Résultats d'analyse fonctionnelle et d'approximation variationnelle

Sommaire

Cette annexe rappelle un certain nombre de résultats d'analyse fonctionelle et d'approximation variationnelle. Ces résultats, assez classiques, sont utilisés tout au long du manuscrit.

A.1 Définitions et résultats importants

Les définitions et résultats présentés dans ce paragraphe sont issus du livre [Bre83] de H. Brezis. Dans toute la suite, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N, N \geqslant 1$. On suppose, pour plus de simplicité, que Ω est de classe $\mathcal{C}^1$. On supposera également que sa frontière $\partial\Omega$ est bornée.

A.1.1 Espaces L^p

Définition A.1. *On note $L^1(\Omega)$, l'ensemble des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose alors pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

Définition A.2. *Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $1 \leqslant p < +\infty$. On pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}$$

On note alors

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition A.3. *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \exists C \geqslant 0 \text{ telle que } |f(x)| \leqslant C \text{ presque partout sur } \Omega\}$$

On note alors

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{C \in \mathbb{R}_+} \{C \mid |f(x)| \leqslant C \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ sont des espaces de Banach. De plus, l'espace $L^2(\Omega)$ peut être muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ défini par

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv dx.$$

Muni de ce produit scalaire $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

A.1.2 Espaces de Sobolev

Définition A.4 (Multi-indices)**.** *On définit un multi-indice α comme un vecteur de $\mathbb{N}^N$. On note alors*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

On définit pour une fonction u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Définition A.5. *Soit un entier p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On définit tout d'abord*

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Pour un entier $m \geqslant 1$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ par récurrence :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega) \mid \forall i = 1, \ldots, N, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega)\right\}.$$

La dérivée ici est la dérivée au sens des distributions. On définit ensuite pour $u \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$
$$\text{et} \quad |u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ sont des espaces de Banach. De plus, pour $p = 2$ on définit

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Pour tout $m \geqslant 1$ l'espace $H^m(\Omega)$ peut être muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^m(\Omega)}$ défini par

$$\forall u, v \in H^m(\Omega), \quad (u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Muni de ce produit scalaire $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

A.1.3 Espaces $W_0^{1,p}$

Définition A.6 (Fonctions $C_c^k(\Omega)$)**.** *Pour $k \geqslant 0$ entier, on définit $C_c^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact.*

Définition A.7. *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note également*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Remarques A.1 :

On peut montrer que ces espaces peuvent également être définis comme la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
Sur l'espace $\mathbb{R}^N$, on a $H_0^1\left(\mathbb{R}^N\right) = H^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

On admet ici que les fonctions de l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ admettent une trace sur $\partial\Omega$. Pour une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note alors $u_{|\partial\Omega}$ sa trace et on a

$$u_{|\partial\Omega} \in L^p\left(\partial\Omega\right).$$

Les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ peuvent alors être définis par

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u_{|\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Théorème A.1 (Inégalité de Poincaré)**.** *On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante $C_{\Omega,p}$ dépendant de Ω et p telle que*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_{\Omega,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}.$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème A.2 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)**.** *Il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \qquad \text{avec } \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u.$$

A.1.4 Inégalités de Sobolev

Définition A.8. *Soient E et F deux espaces normés. On dit que E s'injecte continûment dans F si*
- *$E \subset F$,*
- *il existe une constante C telle que $\forall u \in E, \|u\|_F \leqslant C \|u\|_E$.*

On note alors

$$E \hookrightarrow F.$$

Avec cette définition, il est clair que

$$\forall p \in [1, +\infty], \forall k \geqslant 0, \quad W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega).$$

Théorème A.3. *Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. On a les injections continues suivantes :*

$$\begin{array}{llll}
\text{si} & 1 \leqslant p < N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\
\text{si} & p = N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, +\infty[, \\
\text{si} & p > N, & \text{alors} & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).
\end{array}$$

A.2 Résolution d'équations aux dérivées partielles

A.2.1 Théorème de Lax-Milgram et généralisation

On considère $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel dont on notera $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

Théorème A.4 (Lax-Milgram [LM54])**.** *On souhaite résoudre le problème qui consiste à trouver $u \in \mathcal{H}$ telle que*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u,v) = L(v),$$

où a est une forme bilinéaire et L est une forme linéaire.
Si la forme bilinéaire a est

- *continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ie.*

$$\exists C_a > 0, \forall (u,v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad |a(u,v)| \leqslant C_a \|u\| \|v\|,$$

- *coercive sur $\mathcal{H}$ ie.*

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in \mathcal{H}, \quad a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2.$$

Et, si la forme linéaire L est continue sur $\mathcal{H}$ ie.

$$\exists C_L > 0, \forall u \in \mathcal{H}, \quad |L(u)| \leqslant C_L \|u\|,$$

alors il existe un et un seul élément $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u,v) = L(v). \tag{A.1}$$

A.2.2 Théorème de Jacques-Louis Lions

Pour simplifier les notations, on se place dans des espaces fixés mais ce théorème possède une forme plus générale (voir [Bre83]). On définit $H^{-1}(\Omega)$ le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$. On se fixe un réel $T > 0$.

Théorème A.5 ([LM68])**.** *On se donne pour tout $t \in [0,T]$ la forme bilinéaire $a(t;\cdot,\cdot)$ définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et vérifiant*

- $\forall t \in [0,T], \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad |a(t;u,v)| \leqslant M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$
- $\forall t \in [0,T], \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(t;v,v) \geqslant \alpha \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C \|v\|^2_{L^2(\Omega)},$

où $\alpha > 0$, C et M sont des constantes.

Étant donnés $f \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique fonction u telle que

$$u \in L^2\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} \in L^2\left((0,T), H^{-1}(\Omega)\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall t \in [0,T], \forall v \in \mathcal{H}, \quad \left(\dfrac{du}{dt}(t), v\right)_{L^2(\Omega)} + a(t;u,v) & = & (f,v)_{L^2(\Omega)} \ \text{sur } [0,+\infty) \\ u(0,\cdot) & = & u_0. \end{array} \right.$$

A.2.3 Régularité elliptique

Théorème A.6. *Soient $a_{ij}, a_i, a_0 \in \mathcal{C}^\infty\left((0,T) \times \Omega\right), i,j = 1,\ldots,N$. On suppose de plus que la matrice des a_{ij} est définie positive :*

$$\exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha |\xi|^2,$$

où $|\xi|$ est la norme euclidienne classique sur $\mathbb{R}^N$. On veut résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u & = & f \ \text{sur } \Omega \\ u & = & 0 \ \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

On suppose que Ω est borné et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^\infty\left((0,T)\times\bar{\Omega}\right)$. Alors le problème (A.2) *a une solution unique et cette solution appartient à $\mathcal{C}^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

On a un résultat équivalent pour un problème dépendant du temps.

Théorème A.7. *Soient $a_{ij}, a_i, a_0 \in \mathcal{C}^\infty\left((0,T)\times\Omega\right), i,j = 1,\dots,N$. On suppose de plus que la matrice des a_{ij} est uniformément coercive. On veut résoudre le problème*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u & = & f \text{ sur } (0,T)\times\Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega. \\ u(0,\cdot) & = & u_0 \text{ sur } \Omega. \end{array}\right. \tag{A.3}$$

On suppose que Ω est borné et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$ et que $f \in \mathcal{C}^\infty\left((0,T)\times\bar{\Omega}\right)$. Alors le problème (A.3) *a une solution unique et cette solution appartient à $\mathcal{C}^\infty\left([\varepsilon,T]\times\bar{\Omega}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Si, de plus, $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ et $\{f,u_0\}$ vérifient certaines relations de compatibilité sur $\partial\Omega\times\{0\}$, alors

$$u \in \mathcal{C}^\infty\left([0,T],\bar{\Omega}\right).$$

A.3 Approximation variationnelle des solutions d'équations aux dérivées partielles

A.3.1 Lemme de Céa

Lemme A.1. *On se place dans les hypothèses du théorème de Lax-Milgram et on considère V_h un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. On considère $u_h \in V_h$ la solution au problème :*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h,v_h) = L(v_h).$$

Alors il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leqslant \beta \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}},$$

où u, comme dans le théorème A.4 est la solution au problème (A.1) *dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Par définition de u_h, on a :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h,v_h) = L(v_h).$$

Comme $V_h \subset \mathcal{H}$, on a également :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u,v_h) = L(v_h).$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient donc :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u - u_h,v_h) = 0.$$

On choisit d'écrire les éléments de V_h sous la forme $v_h - u_h$ avec $v_h \in V_h$. On a donc $\forall v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} & a\left(u - u_h, v_h - u_h\right) = 0, \\ ie. \quad & a\left(u - u_h, u - u_h + v_h - u\right) = 0, \\ ie. \quad & a\left(u - u_h, u - u_h\right) = a\left(u - u_h, u - v_h\right). \end{aligned}$$

On utilise la coercivité de a pour le membre de gauche et sa continuité pour le membre de droite :

$$\forall v_h \in V_h, \quad \alpha \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_a \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$

Donc
$$\forall v_h \in V_h, \quad \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{C_a}{\alpha} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$
Cette inégalité est vraie pour tout v_h dans V_h, on peut donc prendre l'infimum :
$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{C_a}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}.$$

□

A.3.2 Définition d'un élément fini

Définition A.9 ([Cia78]). *Un élément fini est un triplet (K, P, Σ) où*

(i) K est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^N$ d'intérieur non vide avec une frontière continue et lipschitzienne,

(ii) P est un espace de fonctions à valeurs réelles définies sur l'ensemble K,

(iii) Σ est un ensemble de formes linéaires $\phi_i, i = 1, \ldots, \mathcal{N}$, définies sur l'espace P.

On suppose également que l'ensemble Σ est P-unisolvant : Pour tous réels α_i,$i = 1, \ldots, \mathcal{N}$, il existe une unique fonction $p \in P$ vérifiant
$$\phi_i(p) = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, \mathcal{N}.$$
Ainsi, pour $i = 1, \ldots, \mathcal{N}$, il existe une unique fonction $p_i \in P$ vérifiant
$$\phi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \ldots, \mathcal{N}.$$
On a donc
$$\forall p \in P, \quad p = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(p) p_i.$$
Cela montre que l'espace P est de dimension finie et que $\dim(P) = \mathcal{N}$.

Les formes linéaires $\phi_i, i = 1, \ldots, \mathcal{N}$ sont appelées degrés de liberté de l'élément fini *et les fonctions $p_i, i = 1, \ldots, \mathcal{N}$ sont appelées* fonctions de base de l'élément fini.

A.3.3 Éléments finis $\mathbb{P}_k$ Lagrange

Définition A.10. *Un élément fini (K, P, Σ) est dit de Lagrange si tous ses degrés de liberté sont des formes linéaires tels que*
$$\phi_i(p) = p(a_i),$$
où les points a_i sont dans l'ensemble K. Ces points sont alors appelés nœuds de l'élément fini.

A.3.4 Élément de référence

Dans les problèmes qu'on considère, on souhaite en général résoudre une équation sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ce domaine est alors découpé en mailles. On note alors $\mathcal{K}$ ce maillage et on a
$$\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K} = \overline{\Omega}.$$
On désire définir des éléments finis pour chaque maille $K \in \mathcal{K}$. Pour faire cela de manière plus simple on se donne d'abord un *élément fini de référence* $\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$ associé à des nœuds $\hat{a}_i$ et un ensemble de transformations affines $(F_K)_{K \in \mathcal{K}}$ telles que $K = F_K\left(\hat{K}\right)$. Alors, pour tout $K \in \mathcal{K}$, on définit l'élément fini $(K$,P_K,$\Sigma_K)$ par
$$K = F_K\left(\hat{K}\right)$$
$$P_K = \left\{p : K \to \mathbb{R} \mid p = \hat{p} \cdot F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\right\}$$
$$\Sigma_K = \left\{p\left(F_K\left(\hat{a}_i\right)\right), \quad i = 1, \ldots, \hat{\mathcal{N}}\right\}.$$

A.3.5 Inégalités d'interpolation

Théorème A.8. *Soient deux entiers k et m positifs et deux nombres $p, q \in [1, +\infty]$. Soit $\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$ un élément fini de référence de type Lagrange. On suppose que l'on a*

$$W^{k+1,p}\left(\hat{K}\right) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\hat{K}\right), \tag{A.4}$$

$$W^{k+1,p}\left(\hat{K}\right) \hookrightarrow W^{m,q}\left(\hat{K}\right), \tag{A.5}$$

$$\mathbb{P}_k\left(\hat{K}\right) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}\left(\hat{K}\right). \tag{A.6}$$

On considère un élément fini (K, P, Σ) ayant pour élément de référence $\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$. On suppose de plus que l'excentricité de K est borné (voir paragraphe 4.2.3 pour les définitions). Alors, il existe une constante, $C\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right)$ telle que, pour toute maille K, et pour toute fonction $v \in W^{k+1,p}(K)$,

$$\|v - \pi_K v\|_{W^{m,q}(K)} \leqslant C\left(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\right) |K|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} H_K^{k+1-m} |v|_{W^{k+1,p}(K)}, \tag{A.7}$$

où H_K est le diamètre de la maille K.

Annexe B

Estimation d'erreur de la solution semi-discrète

Sommaire

B.1 Introduction du problème

Soit Ω un pavé de $\mathbb{R}^N$. Résoudre le problème (8.1) avec les hypothèses 8.1 revient à résoudre le problème : trouver $u \in L^2\left((0,T), H^1_\#(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^0\left((0,T), L^2_\#(\Omega)\right)$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \forall v \in H^1_\#(\Omega), \quad (D_t u(t,\cdot), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t,\cdot),v) & = & (f,v)_{L^2(\Omega)} & \text{dans } (0,T), \\ u(0,x) & = & u^0(x) & \text{dans } \Omega, \\ u \text{ est } \Omega\text{-périodique.} & & & \end{array}\right. \tag{B.1}$$

où

- $D_t = \rho^\varepsilon(x)\partial_t + \dfrac{1}{\varepsilon} b^\varepsilon(x) \cdot \nabla$,
- $\operatorname{div}(b^\varepsilon) = 0$,
- $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire classique dans $L^2(\Omega)$,
- a est une forme bilinéaire sur $H^1_\#(\Omega) \times H^1_\#(\Omega)$ continue et coercive par rapport à la semi-norme H^1 : soient $C_{bnd}, C_{sta} > 0$ les constantes telles

$$\begin{array}{rrcl} \forall u,v \in H^1_\#(\Omega), & a(u,u) & \geqslant & C_{sta}\,|u|^2_{H^1(\Omega)} \\ \text{et} & a(u,v) & \leqslant & C_{bnd}\,|u|_{H^1(\Omega)}\,|v|_{H^1(\Omega)}\,, \end{array}$$

- $f \in L^2(\Omega)$ est le terme source,
- $u^0 \in H^1_\#(\Omega)$ est la condition initiale.

Remarque B.2 : Pour le problème (8.1) on a $f = 0$ mais dans cette annexe on montre une inégalité dans un cas plus général. La forme bilinéaire a est alors définie par

$$\forall u,v \in H^1_\#(\Omega), \quad a(u,v) = -\int_\Omega \operatorname{div}(A^\varepsilon(x)\nabla u)\,v = \int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla u \cdot \nabla v.$$

Cette forme bilinéaire vérifie bien les conditions de coercivité et de continuité avec des constantes indépendantes de ε. De plus, on peut modifier le choix de D_t en posant $\tilde{D}_t = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} b^* \cdot \nabla$. Avec cette définition, $\tilde{a}$ vérifie

$$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} \left(b^\varepsilon(x) - b^* \right) \cdot \nabla u v - \int_\Omega \operatorname{div} \left(A^\varepsilon(x) \nabla u \right) v.$$

Or, on peut montrer (voir [MPP85]) que cela peut se réécrire

$$\tilde{a}(u,v) = \int_\Omega \left(A^\varepsilon(x) + B^\varepsilon(x) \right) \nabla u \cdot \nabla v,$$

où $B^\varepsilon(x) = B\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une matrice antisymétrique et B est une fonction Y-périodique appartenant à l'espace $L^\infty(Y)^{N \times N}$. La forme bilinéaire $\tilde{a}$ vérifie donc aussi les conditions de coercivité et de continuité avec des constantes indépendantes de ε. Et on a également $\operatorname{div}(b^*) = 0$. Les résultats présentés dans la suite sont donc valables pour les deux choix de l'opérateur D_t.

B.2 Discrétisation

On se place dans un cadre semi-discret où le temps est toujours considéré comme étant continu. On définit un espace éléments finis $V_h \subset H^1_\#(\Omega)$. On applique alors une méthode de Galerkine : on cherche $u_h : (0,T) \to V_h$ solution du problème

$$\left(D_t u_h, v_h \right)_{L^2(\Omega)} + a\left(u_h, v_h \right) = \left(f, v_h \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in \mathcal{C}^\infty\left((0,T), V_h \right). \tag{B.2}$$

L'objectif est de montrer que la solution u_h est proche de la solution u du problème initial (B.1).

Remarque B.3 : Le problème (B.2) est une équation différentielle ordinaire à coefficients constants (f, a, ρ et b ne dépendent pas du temps). Sa solution est donc dans l'espace $\mathcal{C}^\infty\left((0,T), V_h \right)$.

B.3 Remarque préliminaire

La démonstration de l'estimation d'erreur dans cette annexe est inspirée de l'article de M.F. Wheeler [Whe73]. Dans cet article, les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet homogènes. Dans ce cas, les fonctions u, u_h, v_h et w_h sont dans $H^1_0(\Omega)$ et on a une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} \left| \left(D_t \left(w_h - u \right), u_h - w_h \right)_{L^2(\Omega)} \right| &\leqslant \left\| D_t \left(u - w_h \right) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| u_h - w_h \right\|_{H^1_0(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{C_{sta}}{4} \left\| u_h - w_h \right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \frac{1}{C_{sta}} \left\| D_t \left(u - w_h \right) \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On veut donc utiliser une inégalité de la même forme dans $H^1_\#(\Omega)$. On définit l'ensemble

$$\dot{H}^1_\#(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1_\#(\Omega) \mid \int_\Omega \varphi = 0 \right\}.$$

On introduit alors son dual $\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)$ auquel on associe la norme

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} = \max_{\varphi \in \dot{H}^1_\#(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega u \varphi}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^N}}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc $L^2(\Omega) \subset \dot{H}^{-1}_\#(\Omega)$. On veut maintenant montrer le lemme suivant

Lemme B.2. *Il existe une constante $C_{81} > 0$ telle que*

$$\forall u \in L^2_\#(\Omega), \forall v \in H^1_\#(\Omega), \quad \left|\int_\Omega uv\right| \leqslant \|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + C_{81} \left|\int_\Omega u\right| \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

Démonstration. En fait,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega uv\right| &= \left|\int_\Omega u\left(v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v\right) + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \int_\Omega v\right| \\
&\leqslant \|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \frac{1}{|\Omega|}\left|\int_\Omega u\right| \left|\int_\Omega v\right| \\
&\leqslant \|u\|_{\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \left|\int_\Omega u\right| \|v\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

B.4 Estimation d'erreur

Le but de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant.

Lemme 8.1. *Il existe une constante $C_{17} > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{\Omega_T} \leqslant C_{17} \inf_{v_h \in \mathcal{C}^\infty((0,T),V_h)} \Bigg(& \|u - v_h\|_{\Omega_T} \\
& + |D_t(u - v_h)|_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_\#(\Omega)\right)} + \left\|\int_\Omega D_t(u - v_h)\right\|_{L^2((0,T))} \\
& + \|(u_h - v_h)(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\Bigg),
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $w_h \in \mathcal{C}^\infty((0,T),V_h)$. On a, $\forall v_h \in \mathcal{C}^\infty((0,T),V_h)$

$$(D_t w_h, v_h)_{L^2(\Omega)} + a(w_h, v_h) = (f, v_h)_{L^2(\Omega)} + (D_t(w_h - u), v_h)_{L^2(\Omega)} + a(w_h - u, v_h). \tag{B.3}$$

En faisant (B.2) – (B.3) avec $v_h = u_h - w_h$, on a

$$\begin{aligned}
(D_t(u_h - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} &+ a(u_h - w_h, u_h - w_h) \\
&= (D_t(u - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} + a(u - w_h, u_h - w_h).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

On a, pour le membre de gauche de l'équation (B.4) :

$$(D_t(u_h - w_h), u_h - w_h)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h - w_h)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ car } \forall u \in H^1_\#(\Omega) \quad (b^\varepsilon \cdot \nabla u, u)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$a(u_h - w_h, u_h - w_h) \geqslant C_{sta}|u_h - w_h|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Pour le membre de droite, on a

$$\begin{aligned}
|a(u - w_h, u_h - w_h)| &\leqslant C_{bnd}|u - w_h|_{H^1(\Omega)}|u_h - w_h|_{H^1(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{C_{sta}}{4}|u_h - w_h|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{C^2_{bnd}}{C_{sta}}|u - w_h|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

et en utilisant le lemme B.2

$$\begin{aligned}
\left|(D_t(w_h-u),u_h-w_h)_{L^2(\Omega)}\right| &\leqslant \|D_t(u-w_h)\|_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)}\|\nabla(u_h-w_h)\|_{L^2(\Omega)^N}\\
&\qquad + C_{81}\left|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right|\|u_h-w_h\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \frac{C_{sta}}{4}|u_h-w_h|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\qquad + \frac{1}{C_{sta}}\|D_t(u-w_h)\|^2_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)}\\
&\qquad + \frac{\rho_{min}}{2}\|u_h-w_h\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + \frac{C_{81}^2}{2\rho_{min}}\left|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right|^2.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \frac{2C_{bnd}^2}{C_{sta}}|u-w_h|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{2}{C_{sta}}\|D_t(u-w_h)\|^2_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)}\\
&\qquad + \rho_{min}\|u_h-w_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_{81}^2}{\rho_{min}}\left|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right|^2\\
&\qquad\qquad - C_{sta}|u_h-w_h|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\rho^\varepsilon(x) \geqslant \rho_{min}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + C\Bigg(|u-w_h|^2_{H^1(\Omega)} + \|D_t(u-w_h)\|^2_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)}\\
&\qquad\qquad + \left|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right|^2\Bigg) - C_{sta}|u_h-w_h|^2_{H^1(\Omega)}. \quad \text{(B.5)}
\end{aligned}$$

On utilise ensuite une inégalité de Grönwall entre 0 et $t \in (0,T)$:

$$\begin{aligned}
\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \mathrm{e}^t\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + C\int_0^t \mathrm{e}^{t-s}\Bigg(|u-w_h|^2_{H^1(\Omega)} + \|D_t(u-w_h)\|^2_{\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)}\\
&\qquad\qquad + \left|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right|^2 ds\Bigg) - C_{sta}\int_0^t \mathrm{e}^{t-s}|u_h-w_h|^2_{H^1(\Omega)}\,ds.
\end{aligned}$$

Comme

$$\forall s \in (0,t), \quad 1 \leqslant \mathrm{e}^{t-s} \leqslant \mathrm{e}^t,$$

on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + C_{sta}|u_h-w_h|^2_{L^2((0,t),H^1(\Omega))}\\
&\qquad \leqslant \mathrm{e}^t\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}(u_h-w_h)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad + C\mathrm{e}^t\Bigg(|u-w_h|^2_{L^2((0,t),H^1(\Omega))} + \|D_t(u-w_h)\|^2_{L^2\left((0,t),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}\\
&\qquad\qquad + \left\|\int_\Omega D_t(u-w_h)\right\|^2_{L^2(0,t)}\Bigg). \quad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant \mathrm{e}^T\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+C\mathrm{e}^T\Bigg(\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}\\ &+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,T)}\Bigg).\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $t\in[0,T]$, on en déduit

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)\right\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))} &\leqslant C\Bigg(\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,T)}\Bigg).\end{aligned}\tag{B.7}$$

De même, en utilisant l'inégalité (B.6), on a

$$\begin{aligned}C_{sta}\left|u_h-w_h\right|^2_{L^2((0,t),H^1(\Omega))} &\leqslant \mathrm{e}^t\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+C\mathrm{e}^t\Bigg(\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,t),H^1(\Omega))}+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,t),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}\\ &+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,t)}\Bigg)\end{aligned}$$

et en prenant $t=T$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|u_h-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))} &\leqslant C\Bigg(\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,T)}\Bigg).\end{aligned}\tag{B.8}$$

En additionnant les inégalités (B.7) et (B.8) on aboutit à

$$\begin{aligned}&\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)\right\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}+\left|u_h-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &\qquad\leqslant C\Big(\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &\qquad+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,T)}\\ &\qquad+\left\|\sqrt{\rho^\varepsilon}\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned}\tag{B.9}$$

Comme $\rho^\varepsilon\geqslant\rho_{min}$ et $\rho^\varepsilon\leqslant\rho_{max}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left\|u_h-w_h\right\|^2_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}+\left|u_h-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &\qquad\leqslant C\Big(\left|u-w_h\right|^2_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}\\ &\qquad+\left\|D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2\left((0,T),\dot{H}^{-1}_{\#}(\Omega)\right)}+\left\|\int_\Omega D_t\left(u-w_h\right)\right\|^2_{L^2(0,T)}\\ &\qquad+\left\|\left(u_h-w_h\right)(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).\end{aligned}\tag{B.10}$$

On définit la norme $\|\cdot\|_{\Omega_T}$ par

$$\|u\|_{\Omega_T}^2 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega))}^2 + |u|_{L^2((0,T),H^1(\Omega))}^2 .$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{\Omega_T} \leqslant C\big(&\|u-w_h\|_{\Omega_T} \\ &+ \|D_t\,(u-w_h)\|_{L^2\left((0,T),\dot{H}_{\#}^{-1}(\Omega)\right)} + \left\|\int_\Omega D_t\,(u-w_h)\right\|_{L^2(0,T)} \\ &+ \|(u_h-w_h)\,(0,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

$\square$