

## Chapitre 2

### Revue de littérature

La revue de littérature traite des sujets suivants : la fatigue des matériaux, le calcul numérique par élément finis, l'analyse spectrale de la fatigue due aux chargements aléatoires, le modèle dynamique du système de suspension d'un quart de véhicule et les fréquences propres des structures.

MCours.com

#### 2.1 Fatigue des matériaux :

La densité du fer qui est de l'ordre de 7,88 est presque trois fois celle de l'aluminium (2,7). D'où l'intérêt de remplacer des pièces en alliage de fer comme l'acier par des alliages d'aluminium pour réduire le poids des véhicules. Dans les alliages d'aluminium, la courbe contrainte-déformation présente une partie plastique non négligeable comme illustré dans le tableau 1. Une comparaison des propriétés mécaniques des alliages de fer avec ceux de l'aluminium comme illustré dans le tableau 2, montre que ces derniers peuvent être utilisés dans l'industrie automobile. En effet d'après le tableau 2, on remarque que certains alliages d'aluminium ont des propriétés mécaniques comparables à ceux de l'acier [5]. Carl Villeneuve [6] rapporte que l'alliage aluminium-silicium 413 est déjà utilisé dans le châssis de certains véhicules.

William F. Smith [7] ne fournit pas les données des durées de vie des pièces en acier, mais uniquement pour les alliages d'aluminium. En effet l'alliage d'aluminium 7001 (T6) à une durée de vie de 500 millions de cycles en utilisant la méthode R. R. Moore d'une machine à poutre tournante. Claude Bathias et Jean-Paul Bâillon [8] ont rapporté que pour des essais en flexion rotative à 100 millions de cycles, la durée de vie pour l'acier XC 10 est de l'ordre de 25,74 psi, qui est une valeur comparable à celle de l'alliage d'aluminium 7001 (T6).

Dans la revue de littérature beaucoup d'approches ont été abordées pour valider des modèles analytiques pour étudier la fissuration par fatigue dans les alliages légers. Marthinsen, K.; et Nes, E. [9] se sont intéressés à l'étude de la consolidation de l'alliage à l'état solide, avant même que le phénomène de la fissuration intervienne. En effet, à l'état solide les alliages sous contrainte, statique ou dynamique, subissent des transformations. L'écrouissage peut diminuer le nombre de dislocation et consolide ainsi la pièce.

**tableau 1.** Propriétés mécaniques de certains alliages [5].

Alliage :	Code	Densité kg/m <sup>3</sup>	Module de Young en MPa	Limite ultime $\sigma_u$ en MPa	Limite élastique $\sigma_e$ en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
Acier	AISI1015	7900	206	415	227	*45,30
	RQC-100	8000	200	758	683	*10,00
Aluminium	2024-T351	2700	73	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	2700	73	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	2800	71	578	469	*18,85

(\* calculé)

**tableau 2.** Propriétés mécaniques de l'acier et des alliages d'aluminium [7].

		Résistance à la traction (psi)	Limite élastique conventionnelle (psi)	Élongation %	Dureté (Bhn)
Alliage acier-chrome	5140	115	68,5	22,7	229
	5160	138,75	77	17,5	269
Alliage d'aluminium	7001 (T6)	98	91	9	160
	7075 (T6)	83	73	11	150

Une nouvelle approche pour modéliser la consolidation lors de la déformation plastique des métaux purs (cubique à face centrée "cfc"), est basée sur une approche statistique du problème du stockage athermale des dislocations [9]. En combinant la solution pour le problème du stockage des dislocations avec le modèle pour le recouvrement du réseau des dislocations et des sous structures, la description de l'état général interne des variables est obtenue. Marthinsen *et al.*[9], ont développé ce modèle en incluant les effets résultant des joints de grains, des éléments dans la solution solide et la présence des précipités de particules non déformable. Le résultat est un modèle de consolidation et un code informatique associé, capable de donner le profil contrainte-déformation pour des alliages de solution solide sous des conditions de combinaisons du taux de déformation constant et la température. Ce modèle a été appliqué au problème de la consolidation et la saturation de la contrainte d'écoulement dans les alliages aluminium-magnésium [9].

La complexité du problème de la fatigue amène les auteurs à l'aborder de différents points de vue. André Bazergui *et al.* [10] se sont basés sur les courbes de fatigue  $S-N$  (contrainte  $S$  en fonction du nombre de cycle  $N$ ) et deux modèles empiriques de fatigue pour prévenir la rupture par fatigue dans les matériaux. Ces

mêmes auteurs [10] ont rapporté dans leurs études que des essais normalisés moins onéreux, flexion rotative, sont pratiqués sur des éprouvettes standards avant d'installer la pièce opérationnelle sur l'appareil pour mieux prédire la durée de vie de la pièce en question. En pratique la variation de la contrainte est souvent périodique mais elle n'est pas toujours sinusoïdale et la valeur moyenne de la contrainte n'est pas nulle à cause de la contribution statique du poids de la pièce, ou à cause d'un serrage prématuré. Il est donc possible de représenter adéquatement une variation de contrainte par la superposition de contraintes sinusoïdale de diverses amplitudes et de différentes valeurs moyennes. On charge une éprouvette standard par une contrainte sinusoïdale d'amplitude  $\sigma_a$  superposée à une contrainte moyenne  $\sigma_m$  statique, en mode flexion rotative. Cependant, d'autres sortes de machines permettent d'effectuer beaucoup mieux des essais de fatigue avec contrainte moyenne non nulle [10].

Nous avons proposé plusieurs relations pour prédire l'effet de  $\sigma_m$  sur la vie d'un matériau, à partir de l'analyse des résultats concernant la fatigue due à une contrainte moyenne nulle et en fonction de la résistance déterminée lors d'un chargement statique uniaxial. La relation empirique de Goodman [10] est la plus connue, elle s'exprime selon l'équation 1 :

$$\text{équation 1: } \frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

où  $\sigma_m$  est la contrainte statique moyenne,  $\sigma_a$  est l'amplitude de la contrainte sinusoïdale,  $S_a$  la résistance à la fatigue due à une contrainte sinusoïdale (complètement inversée) pour une vie  $N$  donnée et  $S_u$  la résistance ultime à la traction uniaxiale statique. Soderberg [10] a proposé une relation, selon l'équation 2, semblable

à l'équation 1 mais plus sécuritaire, puisque la valeur de  $\sigma_m$  est limitée à la résistance à l'écoulement  $S_y$  en traction statique :

$$\text{équation 2: } \frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_y} = 1$$

Bernard Barthélémy [11] tient compte de l'énergie de déformation qui comprend l'énergie de distorsion  $S_d$  et l'énergie de déformation volumique  $S_v$ . Ainsi dans le cas d'un problème où les trois modes I, II et III correspondant respectivement aux facteurs de concentration de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ , le critère de rupture présenté par Bernard Barthélémy [11] est plus générale que le classique critère de Von Mises qui ne considère que l'énergie de distorsion. Le même auteur [11] ajoute que lorsqu'une structure est soumise à une charge d'intensité variable, le phénomène de fatigue peut conduire à sa rupture bien que la charge reste, à tout moment, inférieure à sa résistance statique. On distingue généralement trois étapes distinctes mettant en jeu des mécanismes différents :

- L'initiation de la fissure. Il s'agit de la création à partir du défaut original d'une fissure de dimensions détectables par les procédés de contrôle non destructifs utilisables.
- La propagation lente de la fissure de fatigue. Au cours de cette étape, la fissure peut croître plus ou moins rapidement selon le matériau et l'intensité du chargement critique, et atteindre dans certains cas une longueur de plusieurs centimètres, voire de l'ordre du mètre. Dans d'autres cas, au contraire, cette étape peut-être très brève et la fissure peut ne pas croître de façon substantielle.

- La rupture, qui est l'étape finale du phénomène, qui se produit lorsque la taille de la fissure est telle qu'elle ait atteint son seuil d'instabilité.

On propose plusieurs lois empiriques pour contrôler dans le temps le phénomène de fatigue [11] :

- La loi de Paris et ses variantes : Il s'agit de la loi la plus universellement utilisée en raison de sa grande simplicité et de son succès à corroborer de nombreux résultats expérimentaux. En effet, Paris propose de relier  $\frac{da}{dN}$ , où  $da$  est la dérivée de la longueur de la fissure par rapport au nombre de cycle, à l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  sous la forme de l'équation 3 :

$$\text{équation 3: } \frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n$$

$$\text{avec } \Delta K = K_{\max} - K_{\min} = K_{(\sigma_{\max})} - K_{(\sigma_{\min})}.$$

Les facteurs  $C$  et  $n$  sont des constantes propres au matériau et à l'environnement considéré. Dans certains cas expérimentaux, les résultats sont trop dispersés pour que l'on puisse déterminer les valeurs de  $C$  et  $n$ , ce qui suggère que la loi de Paris ne fait pas intervenir tous les paramètres et en particulier le niveau de sollicitation.

- La loi de Sih [11]: La loi de Paris possède deux insuffisances majeures : elle ne fait intervenir qu'un paramètre du chargement (amplitude de contrainte) et n'est valable qu'en mode simple de propagation, plus précisément le mode I. Sih [11] a proposé de remplacer dans la loi de Paris l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  par l'amplitude de la densité d'énergie de déformation minimale  $\Delta S_{\min}$ . La loi proposée par Sih [11] s'écrit donc :

**équation 4:**  $\frac{da}{dN} = C(\Delta S_{\min})^n$

$\Delta S_{\min}$  représente donc la variation de  $S$  dans la direction où  $S$  est minimum, c'est-à-dire pour la valeur  $\theta_0$  de l'angle  $\theta$  telle que (cas bidimensionnel) :

**équation 5:**  $\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0$

Il s'en suit que l'on peut écrire :

**équation 6:**  $\Delta S_{\min} = \Delta S_{\min}^{\max} - \Delta S_{\min}^{\min} = S(\theta_0, \sigma_{\max}) - S(\theta_0, \sigma_{\min})$

où  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  représentent les valeurs extrêmes du tenseur des contraintes  $\sigma$ .

Dans le cas du mode mixte I et II on peut écrire [11]:

**équation 7:**

$$\Delta S_{\min} = \frac{1}{16\pi G} [a_{11}(K_{I\max} - K_{I\min}) + 2a_{12}(K_{I\max}K_{II\max} - K_{I\min}K_{II\min}) + a_{22}(K_{II\max} - K_{II\min})]$$

Lorsque le problème fait intervenir les trois modes de propagation,  $\Delta S_{\min}$  doit être complété par le terme correspondant au mode III. Cette loi résout les deux problèmes de la loi de Paris précédemment énoncés. Les résultats expérimentaux sous forme d'un diagramme  $(\frac{da}{dN}, \Delta S)$  et non plus  $(\frac{da}{dN}, \Delta K)$  montre que la dispersion due au niveau moyen de sollicitation a totalement disparu [11].

Les lois de Sih et de Paris ne sont pas satisfaisantes du point de vue de la prise en compte des véritables mécanismes de la propagation d'une fissure de fatigue. En

effet ces deux lois ne sont que des lois empiriques qui traduisent les corrélations mathématiques des résultats expérimentaux, d'où la nouvelle approche énergétique de Chakrabarti [11]. L'approche énergétique de Chakrabarti [11] est basée sur le concept suivant : l'énergie reçue par le système (corps fissuré) pendant le temps  $\Delta t$  durant lequel la fissure progresse d'une longueur  $\Delta a$  doit au moins égaler l'énergie dissipée sous forme calorifique augmentée de l'énergie de plastification en fond de la fissure et de l'énergie de formation de surface libre (propagation de la fissure).

Ce concept énergétique, qui est identique à celui utilisé par Griffith [11] en 1920, s'exprime par l'équation 8 :

$$\text{équation 8: } \Delta W \geq \Delta W_d + \Delta W_p + \Delta W_s$$

L'énergie reçue par le système s'évalue à partir de l'aire limitée par les boucles d'hystérésis. L'estimation des autres termes requiert l'introduction des paramètres ci-après :

$$\frac{dW_p}{dZP} = \bar{W}_p : \text{ la densité volumique d'énergie de plastification,}$$

$\Delta ZP$  : l'accroissement volumique de la zone plastique lors d'un allongement  $\Delta a$  de la fissure,

$$\frac{dW_s}{dSL} = \bar{W}_s : \text{ la densité volumique d'énergie de formation d'une surface libre}$$

$\Delta SL$  : l'accroissement de la surface libre lors d'un allongement  $\Delta a$  de la fissure.

Supposant que la fréquence du chargement constante durant l'intervalle  $\Delta t$  l'équation 8 devient :

$$\text{équation 9: } \int_{N_1}^{N_2} \frac{dW}{dN} dN \geq \int_{N_1}^{N_2} \left( \frac{dW_d}{da} + \frac{dW_p}{da} + \frac{dW_s}{da} \right) \frac{da}{dN} dN$$

L'introduction de  $W_p$  et  $W_s$  conduit à :

$$\text{équation 10: } \frac{da}{dN} = \frac{\int_{N_1}^{N_2} \frac{dW}{dN} dN}{\int_{N_1}^{N_2} \left( \frac{dZP}{da} \bar{W}_p + \frac{dSL}{da} \bar{W}_s + \frac{dW_d}{da} \right) dN}$$

Il faut prendre en considération que, les développements qui ont abouti à l'équation 10, doivent respecter les conditions de continuité et que les fonctions mises en jeu sont dérivables aux sens usuels. Dans le cas contraire ces fonctions seront continues et dérivables aux sens des distributions. Le numérateur de l'équation 10 peut s'écrire

comme la somme des énergies reçues lors de chaque cycle  $\sum_{i=N_1}^{N_2} W_i$ . Quant au

dénominateur, il s'écrit :

$$\int_{N_1}^{N_2} n r_p \xi' \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{r_{pf}}{r_p} \right)^2 \right] \frac{\sigma_e + \sigma_u}{2} (\varepsilon_e + \varepsilon_u) + \left( \frac{r_{pf}}{r_p} \right)^2 \frac{\sigma_f + \sigma_u}{2} (\varepsilon_f + \varepsilon_u) \right\} dN + \int_{N_1}^{N_2} \frac{e \xi K_{IC}^2}{E} (1 + \gamma^2) dN$$

où :

$$n = 1 + \frac{\Delta W_d}{\Delta W_p}$$

$r_p$  et  $r_{pf}$  : tailles des zones plastiques en chargements monotones et cycliques

$e$  : l'épaisseur de la tôle

$\xi$  et  $\xi'$  : les facteurs de « turtuosité » de la fissure, applicables pour corriger  $\Delta SL$  et

$\Delta PZ$ ,

$\sigma_e$  : la limite d'élasticité,

$\sigma_u$  : la résistance ultime,

$\sigma_f$  : la contrainte de rupture,

$\varepsilon_e$  : la déformation à la plastification,

$\varepsilon_u$  : la déformation plastique uniforme,

$\varepsilon_f$  : la déformation locale à la rupture ( $= l_n \frac{A_0}{A_f}$ ),

$E$  et  $\gamma$  : le module d'Young et coefficient de poisson.

Bien que cette approche possède l'inconvénient de recourir à de nombreux facteurs, elle possède aussi l'avantage d'être fondée sur une base rationnelle.

La rupture finale se produit lorsque la fissure atteint une longueur telle que sous le chargement maximal  $\sigma_{\max}$  soit réalisée dans les conditions nécessaires à son instabilité. Dans le cas de l'utilisation de la loi de Paris, ceci se produit pour une longueur  $a_f$  telle que :

$$K(\sigma_{\max}, a_f) = K_{IC}$$

Si l'on a recours à la loi de Sih, la longueur critique  $a_f$  se calcule à partir de :

$$S_{\min}^{\max}(a_f) = S(\theta_0, \bar{\sigma}_{\max}, a_f) = S_{cr},$$

où  $S_{cr}$  est la densité critique d'énergie de déformation :

$$S_{cr} = S_{\min} = \frac{1-2\nu}{4\pi G} K_{IC}^2,$$

avec  $G$  est le module d'élasticité de cisaillement et  $\nu$  le coefficient de poisson. Des valeurs de  $S_{cr}$  pour divers alliages sont fournies par le tableau 3. Le nombre de cycles

$N_p$  ainsi déterminé auquel s'ajoute éventuellement le nombre de cycle d'initiation  $N_i$ , fournit la durée de vie de la pièce considérée.

Dans le cas réel, les sollicitations sont aléatoires et complexes qui nécessitent des modélisations par des processus stochastiques. Soize [11] a explicité les conditions que la loi de Miner peut être étendue à la fatigue sous sollicitations aléatoires sous la forme :

$$\text{équation 11: } D = \int_{\sigma_0}^{+\infty} \frac{n(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma$$

**tableau 3.** Valeurs numériques des paramètres mécaniques pour différents alliages [11].

Matériau	Résistance Ultime (MPa)	$K_{IC}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$S_{cr}$ (J/m <sup>3</sup> )
Acier : A517F	827	186,8	16078
Acier : AISI4130	1172	109,9	5808
Alliage d'aluminium 2014-T651	483	25,3	619
Alliage d'aluminium 2024-T851	448	25,3	619

Il peut s'agir d'une excitation sinusoïdale d'amplitude constante  $F = F_{\max} \sin(\omega t)$ , produisant un profil de contrainte variant dans l'espace et dans le temps provoquant par l'intermédiaire d'un système d'amortissement un signal d'amplitude variable comme dans le cas du système de suspension de l'automobile. Il peut aussi s'agir d'une excitation quelconque dont l'amplitude est aléatoire. Il est donc nécessaire, en chaque point du matériau, de connaître la déformation et les pics de la contrainte locale pour chaque cycle identifié sur le chargement aléatoire. Ainsi, plusieurs chercheurs [12, 13,

14, 15] utilisent l'algorithme «rainflow» pour compter les pics, les identifier en l'associant à chaque sous cycle, pour calculer les paramètres des lois empiriques donnant le nombre de cycle à la rupture. S. Cervello *et al.*[16], ont analysé et étudié le design des roues des voies ferrées à faible bruit. La procédure numérique a été utilisée pour le calcul du facteur de perte. Cette procédure vérifiée sur des plaquettes par des moyens d'analyses modales expérimentales, a permis un meilleur traitement de la finesse et l'arrangement à choisir parmi ceux disponibles commercialement et faisables en technologique. Un autre type de fatigue peut intervenir, il s'agit de la fatigue oligocyclique. En effet par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée en général d'un durcissement notable du métal. On peut situer ce domaine depuis la contrainte correspondant à la limite élastique macroscopique jusqu'à celle correspondant à la charge de rupture statique du métal considéré, sollicité dans les mêmes conditions. La loi de Manson-Coffin [11] intervient dans ce cas.

A. Elmarakbi *et al.*[17], ont étudié la validité du critère multiaxial de fatigue ; cela est basé sur la densité d'énergie de tension. L'analyse tridimensionnelle par éléments finis sur l'axe d'entaille de "Society of Automotive Engineering" (SAE), est utilisée comme une composante de test pour évaluer le critère de dommage multiaxial par fatigue. Les réponses élastiques et élastiques-plastiques de la contrainte/déformation sont utilisées pour obtenir les paramètres du dommage qu'éventuellement seront utilisées pour prédire la durée de vie des structures ou des composantes. A. Elmarakbi *et al.*[17], proposent un modèle pour évaluer les capacités prédictives de plusieurs théories de fatigue multiaxial, tel que la flexion, torsion ou des tests de combinaison de flexion-torsion, qui ont été réalisés par (SAE) en utilisant l'axe d'entaille. Un domaine

du cycle de charge est à mentionner, c'est lorsque la contrainte plastique intervient durant chaque cycle. Ce domaine est associé à des charges élevées et des courtes durées de vie ou des bas cycles de fatigue. L'autre domaine du cycle de charge est associé aux cycles de contraintes qui sont confinées au domaine élastique pour des durées de vie longues.

Ces mêmes auteurs.[17], proposent un modèle pour évaluer les capacités prédictives de plusieurs théories de fatigue multiaxiale, tel que la flexion, torsion ou des tests de combinaison de flexion-torsion, qui ont été réalisés par "Society of Automotive Engineering" (SAE) utilisant l'axe d'entaille. Le premier objectif était de calculer les contraintes locales et les déformations de l'axe d'entaille par la MEF en utilisant le logiciel d'analyse par la méthode des éléments finis Abaqus. Pour l'analyse élastique-plastique, le profil non linéaire est donné par l'équation 12 :

$$\text{équation 12: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

où  $K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon'^{n'}}$  : le coefficient de la limite d'endurance,  $n' = \frac{b}{c}$  est l'exposant de la dureté cyclique,  $\sigma'_f$  est le coefficient de la résistance à la fatigue,  $c$  l'exposant de la ductilité de la fatigue,  $b$  est l'exposant de la résistance à la fatigue et  $\varepsilon'_f$  est coefficient de la ductilité de la fatigue.

L'énergie totale de déformation par unité de volume au niveau de la région critique, peut être obtenue à partir du modèle en éléments finis tridimensionnels. Il faut obtenir un équivalent de déformation uniaxiale à partir de la densité d'énergie de déformation totale qu'on peut obtenir de l'analyse contrainte/déformation multiaxiale.

Autrement dit, trouver la déformation uniaxiale équivalente qui cause la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. Deux approches sont possibles : la densité d'énergie obtenue par l'analyse élastique et l'autre par l'analyse élastique-plastique.

D'autres chercheurs [17], ont montré que pour les entailles profondes, comme dans le cas de la déformation plastique localisée, la distribution de l'énergie dans la zone plastique est aussi la même que les matériaux élastiques linéaires. Ceci veut dire qu'en présence de déformation plastique localisée à petite échelle, le profil élastique linéaire grossier du matériau entoure la déformation de l'entaille de contrôle dans la zone plastique. Ainsi, on peut conclure que la densité d'énergie  $U_\sigma$  due au champ contrainte/déformation élastique-plastique local, est approximativement égale à la densité d'énergie  $U_s$  due au champ contrainte/déformation élastique [17] :

$$\text{équation 13: } U_s = U_\sigma, \text{ ou } \int_0^{\epsilon_{ij}} S_{ij} d\epsilon_{ij} = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Dans cette méthodologie l'analyse élastique tridimensionnelle du modèle par élément finis a été utilisée et la densité totale de l'énergie de déformation dans la majorité de la région critique est déterminée par la sommation des contributions de toutes les composantes contrainte/déformation. Ceci est utilisé pour calculer la déformation équivalente correspondant à la densité d'énergie qui compose les composantes plastique et élastique dans le cas uniaxial [17]. Ceci veut dire que la valeur de la densité d'énergie de déformation obtenue à partir de l'analyse en MEF tridimensionnelle est égalisée à la densité d'énergie uniaxiale qui compose l'énergie de déformation plastique et élastique. La formulation mathématique de cette méthodologie est la suivante :

l'énergie totale de la déformation uniaxiale par unité de volume, peut-être obtenue par une intégration :

$$\text{équation 14: } U = U_e + U_p = \int \sigma d\varepsilon$$

on sait que :

$$\text{équation 15: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

ainsi :

$$\text{équation 16: } \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}}$$

Alors que l'équation 14 devient :

$$\text{équation 17: } U = \int \sigma \left( \frac{1}{E} + \frac{\sigma^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}} \right) d\sigma$$

après simplifications ;

$$\text{équation 18: } U = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma}{n'+1} \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

la résolution de l'équation 18 permet d'obtenir la contrainte requise pour produire la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. En substituant la contrainte dans l'équation 15, la déformation correspondante est obtenue. Ayant la déformation, la prédiction de la fatigue est possible en utilisant l'équation 19 de Manson-Coffin [17] :

$$\text{équation 19: } \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où  $\Delta\varepsilon$  est l'intervalle de déformation,  $\sigma'_f$  est le coefficient de la résistance à la fatigue,  $N$  le nombre de cycle,  $E$  est le module de Young,  $c$  l'exposant de la ductilité de la

fatigue,  $b$  est l'exposant de la résistance à la fatigue et  $\varepsilon'_f$  est le coefficient de la ductilité de la fatigue. Les résultats montrent qu'il est clair que cette méthodologie surestime la durée de vie dans la région des bas cycles de fatigue, car la déformation plastique n'est pas comptée proprement. Il faut noter que cette méthodologie est basée sur le fait que la déformation plastique est une petite fraction de la déformation totale, c'est pour cela que cette méthode délivre de bonnes estimations dans les régions à haut cycle de fatigue où la déformation élastique contrôle les processus de dommage par fatigue. Donc cette méthodologie n'est pas unique comme outil de prédiction à bas cycle et haut cycle de fatigue.

A. Elmarakbi *et al.*[17] ont testé une autre méthodologie pour prédire la durée de vie de l'axe d'entaille par la densité d'énergie, basée sur le champ élastique-plastique. Dans cette méthodologie, l'analyse inélastique du modèle tridimensionnelle par la MEF est utilisée et la densité d'énergie  $U$  (élastique et plastique) au niveau de la majorité de la région critique est prédite en prenant en considération les contributions de toutes les composantes contrainte/déformation. C'est-à-dire :

$$\text{équation 20: } U = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Il est important de noter que les densités d'énergie de déformation pour différentes charges sont facilement obtenues à partir des données des fichiers du logiciel Abaqus [17]. Les valeurs de la densité d'énergie obtenues sont utilisées après, pour définir la déformation uniaxiale équivalente, comme expliqué auparavant pour la méthode de l'énergie élastique. Cette méthodologie, qui est basée sur le critère d'énergie de déformation calculée par le champ contrainte/déformation élastique-plastique, délivre des résultats plus précis que celle calculée le champ contrainte/déformation élastique.

Cette performance dans la prédiction de la durée de vie est due au fait que la déformation plastique est comptée avec précision en utilisant l'analyse élasto-plastique.

Mars W.V. [18], se base sur le même critère utilisé par A. Elmarakbi *et al.* [17], en l'occurrence la densité d'énergie de fissuration. Mars W.V. [18], a réalisé des tests de fatigue, tension-torsion, et a comparé les résultats avec le critère de densité d'énergie. Les modèles envisagés pour prédire la durée de vie de particules de caoutchouc, suivent deux approches : une approche focalisée sur la durée de l'initiation de la fissure donnant l'historique de quelques paramètres tels que l'état des contraintes et des déformations qui sont définis dans un point matériel. L'autre approche, basée sur des idées de la mécanique de la rupture, s'intéresse à la prédiction de la propagation des fissures particulières, donnant l'historique du taux d'énergie dégagée. Mars W.V [18] a opté pour l'approche de la propagation de la fissure, car l'approche de l'initiation de la fissure reçoit moins d'attention dans la littérature. Cette dernière est avantageuse pour l'analyse lorsque l'historique mécanique est donnée en terme d'entités qui sont définies à un point matériel, sans donner de considération explicite aux fissures individuelles [18].

L'approche de la propagation de la fissure a été développée par Rivlin et Thomas, selon la référence [18], qui ont appliqué le critère de Griffith au caoutchouc. La difficulté de l'application de l'approche de la propagation de la fissure sur le caoutchouc c'est qu'elle exige d'avance la connaissance de la location initiale et l'état de la fissure qui provoque la rupture finale. Le changement de la géométrie doit être pris en considération aussi. Pour un petit flux de chargement simple en tension étendu,

le taux d'énergie de déformation dégagée peut être écrit sous forme d'un produit de la densité d'énergie  $W$  et la longueur de la fissure  $c$  :

$$\text{équation 21: } T = 2kWc$$

où  $k$  est une constante de proportionnalité qui dépend faiblement de la déformation et le chiffre 2 montre qu'une surface à deux faces d'énergie. L'équation 21 utilisée par Mars W.V. [18] ne tient pas compte de l'énergie de plastification et de l'énergie dégagée sous forme de chaleur, considérant ainsi le caoutchouc comme un matériau purement élastique et que la propagation de la fissure est athermique.

En plus du modèle déterministe de A. Elmarakbi *et al.*[17], utilisé dans la présente étude on trouve dans la littérature d'autres modèles qui couvrent l'aspect aléatoire du phénomène de la fatigue. Par exemple, Asok R. *et al.* [19], ont proposé un modèle stochastique pour étudier la propagation de la fissure par fatigue dans les matériaux métalliques. C'est un domaine de recherche relativement récent. En effet, une liste extensive de la littérature technique de cette méthode est citée par Sobczyk et Spencer, alors que les applications récentes de cette dernière dans la mécanique de rupture sont présentées par Scheller, selon la référence [19]. La même référence [19] ajoute qu'une des approches de la modélisation par des processus stochastiques de la croissance de la propagation de la fissuration par fatigue, est de rendre aléatoire les coefficients du modèle déterministe pour représenter l'inhomogénéité du matériau proposé par Ditlevson et Olsen. Asok R. *et al.* [19], ont rapporté une autre approche, proposée par Lin et Yang en 1985 et Spencer en 1989 : il s'agit de générer l'information stochastique nécessaire en multipliant la dynamique déterministe de la

croissance de la fissuration par fatigue avec un processus aléatoire non négatif (strictement positif).

Asok R. *et al.* [19], ont utilisé le modèle de la distribution log-normal de la longueur de la fissure "lognormal distributed crack length (LDCL)" et ils ont vérifié les prédictions du modèle par des données expérimentales de la croissance de la fissure par fatigue réalisées par d'autres chercheurs pour les alliages d'aluminium 2024-T3 et 7075-T6. Ce modèle stochastique est construit à partir d'un modèle déterministe de la croissance de la fissure par fatigue qui est basé sur le principe de la croissance de la fissure, développé par Newman en 1981. Le modèle de Newman, selon Asok R. *et al.* [19], représente la valeur moyenne du processus de la croissance de la fissuration par fatigue jusqu'aux microfissures de l'ordre de la taille par défaut du matériau et qui a la forme suivante :

$$\text{équation 22: } d\mu_c(t) = C(\Delta K_{eff})^m dt; \quad \mu_c(t_0) > 0; \quad t \geq t_0$$

$$\text{équation 23: } \Delta K_{eff} = (S_{max} - S_0) \sqrt{\pi \mu_c} F$$

où  $\mu_c(t) \equiv E[c(\omega, t) |_{c(\omega, t_0) = \mu_{c_0}}]$  est la valeur prévue du processus  $c(\omega, t)$  de la longueur de la fissure conditionnée par la longueur initiale de la fissure  $c(\omega, t_0)$  ; l'échantillon testé est représenté par  $\omega$  ; le temps  $t$  est exprimé en terme de nombre de cycle,  $t_0$  est le temps initial ;  $d\mu_c$  est la différentielle de  $\mu_c$ ,  $\Delta K_{eff} = \frac{d\mu_c}{dt}$  ;  $S_{max}$  est la contrainte de contrôle maximale ;  $S_0$  est la contrainte d'ouverture de la fissure et  $F$  est le facteur de correction de la configuration géométrique. Le modèle LDCL proposé par Asok R. *et al.* [19], est semblable à la loi universelle de Paris, n'illustre que le caractère aléatoire du

comportement du matériau. Dans une autre publication, Asok R. et Ravindra P.[20] ont utilisé un modèle stochastique basé sur des observations expérimentales et la structure d'un modèle déterministe de l'espace d'état avec deux variables d'états, en l'occurrence la longueur de la fissure et la contrainte d'ouverture. En effet, ces derniers auteurs [20] ont postulé une équation gouvernant la propagation de la fissuration par fatigue dans un aspect aléatoire semblable à ce qu'a été originalement développé par Paris P.C. et Erdogan F en 1963. Par ailleurs, Asok R. et Ravindra P.[21] ont présenté le code informatique d'un modèle dynamique non linéaire de l'espace d'état pour étudier la croissance de la fissuration par fatigue dans les alliages ductiles.

Bruzzi M.S. et McHugh P.E. [22] ont développé une méthodologie informatique pour modéliser le comportement de la croissance des petites fissures par fatigue pour les alliages forgés 2124-T4-Al et l'alliage d'aluminium de fonderie 359-T6-Al. En particulier, corrélent les conditions locales de la force motrice du bout de la fissure pour une fissure initiale avec une courbe expérimentale du taux de croissance d'une longue fissure [22], en utilisant la fermeture de fissure. En effet, le bout de la fissure a été modélisé par la méthode des éléments finis et le paramètre de corrélation,  $\Delta J_{eff}$  (la gamme effective de l'intégrale-J, équation 24 ), est calculé.

**équation 24:**

$$\Delta J_{eff} = \frac{(U\Delta K)^2}{E'} \left\{ 1 + \frac{Y^2}{C_2} \left( \frac{n-1}{n+1} \right) \left[ \frac{(\sigma_{\infty}^{\max} / \sigma_0)^2}{1 + (\sigma_{\infty}^{\max} / \sigma_0)^2} \right] \right\} + 4\alpha\sigma_0\varepsilon_0 ah_1 U \left( \frac{\Delta\sigma_{\infty}}{2\sigma_0} \right)^{n+1}$$

où  $\Delta K$  est la gamme de la valeur nominale du facteur d'intensité de contrainte =  $K_{\max} - K_{\min}$ , Bruzzi M.S. et McHugh P.E. [22] ne prennent pas en considération  $\Delta K_{eff}$  car il s'agit de petites fissures et négligent la zone plastique même si d'autres auteurs

[22], cités par ces derniers, assument que l'intégrale- $J$ , qui est une approche du défaut toléré dans la structure, caractérise le comportement élastique-plastique de la croissance de la fissuration par fatigue ;  $U = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{open}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K}$  est le rapport de la gamme des contraintes effectives ;  $\sigma_{open}$  est la contrainte pour laquelle la surface de la fissure devient complètement séparée durant le chargement ;  $\sigma_{open} \geq \sigma_{\min}$  dû à la fermeture de la fissure ;  $C_2 = 6$  pour les déformations planes ;  $Y$  est défini comme étant le terme de géométrie collective dans l'expression de  $K$  élastique  $K = Y\sigma_{\infty}^{\max} \sqrt{\pi a}$  ;  $\sigma_{\infty}^{\max}$  la valeur maximale du champ étendu de contrainte,  $a$  est la longueur de la fissure ;  $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$  est le module élastique effectif,  $E$  le module de Young,  $\nu$  est le coefficient de poisson ; les coefficients  $\alpha$ ,  $\varepsilon_0$ , et  $\sigma_0$  et l'exposant de durcissement  $n$  sont les paramètres de la relation constitutive de Ramberg-Osgood;  $h_1$  est un facteur sans dimension.

Zhang J.Z. *et al.*[23], ont utilisé l'analyse élastique-plastique par la méthode des éléments finis pour des fissures sous chargement en mode I dans de petite et large échelle. La taille de la zone plastique du bout de la fissure, le profil de l'ouverture de la fissure et la distribution de la déformation plastique en avant du bout de la fissure pour des petites fissures, 0,1 mm, et pour des longues fissures, 0,2, 0,4, 1 et 2 mm, ont été étudiés. L'analyse montre que la taille de la zone plastique du bout de la fissure, la déformation plastique du bout de la fissure et les déplacements d'ouverture du bout de la fissure sont plus grands pour les petites fissures que pour les longues fissures, pour le même niveau du facteur d'intensité de contrainte nominale. L'étude expérimentale [23] de la croissance des petites et longues fissures pour l'alliage d'aluminium ultra fin IN9052, montre que les petites fissures se propagent plus vite que les longues fissures,

par fatigue, pour la même gamme du facteur d'intensité de contrainte. Cependant, si les taux de croissance des petites et longues fissures par fatigue sont corrélés à la taille de la zone plastique, alors leurs valeurs tombent dans le même intervalle. Le critère de déformation utilisé dans ce programme est celui de Von Mises et la règle de l'écoulement utilisée dans la relation Prandtl-Ruess, selon la référence [23]. En se basant sur l'analyse en éléments finis, Zhang J.Z. *et al.*[23] ont développé l'équation 25 pour décrire la propagation maximale de la taille de la zone plastique :

**équation 25:**

$$r_{\max} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + 2.5 \left[ \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2 + 4 \left[ \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^4 \right\} \left[ \frac{K_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2, \text{ pour } 0 < \sigma_{\max} < 0.9\sigma_{ys}$$

où  $\sigma_{\max}$  est la valeur maximale de la contrainte appliquée,  $\sigma_{ys}$  est la limite d'élasticité conventionnelle et  $K_{\max}$  la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte. Lorsque le niveau maximale de la contrainte appliquée est faible comparé à la limite d'élasticité conventionnelle,  $\sigma_{ys}$ , du matériau, les deux termes contenant  $\sigma_{\max}$  peuvent être ignorés et l'équation 25 devient :

**équation 26:** 
$$r_{\max} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{K_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2$$

L'équation 26 constitue la relation d'Irwin, basée sur les distributions de contrainte élastique en avant du bout de la fissure [23]. L'équation 26 s'applique uniquement lorsque la longueur de la fissure et la contrainte appliquée sont basses. En contraste par rapport à d'autres modèles de la prédiction de l'endurance d'une pièce qui ont été basés sur des lois de type Paris, de-Andréas A. *et al.*[24], ont utilisé une loi de l'élément

cohésive. Dans cette approche, la création de nouvelles surfaces est le résultat final d'un processus de perte graduelle de l'élasticité lorsque la séparation augmente. Dans le cadre général, de-Andréas A. *et al.*[24] ont considéré qu'un corps occupant une configuration initiale  $B_0 \subset R^3$ . Le corps subit la transformation  $\varphi : B_0 \times [0, T] \rightarrow R^3$ , où  $[0, T]$  est l'intervalle de temps écoulé. Considérant  $\mathbf{F}$  le gradient de déformation et  $\mathbf{P}$  le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff. de-Andréas A. *et al.*[24] ont supposé qu'une surface cohésive  $S_0$ , de vecteur unitaire normal  $\mathbf{N}$  traverse le corps. Cette surface divise le corps en deux sous corps  $B_{0\pm}$  avec une couche positive et une couche négative. La puissance communiquée au corps par la force de volume  $\rho_0 \mathbf{b}$  et la force de traction frontalière  $\mathbf{t}$  est :

$$\text{équation 27: } \dot{W} = \sum \int_{B_{0\pm}} \rho_0 \mathbf{b} \varphi dV_0 + \sum \int_{\partial B_{0\pm}} \mathbf{t} \varphi dS_0$$

la force de volume s'exerce sur le corps au complet de masse volumique  $\rho_0$  et la force de volume frontalière est une tension surfacique s'exerçant sur le contour  $\partial B_{0\pm}$  du domaine  $B_{0\pm}$ . La somme  $\sum$ , se fait sur les deux parties du corps formées lorsque la surface cohésive  $S_0$  le traverse. Le modèle de l'élément cohésif est couplé avec la loi de Miner, théorie de la fatigue des matériaux gouvernée par le dommage cumulatif, pour déterminer la durée de vie. de-Andréas A. *et al.*[24] ont conclut que l'élément cohésif gouverne la séparation des flancs de la fissure qui en accord avec la loi cohésive irréversible, éventuellement amenant à la formation de surfaces libres, compatible avec la discrétisation en éléments finis conventionnelle de la majeure partie du matériau. Ce qui est attrayant dans cette théorie, selon de-Andréas A. *et al.*[24] c'est qu'elle ne présuppose pas une réponse particulière des réponses constitutives du matériau,

l'étendue de la croissance de la fissure ou la taille de la zone plastique. La forme et la location des fronts des fissures sont des résultats des calculs [24].

Visvanatha S.K. *et al.*[25, 26, 27] ont utilisé des méthodes de prédiction de la déformation incluant la règle de Neuber dans sa forme originale et sa forme généralisée, la méthode de la densité d'énergie de déformation équivalente et l'analyse en élément finis utilisant le code Abaqus. Selon les références [25] et [28] Neuber avait montré que pour un corps prismatique subissant une déformation par cisaillement avec une loi contrainte/déformation non linéaire arbitraire, la moyenne géométrique de la contrainte et des facteurs de concentration de déformation  $K_\sigma$  et  $K_\varepsilon$  est égale au facteur de concentration de contrainte théorique,  $K_t$  :

$$\text{équation 28: } K_t^2 = K_\sigma K_\varepsilon$$

où  $K_\sigma$  est le rapport de la contrainte fondamentale  $\sigma$  et la section nette  $S$  de la contrainte nominale.  $K_\varepsilon$  est le rapport de la déformation fondamentale d'entaille  $\varepsilon$  et la section nette  $e$  de la déformation nominale. Ainsi la loi de Neuber s'écrit :

$$\text{équation 29: } \sigma\varepsilon = K_t^2 Se$$

généralement la loi de Neuber s'écrit en terme de gamme de contrainte et de déformation :

$$\text{équation 30: } \Delta\sigma\Delta\varepsilon \cong \frac{(K_t\Delta S)^2}{E}$$

le terme de droite de l'équation 30 est calculé pour trouver  $\sigma\varepsilon$  et après  $\sigma$  est déterminé à partir de la courbe  $\sigma\varepsilon$  versus  $\sigma$  qui dérive du diagramme cyclique déformation/contrainte. Visvanatha S.K. *et al.*[25] rapporte que Neuber a développé

son travail original pour un profil d'entaille hyperbolique sous un cisaillement monotone bidimensionnel mais a donné aussi des suggestions pour généraliser la formulation pour les états de contraintes arbitraires, comme le modèle de Hoffmann et Seeger.

Une autre relation approximative a été envisagée par Visvanatha S.K. *et al.*[25, 29] en l'occurrence la densité d'énergie de déformation équivalente (*DEDE*) pour remplacer la règle de Neuber, proposée par Molski et Glinka. Dans cette approche, on suppose que la densité d'énergie de déformation au niveau de l'entaille fondamentale ne change pas significativement si la plasticité locale est entourée par un domaine élastique prédominant. Autrement dit, le calcul de la densité d'énergie de déformation au niveau de l'entaille principale produit les mêmes résultats pour la loi des matériaux élastiques et élastiques-plastiques. La relation (*DEDE*) à la forme suivante :

$$\text{équation 31: } \frac{1}{2} \frac{(K_t S)^2}{E} = \int_0^\varepsilon \sigma_{(\varepsilon)} d\varepsilon$$

où  $E$  est le module élastique,  $\sigma_{(\varepsilon)}$  est la contrainte de l'entaille fondamentale qui est une fonction de la déformation de l'entaille fondamentale  $\varepsilon$ . Le membre gauche de l'équation 31 est évalué en utilisant une technique intuitive pour trouver un point sur la courbe cyclique, déformation-contrainte. Visvanatha S.K. *et al.*[25] Glinka *et al.* rapportent que le modèle (*DEDE*) est supérieur à la règle de Neuber lorsqu'on veut prédire les déformations et les contraintes élastiques-plastiques de l'entaille. Il a été suggéré que les estimations faites à partir du modèle (*DEDE*) de Glinka et la règle de Neuber, vont donner les bornes inférieures et supérieures de la déformation locale qui peuvent être utilisées pour coller avec la prédiction de l'endurance [25]. Visvanatha

S.K. *et al.* [25], ont prédit la durée de vie par la méthode de la déformation locale pour deux lots d'alliages d'aluminium 7050-T7451, un avec un bas  $K_t$  de 1,4 (*S.I*) et l'autre avec un haut  $K_t$  de 3,25 (*S.I*), sous deux différents spectres de chargement. Les comparaisons montrent que la technique d'estimation de la déformation influence légèrement la précision de la prédiction comparée aux données expérimentales. Les mêmes chercheurs [25] ont aussi trouvé une différence significative dans la précision relative de la prédiction entre les lots à haut  $K_t$  et ceux dont les valeurs de  $K_t$  sont basses. Cette différence a été attribuée aux différentes proportions de temps utilisées dans l'initiation et la propagation de la fatigue pour les deux lots. D'autres chercheurs [30, 31, 32, 33] ont pris en considération les contraintes résiduelles. Les contraintes résiduelles apparaissent lorsque les pièces sont obtenues par moulage, forgeage, travail à chaud, coulage. Ces contraintes sont d'origine mécanique ou thermique. Dans l'analyse de rupture, les contraintes résiduelles sont souvent comme principale cause de bris. La réduction des contraintes résiduelles se fait généralement par un traitement thermique ou par la méthode de relaxation par vibration. Les contraintes résiduelles, d'origine mécanique, en compression sont bénéfiques [5], lors du phénomène de fatigue, cependant elles peuvent aussi endommager la pièce lorsque les efforts de traction sont très importants. Généralement les modèles empiriques de fatigue tiennent compte indirectement des contraintes résiduelles, contrairement aux modèles numériques qui modélisent de tel paramètre.