$ les solutions numériques des problèmes de cellules (8.5). On définit, de plus, $w^{\varepsilon,H}$ la fonction telle que pour toute maille $K \in \mathcal{K}_H$,

$$w^{\varepsilon,H}{}_{|K} = w^{\varepsilon,K}.$$

Résolution sur FreeFem++

La solution du problème de cellule (8.5) n'est pas facilement calculable avec FreeFem++. En effet, le terme d'advection $\frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\cdot\nabla\widetilde{w}_i^{\varepsilon,K}$ peut créer des instabilités numériques lors d'une résolution par éléments finis classiques. La figure 9.1 montre la solution obtenue après résolution de l'équation (8.5) sur la cellule unité avec des éléments finis $\mathbb{P}_1$. Cette solution est clairement instable. Pour réduire ces instabilités, nous avons introduit une dérivée en temps et considéré le problème de cellule suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t w_i^{t,\varepsilon,K} + \frac{1}{\varepsilon}b^\varepsilon(x)\cdot\nabla w_i^{t,\varepsilon,K} - \operatorname{div}\left(A^\varepsilon(x)\nabla w_i^{t,\varepsilon,K}\right) & = & \frac{1}{\varepsilon}\rho^\varepsilon(x)b_K^*\cdot e_i \quad \text{dans } K,\\ w_i^{t,\varepsilon,K} & = & x_i \quad \text{sur } \partial K.\end{array}\right. \tag{9.1}$$

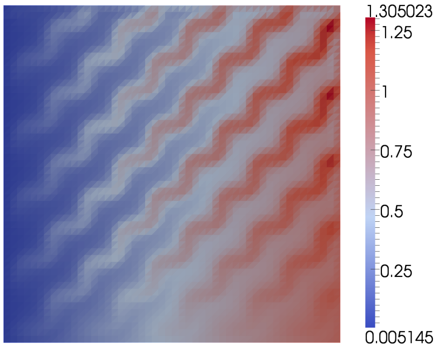


FIGURE 9.2 – Solution du problème de cellule (8.5) obtenue avec notre méthode itérative

Ce problème instationnaire est résolu avec une méthode Galerkin caractéristique (opérateur `convect` dans FreeFem++) qui est inconditonnellement stable. Ces résolutions sont alors faites en considérant un pas de temps fixe δt_0 jusqu'à ce que la solution devienne stationnaire, c'est-à-dire jusqu'à une date t_0 pour laquelle

$$\frac{\left\| w_i^{t_0,\varepsilon,K} - w_i^{t_0+\delta t_0,\varepsilon,K} \right\|_{L^2(\Omega)}}{\delta t_0 \left\| w_i^{t_0,\varepsilon,K} \right\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon_0.$$

La solution $w_i^{t_0,\varepsilon,K}$ est alors la fonction que l'on choisit pour approcher la solution du problème de cellule (8.5). La figure 9.2 montre une solution obtenue avec cet algorithme. Les oscillations ont bien disparu. Néanmoins, le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution stationnaire est élevé. En effet, dans le cas considéré ici, si nous choisissons une tolérance $\varepsilon_0 = 0{,}01$ sur chaque maille grossière, la solution stationnaire est atteinte après 2 000 itérations.

Résolution avec le prototype Arcane

En fait, la méthode la plus simple pour résoudre le problème de cellule (8.5) est l'utilisation d'une méthode volumes finis avec un décentrement dans le sens de l'advection. Cette méthode numérique permet, sans itération, d'obtenir une solution stable. L'utilisation de méthodes volumes finis est assez naturel sur Arcane. Cette méthode a donc pu être facilement implémentée dans ce prototype.

9.2.2 Discrétisation en temps

La méthode définie au chapitre 8 suppose également que le problème (8.7) est résolu de manière exacte en temps. Nous rappelons que ce problème consiste à trouver $u_{\varepsilon,H}$ dans $\mathcal{C}^\infty\left((0,T), V_{\varepsilon,H}\right)$ solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}, \quad \displaystyle\int_\Omega \left(\rho^\varepsilon \partial_t u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + \frac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon \cdot \nabla u_{\varepsilon,H} v_{\varepsilon,H} + A^\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,H} \cdot \nabla v_{\varepsilon,H} \right) dx & = & 0 \\ u_{\varepsilon,H}(0,x) & = & \pi_{\varepsilon,H} u^0(x). \end{array} \right.$$

Dans nos implémentations, la discrétisation en temps a été faite en utilisant la méthode des caractéristiques (voir annexe D). On considère un pas de temps δt et on définit $t^n = n\delta t$. On construit alors une fonction χ telle que, pour chaque temps t^{n+1} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{u}_\varepsilon \left(t, w^{\varepsilon,H} \circ \chi(t) \right) \right) \left(t^{n+1} \right) = \tilde{D}_{t,H} \left(\tilde{u}_\varepsilon \left(t, w^{\varepsilon,H}(x) \right) \right) \left(t^{n+1}, x \right),$$

où $\tilde{D}_{t,H}$ est l'opérateur de dérivée convective vérifiant

$$\tilde{D}_{t,H} = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b_H^*(x) \cdot \nabla$$

et b_H^* est telle que, pour toute maille $K \in \mathcal{K}_K$

$$b^*_{H\,|K} = b^{*,K}.$$

La fonction χ est alors la solution de l'équation différentielle en temps :

$$\partial_t \chi(t) = b_H^* \left(\chi(t)\right), \chi\left(t^{n+1}\right) = x.$$

Dans ce cas, on introduit

$$X^n(x) = \chi\left(t^{n+1} - \delta t\right).$$

Pour chaque temps t^n, on arrive au problème suivant, trouver $u_{\varepsilon,H}^{n+1} \in V_{\varepsilon,H}$ telle que $\forall v_{\varepsilon,H} \in V_{\varepsilon,H}$:

$$\int_\Omega \Bigg(\rho^\varepsilon(x) \frac{u_{\varepsilon,H}^{n+1} - u_{\varepsilon,H}^n \circ X^n(x)}{\delta t} v_{\varepsilon,H}(x) + A^\varepsilon(x) \nabla u_{\varepsilon,H}^{n+1}(x) \cdot \nabla v_{\varepsilon,H}(x) \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)\right) \cdot \nabla u_{\varepsilon,H}^{n+1}(x) v_{\varepsilon,H}(x) \Bigg) dx = 0. \quad (9.2)$$

Cette méthode est inconditionnellement stable, ce qui signifie qu'elle est stable quelle que soit la valeur du pas de temps δt. La limitation du pas de temps vient du fait que $\chi\left(t^{n+1} - \delta t\right)$ doit rester à l'intérieur du domaine considéré. En théorie, le fait de prendre des conditions aux bords périodiques revient à considérer un domaine infini. Avec le logiciel *FreeFem++* le calcul du terme $u^n \circ w^{\varepsilon,H} \circ X^n(x)$ peut être effectué. La fonction utilisée dans ce logiciel pour calculer ce terme n'intègre pas cette particularité du cas périodique. Ainsi, il est pour l'instant nécessaire d'appliquer une condition de type CFL pour que $\chi\left(t^{n+1} - \delta t\right)$ reste dans le domaine.

Cependant, la fonction permettant de calculer ce terme a également été implémentée dans notre prototype Arcane. Cette fonction est directement inspirée de celle existante dans FreeFem++ mais nous avons pu rajouter un cas particulier pour les conditions aux bords périodiques. Cela permet d'appliquer cette méthode avec des pas de temps quelconques.

9.2.3 Construction du système grossier

Nous avons donc vu comment ce problème pouvait être discrétisé en temps. Nous allons maintenant voir comment le problème totalement discrétisé (9.2) est résolu en pratique. Par définition de $V_{\varepsilon,H}$, les fonctions $u_{\varepsilon,H}^n \in V_{\varepsilon,H}$ se décomposent sur les $\Phi_i^{\varepsilon,H}$:

$$u_{\varepsilon,H}^n(x) = \sum_{i=1}^{D_H} u_i^n \Phi_i^{\varepsilon,H}(x).$$

On utilise ensuite comme fonctions tests les différentes fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}(x)$. On a donc à résoudre pour tout $i = 1, \ldots, D_H$:

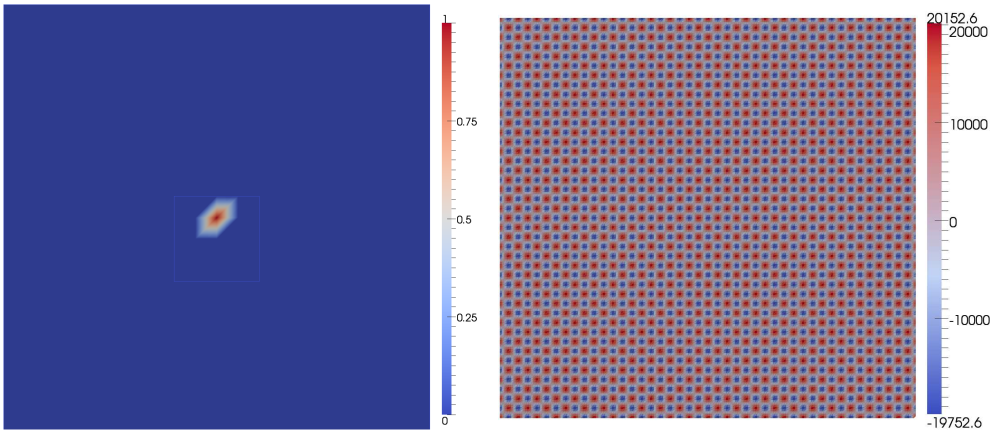
$$\sum_{j=1}^{D_H} \int_\Omega \Bigg(\frac{u_j^{n+1}}{\delta t} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) - \frac{u_j^n}{\delta t} \rho^\varepsilon(x) \Phi_j^{\varepsilon,H} \circ X^n(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \\ + u_j^{n+1} A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \\ + u_j^{n+1} \frac{1}{\varepsilon}\left(b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x)\right) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \Bigg) dx = 0.$$

Les fonctions $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ vérifient

$$\Phi_i^{\varepsilon,H} = \Phi_i^{\varepsilon,H} \circ w^{\varepsilon,H}.$$

Nous avons vu au chapitre 8, ou plus particulièrement dans l'inégalité (8.29) que

$$\left\| \tilde{w}^{\varepsilon,H} - x \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\varepsilon.$$



(a) Condition initiale (b) b_x^ε

FIGURE 9.3 – À gauche, la condition initiale. À droite, le champ de vitesse b_x^ε imposé dans la direction x

On en déduit que les termes utilisant les fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ peuvent être remplacées par Φ_i si leur gradient n'apparaît pas. On obtient ainsi, pour tout $i = 1, \ldots, D_H$:

$$\sum_{j=1}^{D_H} u_j^{n+1} \Bigg(\int_\Omega \rho^\varepsilon(x) \Bigg(\Phi_i(x)\Phi_j(x) + \delta t A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \\ + \frac{\delta t}{\varepsilon} \left(b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x) \right) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \Bigg) dx \Bigg) \\ = \sum_{j=1}^{D_H} u_j^n \int_\Omega \rho^\varepsilon(x) \Phi_j \circ X^n(x) \Phi_i(x) dx.$$

Cela s'écrit matriciellement

$$RU^{n+1} = F^n, \tag{9.3}$$

avec

$$\begin{array}{llcl} U^{n+1} \in \mathbb{R}^{D_H}, & U_i^{n+1} & = & u_i^{n+1}, \\ R \in \mathbb{R}^{D_H \times D_H}, & R_{i,j} & = & \displaystyle\int_\Omega \Big(\rho^\varepsilon(x)\Phi_i(x)\Phi_j(x) + \delta t A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \\ & & & \quad + \frac{\delta t}{\varepsilon} \left(b^\varepsilon(x) - \rho^\varepsilon(x) b^*(x) \right) \cdot \nabla \Phi_j^{\varepsilon,H}(x) \Phi_i^{\varepsilon,H}(x) \Big) dx, \\ F^n \in \mathbb{R}^{D_H}, & F_i^n & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{D_H} u_j^n \int_\Omega \rho^\varepsilon(x) \Phi_j \circ X^n(x) \Phi_i(x) dx. \end{array}$$

9.3 Application de la méthode

9.3.1 Cas d'application

On considère le domaine $\Omega = (0,1)^2$. On choisit une condition initiale ayant pour support un sous-domaine de Ω (voir figure 9.3(a)) et valant 1 au nœud du maillage grossier situé le plus au centre du domaine et 0 sur les autres nœuds. On impose le champ de vitesse :

$$b^\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} -\delta \sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_x^0 \\ \delta \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\varepsilon}\right) + b_y^0 \end{pmatrix}.$$

Sa composante horizontale est représentée sur la figure 9.3(b). Ce champ de vitesse est à divergence nulle et de moyenne $b^0 = \begin{pmatrix} b_x^0 \\ b_y^0 \end{pmatrix}$.
On considère un coefficient de diffusion $A = 1$.
Les conditions aux bords du domaine sont périodiques. Cela nous permet d'appliquer nos résultats vérifiés sur l'espace tout entier en ne considérant qu'un domaine fini.
Dans la suite, nous utilisons également les valeurs suivantes :
- $\varepsilon = \frac{1}{200}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 1$.

Le maillage grossier associé à ce problème est composé de 800 triangles de diamètre

$$H = \frac{1}{20} = 10\varepsilon.$$

Chaque maille grossière contient 5 000 triangles de diamètre

$$h = \frac{1}{1000} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Pour appliquer notre méthode, il n'est pas nécessaire de construire complètement le maillage fin. Si nous l'avions fait, celui-ci aurait été composé de 4 000 000 de triangles.

9.3.2 Visualisation de la solution en utilisant *FreeFem++*

La matrice R et le second membre F^n dans l'équation (9.3) sont progressivement construits après chaque résolution du problème de cellule (8.5). Ce système est défini sur le maillage grossier. Une fois la résolution effectuée, la solution multi-échelle s'écrit

$$u_{\varepsilon,H}^n(x) = \sum_{i=1}^{D_H} u_i^n \Phi_i^{\varepsilon,H}(x).$$

Rappelons que les fonctions de base $\Phi_i^{\varepsilon,H}$ sont calculées sur des maillages fins locaux et que le maillage fin n'est jamais complètement construit. Ainsi, pour visualiser la reconstruction fine de la solution, nous sélectionnons une zone de l'espace et n'appliquons la reconstruction que dans cette zone. Ailleurs, nous considérons que $\Phi_i^{\varepsilon,H}(x) = \Phi_i^H(x)$. La figure 9.4 montre un exemple de fonction de base grossière et multi-échelle. Un exemple de reconstruction est donné sur la figure 9.6(b).

Ici, comme le cas est périodique, la solution multi-échelle peut être directement comparée à la solution homogénéisée. Nous avons donc calculé le vecteur w sur la cellule unité et la solution u^n du problème homogénéisé (7.11). Puis nous avons posé

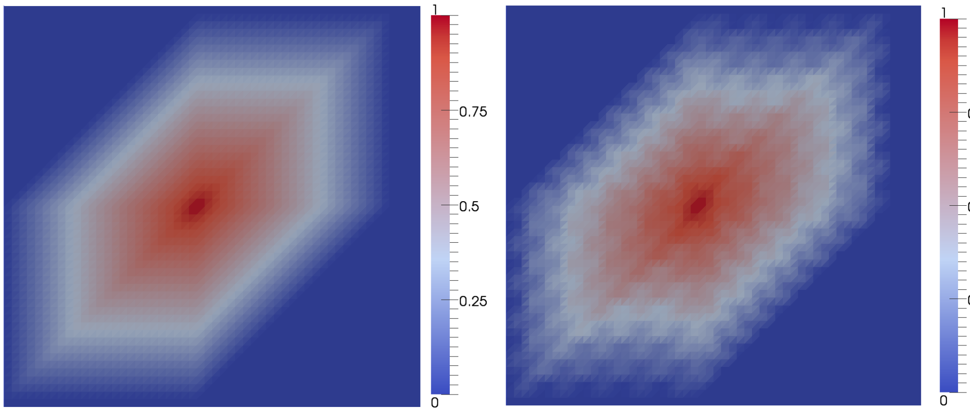
$$\tilde{u}_\varepsilon^n = u^n \left(x - \frac{b^* t^n}{\varepsilon} \right).$$

D'après les résultats d'homogénéisation rappelés au paragraphe 7.7, cette fonction est une première approximation de u_ε. Cette solution ainsi que la solution multi-échelle non reconstruite sont représentées sur les figures 9.5(b) et 9.5(c) à un instant donné.

Comme pour la solution multi-échelle, une reconstruction de la solution homogénéisée est également possible sur le maillage fin. Nous utilisons pour cela l'approximation (8.4) et calculons localement la fonction :

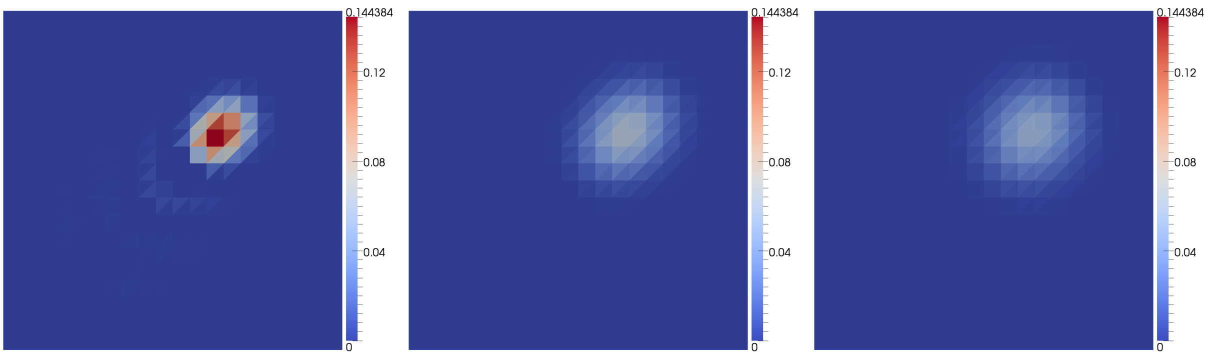
$$\tilde{u}_{\varepsilon,1}^n = u^n \left(x - \frac{b^* t^n}{\varepsilon} + \varepsilon w \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right).$$

Cette seconde fonction est une meilleure approximation de u_ε (voir paragraphe 7.8). Les deux fonctions reconstruites, multi-échelle et homogénéisée, sont représentées sur les figures 9.6(b) et 9.6(a) à un instant



(a) Φ_i^H (b) $\Phi_i^{\varepsilon,H}$

FIGURE 9.4 – Une fonction de base définie sur le maillage grossier (Φ_i^H) et la fonction de base multi-échelle associée ($\Phi_i^{\varepsilon,H}$)



(a) Solution grossière (b) Solution multi-échelle (c) Solution homogénéisée

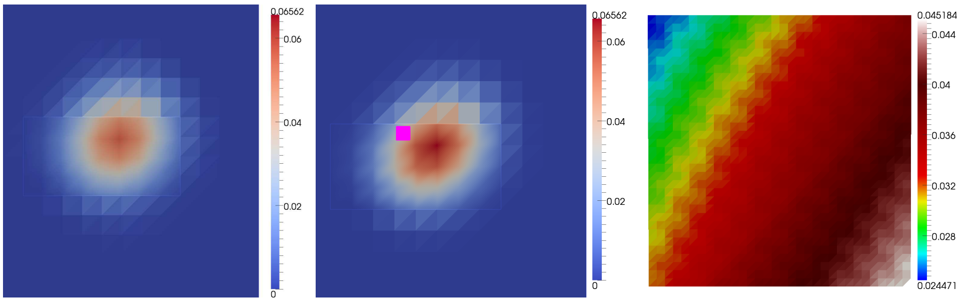
FIGURE 9.5 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue par homogénéisation périodique

donné.

En fait, la solution multi-échelle s'avère être plus précise même à l'échelle grossière. En effet, si nous simulons à l'échelle grossière le transport de la condition initiale par le champ de vitesse b^* et un coefficient de diffusion égal $A = 1$, nous obtenons la solution représentée sur la figure 9.5(a). Nous remarquons que les valeurs obtenues avec cette méthode sont plus élevées que celles données par les solutions homogénéisée et multi-échelle. En fait la vitesse b^ε possède une composante de moyenne nulle qui crée une dispersion supplémentaire à l'intérieur du domaine. Numériquement, ce phénomène est inclus dans la matrice de diffusion homogénéisée A^* définie par (7.12). Sur cet exemple, cette matrice possède, sur sa diagonale, des coefficients quatre fois plus élevés que le coefficient de diffusion A. La méthode multi-échelle permet donc bien de reproduire cette diffusion additionnelle. Cette diffusion supplémentaire est souvent appelée *dispersion de Taylor* [AA95].

9.3.3 Résultats obtenus en utilisant la plate-forme *Arcane*

Nous nous intéressons maintenant à l'implémentation qui a été faite de cette nouvelle méthode multi-échelle sur la plate-forme de développement *Arcane*. Cette implémentation a été plus compliquée que celle sur *FreeFem++*. En effet, comme nous l'avons précisé au paragraphe 9.1.2, nous avons d'abord dû implémenter la méthode des éléments finis de Lagrange. Pour appliquer la méthode des caractéristiques, nous avons



(a) Solution reconstruite par homogénéisation (b) Solution multi-échelle (c) Zoom de la solution multi-échelle

FIGURE 9.6 – Comparaison entre la solution raffinée obtenue en utilisant la méthode multi-échelle et la solution reconstruite par homogénéisation périodique. La figure de droite est un zoom de la solution multi-échelle. La partie extraite est indiquée avec une pastille rose sur la seconde figure

également dû rajouter une fonction permettant de calculer la valeur d'une fonction de cet espace éléments finis lorsqu'on la compose avec une autre fonction.

Cependant, la grande différence entre les deux implémentations est la gestion des maillages. Nous avons vu, au paragraphe précédent, que le prototype *FreeFem++* que nous avons programmé ne construit jamais le maillage fin complet : on se contente de raffiner les mailles grossières pour résoudre les problèmes de cellule et calculer les termes intervenant dans le système linéaire grossier. Le gestionnaire de maillage d'*Arcane* ne permet pas d'utiliser la même méthode. Ainsi, dans notre cas, le maillage fin complet doit être construit.

De plus, la gestion de conditions aux bords périodiques n'est pas gérée nativement par *Arcane*. L'ajout de ce type de conditions aux bords n'est pas compliqué mais, cela crée une dépendance entre la solution à un bord et la solution dans le bord symétrique. Ainsi, lors d'une implémentation en parallèle, les mailles *fantômes* et les mailles *partagées* d'un domaine devraient être définies en prenant en compte cette dépendance. Cela n'est pas possible en utilisant les partitionneurs actuellement disponibles dans la plate-forme *Arcane*. Tous les tests effectués avec cette méthode ont donc eu lieu en séquentiel.

Par conséquent, les cas traités avec ce prototype sont composés de moins de mailles. Les propriétés physiques sont définies par les formules du cas présenté au paragraphe 9.3.1 mais avec les les valeurs suivantes :
- $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
- $\delta = 100$,
- $b_x^0 = b_y^0 = 100$.

Le tenseur de diffusion est $A = 0{,}001$. La condition initiale est sinusoïdale dans les deux directions (voir figure 9.7).

Nous considérons un maillage fin composé de 200 mailles fines dans chaque direction. Chaque maille fine est un carré de taille $\frac{1}{2000}$. Le domaine total est donc un carré de taille 0,1. Le maillage grossier est lui composé de 40 mailles dans chaque direction. Nous présentons sur la figure 9.8 les différentes solutions calculées. Le maillage fin étant composé de moins de mailles, nous avons, dans ce cas, pu faire la comparaison avec une solution fine. Sur ce cas, on constate que la méthode multi-échelle approche plus précisément la solution fine que la résolution sur un maillage grossier.

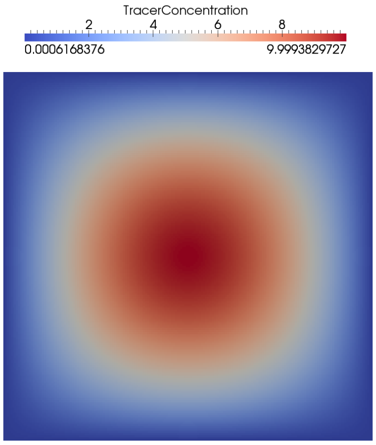
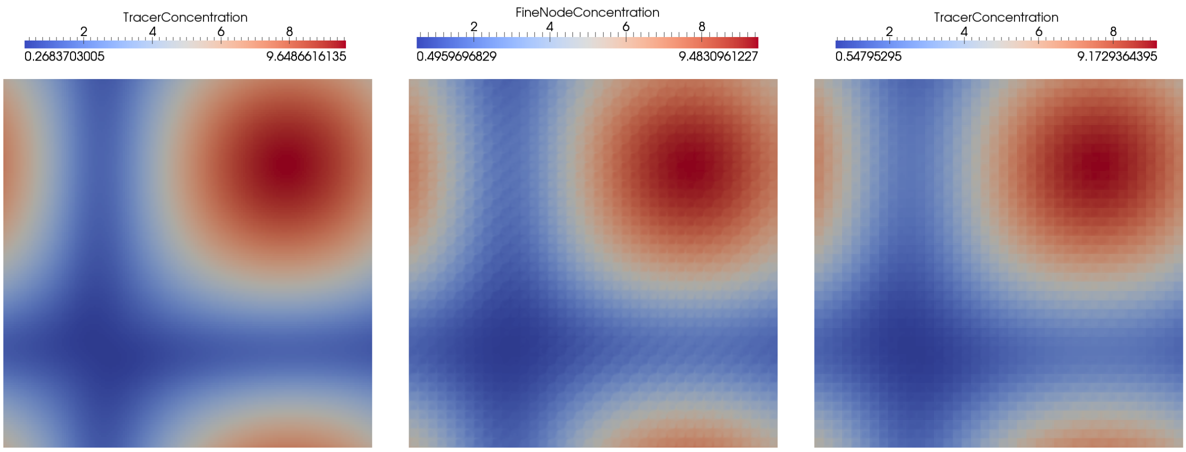


FIGURE 9.7 – Condition initiale du cas testé sur le prototype *Arcane*



(a) Solution grossière

(b) Solution multi-échelle

(c) Solution fine

FIGURE 9.8 – Comparaison entre la solution grossière obtenue en effectuant directement le calcul sur le maillage grossier, celle utilisant la méthode multi-échelle et celle obtenue en effectuant la simulation sur le maillage fin

Bibliographie

[AA95] J.-L. Auriault and P.M. Adler. Taylor dispersion in porous media : analysis by multiple scale expansions. *Advances in Water Resources*, 18(4) :217–226, 1995.

[AA99] G. Allaire and M. Amar. Boundary layer tails in periodic homogenization. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 4 :209–243, 1999.

[AADH06] G. Allaire, A. Arnold, P. Degond, and Th.Y. Hou. Quantum Transport : Modelling, Analysis and Asymptotics - Lectures given at the C.I.M.E. summer school held in Cetraro, Italy, September 11-16, 2006. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1946. Springer, 2006.

[AB05] G. Allaire and R. Brizzi. A multiscale finite element method for numerical homogenization. *Multiscale Model. Simul.*, 4(3) :790–812, 2005. ISSN 1540-3459.

[Abb11] Thomas Abballe. *Simulation multi-échelle et homogénéisation des matériaux cimentaires*. PhD thesis, École Polytechnique, 2011.

[ABBM98] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part I : Derivation of the methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1700–1716, 1998.

[Abd05] Assyr Abdulle. On a priori error analysis of fully discrete heterogeneous multiscale fem. *Multiscale Model. Simul.*, 4(2) :447–459, 2005.

[Abd13] Assyr Abdulle. Numerical homogenization methods. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics (to be published)*, 2013.

[ABMP10] G. Allaire, R. Brizzi, A. Mikelić, and A.L. Piatnitski. Two-scale expansion with drift approach to the Taylor dispersion for reactive transport through porous media. *Chemical Engineering Science*, 65(7) :2292–2300, 2010. ISSN 0009-2509.

[ADEO12] G. Allaire, S. Desroziers, G. Enchéry, and F. Ouaki. A multiscale finite element method for transport modeling. In *CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Vienna University of Technology, Austria, 2012. ISBN 978-3-9502481-9-7.

[AHE07] J.E. Aarnes, V.L. Hauge, and Y. Efendiev. Coarsening of three-dimensional structured and unstructured grids for subsurface flow. *Advances in Water Resources*, 30(11) :2177–2193, 2007.

[AKL08] J.E. Aarnes, S. Krogstad, and K.A. Lie. Multiscale mixed/mimetic methods on corner-point grids. *Comput. Geosci.*, 12(3) :297–315, 2008.

[AKP07] J.-B. Apoung Kamga and O. Pironneau. Numerical zoom for multiscale problems with an application to nuclear waste disposal. *J. Comput. Phys.*, 224(1) :403–413, 2007.

[All92] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) : 1482–1518, 1992.

[All02] Grégoire Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146. Springer, 2002.

[All05] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Éditions École Polytechnique, 2005.

[AMP10] G. Allaire, A. Mikelić, and A.L. Piatnitski. Homogenization approach to the dispersion theory for reactive transport through porous media. *SIAM J. Math. Anal.*, 2010.

[APP12] G. Allaire, I. Pankratova, and A.L. Piatnitski. Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain. *J. Funct. Anal.*, 262(1) :300–330, 2012.

[AR07] G. Allaire and A.L. Raphael. Homogenization of a convection-diffusion model with reaction in a porous medium. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 344(8) :523–528, 2007. ISSN 1631-073X.

[Arb00] Todd Arbogast. Numerical subgrid upscaling of two-phase flow in porous media. In *Numerical Treatment of Multiphase Flows in Porous Media : Proceedings of the International Workshop Held at Beijing, China, 2-6 August, 1999*, volume 552, pages 35–49. Springer, 2000.

[AS79] K. Aziz and A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation.* Applied Science Publishers, London, 1979.

[Bab76] Ivo Babuška. Homogenization and its application. mathematical and computational problems. *Numerical solution of partial differential equations III*, pages 89–116, 1976.

[Bea88] Jacob Bear. *Dynamics of fluids in porous media.* Dover (New York), 1988.

[Ben64] Pierre Benoist. *Théorie du coefficient de diffusion des neutrons dans un réseau comportant des cavités.* PhD thesis, Centre d'études nucléaires de Saclay, 1964.

[BFR98] F. Brezzi, L. Franca, and A. Russo. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 166(1) :25–33, 1998.

[BH82] A.N. Brooks and Th.J.R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32(1) :199–259, 1982.

[BJP03] A. Bourgeat, M. Jurak, and A.L. Piatnitski. Averaging a transport equation with small diffusion and oscillating velocity. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(2) :95–117, 2003.

[BLP78] A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures.* North Holland, 1978. ISBN 0444851720.

[BO83] I. Babuška and J.E. Osborn. Generalized finite element methods : their performance and their relation to mixed methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3) :510–536, 1983.

[BP89] N. Bakhvalov and G. Panasenko. *Homogenisation : averaging processes in periodic media : mathematical problems in the mechanics of composite materials.* Kluwer Academic Publishers, 1989.

[BPS83] M. Bercovier, O. Pironneau, and V. Sastri. Finite elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems. *Appl. Math. Modelling*, 7(2) :89–96, 1983.

[BQW88] A. Bourgeat, M. Quintard, and S. Whitaker. Eléments de comparaison entre la méthode d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, 306(7) :463–466, 1988.

[BR94] F. Brezzi and A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Model. Meth. Appl. Sci.*, 4(4) :571–587, 1994.

[Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Masson, 1983.

[CB01] M.A. Christie and M.J. Blunt. Tenth SPE comparative solution project : A comparison of upscaling techniques. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 4(4) :308–317, 2001.

[CD99] D. Cioranescu and P. Donato. *An introduction to homogenization*, volume 26. Oxford University Press Oxford, 1999.

[CDG02] D. Cioranescu, A. Damlamian, and G. Griso. Periodic unfolding and homogenization. *Comptes Rendus Mathematique*, 335(1) :99–104, 2002.

[CFL28] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzengleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1) :32–74, 1928.

[CH02] Z. Chen and Th.Y. Hou. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Math. Comput.*, 72(242) :541–576, 2002.

[Cia78] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland, 1978. ISBN 0444850287.

[Coa00] Keith H. Coats. A note on IMPES and some IMPES-based simulation models. *SPE Journal*, 5(3) :245–251, 2000.

[CTP95] K.H. Coats, L.K. Thomas, and R.G. Pierson. Compositional and black oil reservoir simulation. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 1995.

[Dar56] Henry Darcy. Les fontaines de la ville de dijon. *Victor Dalmont, Paris*, 1856.

[DG75] Ennio De Giorgi. Sulla convergenza di alcune successioni d'integrali del tipo dell'area. *Rendi Conti di Mat.*, 8 :277–294, 1975.

[DG83] Ennio De Giorgi. G-operators and γ-convergence. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1175–1191. PWN Polish Scientific Publishers and North Holland, Warsaw, Poland, 1983.

[DP05] P. Donato and A.L. Piatnitski. Averaging of nonstationary parabolic operators with large lower order terms. *Multi Scale Problems and Asymptotic Analysis. GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl*, 24 :153–165, 2005.

[DS73] E. De Giorgi and S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine. *Boll. Unione Mat. Ital., IV. Ser.*, 8 :391–411, 1973. ISSN 0041-7084.

[EE03] W. E and B. Engquist. The heterogeneous multiscale methods. *Comm. Math. Sci.*, 1(1) : 87–132, 2003.

[EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7 :713–1018, 2000.

[EH09] Y. Efendiev and Th.Y. Hou. *Multiscale finite element methods : theory and applications*. Springer Verlag, 2009.

[ER98] M.G. Edwards and C.F. Rogers. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Comput. Geosci.*, 2(4) :259–290, 1998.

[Far98] Eva Farkas. Linearization techniques of reservoir-simulation equations : Fully implicit cases. *SPE Journal*, 3(4) :316–323, 1998.

[Gin04] Victor Ginting. Analysis of two-scale finite volume element method for elliptic problem. *J. Numer. Math.*, 12(2) :119–141, 2004.

[GL09] G. Grospellier and B. Lelandais. The arcane development framework. In *Proceedings of the 8th workshop on Parallel/High-Performance Object-Oriented Scientific Computing*, page 4. ACM, 2009.

[Glo06] Antoine Gloria. An analytical framework for the numerical homogenization of monotone elliptic operators and quasiconvex energies. *Multiscale Model. Simul.*, 5(3) :996–1043, 2006.

[Gol90] François Golse. Averaging of vector fields and PDE. *Journées équations aux dérivées partielles*, pages 1–17, 1990.

[GV95] D.R. Guerillot and S. Verdière. Different pressure grids for reservoir simulation in heterogeneous reservoirs. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, February 1995.

[HDJ11] H. Hajibeygi, R. Deb, and P. Jenny. Multiscale finite volume method for non-conformal coarse grids arising from faulted porous media. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2011.

[HL09] Th.Y. Hou and D. Liang. Multiscale analysis for convection dominated transport equations. *DCDS*, 23(1-2) :281–298, 2009.

[HO10] P. Henning and M. Ohlberger. The heterogeneous multiscale finite element method for advection-diffusion problems with rapidly oscillating coefficients and large expected drift. *Netw. Heterog. Media*, 5(4) :711–744, 2010.

[HPLHO98] F. Hecht, O. Pironneau, A. Le Hyaric, and K. Ohtsuka. Freefem++. *Laboratoire J.-L. Lions, University of Paris VI, France*, 1998.

[HR13] Harsha Hutridurga Ramaiah. *Homogenization of complex flows in porous media and applications*. PhD Thesis, École polytechnique, 2013.

[HW97] Th.Y. Hou and X.H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J. Comput. Phys.*, 134(1) :169–189, art. no. cp975682, 1997.

[JLT03] P. Jenny, S.H. Lee, and H.A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. *J. Comput. Phys.*, 187(1) :47–67, 2003.

[KLN+09] S. Krogstad, K.A. Lie, H. Nilsen, J. Natvig, B. Skaflestad, and J. Aarnes. A multiscale mixed finite element solver for three phase black oil flow. In *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Society of Petroleum Engineers, 2009.

[KLS04] Y. Kuznetsov, K. Lipnikov, and M. Shashkov. The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems. *Comput. Geosci.*, 8(4) :301–324, 2004.

[Koz80] Sergei Mikhailovich Kozlov. Averaging of random operators. *Math. USSR-Sb.*, 37(2) :167–180, 1980.

[LM54] P.D. Lax and A.N. Milgram. Parabolic equations, volume 33 of Annals of Mathematics Studies, 1954.

[LM68] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications (3 volumes).* Dunod, Paris, 1968.

[LV00] Y. Y. Li and M. Vogelius. Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(2) :91–151, 2000.

[LZT09] S. H. Lee, H. Zhou, and H. A. Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for nonlinear multiphase transport in heterogeneous formations. *J. Comput. Phys.*, 228(24) :9036–9058, 2009. ISSN 0021-9991.

[Max81] James C. Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881.

[MB96] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 139(1) :289–314, 1996.

[MBS00] A.M. Matache, I. Babuška, and C. Schwab. Generalized p-FEM in homogenization. *Numer. Math.*, 86(2) :319–375, 2000.

[MPP85] D.W. McLaughlin, G. Papanicolaou, and O. Pironneau. Convection of microstructure and related problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 45(5) :780–797, 1985.

[MPP05] E. Marušić-Paloka and A.L. Piatnitski. Homogenization of a nonlinear convection-diffusion equation with rapidly oscillating coefficients and strong convection. *J. London Math. Soc.*, 72 (2) :391–409, 2005.

[MT97] F. Murat and L. Tartar. H-convergence. In *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, pages 21–43. Springer, 1997.

[MvdV77] J. Meijerink and H. A. van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric m-matrix. *Math. Comput.*, 31(137) :148–162, 1977.

[MZ+05] Pingbing Ming, Pingwen Zhang, et al. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems. *J. Am. Math. Soc.*, 18(1) :121–156, 2005.

[Ngu89] Gabriel Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.

[OZ07] H. Owhadi and L. Zhang. Metric-based upscaling. *Commun. Pure Appl. Math.*, 60(5) :675–723, 2007.

[OZ08] H. Owhadi and L. Zhang. Numerical homogenization of the acoustic wave equations with a continuum of scales. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 198(3) :397–406, 2008.

[Pap95] George C. Papanicolaou. Diffusion in random media. *Surveys in applied mathematics*, 1 : 205–253, 1995.

[Pir88] Olivier Pironneau. *Méthodes des éléments finis pour les fluides.* Masson, Paris, 1988.

[Poi25] Siméon-Denis Poisson. *Second mémoire sur la théorie du magnétisme.* Imprimerie royale, 1825.

[PS08] G.A. Pavliotis and A.M. Stuart. *Multiscale methods : averaging and homogenization*, volume 53. Springer, 2008.

[PV+79] George C Papanicolaou, SR Srinivasa Varadhan, et al. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. *Random fields*, 1 :835–873, 1979.

[RDM97] Ph. Renard and G. De Marsily. Calculating equivalent permeability : a review. *Advances in Water Resources*, 20(5) :253–278, 1997.

[Rei07] James Reinders. *Intel Threading Building Blocks : Outfitting C++ for Multi-core Processor Parallelism.* O'Reilly Media, Inc, 2007.

[SGJ61] H.L. Stone and A.O. Garder Jr. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Old SPE Journal*, 1(2) :92–104, 1961.

[SP80] Évariste Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory.* Springer-Verlag, 1980.

[Spa68] Sergio Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 22(4) :571–597, 1968.

[Spa76] Sergio Spagnolo. Convergence in energy for elliptic operators. In *Proc. Third Symp. Numer. Solut. Partial Diff. Equat.*, pages 469–498. Acad. Press, New York, 1976.

[Stü01] Klaus Stüben. A review of algebraic multigrid. *J. Comput. Appl. Math.*, 128(1) :281–309, 2001.

[SW05] S. Sun and M.F. Wheeler. Discontinuous galerkin methods for coupled flow and reactive transport problems. *Appl. Numer. Math.*, 52(2) :273–298, 2005.

[SZC59] J.W. Sheldon, B. Zondek, and W.T. Cardwell. One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *Trans. SPE AIME*, 216 :290–296, 1959.

[Tar76] Luc Tartar. Quelques remarques sur l'homogénéisation. In *Functional Analysis and Numerical Analysis, Proceedings of the Japan-France Seminar*, pages 469–482. Japan Society for the Promotion of Sciences, 1976.

[Tar09] Luc Tartar. *The general theory of homogenization : a personalized introduction*, volume 7. Springer, 2009.

[Top13] Top500. Supercomputer sites, June 2013. URL `http://www.top500.org/`.

[TYHC99] X.-H. Wu Th. Y. Hou and Z. Cai. Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients. *Math. Comput.*, 68(227) :913–943, 1999.

[vdV92] Henk A. van der Vorst. Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2) :631–644, 1992.

[WD96] D. W. Walker and J. J. Dongarra. MPI : a standard message passing interface. *Supercomputer*, 12 :56–68, 1996.

[Whe73] Mary F. Wheeler. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(4) :723–759, 1973.

[WR67] E.T. Whittaker and G. Robinson. The Newton-Raphson method. *The calculus of observations : a treatise on numerical mathematics, 4th ed. Dover, New York*, 1967.

[ZKO94] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik. *Homogenization of differential operators and integral functionals.* Springer Verlag, 1994.