

III.1.INTROUDUCTION

La modélisation théorique, permettant l'étude des performances de dispositifs, dispense le concepteur d'une expérience longue et coûteuse, dont le temps est un paramètre crucial. Il est de plus important d'un point de vue industriel de réduire les coûts de fabrication.

Dans le présent chapitre, nous allons présenter une méthode analytique qui nous permettra de calculer les grandeurs électromagnétiques, identifiants le comportement de la structure à étudier.

Dans un premier temps, nous allons décrire les différents éléments constitutifs de notre machine synchrone à aimants permanents, ainsi que ses caractéristiques.

Ensuite une modélisation de la machine à aimant sera établit pour les deux cas,

Modélisation de la machine sans tenir compte des encoches :

Modélisation de la machine en tenant compte des encoches :

On achève ce chapitre par la détermination de l'expression d'induction radiale et tangentielle dans les différentes zones constitutives de notre structure, à partir de l'expression du potentiel vecteur magnétique.

III.2. Description de la structure considérée

La machine considérée est à flux radiale. Les conducteurs de phase sont disposés dans des encoches statorique. La figure III.1 représente la structure générale de la machine ainsi que l'encoche considérée. Les notations qui y sont précisées sont reprises dans le tableau III.1.

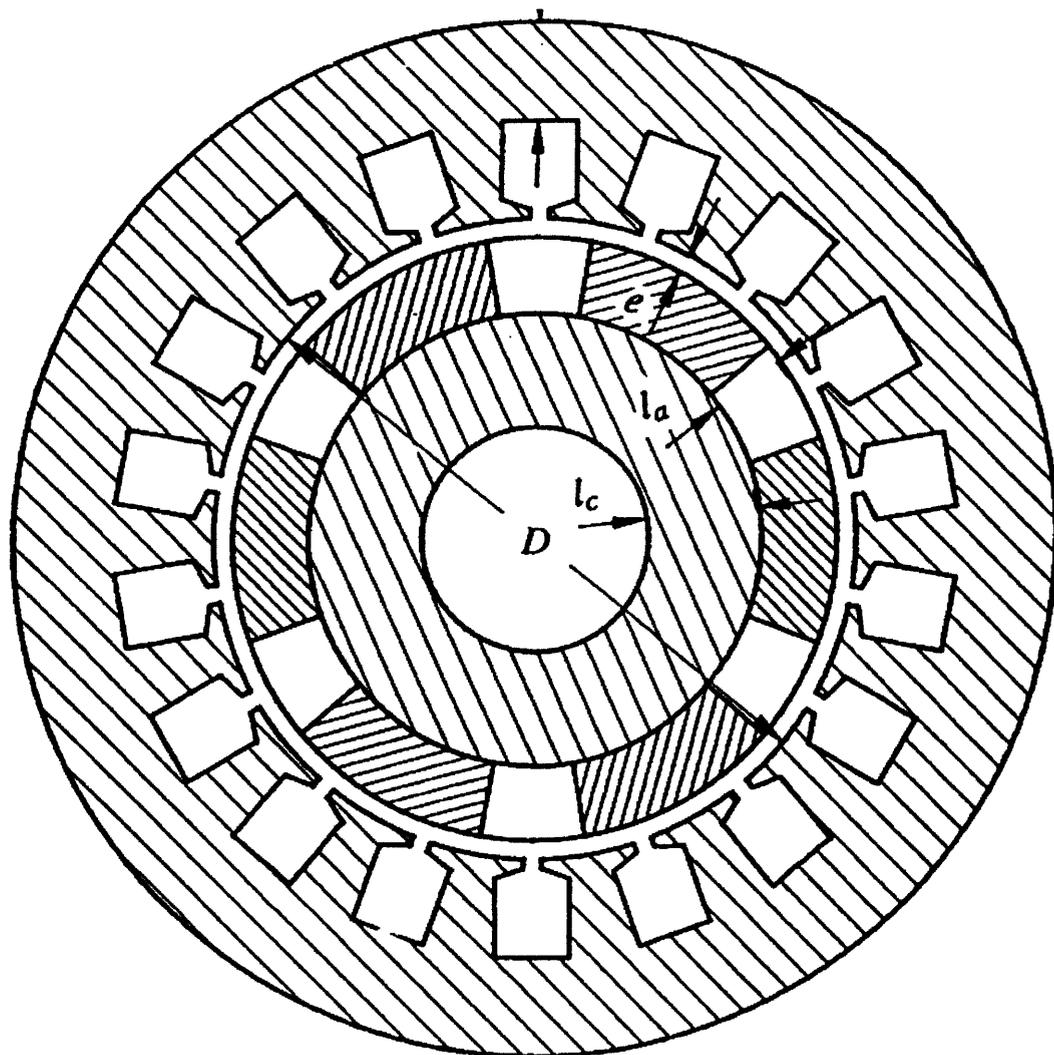


Figure III. 1 : Schéma structurel d'une machine synchrone à aimants permanents en surface

III.2.1.Hypothèses simplificatrices

Pour obtenir une solution analytique de champ, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

- le problème peut être décrit par un modèle en 2-D
- les matières sont linéaires
- les matériaux sont homogènes
- les termes sources sont invariants dans la direction normale à l'intérieur une région
- Les éventuelles pertes par courant de Foucault au rotor sont négligeables
- L'effet de denture négligeable
- les perméabilités du stator et du rotor sont supposées infinies, on négligera donc les effets de la saturation des matériaux magnétiques
- Dans le volume d'aimant, la perméabilité est supposée constante et égale la perméabilité de l'air

III.2.2.Modélisation de la structure

La méthode de modélisation considérée a été largement exploitée pour l'étude des machines à aimants permanents sans encoches qui fera l'objet de notre première partie d'application ensuite on va la généraliser pour modéliser la machine en tenant compte des encoches. Cette méthode est également intéressante dans un objectif de dimensionnement car elle fait intervenir directement les grandeurs dimensionnement de la structure.

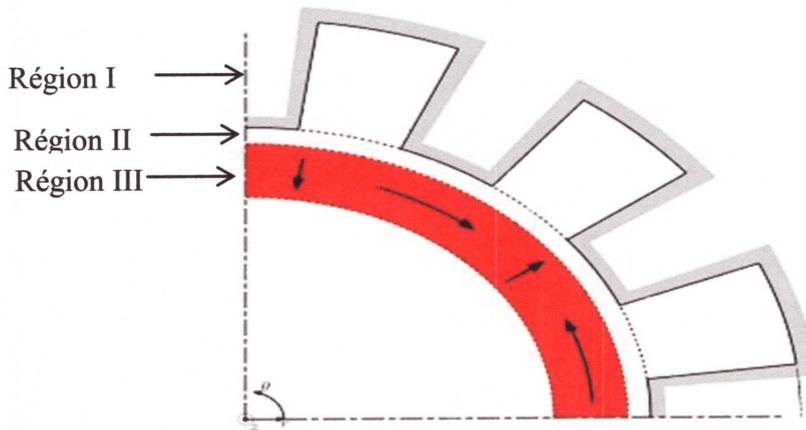
Elle est fondée sur la résolution **analytique** de l'équation du champ magnétique dans les différentes zones constitutives de la machine.

III.2.3.Principe de la modélisation

Le calcul analytique, en deux dimensions, que nous présentons ici s'applique aux structures électromagnétiques susceptibles d'être subdivisées en un certain nombre de zones concentriques, d'épaisseur et de perméabilité constantes, dans lesquelles sont disposés les matériaux magnétiques et où interviennent les sources du champ, aimants ou courants.

III.2.4. Modèle géométrique de la machine

Dans un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dont l'axe (\overline{oz}) est confondu avec l'axe de la machine, et à partir des hypothèses simplificatrices précédentes, La géométrie de la structure considérée et l'ensemble des variables définissant ses dimensions et caractéristiques sont respectivement sur la figure III.3 et le tableau III.1.



La figure III.2:Modèle géométrique de la machine

Variable	Dénomination	Quantité
L	Diamètre de la machine	$400.10^3(\text{mm})$
D	Diamètre d'alésage	$164.10^3(\text{mm})$
E	Entrefer mécanique	$3.10^{-3}(\text{mm})$
Lc	Epaisseur de la culasse	$12.10^{-3}(\text{mm})$
La	Epaisseur d'aimant	$10.10^{-3}(\text{mm})$
Pen	Profondeur d'encoche	10.10^{-3}
N_e	Nombre d'encoche/pole/phase	3
Ke1	Coefficient de remplissage	0.4667
m	Nombre de phase	3
B_r	L'induction rémanente	0.8(t)
P	Nombre de pair de pole	2
I	Densité de courant	(A)

Tableau III.1 : variables de dimensionnement considérée.

III.2.5.Mise en équations

Les lois constitutives des milieux considérés sont données, par les relations suivantes :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (III.1)$$

Où \vec{H} et \vec{B} désignent le champ et l'induction magnétique.

Les aimants magnétiquement rigides, actuellement employés dans les machines électriques, possèdent une caractéristique de désaimantation linéaire dans la zone normale d'utilisation.

Ils peuvent donc être représentés par l'équation :

$$\vec{B} = \mu_p \vec{H} + \vec{B}_r \quad (III.2)$$

où \vec{B}_r désigne l'induction rémanente qui est égale à l'aimantation à champ nul et que nous appellerons, pour simplifier dans ce qui suit, « aimantation ».

A partir de ces relations caractérisant les matériaux, on peut modéliser la structure en utilisant les équations de la magnétodynamique, en régime quasi-stationnaire :

$$\vec{J} = \overrightarrow{rot} \vec{H} \quad (III.3)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (III.4)$$

Où

\vec{J} : Densité volumique de courant

\vec{A} : Potentiel vecteur.

La forme générale de l'équation à résoudre est donc :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = \overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}_r}{\mu} \right) + \vec{J} \quad (III.5)$$

À partir de nos hypothèses simplificatrices, l'équation qui régit le modèle magnétodynamique dans chacune des 3 régions est donnée par :

$$\text{Région 1 : } \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu_p} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = \overrightarrow{rot} \left(\frac{\vec{B}_r}{\mu_p} \right) \quad (III.6)$$

$$\text{Région 2 : } \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = \vec{0} \quad (III.7)$$

$$\text{Région 3 : } \overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (III.8)$$

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

Le potentiel vecteur magnétique \vec{A} n'a plus qu'une seule composante non nulle A_z située dans la direction (oz). Dans ces conditions, l'équation vectorielle ci-dessus se réduit à la seule équation scalaire :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{r\rho}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{r\theta}) - \mu J \quad (\text{III.9})$$

$B_{r\rho}$: Composante radiale de l'induction rémanente.

$B_{r\theta}$: Composante tangentielle de l'induction rémanente.

Le principe du calcul analytique considéré ainsi à chercher l'expression du potentiel vecteur satisfaisant dans chaque zones du domaine d'étude, le second membre de l'équation se réduisant alors aux termes correspondant au type de source en présence.

$$\text{Région 1 : } \frac{\partial^2 A_z^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z^{(1)}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_{r\rho}}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_{r\theta}) \quad (\text{III.10})$$

$$\text{Région 2 : } \frac{\partial^2 A_z^{(2)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z^{(2)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Région 3 : } \frac{\partial^2 A_z^{(31)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(3)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z^{(3)}}{\partial \theta^2} = -\mu_0 J \quad (\text{III.12})$$

$$\vec{B}_r = B_{r\rho} \vec{\rho} + B_{r\theta} \vec{\theta} \quad (\text{III.13})$$

Dans notre cas $B_{r\theta} = 0$, car on a supposé que nos blocs sont aimantés radialement.

III.3.Modélisation des termes sources

Compte tenu de la périodicité de répartition des sources sur le pourtour de la machine, les termes correspondants peuvent s'exprimer sous forme de séries de Fourier, sur la variable θ .

III.3.1. Termes sources dûs aux aimants

La figure (III. 3) illustre la structure d'un pôle rotorique de notre machine et la représentation de l'induction rémanente, dans un référentiel lié au rotor.

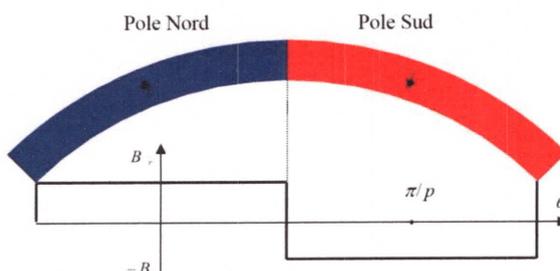


Figure III. 3 : induction rémanente dans le rotor

En coordonnées cylindriques l'induction rémanente en un point quelconque peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} B_{r\rho}(\theta_r) = B_r \\ B_{r\theta}(\theta_r) = 0 \end{cases} \quad \text{(III. 14)}$$

En vertu de l'origine choisie au référentiel rotorique, la fonction $B_{r\rho}(\theta_r)$ est paire. De plus elle est alternée (antipériodicité entre deux pôles voisins) sa décomposition ne fait donc pas intervenir les termes d'ordre pair.

Dans un référentiel fixe lié au stator de la machine, dont l'angle entre la première phase, prise comme origine au stator, et l'axe origine du rotor, est nul. La relation entre les coordonnées statorique θ et rotorique θ_r est donnée :

$$\theta = \theta_r + \Omega t \quad \text{(III. 15)}$$

Ω : Vitesse de rotation mécanique du rotor par rapport au stator.

La décomposition de la fonction $B_{r\rho}(\theta_r)$ en série de Fourier (sous sa forme complexe) dans ce référentiel statorique :

$$B_{r\rho}(\theta) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{rn} e^{jn p \theta} \right) \quad \text{(III. 16)}$$

Avec :

$$B_{rn} = 2 B_r \left(\frac{\sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)}{n \frac{\pi}{2}} \right) e^{-jn \Omega t} \quad \text{(III. 17)}$$

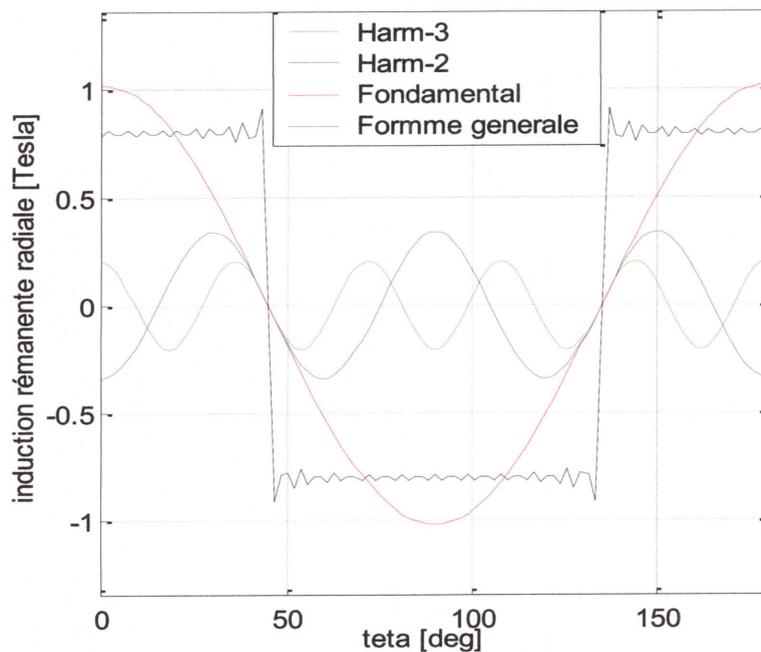


Figure III. 4 : répartition des harmoniques de l'induction rémanente

III.3.2. Termes sources dûs aux courants

On considère que la machine mise en œuvre :

- Un enroulement concentré à pas total (diamétral τ_c).
- L'induit a un nombre entier N_e d'encoche/pole/phase, dans lesquelles sont disposées les Q phases identiques (dans notre machine $N_e = 1$).
- Chaque encoche ne contenir que des conducteurs d'une même phase en une seule couche.

Sur la figure (III. 5) sont représentés les conducteurs de la première phase, d'un tel induit.

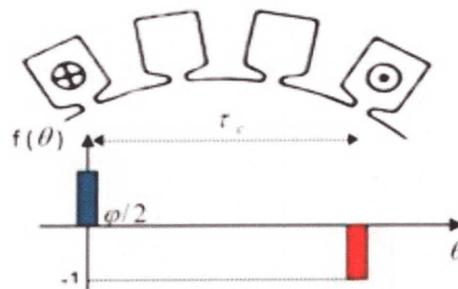


Figure III. 5 : répartition spatiale des conducteurs d'une phase

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

La densité linéique du courant de la première phase est donnée en fonction de la densité linéique de conducteurs de la première phase, et du courant qui la parcourt, comme suit :

$$J_1(\theta, t) = C_1(\theta) I_1(t) \quad (\text{III. 18})$$

$$C_1(\theta) = f_1(\theta) \frac{N_{CE}}{R_c \varphi} \quad (\text{III.19})$$

φ : Angle d'ouverture d'encoche.

$$R_c = \frac{D}{2}.$$

De la figure (III. 5), on constate que la fonction $f_1(\theta)$:

$$f_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{Pour } \theta \in [-\varphi/2, \varphi/2] \\ -1 & \text{Pour } \theta \in [\tau_c - \varphi/2, \tau_c + \varphi/2] \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

En vertu de l'origine choisie au référentiel statorique (l'axe de la première phase) la fonction $f_1(\theta)$ est paire. De plus elle est alternée (antipériodicité entre aller et retour) sa décomposition ne fait donc pas intervenir les termes d'ordre pair.

La décomposition de la fonction $f_1(\theta)$ en séries de Fourier (sous sa forme complexe) est :

$$f_1(\theta) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 21})$$

$$f_{1n} = \frac{4}{\pi n} \sin \left(\frac{n \varphi}{2} \right) \quad (\text{III. 22})$$

La densité linéique de conducteurs de la première phase est donnée par :

$$C_1(\theta) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 23})$$

$$C_{1n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) \quad (\text{III. 24})$$

Pour déterminer la densité linéique des conducteurs de la $q^{\text{ième}}$ phase, à partir de la densité linéique des conducteurs de la première phase, il suffit de faire une rotation angulaire telle que :

$$C_q(\theta) = C_1 \left(\theta - \left[(q-1) \frac{2\pi}{3} \right] \right) \quad (\text{III. 25})$$

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

Nous alimentons cette machine par un courant triphasé équilibré. Les trois densités du courant équivalent aux trois courants d'alimentation de la machine peuvent s'écrire de la manière suivante :

Phase 1:

$$J_1(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{1n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 26})$$

$$J_{1n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_1(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) \quad (\text{III. 27})$$

Phase 2:

$$J_2(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 28})$$

$$J_{2n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_2(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) e^{-jn \left(\frac{2\pi}{3} \right)} \quad (\text{III. 29})$$

Phase 3:

$$J_3(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{3n} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 30})$$

$$J_{3n} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} I_3(t) \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) e^{-jn \left(\frac{4\pi}{3} \right)} \quad (\text{III. 31})$$

Calculons maintenant la densité du courant résultante de ces trois densités du courant :

$$J_{eq}(\theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{\infty} J_{eqn} e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III.32})$$

$$J_{eqn} = \frac{2 \cdot N_{CE}}{\pi R_c} \left(\frac{\sin(n(\varphi/2))}{n(\varphi/2)} \right) \left(I_1(t) + I_2(t) e^{-jn \left(\frac{2\pi}{3} \right)} + I_3(t) e^{-jn \left(\frac{4\pi}{3} \right)} \right) \quad (\text{III. 33})$$

La figure (III.6) illustre la répartition spatiale de la densité du courant linéique équivalente, de notre machine synchrone:

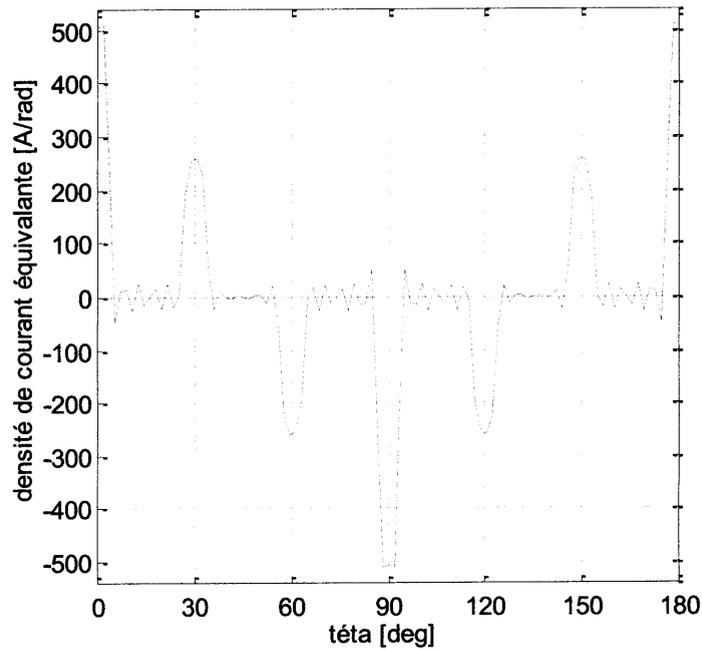


Figure III. 6 : répartition spatiale de la densité de courant équivalente

III.3.3.Expression du potentiel vecteur magnétique

Le potentiel vecteur magnétique a une seule composante suivant l'axe (oz), il dépend seulement des deux variables spatiales ρ et θ , et de la variable temporelle t .

$$A_z(\rho, \theta, t) = A_z(\rho, t) \cdot A_z(\theta) \quad (\text{III. 34})$$

On peut montrer facilement que l'expression de $A_z(\rho, \theta, t)$ est la suivante :

$$A_z(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_z(\rho, t) e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III. 35})$$

En introduisant la relation (III. 35) dans les relations (III. 10), (III. 11) et (III. 12) on obtient :

$$\text{Région 1 : } \frac{\partial^2 A_z^{(1)}(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{n^2 p^2}{\rho^2} A_z^{(1)}(\rho, t) = \frac{1}{\rho} j n p B_{r,n} \quad (\text{III. 36})$$

$$\text{Région 2 : } \frac{\partial^2 A_z^{(2)}(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{n^2 p^2}{\rho^2} A_z^{(2)}(\rho, t) = 0 \quad (\text{III. 37})$$

$$\text{Région 3 : } \frac{\partial^2 A_z^{(3)}(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z^{(3)}(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{n^2 p^2}{\rho^2} A_z^{(3)}(\rho, t) = -\mu_0 J \quad (\text{III. 38})$$

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

L'expression générale du potentiel vecteur magnétique dans chacune régions du domaine d'étude est calculée dans les deux parties suivantes :

Partie .A. Modélisations de la machine sans tenir compte des encoches

Dans cette partie le nombre de région d'étude sera réduit en deux régions et les encoches seront remplacées par des nappes de courant comme le montre la figure (III.7) :

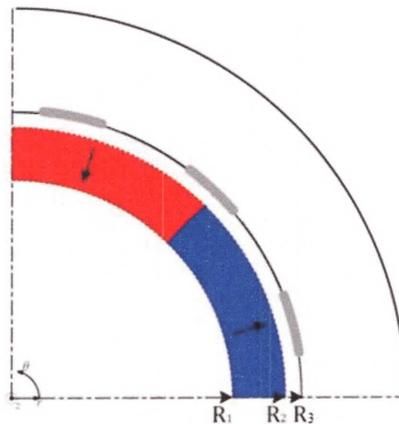


Figure III.7 Modèle géométrie

Notre domaine d'étude se limitera à deux régions :

Région 1 : La couronne aimantée ; $R_1 \leq \rho \leq R_2$

Région 2 : l'entrefer; $R_2 \leq \rho \leq R_3$

III.A.1. Entrefer corrigé

L'induit encoché est remplacé par un induit lisse en introduisant à la place de l'entrefer réel e , un entrefer corrigé e_c , tel que :

$$e_c = k_c e \quad (\text{III. 39})$$

k_c : Coefficient d'entrefer ou coefficient de Carter, il tient compte de l'influence de la denture sur l'induction dans l'entrefer.

$$k_c = \frac{p_d}{p_d - \frac{4}{\pi} \left(\frac{b_e}{2e} - \arctg \left(\frac{b_e}{2e} \right) - \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{b_e}{e} \right)^2} \right) \right)}$$

$$\approx \frac{p_d}{p_d - \frac{b_e^2}{5e + b_e}}$$
(III. 40)

p_d : Pas dentaire.

b_e : Longueur de l'ouverture de l'encoche sur l'entrefer.

III.A.2. Densité de courant équivalente à une encoche

Chaque encoche peut être remplacée par une densité de courant équivalente, placée au droit de l'isthme d'encoche. L'intérêt de ce processus est de ramener des sources extérieures à des sources localisées.

Afin pour pouvoir faire cette transformation, nous devons supposer La perméabilité du fer très grande ($\mu_r \rightarrow \infty$).

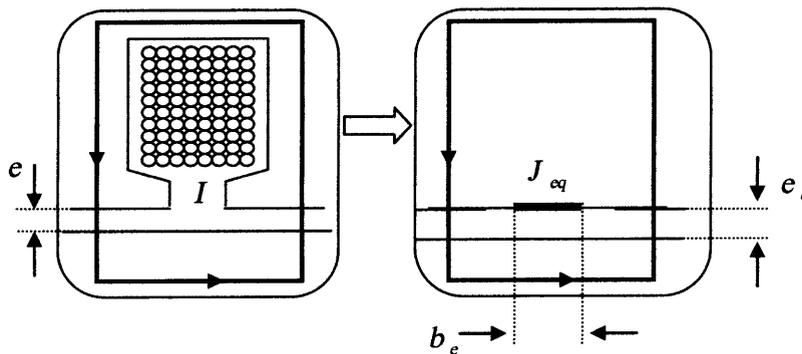


Figure III. 8 : Définition de la densité de courant superficielle équivalente à une encoche

Donc la densité de courant équivalente est :

$$J_{eq} = \frac{I}{b_e}$$
(III. 41)

III.A.3.Expression du potentiel vecteur magnétique ou (Résolution des équations du champ)

Région 1 :

La solution de l'équation (III.36), est la somme de deux solutions : homogène et particulière.

$$A_z^{(1)}(\rho, t) = C_n(t) \rho^{np} + D_n(t) \rho^{-np} + G_n(\rho, t) \quad (\text{III. 42})$$

La fonction $G_n(\rho, t)$ (solution particulière), qui traduit la présence de source du champ (les aimants) dans la région 1, peut être déterminée comme suit :

$$\rho^2 \overline{G_n}(\rho, t) + \rho \overline{G_n}(\rho, t) - n^2 p^2 G_n(\rho, t) = (j n p B_{r_n}) \rho \quad (\text{III. 43})$$

On trouve son expression [22] :

$$G_n(\rho, t) = \frac{j n p B_{r_n}}{1 - (n p)^2} \rho, \text{ si } n p \neq 1 \quad (\text{III. 44})$$

Région 2 :

$$A_z^{(2)}(\rho, t) = E_n(t) \rho^{np} + F_n(t) \rho^{-np} \quad (\text{III.45})$$

L'expression générale du potentiel vecteur magnétique dans chacune des deux régions du domaine d'étude est :

Région 1 :

$$A_z^{(1)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (C_n(t) \rho^{np} + D_n(t) \rho^{-np} + G_n(\rho, t)) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.46})$$

Région 2 :

$$A_z^{(2)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (E_n(t) \rho^{np} + F_n(t) \rho^{-np}) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.47})$$

Les quatre constantes d'intégration C_n, D_n, E_n et F_n sont obtenues en appliquant les conditions de passage entre deux régions différentes.

Ces dernières expriment :

- à l'interface entre la culasse rotorique et la couche d'aimants ($r = R_1$), annulation du champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie).
- à l'interface entre la couche d'aimants et l'entrefer mécanique ($r = R_2$), conservation du champ tangentiel et de l'induction radiale.
- à l'interface entre l'entrefer mécanique et la culasse statorique ($r = R_3$), annulation du champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie).

$$A \ r = R_1 \quad \text{on à :} \quad \left. \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_1} = 0 \quad (\text{III.48})$$

$$A \ r = R_2 \quad \text{on à :} \quad \begin{cases} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_2} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_2} \\ \left. \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_2} = \frac{\mu_p}{\mu_0} \left. \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_2} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

$$A \ r = R_3 \quad \text{on à :} \quad \left. \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_3} - \mu_0 J_{eq}(\theta, t) = 0 \quad (\text{III.50})$$

En remplaçant dans ces dernières équations le potentiel vecteur par ses expressions correspondantes, on obtient le système d'équation de quatre équations à quatre inconnues suivant :

$$\begin{bmatrix} npR_1^{np-1} & -npR_1^{-np-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & npR_3^{np-1} & -npR_3^{-np-1} \\ R_2^{np} & R_2^{-np} & -R_2^{np} & -R_2^{-np} \\ npR_2^{np-1} & -npR_2^{-np-1} & -\frac{\mu_p}{\mu_0} npR_2^{np-1} & \frac{\mu_p}{\mu_0} npR_2^{-np-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{G}_n(R_1) \\ \mu_0 J_n(t) \\ -G_n(R_2) \\ -\bar{G}_n(R_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

L'approche de modélisation analytique donne lieu à la génération de systèmes d'équations linéaires (III. 51) qui doivent être résolus pour l'obtention du potentiel vecteur magnétique dans les différentes régions du domaine d'étude.

Ce système est de la forme :

$$\text{mat } X = \text{ter}$$

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

Où

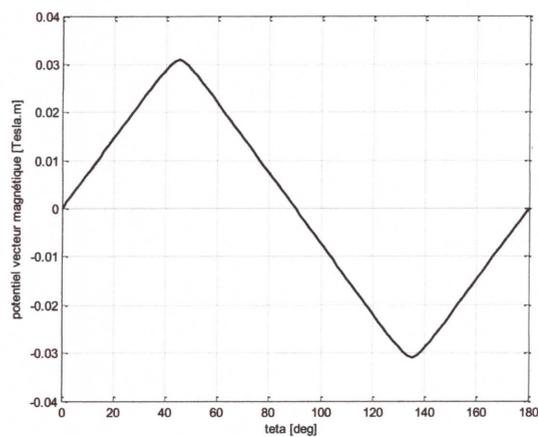
[mat] : est la matrice topologique dont les éléments dépendent de la géométrie de l'espace d'étude.

[Ter] : est le vecteur source, dont les éléments dépendent de la répartition spatiale et des propriétés physiques des sources de champ magnétique (aimantation et densité de courant).

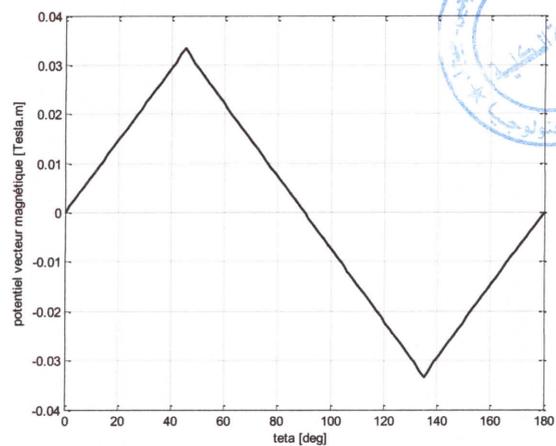
[X] : est le vecteur des inconnus qui correspondent aux coefficients du potentiel vecteur magnétique dans les différentes régions de la machine.

La structure électromagnétique est parfaitement décrite par la connaissance du potentiel vecteur magnétique, puisque toutes les autres grandeurs électromagnétiques caractéristiques de la machine peuvent s'en déduire.

La répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique créée dans les différents points de la machine considérée, sont représentées par les figures suivantes :



a)



b)

Figure III. 9 répartitions spatiales du potentiel vecteur magnétique

a) dans la couronne aimantée

b) dans l'entrefer

III.A.4. Expression d'induction magnétique

Les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique sont données, à partir de la connaissance du potentiel vecteur par :

$$\begin{cases} B_r(\rho, \theta, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \\ B_\theta(\rho, \theta, t) = -\frac{\partial A_z(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

En remplaçant le potentiel vecteur par son expression dans chacune des deux régions, on obtient les expressions de :

Induction magnétique radiale

Région 1 :

$$B_\rho^{(1)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} j n p \left(C_n(t) \rho^{np-1} + D_n(t) \rho^{-np-1} + \frac{G_n(\rho, t)}{\rho} \right) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.53})$$

Région 2 :

$$B_\rho^{(2)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} j n p \left(E_n(t) \rho^{np-1} + F_n(t) \rho^{-np-1} \right) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.54})$$

Induction magnétique tangentielle

Région 1 :

$$B_\theta^{(1)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n p \left(-C_n(t) \rho^{np-1} + D_n(t) \rho^{-np-1} \right) - \bar{G}_n(\rho, t) \right) e^{j n p \theta} \quad (\text{III.55})$$

Région 2 :

$$B_\theta^{(2)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n p \left(-E_n(t) \rho^{np-1} + F_n(t) \rho^{-np-1} \right) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.56})$$

La répartition spatial de l'induction crée dans les différents points de la machine considérée, sont représentées par les figures suivantes :

Au milieu des aimants

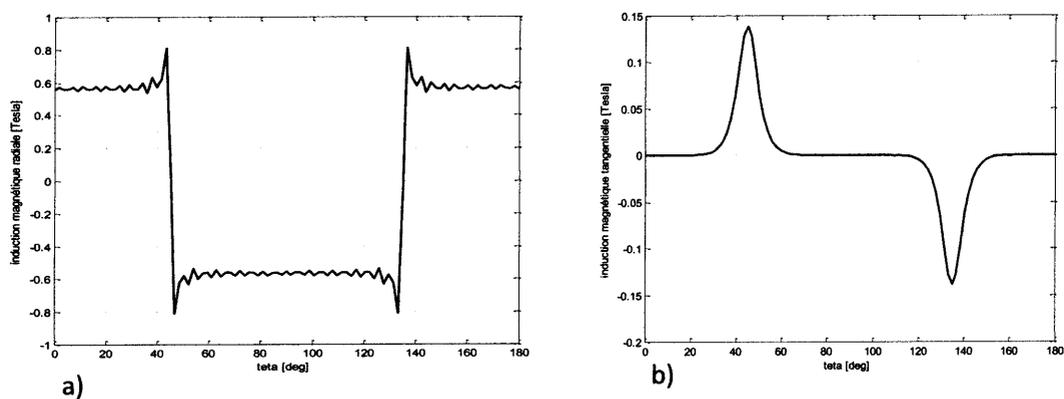


Figure III.10 : répartitions spatiales dans la couronne aimantée
a) de l'induction magnétique radiale
b) de l'induction magnétique tangentielle

Au milieu d'entrefer

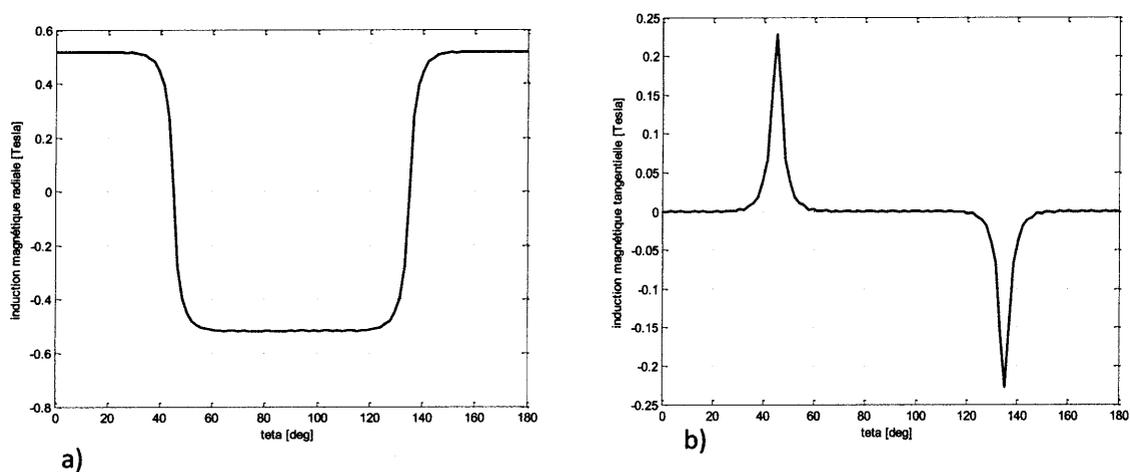


Figure III.11 : répartitions spatiales dans l'entrefer
a) de l'induction magnétique radiale
b) de l'induction magnétique tangentielle

Partie .B. Modélisations de la machine en tenir compte des encoches

Dans cette partie, le nombre de région d'étude sera trois régions où les encoches seront prises en compte comme le montre la figure (III.12) :

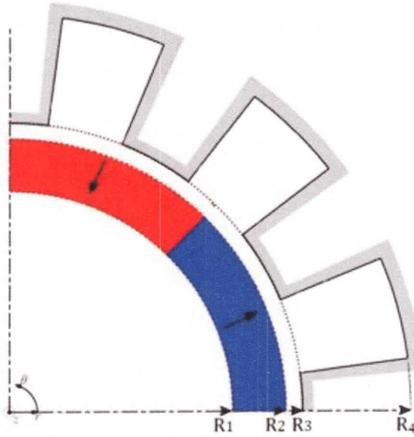


Figure. III.12 Modèle géométrique

Notre domaine d'étude se limitera à trois régions :

Région 1 : La couronne aimantée ; $R_1 \leq \rho \leq R_2$

Région 2 : l'entrefer; $R_2 \leq \rho \leq R_3$

Région 3 : encoche; $R_3 \leq \rho \leq R_4$

III.B.1. Expression du potentiel vecteur magnétique ou (Résolution des équations du champ)

La solution de l'équation (III.36) (III.37) dans la région I et II est donnée comme la partie A, donc l'expression du potentiel vecteur magnétique dans les deux régions est :

Région 1 :

$$A_z^{(1)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n}(t) \rho^{np} + D_{1n}(t) \rho^{-np} + G_{1n}(\rho, t)) e^{jn p \theta} \right) \quad \text{(III.57)}$$

Région 2 :

$$A_z^{(2)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (E_{1n}(t) \rho^{np} + F_{1n}(t) \rho^{-np}) e^{jn p \theta} \right) \quad \text{(III.58)}$$

Région 3 :

La solution de l'équation (III.38), est la somme de deux solutions : homogène et particulière.

$$A_z^{(3)}(\rho, t) = Q_{1n}(t)\rho^{np} + S_{1n}(t)\rho^{-np} + k_{1n}(\rho, t) \quad (\text{III.59})$$

La fonction $k_n(\rho, t)$ (solution particulière), qui traduit la présence de source du champ (les courants) dans la région 3, peut être déterminée comme suit :

$$k_{1n}(\rho, t) = \frac{\mu_0 J}{1 - (np)^2} \rho^2; \text{ si } np \neq 1 \quad (\text{III.60})$$

L'expression générale du potentiel vecteur magnétique dans chacune des trois régions du domaine d'étude est :

Région 1 :

$$A_z^{(1)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n}(t)\rho^{np} + D_{1n}(t)\rho^{-np} + G_{1n}(\rho, t)) e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III.61})$$

Région 2 :

$$A_z^{(2)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (E_{1n}(t)\rho^{np} + F_{1n}(t)\rho^{-np}) e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III.62})$$

Région 3 :

$$A_z^{(3)}(\rho, \theta, t) = \text{real} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (Q_{1n}(t)\rho^{np} + S_{1n}(t)\rho^{-np} + k_{1n}(\rho, t)) e^{jn p \theta} \right) \quad (\text{III.63})$$

Les six constantes d'intégration $C_{1n}, D_{1n}, E_{1n}, F_{1n}, Q_{1n}$ et S_{1n} sont obtenues en appliquant les conditions de passage entre deux régions différentes.

Ces dernières expriment :

- à l'interface entre la culasse rotorique et la couche d'aimants ($r = R1$), annulation du champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie).
- à l'interface entre la couche d'aimants et l'entrefer mécanique ($r = R2$), conservation du champ tangentiel et de l'induction radiale.

Chapitre III : Etude analytique de la machine synchrone à aimants permanents

➤ à l'interface entre l'entrefer mécanique et la culasse statorique ($r = R_3$), annulation du champ tangentiel (hypothèse de perméabilité infinie).

$$\text{A } r = R_1 \text{ on à : } \left. \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_1} = 0 \quad (\text{III.64})$$

$$\text{A } r = R_2 \text{ on à : } \begin{cases} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_2} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_2} \\ \left. \frac{\partial A_z^{(1)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_2} = \frac{\mu_p}{\mu_0} \left. \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_2} \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

$$\text{A } r = R_3 \text{ on à : } \begin{cases} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_2} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial A_z^{(3)}(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \right|_{r=R_3} \\ \left. \frac{\partial A_z^{(2)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_2} = J_{eq} - \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{\partial A_z^{(3)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_3} \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

$$\text{A } r = R_4 \text{ on à : } \left. \frac{\partial A_z^{(3)}(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right|_{r=R_4} - \mu_0 J_{eq} = 0 \quad (\text{III.67})$$

En remplaçant dans ces dernières équations le potentiel vecteur par ses expressions correspondantes, on obtient le système d'équation de six équations à six inconnues suivant :

$$\begin{bmatrix} npR_1^{np-1} & -npR_1^{-np-1} & \frac{1}{\mu_p} npR_2^{-np-1} & 0 & 0 & 0 \\ R_2^{np} & R_2^{-np} & -R_2^{np} & -R_2^{-np} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu_p} npR_2^{np-1} & \frac{1}{\mu_p} npR_2^{-np-1} & \frac{-1}{\mu_0} npR_2^{np-1} & \frac{1}{\mu_0} npR_2^{-np-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{np} & R_3^{-np} & -R_3^{np} & -R_3^{-np} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\mu_0} npR_3^{np-1} & \frac{1}{\mu_0} npR_3^{-np-1} & \frac{1}{\mu_0} npR_3^{np-1} & \frac{-1}{\mu_0} npR_3^{-np-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & npR_4^{np-1} & npR_4^{-np-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{1n} \\ D_{1n} \\ E_{1n} \\ F_{1n} \\ Q_{1n} \\ S_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{G}_n(R_1, t) - B_{r\theta}(\theta) \\ G_n(R_2, t) \\ \frac{-1}{\mu_p} \dot{G}(R_2, t) - B_{r\theta}(\theta) \\ k_n(R_3, t) \\ \frac{-1}{\mu_c} \dot{k}(R_3, t) + J_c \\ -\dot{k}(R_4, t) + \mu_c * J_c \end{bmatrix} \quad (III.68)$$

La répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique crée dans les différents points de la machine considérée, sont représentées par les figures suivantes :

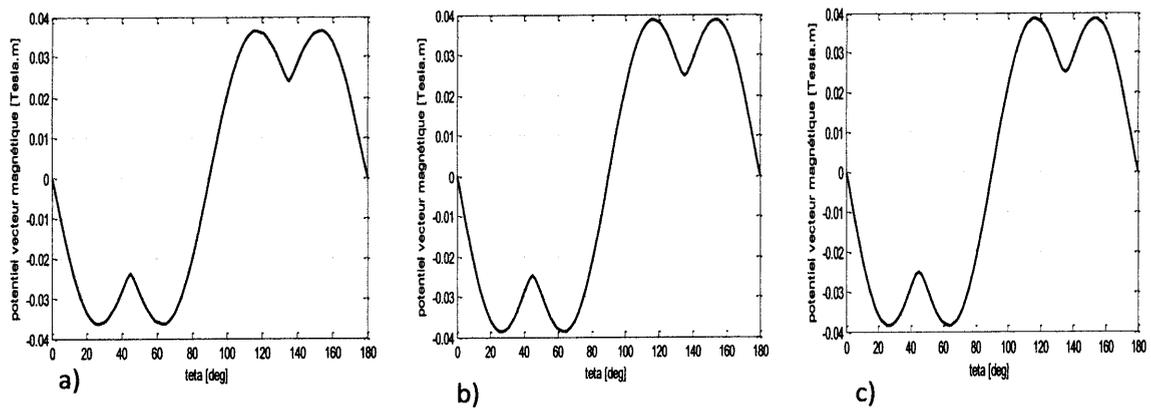


Figure III.13 : Répartitions spatiales du potentiel vecteur magnétique dans
 a) la couronne aimantée b) l'entrefer c) les encoches

III.B.2. Expression Induction magnétique

Les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique sont données, à partir de la connaissance du potentiel vecteur par l'équation (III.51):

Dans la région I et région II l'induction tangentielle et radiale c'est la même. Dans la région III est donnée de la forme:

Induction magnétique radiale

$$B_{\rho}^{(3)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} j n p \left(Q_{1n}(t) \rho^{np-1} + S_{1n}(t) \rho^{-np-1} + \frac{k_{1n}(\rho, t)}{\rho} \right) e^{j n p \theta} \right) \quad (\text{III.69})$$

Induction magnétique tangentielle

$$B_{\theta}^{(3)}(\rho, \theta, t) = \text{reel} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n p \left(-Q_{1n}(t) \rho^{np-1} + S_{1n}(t) \rho^{-np-1} \right) - \bar{k}_{1n}(\rho, t) \right) e^{j n p \theta} \quad (\text{III.70})$$

Répartitions spatiales de l'induction magnétique tangentielle créent dans les différents points de la machine considérée, sont représentées par les figures suivantes :

Au milieu de la couronne aimantée

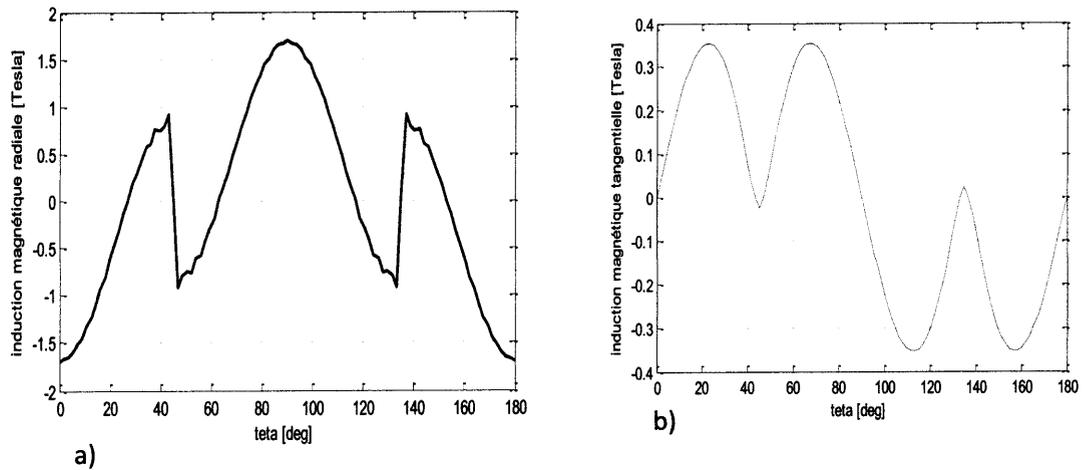


Figure.III.14 : répartition spatiale dans la couronne aimantée
 a) de l'induction magnétique radiale
 b) de l'induction magnétique et tangentielle

Au milieu d'entrefer

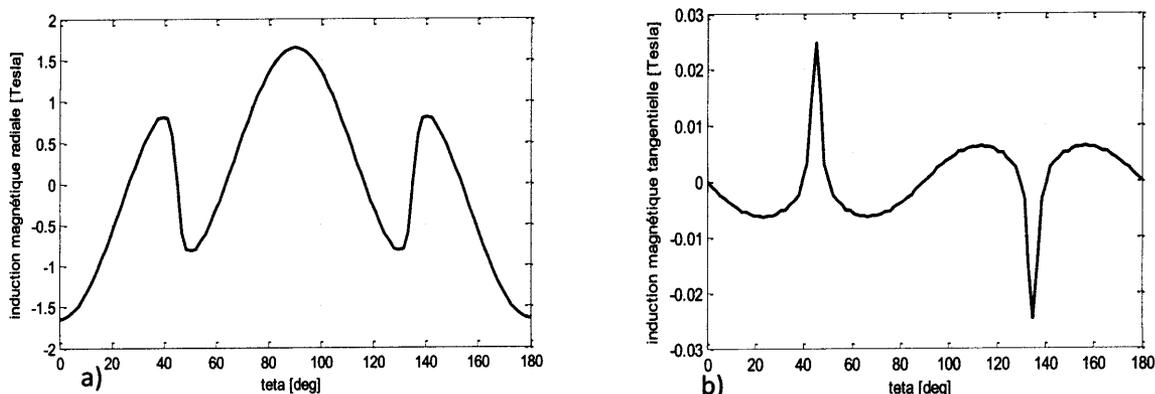


Figure.III.15 : répartition spatiale dans l'entrefer
a) de l'induction magnétique radiale
b) de l'induction magnétique et tangentielle

Au milieu d'encoche :

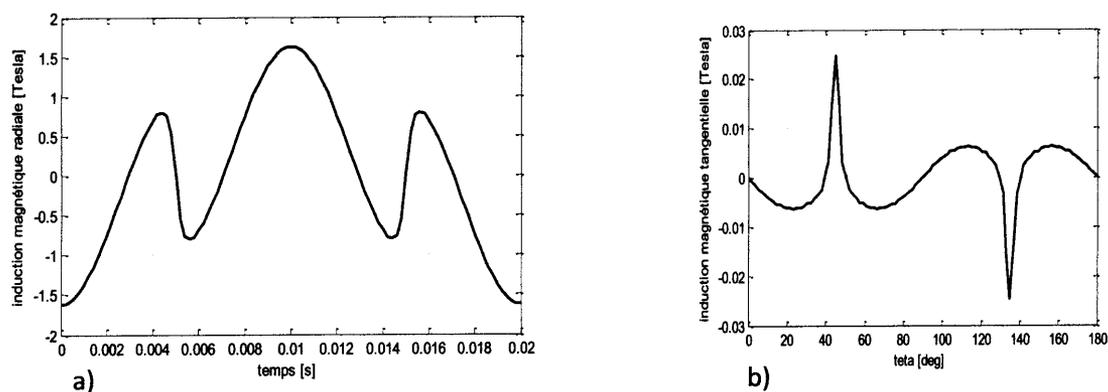


Figure.III.16 : répartition spatiale dans les encoches
a) de l'induction magnétique radiale
b) de l'induction magnétique et tangentielle

À partir de nos résultats de simulation le premier constat, considéré aussi un gain de cette modélisation analytique, est le temps de calcul réduit par rapport aux résultats fournis par l'application de la modélisation par MEF.

Ce temps est :

Pour la modélisation de la machine sans tenir compte des encoches est :

Pour celle en tenant compte des encoches est :

La modélisation de la machine en tenant compte des encoche nous a permis de voir des ondulations aux niveaux de l'induction radial, représentée par les figures III. 14. a, III.15. a et

III.16. a, dont le profile ressemble à celle fournit lors de la modélisation des termes source dûs aux courants, représentée par la figure III. 6.

Comme est déjà indiqué, lors de la modélisation des termes sources dus aux aimants là où on supposé que la machine à induction radiale, nos résultats confirment que l'induction tangentielle est faible devant l'induction radiale dans toutes les zones de la machines pour les deux cas d'étude.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, une modélisation par calcul analytique du champ en deux dimensions, d'une machine synchrone à aimant permanents a été développée. Cette méthode conduit à la détermination précise des différentes grandeurs électromagnétiques en fonction des dimensions et caractéristiques de notre machine.

L'application de cette méthode nécessite une simplification de la structure de l'induit, par l'introduction d'une transformation des encoches statorique, qui ne permet pas en particulier de prendre en compte la géométrie de l'encochage dans le calcul analytique du champ.

MCours.com