

## CHAPITRE 2

### ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION

« The role of control theory, which researchers should keep in their minds, is to show what performance we can realize by control, for what kind of a dynamic object, under what situation or condition, with what kind of available information, and how we should utilize information. Control theory also indicates us what performance we cannot achieve. »

Masao Ikeda (2004)

« The control theoreticians' role may be viewed as one of developing methods that allow the control engineer to make assumptions which seem relatively natural and physically motivated. The ultimate question of the applicability of any mathematical technique to a specific physical problem will always require a "leap of faith" on the part of the engineer and the theoretician can only hope to make this leap smaller. »

John Doyle (1987)

#### 2.1 Introduction

Les imperfections dans les servo-systèmes sont souvent causées par la présence de frottement dans les moteurs, les liaisons mécaniques, les engrenages, *etc.* Les applications industrielles dans lesquelles les problèmes de frottement sont impliqués, sont très nombreuses. Nous citons, entre autres, les robots et les actionneurs pneumatiques. Dans le domaine de la théorie de commande des systèmes, nous pouvons résumer ces problèmes typiquement liés au frottement essentiellement (et non exclusivement) dans les points suivants [3, 20, 22, 202] :

- erreurs statiques,
- retard de suivi<sup>1</sup>,
- très fortes non linéarités dans les conditions de glissement et de collage,

---

<sup>1</sup> En anglais, *tracking lag*.

– comportement oscillatoire et parfois chaotique.

Par exemple, à vitesse réduite, le mouvement d'un dispositif sous frottement devient intermittent sous l'effet de broutement; ce qui peut induire un dépassement et un cycle limite de position ou de force d'amplitude importante. Ces inconvénients impliquent souvent des difficultés d'ordre technique et aussi économique, et justifient donc l'intérêt manifesté pour la conception de systèmes de contrôles techniquement de plus en plus efficaces et économiquement plus compétitifs pour compenser les aspects de frottement.

En effet, comme cela a été largement discuté dans le chapitre 1, les techniques de compensation doivent être basées sur un modèle de connaissance convenablement choisi qui estime les frottements généralement non mesurables et actionne la commande nécessaire pour anéantir leurs effets. En particulier, ce modèle doit, non seulement, évaluer l'impact des effets statiques du frottement (frottement sec, frottement visqueux, *etc.*), mais en plus, estimer le comportement dynamique interne du frottement [20, 203, 204].

Dans le présent chapitre, nous allons développer une démarche complète pour la compensation de frottement et la commande des servo-systèmes mécaniques en général soumis aux contraintes de frottement dynamique dans leurs milieux de contact. Pour justifier le choix de la technique de contrôle proposée dans ce travail, nous allons établir d'abord des concepts généraux et des schémas de base; qui permettront de transformer le problème initial (celui de la commande des systèmes sous frottement) sous forme de problèmes de stabilisation, de robustesse et d'optimisation dans un contexte numérique plus familier et relativement plus facile à résoudre.

Pour ce faire, nous allons d'abord modéliser les différentes parties prenantes du système (voir figure 2) par un ensemble d'équations explicites et continues. Des discussions vont compléter cette description pour évoquer les particularités des modèles de certains systèmes et la manière de les traiter. En particulier, pour l'étude du frottement, nous allons choisir le modèle dynamique et continu de *LuGre* pour les raisons que nous avons déjà

discutées dans le chapitre 1. Puis, nous allons rappeler les propriétés et les caractéristiques de ce modèle. Ensuite, nous allons présenter les éléments de commande des différentes parties des servo-systèmes; dont l'objectif principal est lié à la compensation de frottement et l'amélioration de la performance (stabilité et précision) de ces servo-systèmes. Finalement, pour illustrer les concepts mis en exergue, nous allons étudier le cas simple d'une masse en mouvement sur une surface avec frottement.

## 2.2 Modélisation du servo-système 'généralisé' de mouvement

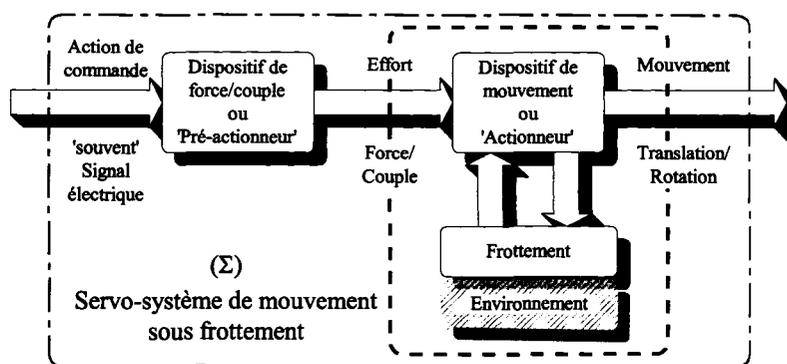


Figure 2 Représentation schématique d'un servo-système de mouvement

La représentation générale d'un servo-système dynamique de mouvement peut être décomposée en trois entités fondamentales (voir figure 2); à savoir le *pré-actionneur*, l'*actionneur* et le *milieu d'action* (ou support de mouvement) [11, 113, 205]. L'actionneur permet de convertir une action (de force/couple) en un travail cinétique de mouvement (déplacement et vitesse). Le pré-actionneur, excité par l'ordre d'une commande (qui est souvent une grandeur électrique, par exemple, une tension), fournit l'effort nécessaire pour cette action. Cet élément de force peut être, par exemple, un moteur électrique ou un distributeur pneumatique (voir tableau I). Le mouvement du dispositif mécanique se fait, en général, le long d'une ou de plusieurs surface(s) de contact; donnant naissance à des forces résistantes d'interaction ou forces de frottement. Comme exemples de servo-systèmes dy-

namiques, nous citons (voir tableau I) les systèmes robotiques, les servo-moteurs électriques, les actionneurs pneumatiques et les roues de véhicules.

Tableau I

## Exemples de servo-systèmes de mouvement avec frottement

Système ( $\Sigma$ )			Signal (ou variable)	
Système de force	Système de mouvement	Lieu de frottement	Force/couple	Mouvement
Moteur	Robot	Surface de contrainte, articulation	$\tau$ : couple	$q, \dot{q}$ : coordonnées généralisées
Valve/cylindre	Vérin/charge	Surface d'appui, parois du cylindre, joints	$F$ : force	$x, \dot{x}$ : déplacement, vitesse
Moteur/transmission	Roue de véhicule	Route	$\tau$ : couple	$\theta, \omega$ : angle, vitesse d'Euler

## 2.2.1 Modélisation du système d'action (ou de force)

Le comportement dynamique du dispositif de force (voir figure 2) est exprimé en général par la formulation suivante :

$$(\Sigma_{\text{act.}}) : \dot{F} = \mathcal{F}_{\text{act.}}(F, u, t) \quad (2.1)$$

$F$  désigne le vecteur des couples/forces actifs(ves) qui génèrent le mouvement,  $\dot{F}$  sa dérivée par rapport au temps,  $u$  le vecteur de commande appliquée sur le système de force et  $t$  la variable temporelle.  $\mathcal{F}_{\text{act.}}$  est, en général, une fonction vectorielle explicite continue par rapport à ces variables. Le comportement temporel des systèmes de force peut varier d'un dispositif à un autre. En fait, pour distinguer ces systèmes entre eux, il importe de les caractériser en fonction de leur capacité de couplage avec la dynamique du dispositif de mouvement (voir tableau I). Ce couplage peut être :

- soit, simple ou direct; par exemple dans le cas des moteurs à courant continu;

- soit, complexe (non linéaire et non stationnaire); par exemple dans le cas des actionneurs pneumatiques.

Dans l'ensemble, nous pouvons distinguer trois grandes familles de ces systèmes :

- i/ les systèmes statiques ou quasi-statiques;
- ii/ les systèmes dynamiques nominaux ou fixes (*i.e.* à paramètres fixes);
- iii/ les systèmes dynamiques incertains ou variant dans le temps (*i.e.* à paramètres incertains).

Les systèmes regroupés sous la première catégorie sont caractérisés par des relations d'entrées-sorties algébriques constantes, linéaires ou encore non linéaires. Pour illustrer cette classe de systèmes, nous citons le cas d'un moteur à courant continu ayant en général une caractéristique dynamique de la partie électrique suffisamment rapide pour qu'elle soit considérée simplement négligeable par rapport au modèle dynamique du robot par exemple [206].

Les autres catégories de systèmes de force/couple sont caractérisées par des relations d'entrées-sorties linéaires ou non linéaires non négligeables; dont la caractéristique temporelle est de même ordre de grandeur que celle du mouvement. Nous citons, par exemple, le cas de système pneumatique [207]. Ce dernier est caractérisé (*Cf.* chapitres 4 et 5) par une dynamique de pression non linéaire et lente (ou dominante). En outre, en considérant des hypothèses très restrictives, la relation dynamique de ce système peut être assimilée, d'une manière approximative (dans un contexte idéal) à un modèle dynamique nominal [159, 178, 180]. Dans le cas contraire, ces conditions doivent être relaxées pour représenter le modèle explicitement en fonction des incertitudes et des perturbations (bornées et/ou non bornées *a priori*) et pour exprimer les différentes propriétés et caractéristiques du dispositif mis en place. En effet, comme nous le verrons dans le chapitre 4, les servosystèmes pneumatiques sont décrits par des modèles non linéaires à paramètres incertains, à cause de leurs propriétés intrinsèques (compressibilité de l'air et caractéristiques de la valve).

### 2.2.2 Modélisation du système de mouvement

Considérons  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{pmatrix}^T$  le vecteur des grandeurs cinétiques d'un dispositif mécanique de mouvement sur une ou plusieurs surfaces de contact; *i.e.*  $x$  le vecteur des déplacements (positions/orientations) et  $\dot{x}$  le vecteur des vitesses (linéaires/angulaires). Alors, nous décrivons son modèle de mouvement par l'ensemble des équations suivantes :

$$(\Sigma_{\text{mvt.}}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_{\text{lib.}}(\mathbf{x}, F, f_f, t) \\ 0 = \mathcal{G}_{\text{ctr.}}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $F$  désigne le vecteur des couples/forces actifs(ves) qui génèrent le mouvement,  $f_f$  désigne le vecteur des forces de frottement et  $t$  la variable temporelle.  $\mathcal{F}_{\text{lib.}}$  et  $\mathcal{G}_{\text{ctr.}}$  sont, en général, des fonctions vectorielles explicites continues par rapport à leurs variables respectives. Dans cette représentation,  $\mathcal{F}_{\text{lib.}}$  correspond à l'ensemble des équations dynamiques de mouvement libre du système, et  $\mathcal{G}_{\text{ctr.}}$  (*i.e.* un ensemble d'équations algébriques) décrit l'ensemble des contraintes qui lient les parties mobiles du dispositif mécanique aux surfaces de contact.

Dans certains cas (comme dans le mouvement d'un robot avec contact, *Cf.* chapitre 3), nous admettons que le système de mouvement (2.2) peut être réduit, en utilisant une transformation appropriée (qui dépend de l'équation de contrainte et de la nature du mouvement sur les surfaces de contact), en un seul type d'équations dynamiques exprimées exclusivement dans l'espace de mouvement selon :

$$(\Sigma_{\text{mvt.}}) : \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_{\text{mvt.}}(\mathbf{x}, F, f_f, t) \quad (2.3)$$

## 2.2.3 Modélisation du système de frottement

### 2.2.3.1 Généralisation

L'ensemble des forces de frottement dynamique et statique mises en jeu sont, en général, régies par la représentation d'état suivante [23] :

$$(\Sigma_{\text{frc.}}) : \begin{cases} \dot{z} = \mathcal{F}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) \\ f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $z$  représente le vecteur d'état des variables internes de frottement et  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{pmatrix}^T$  le vecteur des positions et vitesses du dispositif.  $\mathcal{F}_{\text{frc.}}$  et  $\mathcal{G}_{\text{frc.}}$  correspondent respectivement à l'équation d'état interne et l'équation de sortie du modèle de frottement.

Pour compléter cette modélisation générale de frottement, il faut trouver les expressions convenables des fonctions généralisées  $\mathcal{F}_{\text{frc.}}$  et  $\mathcal{G}_{\text{frc.}}$  qui tiennent compte des propriétés intrinsèques du frottement. Cette modélisation doit respecter, en général, deux critères essentiels [23] :

- 1°. À vitesse constante (*i.e.* en régime de glissement permanent), les forces de frottement sont seulement fonction de la vitesse; *i.e.* si  $\mathcal{F}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = 0$  et  $\dot{x} = cte$ , alors

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_s(\dot{x}) \quad (2.5)$$

- 2°. En régime de pré-glissement et pour des déplacements suffisamment petits, les forces de frottement sont réduites à une fonction mémoire de la position; *i.e.*

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_{ps}(x) \quad (2.6)$$

Dans la suite, nous allons établir le modèle de *LuGre* qui appartient à la famille des modèles dynamiques de frottement décrits par le système (2.4) et respectant les conditions (2.5) et (2.6).

### 2.2.3.2 Modèle de *LuGre*

Fort de sa popularité dans la littérature, surtout dans le domaine de la commande des servo-systèmes, le modèle de *LuGre* se hisse parmi les modèles empiriques les plus complets qui tiennent compte, à la fois, des aspects statiques et dynamiques du frottement. Il fournit aussi une perception assez microscopique de ce phénomène (voir figure 3). En effet, à l'échelle microscopique, les surfaces de contact en mouvement relatif présentent bon nombre d'aspérités [20, 22, 203]. Ces dernières caractérisent, en effet, la rugosité et l'état des surfaces de contact [50]. Elles sont représentées ainsi comme deux corps rigides en contact à travers des lames (appelées aussi brins ou fibres) élastiques [50]. Lorsque des forces tangentielles sont appliquées aux objets en contact, ces lames subissent des déformations (ou déviations) comme dans un ressort, donnant lieu aux forces de frottement (voir figure 3); qui représentent simplement la moyenne des forces de déformation des ressorts élastiques équivalents.

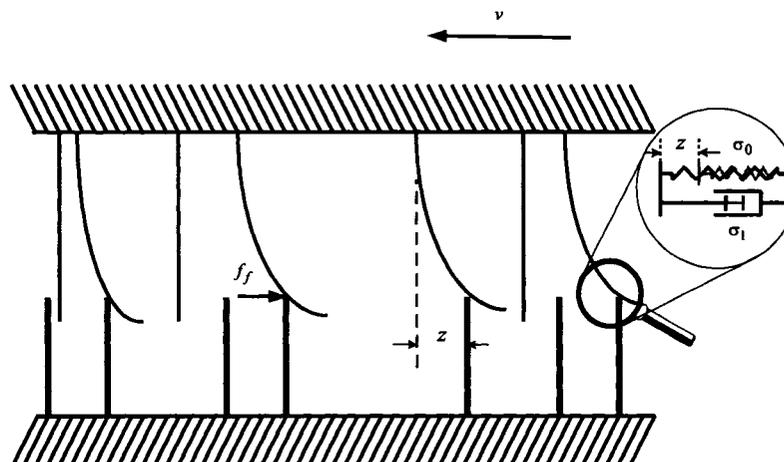


Figure 3 Interface de frottement entre surfaces de contact présentée comme contact entre lames. Pour simplifier, les lames de la partie supérieure sont considérées élastiques et celles de la partie inférieure rigides (représentation tirée et adaptée à partir de [20]).

Lorsque ces déviations deviennent suffisamment grandes, les aspérités commencent à glisser. Le système est considéré alors à l'état d'équilibre de glissement et la déviation moyenne est alors une fonction de la vitesse. En particulier, pour des vitesses réduites, associées à l'état d'équilibre de déformation, la force de frottement décroît avec la vitesse; il s'agit de l'effet *Stribeck*.

### Modèle mono-variable de *LuGre*

Pour exprimer la force de frottement appliquée dans une seule direction entre deux surfaces de contact (voir figure 3), nous considérons la formulation suivante, appelée modèle de *LuGre* ou encore *paramétrisation standard* de frottement. Elle permet de décrire la variation de la force de frottement  $f_f$  en fonction de la vitesse  $v \triangleq \dot{x}$  et de l'état interne de frottement  $z$  non mesurable, comme suit [20] :

$$\dot{z} = \mathcal{F}_{\text{fr.}}(z, v) = -\frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z + v \quad (2.7)$$

et :

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{fr.}}(z, v) = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \quad (2.8)$$

l'état interne  $z$  correspond physiquement à la déviation moyenne des lames durant la phase de stiction (voir figure 3).  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_v$  sont les paramètres du modèle de frottement qui désignent respectivement la rigidité des lames, le coefficient d'amortissement (ou d'atténuation) des lames et le coefficient de frottement visqueux.  $g(v)$  est une fonction non linéaire, bornée et positive utilisée, en général, pour décrire différents effets de frottement. En particulier, elle est paramétrisée pour décrire l'effet *Stribeck* [208] :

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c) \exp\left(-\frac{v^\iota}{v_s^\iota}\right) \quad (2.9)$$

où  $f_c$  et  $f_s$  représentent l'amplitude de frottement de *Coulomb* et celle de frottement statique et  $v_s$  la vitesse constante de *Stribeck*. L'exposant  $\iota$  dans la fonction exponentielle vaut, en général, 2 [3, 20] ou 0.5 [3, 209].

## Caractéristiques du modèle de *LuGre*

**C2.1** Dans les équations (2.7) – (2.9), la force de frottement est présentée comme une fonction continue de ces variables d'état et d'entrée.

**C2.2** Chaque terme et paramètre joue un rôle différent pour déterminer la réponse du système dans les différentes phases de frottement [3]. Le premier terme (non linéaire) de l'équation (2.7) signifie que la déviation  $z$  approche la valeur [20]

$$z_{ss} = \frac{g(v)}{\sigma_0} \frac{v}{|v|} = \frac{g(v)}{\sigma_0} \text{sgn}(v) \quad (2.10)$$

à l'équilibre (*i.e.* lorsque  $v$  est constante). Le deuxième terme montre que la déviation est proportionnelle à l'intégrale de la vitesse relative (*i.e.* position relative).

**C2.3** Le coefficient de rigidité des lames  $\sigma_0$  est souvent très élevé. Il est important de garder le coefficient d'amortissement  $\sigma_1 \neq 0$  pour avoir un mouvement suffisamment amorti; sachant que le coefficient de frottement visqueux  $\sigma_v$  est généralement pas suffisamment grand pour assurer un bon amortissement [3, 20].

**C2.4** Les paramètres du modèle peuvent être calibrés expérimentalement [52, 76, 106]. Ils sont, en général, astreints à des incertitudes et des variations dues aux [51, 106, 210, 211] :

- variations des forces normales appliquées<sup>2</sup>;
- variations de température;
- variations des vitesses;
- caractéristiques du matériau de revêtement;
- conditions de lubrification.

**C2.5** La variation de la force de frottement  $f_f$  avec l'amplitude de la force normale de contact, notée  $f_n$ , peut être décrite simplement par une relation de proportionnalité;

<sup>2</sup> Gray et Johnson [212] ont examiné les effets de la rugosité de surface sur les vibrations normales pendant le contact (*i.e.* rôle du couplage normal-tangentiel). Aussi, Godfrey [213] a démontré une réduction apparente du frottement due aux vibrations normales (voir aussi plus récemment dans [214, 215]).

*i.e.*

$$f_f = \mu f_n \quad (2.11)$$

où le coefficient de frottement  $\mu$  représente, dans ce cas, la variable de sortie du modèle dynamique de *LuGre* donné par l'équation (2.8). Les paramètres du modèle sont appelées, dans ce cas, *paramètres normalisés standards* du modèle de *LuGre* [3, 13].

**C2.6** Dans les équations (2.7) – (2.9), aucun terme ne dépend explicitement de la position. En réalité, il peut exister des applications où  $g(v)$  dépend aussi de la position actuelle ou encore d'une combinaison complexe de la position et la vitesse [208]. Par conséquent, les paramètres de la fonction monotone  $g(v)$  peuvent faire éventuellement l'objet de variation d'incertitudes.

### Propriétés du modèle de *LuGre*

**Propriété 2.1** La fonction de *Stribeck* définie dans (2.9) est bornée positive [20]. En effet, d'après (2.9), nous avons :

$$0 < f_c \leq g(v) \leq f_s$$

**Propriété 2.2** La déviation interne  $z$  est une grandeur finie; *i.e.* supposons  $0 < a \leq \frac{g(v)}{\sigma_0} \leq b$ , si  $|z(0)| \leq b$ , alors  $|z(t)| \leq b \forall t$  [20]. En effet, si nous considérons la fonction candidate de *Lyapunov*  $V = \frac{1}{2}z^2$ , alors la dérivée totale par rapport au temps de  $V$ , évaluée tout au long de la trajectoire (2.7), s'écrit [20]

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z \left( -\frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z + v \right) \\ &= -|v| |z| \left( -\text{sgn}(v) \text{sgn}(z) + \frac{\sigma_0 |z|}{g(v)} \right) \end{aligned}$$

La fonction  $\dot{V}$  est négative si  $|z| > \frac{g(v)}{\sigma_0}$ . Et, comme  $0 < \frac{g(v)}{\sigma_0} \leq b$ , alors nous pouvons constater que l'ensemble  $\{z \mid z \text{ vérifie (2.7) et } |z| \leq b\}$  est invariant; *i.e.* pour toute solution  $z$  de (2.7) telle que  $|z(0)| \leq b$ , nous avons  $|z(t)| \leq b, \forall t$ .

**Propriété 2.3** Intuitivement, le frottement est caractérisé par une dissipation d'énergie. En fait, le modèle dynamique de *LuGre* présente des phases où le frottement emmagasine l'énergie et d'autres où il dégage cette énergie [20]. Nous montrons que l'application  $\varphi : v \mapsto z$  associée au modèle (2.7) est *dissipative*<sup>3</sup> avec une *fonction de stockage*<sup>4</sup>  $V(t) = \frac{1}{2}z^2(t)$ . En effet, il suit à partir de (2.7)

$$\begin{aligned} zv &= z\dot{z} + \frac{\sigma_0|v|}{g(v)}z^2 \\ &\geq z\dot{z} \end{aligned}$$

D'où [20] :

$$\int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau \geq \int_0^t z(\tau)\frac{dz}{d\tau}(\tau)d\tau \geq V(t) - V(0)$$

### Modèle bidimensionnel de *LuGre*

Dans le cas de déplacement d'un servo-système en changeant de direction sur une surface de dimension 2 (voir figure 4), la force de frottement associée au mouvement suit la direction de déplacement (dans le sens contraire à celui de la vitesse). Pour étudier le mouvement d'un tel système, il faut décomposer son équation dynamique dans un système orthonormé, noté  $(x, y)$ , lié à la surface de mouvement (voir figure 4). La force de frottement, étant aussi projetée dans ce système, peut être décrite par le modèle de *LuGre* bidimensionnel énoncé comme suit [217] :

$$\dot{z} = -\frac{\|F_c^2 v\|}{g(v)} F_c^{-2} \Sigma_0 z + v \quad (2.12)$$

et

$$f_f = \Sigma_0 z + \Sigma_1 \dot{z} + \Sigma_v v \quad (2.13)$$

<sup>3</sup> Par définition, un système dissipatif est un système qui consomme plus d'énergie/travail qu'il n'en fournit. Le terme  $zv$ , appelé *fonction d'alimentation* (en anglais, *supply function*), est interprété comme la quantité d'énergie délivrée au système. Dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ , le travail est appliqué sur le système lorsque  $\int_0^t zvd\tau$  est positive; par contre, le travail est effectué par le système lorsque cette intégrale est négative. Pour un système dissipatif, l'inégalité  $\int_0^t zvd\tau \geq V(t) - V(0)$  signifie que la variation de la fonction de stockage interne (*i.e.*  $V(t) - V(0)$ ) pendant l'intervalle  $[0, t]$  ne dépasse point la quantité de travail appliqué sur (ou énergie consommée par) le système [26, 216]. Autrement, une partie de ce qui est fourni au système est stockée, pendant que le reste est dissipé ou perdu.

<sup>4</sup> En anglais, *storage function*.

avec

$$g(v) = \frac{\|F_c^2 v\|}{\|F_c v\|} + \left( \frac{\|F_s^2 v\|}{\|F_s v\|} - \frac{\|F_c^2 v\|}{\|F_c v\|} \right) \exp\left(-\frac{\|v\|^2}{v_s^2}\right) \quad (2.14)$$

où  $z = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}^T$  désigne le vecteur déformation interne des lames projeté dans les directions  $x$  et  $y$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix}^T \triangleq \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}^T$  le vecteur vitesse tangentielle du mobile projeté dans les directions  $x$  et  $y$  et  $f_f = \begin{pmatrix} f_{fx} & f_{fy} \end{pmatrix}^T$  le vecteur frottement projeté dans les directions  $x$  et  $y$ .  $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_{0x}, \sigma_{0y})$ ,  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_{1x}, \sigma_{1y})$ ,  $\Sigma_v = \text{diag}(\sigma_{vx}, \sigma_{vy})$ ,  $F_c = \text{diag}(f_{cx}, f_{cy})$ ,  $F_s = \text{diag}(f_{sx}, f_{sy})$  et  $v_s$  sont les paramètres de frottement de *LuGre* dans les directions  $x$  et  $y$ . Les notations  $F_c^2$  et  $F_s^2$  sont utilisées pour décrire simplement les produits matricielles  $F_c \cdot F_c$  et  $F_s \cdot F_s$ .

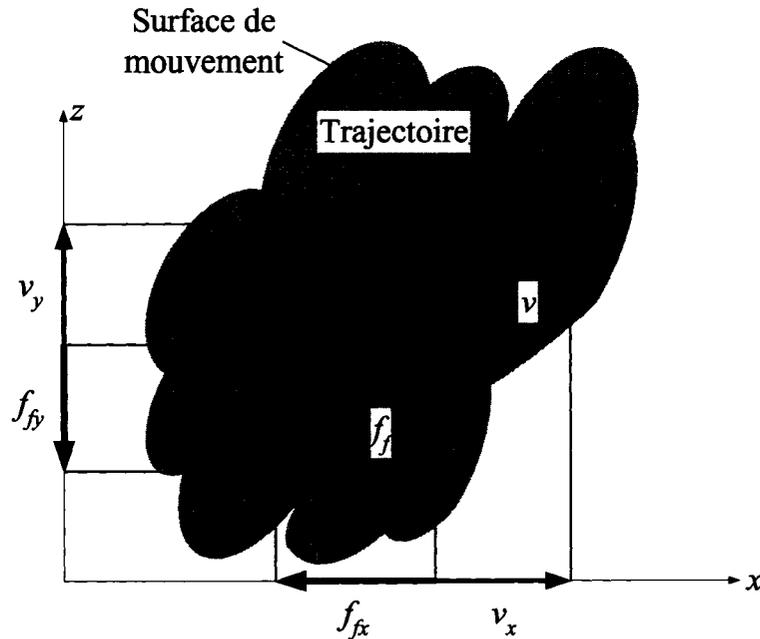


Figure 4 Mouvement bidimensionnel sous frottement

En particulier, lorsque l'état de surface et les conditions de frottement sont uniformément répartis dans toutes les directions (ce qui se traduit par un comportement de frottement

complètement symétrique), les paramètres du modèle de *LuGre*, associés à la même caractéristique dans les deux directions, peuvent être identiques; *i.e.* [217]

$$\sigma_{0x} = \sigma_{0y}, \sigma_{1x} = \sigma_{1y}, \sigma_{vx} = \sigma_{vy}, f_{cx} = f_{cy} \text{ et } f_{sx} = f_{sy}$$

### 2.3 Commande du système mécanique sous frottement

Comme nous l'avons déjà présenté dans la section §2.2 de ce chapitre, le schéma général d'un système mécanique est composé essentiellement de trois éléments (voir figure 2 et tableau I) :

- un sous-système de force,
- un sous-système de position,
- un sous-système de frottement;

partiellement ou fortement couplés. Ce degré de couplage relatif varie en réalité d'un procédé à un autre et d'une application à une autre. Pour atteindre l'objectif d'un asservissement efficace des différentes grandeurs d'un tel système, il faut tenir compte de ce degré de couplage entre les différentes parties. D'une manière générale, le système de contrôle (voir figure 5) doit contenir des éléments de compensation de force et de position (incluant la compensation de frottement). En effet, la boucle de contrôle de force représente un élément auxiliaire qui est placée dans la structure interne (voir figure 5) de contrôle de mouvement (position et vitesse), pour améliorer la performane de l'ensemble. Dans la suite, nous allons décortiquer les éléments de l'ensemble du système de contrôle (K).

#### 2.3.1 Éléments de commande de force

Les éléments de commande de force dépendent principalement de la propriété de couplage qui peut lier le système d'action au système de mouvement.

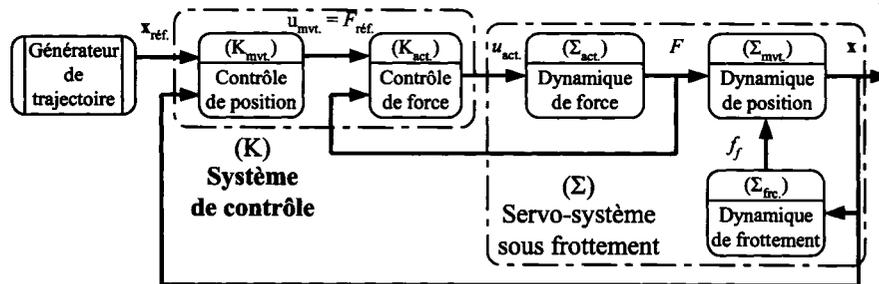


Figure 5 Schéma de base de contrôle de servo-système sous frottement

### 2.3.1.1 Cas d'un couplage simple

Il est caractérisé par une relation directe entre la commande et la force/couple. Dans ce cas, nous n'avons pas forcément besoin d'un contrôle explicite de force. Et parfois, un changement de variable (gain ou transformation statique) peut être jugé nécessaire. Par contre, la structure de l'ensemble du servo-système reste inchangée. La commande et la force sont considérées comme deux grandeurs équivalentes. Par exemple, si nous reprenons le cas de système articulaire actionné par un dispositif de moteurs à courant continu (voir tableau I), dont les caractéristiques dynamiques sont considérées négligeables devant celle du manipulateur [206], alors il est toujours facile à justifier que la relation entre la commande  $u$  et la position articulaire  $q$  est équivalente à celle entre le couple  $\tau$  et la position  $q$  [206]. Nous disons que l'espace de variable de commande  $u$  est équivalent à celui de couple  $\tau$  (*i.e.*  $u \sim \tau$ ). Et, par souci de simplicité, seulement l'une des deux relations est maintenue, l'autre est omise [206].

### 2.3.1.2 Cas d'un couplage complexe

La structure de force/couple est caractérisée par un comportement dynamique varié :

- linéaire ou non linéaire,
- nominal ou incertain ou encore perturbée.

Le contrôle de position du servo-système doit être alors anticipé par un contrôle de force/couple approprié pour :

- assurer la stabilité de la réponse de force/couple;
- ajuster le comportement transitoire (rapidité et atténuation);
- réduire l'effet des incertitudes et/ou perturbations sur les performances de suivi.

Dans ce cas, le schéma de contrôle de force peut inclure, inclusivement ou exclusivement, selon la structure de la dynamique de force (voir figure 6) :

- des termes de commande simplement linéaire pour stabiliser les systèmes linéaires à dynamique dominante et fixer les performances transitoires;
- des termes non linéaires (comme la commande linéarisante) pour anéantir les aspects non linéaires connus dans les systèmes (non linéaires) à dynamique dominante;
- des termes de commande robuste (linéaire et/ou non linéaire) pour minimiser l'effet des perturbations et des incertitudes bornées ou non bornées constatées dans les systèmes dynamiques (variant dans le temps, incertains et/ou perturbés).

En général, la combinaison de ces différentes techniques de compensation (voir figure 6) dépend de la complexité et la nature du dispositif dynamique en question. À titre d'exemple, nous citons le cas de système pneumatique; dont la dynamique de force reste suffisamment complexe et non négligeable. Le contrôle d'un tel système utilise presque tous les outils de commande cités ci-haut (voir figure 6 et Cf. chapitres 4 et 5).

### **2.3.2 Éléments de commande de position et compensation de frottement**

La structure du système de contrôle dédié à la position/orientation doit tenir compte à son tour de la structure de l'ensemble du servo-système (type de couplage force/position, non linéarité, incertitude et perturbation) et du type de modèle de frottement utilisé.

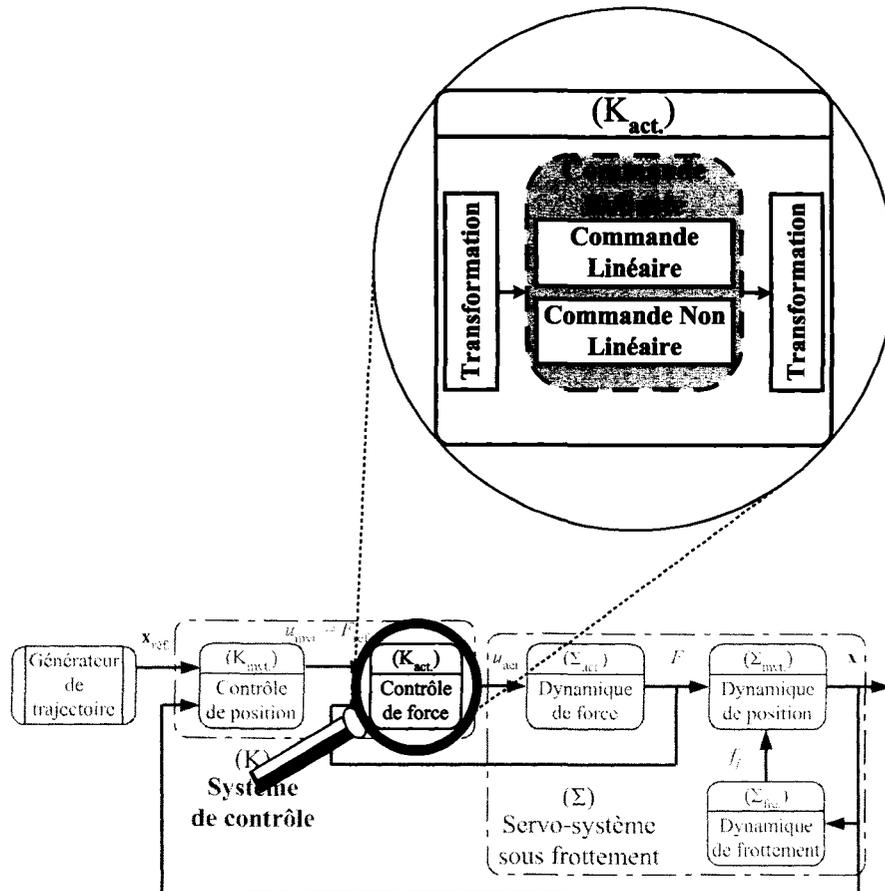


Figure 6 Éléments de contrôle de force

Dans ce travail, nous proposons un système de contrôle (voir figure 7) basé sur le principe du retour de sortie dynamique linéaire. Il incorpore une estimation par *feed-back* du frottement basée sur le modèle dynamique de *LuGre* [203]. Dans son ensemble, la conception globale de ce contrôleur est menée autour des notions fondamentales suivantes : interconnexion, passivité<sup>5</sup> et optimisation. Plus précisément, nous mettons en place ce contrôleur pour assurer la stabilisation du système en boucle fermée et le rejet des perturbations issues des effets résiduels exogènes (éventuellement de la dynamique de force) et des variations des paramètres (incertitudes) et/ou des modèles (voir figure 8). Mais d'abord,

<sup>5</sup> Quoique la passivité est présentée comme un cas particulier de la notion de dissipativité (selon [216]), dans ce manuscrit, nous confondons les deux terminologies, par abus de notation (comme c'est le cas dans [26] d'ailleurs).

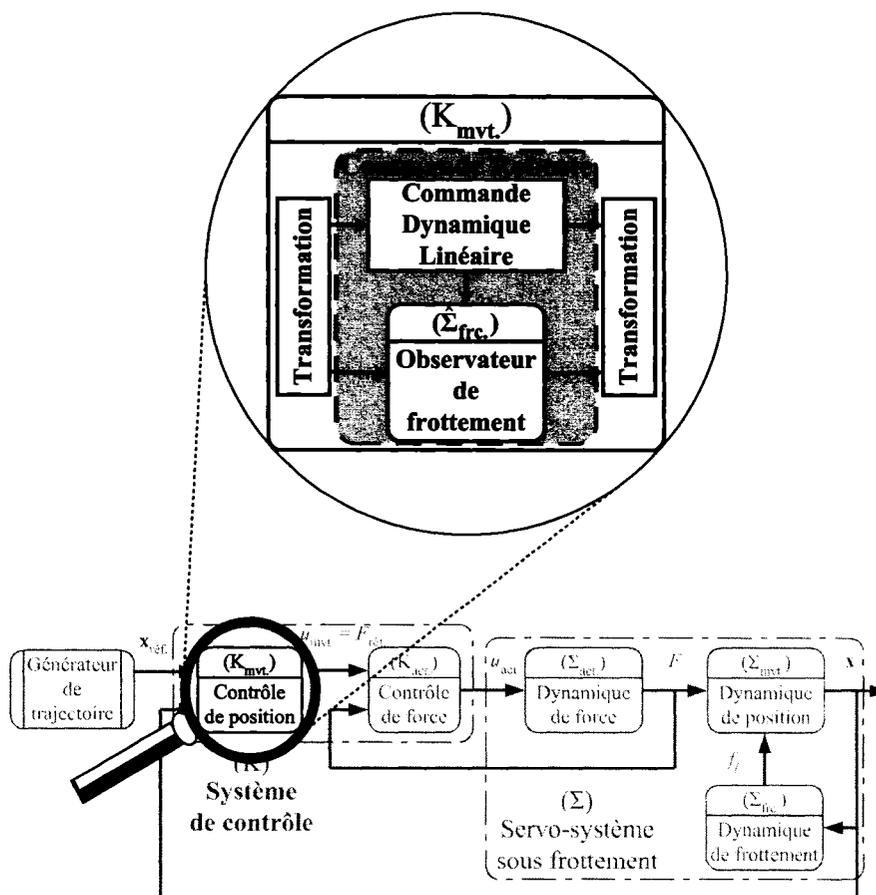


Figure 7 Éléments de contrôle de position

un ensemble de transformations (éléments de commandes linéarisantes et non linéaires) peuvent être appliquées en sus, au besoin, pour réduire l'espace du système de mouvement en un autre qui décrit les équations dans l'espace de contact et de frottement (voir figure 7). Ce nouvel espace réduit de mouvement contraint sous frottement, exprimé dans le domaine des variables d'écart, peut être structuré principalement en deux parties (voir figure 9); dont l'une correspond à une dynamique linéaire de position et l'autre constitue la dynamique non linéaire de frottement. Le bloc diagonal  $q \mapsto p$  et l'ensemble des signaux exogènes  $e = \begin{pmatrix} e_1^T & e_2^T & e_3^T \end{pmatrix}^T$  dans le schéma de la figure 9 comptent toutes les formes d'incertitudes et de perturbations (dynamiques négligées, non linéarités, incertitudes des paramètres, etc.) mises en jeu.

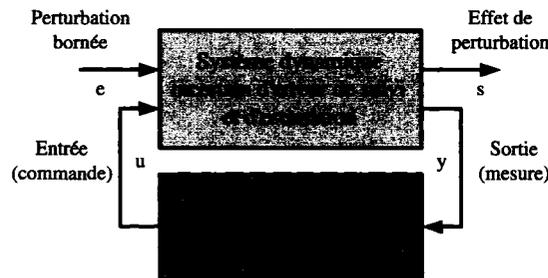


Figure 8 Schéma général de commande linéaire de système de mouvement

L'inclusion du contrôleur dynamique linéaire (voir figure 8) permet de corriger ainsi les dynamiques d'erreurs de suivi de trajectoire et d'estimation de frottement. Étant donné la propriété de passivité du modèle de frottement (Cf. propriété 2.3), la conception du contrôleur linéaire est fondée sur la passivité de la partition non linéaire (*i.e.* dynamique d'estimation) et le théorème de passivité<sup>6</sup> [216] pour trouver la (ou les) condition(s) de stabilisation des systèmes inter-connectés (voir figure 9). En effet, grâce à cette formulation, la résolution du problème de stabilisation du système global (non linéaire) sera développée simplement à partir du sous-système linéaire perturbé; puisque toutes les autres parties seront considérées, par définition, robustement stables ou à effets réduits de perturbation. Cette technique proposée constitue une généralisation du principe utilisé dans [20] qui construit le schéma de stabilisation à partir de la condition SPR<sup>7</sup> du sous-système dynamique linéaire.

Dans notre cas, cette condition SPR peut être étendue pour inclure la condition de marge de stabilité exponentielle de l'ensemble du système dynamique en boucle fermée. Nous proposons, en plus, un placement de pôles de la partition linéaire en boucle fermée dans une certaine région de stabilité d'une façon robuste pour limiter la rapidité de la dynamique du contrôleur et améliorer la réponse transitoire de positionnement; en particulier, l'amplitude substantielle de la bande passante, critiquée dans [34] (vis-à-vis des résultats obtenus

<sup>6</sup> Cf. théorème 6.1 dans [216]; *i.e.* la connexion par *feed-back* de deux systèmes passifs est passive aussi.

<sup>7</sup> Un système linéaire, de fonction de transfert  $G(s)$ , est SPR si et seulement si,  $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$ ,  $\forall \omega \in \mathbb{R}$  [146].

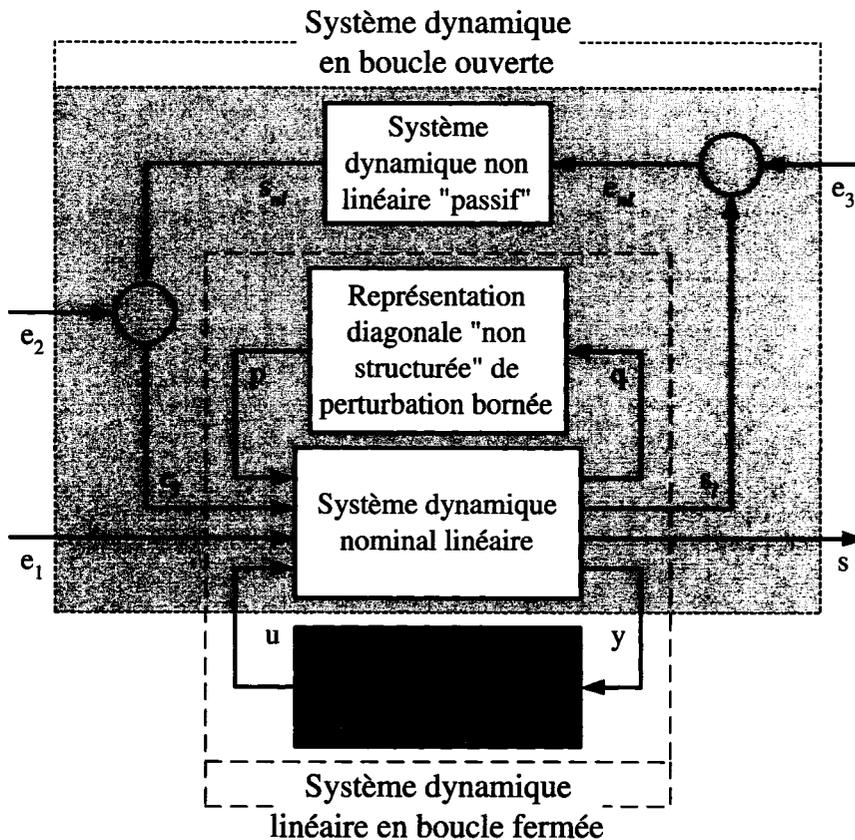


Figure 9 Schéma général détaillé de commande linéaire de système de mouvement et de compensation de frottement

dans [20, 34]). La procédure de calcul des gains du contrôleur linéaire proposé sera présentée comme un problème de synthèse de retour de sortie à multi-objectifs mettant en œuvre les inégalités matricielles linéaires ou LMIs [218, 219, 220], dans une formulation originale de ce type de problème.

Pour illustrer cette approche de commande de position et de compensation de frottement présentée dans la figure 9, nous proposons, dans la section suivante, l'étude d'un cas simple de mouvement unidirectionnel d'un solide sous frottement.

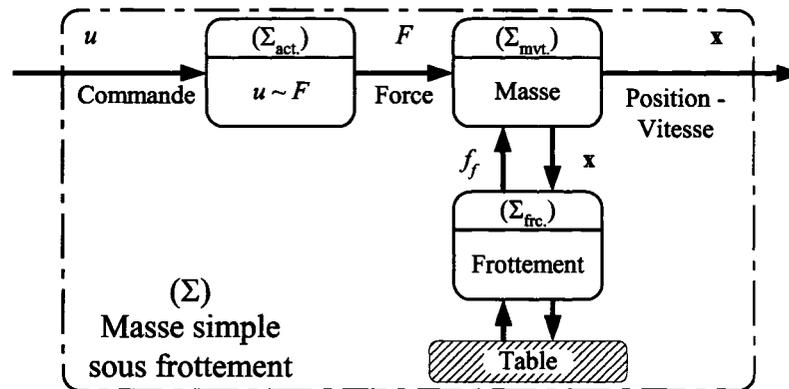


Figure 10 Schéma de base de système de masse simple sous frottement

## 2.4 Exemple d'illustration : Cas d'une masse simple sous frottement

Nous allons d'abord présenter les modèles dynamiques de mouvement et de frottement du système (voir figure 10) et l'ensemble des hypothèses et caractéristiques choisies pour illustrer cet exemple. Puis, nous aborderons le schéma de contrôle proposé dans ce cas. Ensuite, nous établirons les conditions de stabilité et de robustesse du système en boucle fermée, et la procédure de synthèse du contrôleur linéaire construite par le biais du formalisme LMI [203, 204]. Finalement, nous validerons cette démarche avec des résultats de simulation.

### 2.4.1 Modélisation du système

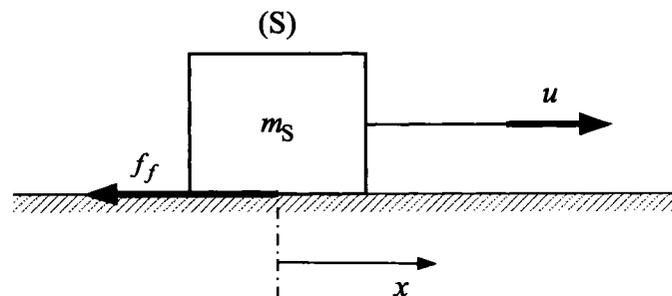


Figure 11 Solide en déplacement sur une surface sous frottement

Nous considérons un solide (S) de masse  $m_S$  à la position  $x$  en mouvement sous l'effet d'une force de commande  $u$  sur une surface sous frottement dynamique  $f_f$  (voir figure 11). L'équation dynamique standard de *Newton* s'écrit :

$$m_S \ddot{x} + f_f = u \quad (2.15)$$

Pour décrire la force de frottement, nous réécrivons le modèle dynamique de *LuGre* tel que présenté dans la sous-section §2.2.3.2 [20] :

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} z + \dot{x} \quad (2.16)$$

et

$$f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v \dot{x} \quad (2.17)$$

où  $z$  représente la variable d'état interne de frottement,  $\dot{x}$  est la vitesse de déplacement relatif du solide (S).  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_v$  désignent respectivement le coefficient de rigidité, le coefficient d'amortissement et le coefficient de viscosité.  $g(\dot{x})$  est la fonction bornée de *Stribeck*, donnée par [20] :

$$g(\dot{x}) = f_c + (f_s - f_c) \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}} \quad (2.18)$$

$f_c$  et  $f_s$  désignent les amplitudes de frottement de *Coulomb* et statique,  $\dot{x}_s$  la vitesse relative constante de *Stribeck*.

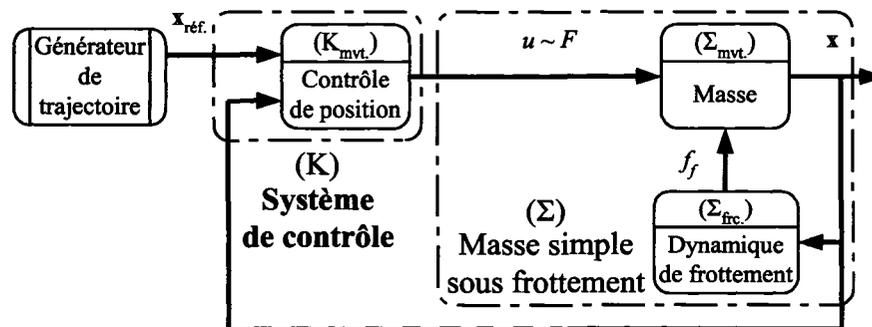


Figure 12 Schéma de base de contrôle de position d'une masse sous frottement

Nous proposons la réalisation d'une loi de commande selon le schéma de la figure 12 qui permet d'assurer un suivi de trajectoire stable avec des performances prescrites. Pour ce faire, nous considérons les hypothèses suivantes [203] :

**H2.1** La trajectoire désirée  $x_d$  est suffisamment lisse (ou lisse<sup>8</sup> d'ordre 2).

**H2.2** La position  $x$  et la vitesse  $\dot{x}$  sont supposées mesurables.

**H2.3** La déformation des lames  $z$  est une grandeur physique non mesurable.

**H2.4** Les paramètres du modèle de *LuGre* sont supposés fixes et connus *a priori*.

#### 2.4.2 Contrôle de position et compensation de frottement

Le système de contrôle (K) que nous proposons selon le schéma de la figure 12 comprend principalement :

- une compensation de frottement par *feed-back* basée sur un observateur dynamique qui s'apparente au modèle de *LuGre*,
- une commande dynamique linéaire (voir figure 13) par retour des variables mesurées (Cf. hypothèse H2.2).

D'abord, la force de frottement est reconstruite à partir du modèle mathématique de *LuGre* et des mesures du système par le biais d'une correction de la variable interne (*i.e.* déviation des lames) estimée. En effet, en utilisant les hypothèses H2.3 et H2.4, nous décrivons le schéma d'observation de frottement comme suit :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_0|\dot{x}|}{g(\dot{x})}\hat{z} + \dot{x} - u_z \quad (2.19)$$

et

$$\hat{f}_f = \sigma_0\hat{z} + \sigma_1\dot{\hat{z}} + \sigma_v\dot{x} \quad (2.20)$$

---

<sup>8</sup> Une fonction ou une trajectoire  $x_d$  est dite lisse d'ordre 2, si sa dérivée seconde existe et est continue, *i.e.*  $x_d \in \mathcal{C}_2$  où  $\mathcal{C}_2$  désigne l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.

où  $\hat{z}$  est l'estimé de l'état interne,  $\hat{f}_f$  la force estimée de frottement,  $u_z$  le terme de *feedback* introduit dans l'équation dynamique de l'observateur et  $g(\dot{x})$  la fonction de *Stribeck* donnée par (2.18).

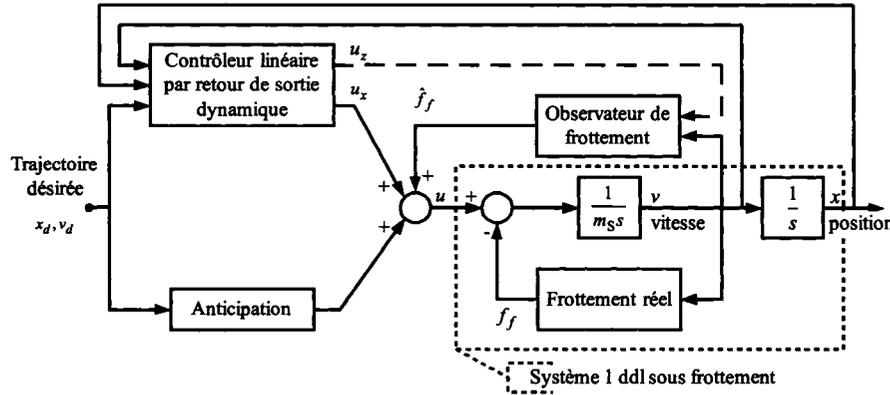


Figure 13 Schéma-bloc de système de compensation de frottement d'une masse

Ensuite, nous exprimons la loi de commande de mouvement du solide (S) qui tient compte de la compensation de son inertie et de la force de frottement (voir figure 13), comme suit :

$$u = m_S \ddot{x}_d + \hat{f}_f + u_x \quad (2.21)$$

où  $\ddot{x}_d$  désigne l'accélération désirée et  $u_x$  l'action de commande linéaire directe appliquée sur le solide (S). Dans la suite, nous introduisons les erreurs de suivi de trajectoire et d'observation données respectivement par :

$$\tilde{x} = x - x_d, \tilde{z} = z - \hat{z} \text{ et } \tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f \quad (2.22)$$

D'après les équations (2.7), (2.8), (2.19), (2.20) et (2.22), nous décrivons les erreurs d'estimation  $\tilde{z}$  et  $\tilde{f}_f$  selon :

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z} + u_z \quad (2.23)$$

et

$$\dot{\tilde{f}}_f = \sigma_0 \tilde{z} + \sigma_1 \dot{\tilde{z}} \quad (2.24)$$

**Remarque 2.1 :** Nous notons ici que la propriété 2.3 (de dissipativité), énoncée dans la sous-section §2.2.3.2, peut être appliquée de la même façon au système non linéaire entre  $u_z$  et  $\tilde{z}$  (donné par la relation (2.23)). Cette propriété sera très utile dans la suite pour la réalisation de la loi de commande.

D'après les équations (2.15), (2.21) et (2.22), nous décrivons l'erreur de suivi  $\tilde{x}$  selon :

$$m_S \ddot{\tilde{x}} = -\tilde{f}_f + u_x \quad (2.25)$$

Notons respectivement par  $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix}^T$  et  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$  le vecteur d'état mesurable des erreurs de suivi et le vecteur de commande. La représentation d'état associée à l'équation dynamique linéaire (2.25) est donnée par :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_f(-\tilde{f}_f) \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_S} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_S} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Le vecteur de commande  $\mathbf{u}$  représente la sortie d'un contrôleur dynamique linéaire d'ordre plein décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $\xi$  représente un vecteur d'état de  $\mathbb{R}^2$ .  $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  désigne la matrice d'évolution du contrôleur dynamique linéaire,  $\mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice d'entrée,  $\mathbf{C}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice de sortie et  $\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matrice directe.

La dynamique des erreurs se divise alors en deux parties (voir figure 14) :

- une partie non linéaire décrite par la relation (2.23),
- une partie linéaire décrite par les relations (2.24), (2.26) et (2.27).

Ces deux parties sont inter-connectées par l'entremise des variables  $\tilde{z}$  et  $u_z$  et en utilisant le contrôleur dynamique (2.28).

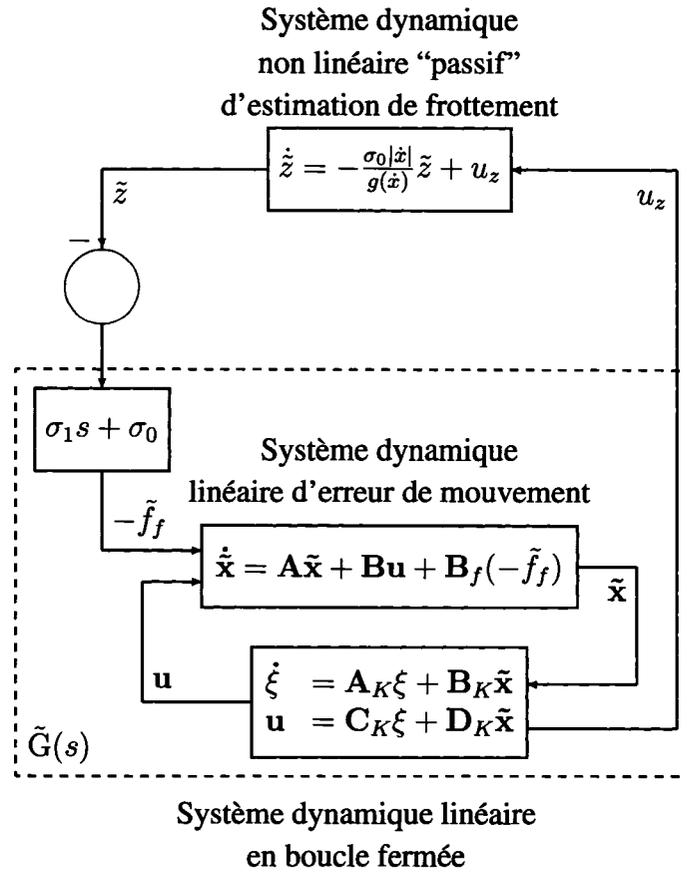


Figure 14 Schéma-bloc de systèmes inter-connectés (cas d'une masse simple)

**Proposition 2.1 :** Étant donné  $\tilde{G}(s)$  la fonction de transfert, de la partie linéaire de la boucle fermée, entre  $-\tilde{z}$  et  $u_z$  (voir figure 14).  $\tilde{G}(s)$  est un système propre qui peut être représenté par la réalisation  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{d})$  donnée par [203, 204] :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A + BD_K & BC_K \\ B_K & A_K \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_z + BD_K D_z \\ B_K D_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} D_{uz} D_K & D_{uz} C_K \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{d} = D_{uz} D_K D_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec  $B_z = \sigma_0 B_f + \sigma_1 A B_f$ ,  $D_z = \sigma_1 B_f$  et  $D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Démonstration :** Nous considérons le vecteur d'état

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - D_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} D_z(-\tilde{z}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant (2.24), (2.26) et (2.28), nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathbf{B}_f \\ 0 \end{pmatrix} (-\tilde{z}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathbf{B}_f + \sigma_1 \mathbf{A}\mathbf{B}_f + \mathbf{B}\mathbf{D}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f \end{pmatrix} (-\tilde{z})\end{aligned}$$

Et, nous écrivons :

$$\begin{aligned}u_z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{D}_{uz} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{uz} \mathbf{D}_K & \mathbf{D}_{uz} \mathbf{C}_K \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}_{uz} \mathbf{D}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f (-\tilde{z})\end{aligned}$$

pour ainsi trouver la réalisation (2.29). ■

Le principe de la partition du système en boucle fermée en deux sous-systèmes passifs (voir figure 14) est interprété comme suit :

- Le sous-système non linéaire représente une application d'entrée/sortie passive de  $u_z$  dans  $\tilde{z}$ .
- L'ensemble du sous-système linéaire et du contrôleur dynamique linéaire doivent respecter la propriété SPR pour assurer la stabilité du système total en boucle fermée.

En effet, grâce à la passivité du bloc non linéaire et en utilisant la théorie de passivité [216], nous obtiendrons les conditions nécessaires sur le contrôleur dynamique (2.28) pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

La commande de mouvement d'une masse par le contrôleur dynamique linéaire d'ordre plein (2.28) présente une généralisation de l'approche introduite dans [20]. En effet, le contrôleur proposé dans [20] est limité à un *feed-back* statique de type PD sur la dynamique de position et à une correction statique proportionnelle à l'erreur de position (*i.e.*  $-k\tilde{x}$ ) sur l'observateur pour assurer la condition de stabilité. Si nous choisissons

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{B}_K = \mathbf{C}_K = \emptyset \text{ (i.e. des éléments de l'ensemble vide) et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} -k_p & -k_d \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

nous retrouvons les conditions introduites par Canudas *et al.* [20] :

$$k > 0, k_p > 0 \text{ et } k_d > \frac{\sigma_0 m_S}{\sigma_1}$$

qui garantissent la condition SPR sur  $\tilde{G}(s)$ .

Par contre, dans le contexte plus général introduit ici avec l'utilisation du contrôleur par retour de sortie d'ordre plein (2.28), cette condition de passivité devient *a priori* plus difficile à établir analytiquement. Dans la suite, nous présenterons cette condition générale comme un sujet de faisabilité d'un problème convexe exprimé par un ensemble de contraintes d'inégalités matricielles linéaires. Dans ce nouvel espace de contraintes, il devient aussi plus plausible d'introduire des conditions supplémentaires de placement de pôles et d'optimisation de certains critères comme  $H_2$  ou  $H_\infty$ .

### 2.4.3 Formulation LMI du problème

#### 2.4.3.1 Condition de stabilité

Considérons le système de déplacement sous frottement (2.15) – (2.18). Étant donné l'observateur de frottement dynamique (2.19) et (2.20), la loi de commande par *feed-back* (2.21) et la représentation d'état du contrôleur dynamique (2.28), avec  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$ . Nous avons (voir figure 14) [203] :

**Proposition 2.2 :** Les erreurs de suivi (en particulier  $\tilde{x}$ ) et d'observation  $\tilde{z}$  sont globalement exponentiellement stables et  $\tilde{f}$  converge vers zéro s'il existe une matrice  $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  symétrique et définie positive (*i.e.*  $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ ), telle que [203] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

où  $\epsilon$  est une constante positive de conditionnement.  $\star$  remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

**Démonstration :** Nous reprenons la définition du vecteur d'état  $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$

introduite dans la démonstration de la proposition 2.1. Soit  $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \end{pmatrix}$  le vecteur d'état du système total en boucle fermée (voir figure 14). Nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} + \frac{\tilde{z}^2}{\epsilon^2}$$

alors, la dérivée totale de  $V$ , par rapport au temps  $t$  le long des trajectoires du système, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\tilde{z})) + \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{z} \left( -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z} + u_z \right) \\ &= \tilde{\mathbf{X}}^T (\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{B}}(-\tilde{z}) + (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z}^2 - \\ &\quad \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T (-\tilde{z}) - \frac{1}{\epsilon^2} (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \tilde{z}^2 \\ &\leq \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^T & (-\tilde{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ (-\tilde{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons ici que  $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}$ . Cette inégalité est vraie grâce à la propriété 2.1 (*i.e.*  $g(\dot{x}) > 0$ ). Si le membre de droite dans cette inégalité est défini négatif, alors  $\dot{V}$  est définie négative. Par conséquent, les variables internes du système en boucle fermée sont bornées,  $\tilde{x}$  et  $\tilde{z}$  convergent exponentiellement vers zéro [146, 216] et  $\tilde{f}_f$  converge vers zéro. ■

**Remarque 2.2 :** L'amplitude de la variable interne  $z$ , qui correspond à la déformation des lames formant les aspérités des surfaces en contact (voir figure 3), est manifestement très petite comparée au déplacement du solide  $x$ . Ainsi, le coefficient  $\epsilon$  est choisi suffisamment petit pour garantir un bon conditionnement de la matrice symétrique donnée dans (2.30). Cette condition est souvent nécessaire pour la résolution numérique des LMIs.

**Remarque 2.3 :** En particulier, si  $\mathbf{D}_K = 0$  (*i.e.*  $\tilde{\mathbf{d}} = 0$ ),  $\dot{V}$  peut seulement être définie semi-négative, alors il faut combiner la condition SPR avec le lemme de *Barbalat*<sup>9</sup> pour

<sup>9</sup> Cf. lemme 8.2 dans [216].

prouver la convergence de  $\tilde{x}$  et  $\tilde{z}$  vers zéro. Les détails de cette étude sont amplement discutées dans [221].

### 2.4.3.2 Conception à multi-objectifs

En plus de la condition SPR, donnée par (2.30), la détermination des composantes du contrôleur (2.28) peut être discutée en ajoutant des conditions supplémentaires de placement de pôles de la fonction de transfert  $\tilde{G}(s)$  [203] et/ou d'optimisation convexe d'un critère de performance, par exemple, de type  $H_2$  [204, 219]. En effet, les contraintes supplémentaires sur le placement des pôles peuvent être introduites pour fixer les spécifications transitoires de la réponse comme la marge de stabilité et le temps de réponse. Le critère d'optimisation, quand à lui, peut être sollicité pour limiter éventuellement une fonction coût en rapport avec le système en boucle fermée.

### Stabilité exponentielle

Pour ajuster la marge de stabilité du système total en boucle fermée, nous établissons la condition de stabilité exponentielle suivante qui remplace la condition SPR (2.30) [203]. Considérons le système de déplacement sous frottement (2.15) – (2.18). Étant donné l'observateur de frottement dynamique (2.19) et (2.20), la loi de commande par *feed-back* (2.21) et la structure dynamique du contrôleur linéaire (2.28), avec  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$ . Nous avons [203] :

**Proposition 2.3 :** Soit  $\epsilon > 0$  et  $\alpha > 0$ . Les erreurs de suivi et d'observation convergent exponentiellement vers zéro, avec un taux de décroissement  $\alpha$ , s'il existe une matrice  $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  symétrique et définie positive (*i.e.*  $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ ), telle que [203] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \end{pmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

\* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

**Démonstration :** Considérons les changements de variables suivants :  $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$  et  $\bar{u}_z = e^{\alpha t} u_z$ . Nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{u}_z \end{cases}$$

et

$$\bar{u}_z = \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}(-\bar{z})$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité d'ordre 4. Si nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{\bar{z}^2}{\epsilon^2}$$

alors, la dérivée totale de  $V$ , par rapport au temps  $t$  le long des trajectoires du système, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s ((\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z})) + \frac{2}{\epsilon^2} \bar{z} \left( -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{u}_z \right) \\ &= \bar{\mathbf{X}}^T ((\tilde{\mathbf{A}}^T + \alpha \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I})) \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z}) + (-\bar{z}) \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} - \\ &\quad \frac{2}{\epsilon^2} \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z}^2 + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \bar{z}^2 - \frac{1}{\epsilon^2} \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T (-\bar{z}) - \frac{1}{\epsilon^2} (-\bar{z}) \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \bar{z}^2 \\ &\leq \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}}^T & (-\bar{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ (-\bar{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si le membre de droite dans cette inégalité est défini négatif, alors  $\dot{V}$  est définie négative. Par conséquent,  $\bar{\mathbf{X}}$  et  $\bar{z}$  sont globalement quadratiquement stables. Ensuite,  $\bar{\mathbf{X}} = e^{-\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$  et  $\bar{z} = e^{-\alpha t} \tilde{z}$  convergent vers zéro, au moins, exponentiellement avec un taux de décroissance  $\alpha$  [146, 216]. ■

### Contrainte sur la région de stabilité

Pour prévenir contre les dynamiques de hautes fréquences du contrôleur associées aux fréquences des modes oscillatoires du système; nous rajoutons des conditions de placement des pôles de la partie linéaire  $\tilde{G}(s)$  à l'intérieur d'un disque de rayon  $r$  centré à l'ori-

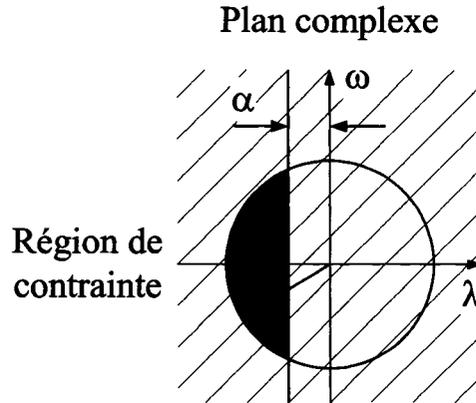


Figure 15 Région de stabilité

gine du plan complexe (voir figure 15). La caractérisation LMI associée à cette *région de stabilité*<sup>10</sup> est exprimée comme suit [203, 219] :

**Problème 2.1 :** Trouver  $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$  une matrice de  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ , telle que

$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & \star \\ \tilde{\mathbf{P}}_r\tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

★ remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

La résolution de ce problème constitue une contribution supplémentaire dans la mise au point des conditions (en fréquence, par exemple) de la réponse en boucle fermée. Cet aspect représente en effet une entrave à la solution présentée dans [20, 34].

<sup>10</sup> Une région de stabilité, ou simplement région LMI, est tout sous-ensemble  $\mathcal{D}$  du demi-plan complexe gauche défini selon [222] :

$$\mathcal{D} \triangleq \{z \in \mathbb{C}; L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

où  $L = L^T$  et  $M$  deux matrices réelles.  $\bar{z}$  désigne le *conjugué* de  $z$ . Étant donné un système dynamique  $\dot{x} = Ax$ ,  $A$  est dite  $\mathcal{D}$ -stable, *i.e.* tous les pôles de  $A$  se trouvent dans  $\mathcal{D}$  si et seulement si, il existe une matrice  $P$  symétrique et définie positive, telle que [223, 224] :

$$M_{\mathcal{D}}(A, P) = L \otimes P + M \otimes (PA) + M^T \otimes (A^T P) < 0$$

Le symbole  $\otimes$  désigne le *produit de Kronecker* défini par [225] :

$$A \otimes B \triangleq (A_{ij}B)_{ij}$$

## Optimisation $H_2$

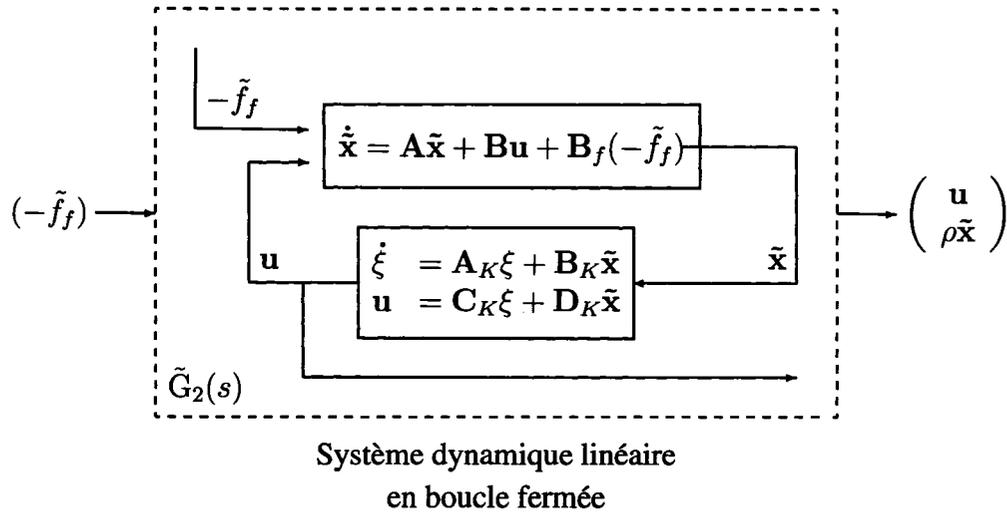


Figure 16 Schéma-bloc de système linéaire  $\tilde{G}_2(s)$

D'une part, les stratégies de commande optimale classique (LQG) sont développées en général pour atteindre un plus haut niveau de précision à un coût d'énergie plus faible (*i.e.* sans utiliser des contrôleurs très énergiques comme les contrôleurs à gain intégrateur élevé). D'autre part, la force de frottement constitue une grandeur non mesurable. Son estimation qui est basée sur le modèle de *LuGre* à paramètres fixes aurait des valeurs résiduelles inévitables. Pour minimiser la sensibilité du coût de la commande  $u$  et celle de l'erreur de suivi  $\tilde{x}$  par rapport à l'erreur d'estimation de la force de frottement  $\tilde{f}_f$  (*i.e.* limiter simultanément les énergies d'erreur de suivi et de signal de commande), nous proposons le critère d'optimisation<sup>11</sup>  $H_2$  [228] associé à la matrice de transfert (voir figure

<sup>11</sup> La norme  $H_2$ , définie par [226, 227] :

$$\|H(s)\|_2^2 \triangleq \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ij}^2(t) dt$$

où  $[h_{ij}(t)]$  est la matrice des réponses impulsionnelles associées au transfert  $H(s)$ , mesure l'énergie des écarts engendrés par des impulsions attaquant les processus générateurs des signaux exogènes [226, 228].

16) définie de  $(-\tilde{f}_f)$  dans  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho\tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$ . Dans la proposition suivante, nous établissons la caractérisation LMI associée à ce critère d'optimisation.

**Proposition 2.4 :** Soit  $\tilde{G}_2(s)$  la matrice-colonne de transfert du système en boucle fermée entre  $(-\tilde{f}_f)$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho\tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$ . Alors,  $\tilde{G}_2(s)$  est une fonction vectorielle strictement propre qui peut être représentée par la réalisation  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$  donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_2\mathbf{C}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , où  $\mathbf{I}_2$  désigne la matrice identité d'ordre 2. En plus,  $\|\tilde{G}_2\|_2^2 < \gamma$  si et seulement si,  $\exists \tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_2^T > 0$  et  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  deux matrices de  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  telles que [204] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 + \tilde{\mathbf{P}}_2 \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T \tilde{\mathbf{P}}_2 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_2 & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{T} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.35)$$

et

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) < \gamma \quad (2.36)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité d'ordre 4.  $\text{Tr}(\cdot)$  désigne la trace d'une matrice carrée.

**Démonstration :** Nous trouvons la formulation LMI d'optimisation  $H_2$  dans plusieurs références comme [26, 204, 219] par exemple. ■

Le coefficient de pondération  $\rho$  est utilisé pour déterminer un compromis entre l'effort de commande et la performance de rejet de perturbation [204].

### Optimisation de multi-objectifs

Le problème de synthèse de la commande linéaire (2.28), assujetti à la compensation de frottement (2.19) et (2.20) et la loi de *feed-back* (2.21) du solide (S) sous frottement (2.15) – (2.18), peut être ainsi assimilé à l'ensemble des conditions de stabilité (stabilité exponentielle et région de stabilité) et de performance (optimisation  $H_2$ ) discutées précédemment. Nous rassemblons donc ces contraintes selon [203, 204] :

**Problème 2.2 :** Trouver (minimiser)  $\gamma > 0$  sujet à

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_2^T > 0$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  des matrices de  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$  et  $\mathbf{D}_K$  des matrices de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , telles que les réalisations  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{d}})$  et  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$  données respectivement par (2.29) et (2.33) satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36).

En général, dans ce genre de problème de faisabilité (ou d'optimisation) convexe de multi-objectifs, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lya-punov*  $\tilde{\mathbf{P}}$  [218, 219]. Dans la suite, nous nous restreignons à la formulation *conservative*<sup>12</sup> suivante [203, 204] :

**Problème 2.3 :** Minimiser  $\gamma > 0$  sujet à

$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  des matrices de  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$  et  $\mathbf{D}_K$  des matrices de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , telles que les réalisations  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{d}})$  et  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$  données respectivement par (2.29) et (2.33) satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36) avec

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_2 \quad (2.37)$$

**Remarque 2.4 :** La restriction supplémentaire (2.37) est ajoutée pour garantir la propriété de convexité du problème de minimisation à multi-objectifs 2.3 [218, 219]. Le critère  $H_2$  calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème. Cependant, cette contrainte n'est trop pas restrictive (conservatrice) [219].

<sup>12</sup> La traduction exacte en français de ce terme; conservateur, trice; est rarement utilisée.

### 2.4.3.3 Synthèse du retour de sortie

Notons que les conditions que nous venons d'établir pour la conception du contrôleur (2.28) restent tout de même bilinéaires par rapport aux variables  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$  et  $\mathbf{D}_K$ . Il n'existe pas aujourd'hui de méthode directe pour résoudre ce genre de problèmes mais des méthodes itératives qui sont relativement difficiles à mettre en œuvre (de point de vue numérique). Par contre, si nous utilisons le changement de variable introduit dans [219], nous pouvons transformer ces inégalités matricielles bilinéaires<sup>13</sup> en LMIs. Partitionnons  $\tilde{\mathbf{P}}$  et  $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$  selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

avec  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$  et telles que les matrices inversibles  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (2.39)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  et  $\hat{\mathbf{D}}$  données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous proposons le résultat suivant [203, 204] :

**Proposition 2.5 :** Il existe une loi de commande linéaire par retour de sortie d'ordre plein (2.28), une matrice  $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  symétrique et définie positive et une matrice  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  symétrique qui satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36) si et seulement si, il existe des

<sup>13</sup> En anglais, *bilinear matrix inequalities* (BMIs). Une *inégalité matricielle bilinéaire*, ou simplement BMI, est une expression de la forme [229, 230] :

$$\mathbf{F}(\Theta) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \Theta_i \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_j \Theta_k \mathbf{F}_{jk} \geq 0$$

où  $\Theta \triangleq (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$  est le vecteur des *variables de décision* et; pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ ;  $\mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{F}_{jk}$  sont des matrices réelles symétriques dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ; avec  $n \in \mathbb{N}$ .

matrices  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$ ,  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  et  $\hat{\mathbf{D}}$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  qui satisfont les LMIs suivantes [203, 204] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star \\ a_{31} & a_{32} & -\frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{D}_{uz}^T + \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & \star & \star & \star \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & \star & \star \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & \star \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star \\ a_{21} & a_{22} & \star \\ \mathbf{B}_f^T & \mathbf{B}_f^T\mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{C}_2\mathbf{Q} + \mathbf{D}_2\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\hat{\mathbf{D}} & \mathbf{T} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.45)$$

et

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) < \gamma \quad (2.46)$$

avec

$$a_{11} = \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T$$

$$a_{21} = \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T$$

$$a_{31} = \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{B}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{C}}$$

$$a_{22} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T$$

$$a_{32} = \mathbf{B}_z^T\mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{B}}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{D}}$$

\* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

**Démonstration :** Nous considérons la matrice de rang plein  $\tilde{\Pi}$  suivante [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En multipliant la matrice  $\tilde{\mathbf{P}}$  à gauche et à droite respectivement par  $\tilde{\Pi}^T$  et  $\tilde{\Pi}$  et en utilisant (2.39), la condition  $\tilde{\mathbf{P}} > 0$  devient (2.41). L'inégalité (2.42) est obtenue en multipliant (2.31) à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, 1)$  et  $\text{diag}(\tilde{\Pi}, 1)$  et en utilisant les changements des variables (2.40). L'inégalité (2.43) est obtenue en multipliant (2.32) à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$  et  $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$ . L'inégalité (2.44) est obtenue en multipliant (2.34) à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I})$  et  $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I})$ . Et, l'inégalité (2.45) est obtenue en multipliant (2.35) à gauche et à droite respectivement par  $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I})$  et  $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I})$ , en utilisant, à chaque fois, les changements des variables (2.40). ■

Les matrices  $\mathbf{A}_K$ ,  $\mathbf{B}_K$ ,  $\mathbf{C}_K$  et  $\mathbf{D}_K$  sont obtenues à partir de (2.40). Les LMIs (2.41) – (2.46) peuvent être résolues en utilisant la méthode d'optimisation du point intérieur [231] implémenté avec l'outil *LMI control toolbox* qui se trouve dans le logiciel MATLAB<sup>®</sup> [232].

#### 2.4.4 Application numérique et simulation

Pour illustrer notre démarche, nous proposons l'exemple numérique suivant [105, 203] :

##### 2.4.4.1 Données

Les valeurs numériques des paramètres du solide (S) sous frottement (voir figure 11) sont données dans le tableau II. La trajectoire désirée est donnée par  $x_d = 0.1 \cos(0.32\pi t)$ . Pour la synthèse du contrôleur dynamique, nous choisissons une marge de stabilité exponentielle d'amplitude  $\alpha = 5$  et un disque de rayon  $r = 50$  centré à l'origine [203]. Le paramètre de conditionnement  $\epsilon$  est fixé à  $10^{-3}$ .

Tableau II

Paramètres du solide (S) et du frottement de *LuGre*

Désignation	Valeur	Unité
$m_S$	1.62	kg
$\sigma_0$	$10^5$	N/m
$\sigma_1$	495.	Ns/m
$\sigma_v$	4.6	Ns/m
$f_c$	2.0	N
$f_s$	2.15	N
$v_s$	$5 \cdot 10^{-3}$	m/s

#### 2.4.4.2 Résultats

Les matrices d'état du contrôleur dynamique linéaire sont données par :

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} -19.26 & 1.11 \\ -4.66 & -37.55 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} 51.82 & 2.51 \\ -64.85 & -6.03 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} -79.32 & 3.15 \\ -0.06 & -0.04 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} -73.51 & -45.53 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix}$$

La simulation est effectuée par l'entremise de l'algorithme `ode23` en utilisant le logiciel *Simulink* dans MATLAB<sup>®</sup>. Les résultats de simulation sont regroupés dans la figure 17, montrant respectivement (a) la position, (b) l'erreur de position transitoire, (c) la force de commande et la force de frottement, (d) la déformation interne du frottement et (e) les forces de commande et de frottement transitoires du solide (S) en mouvement. En plus, pour évaluer la qualité des résultats de notre approche, nous proposons de les comparer à ceux obtenus par la méthode de Canudas *et al.* [20]. Nous choisissons les mêmes gains proposés dans [105] et testés avec les mêmes paramètres de frottement (*i.e.*  $k_p = 350$ ,  $k_d = 450$  et  $k = 0.001$ ). Les résultats de cette méthode sont regroupés dans la figure 18.

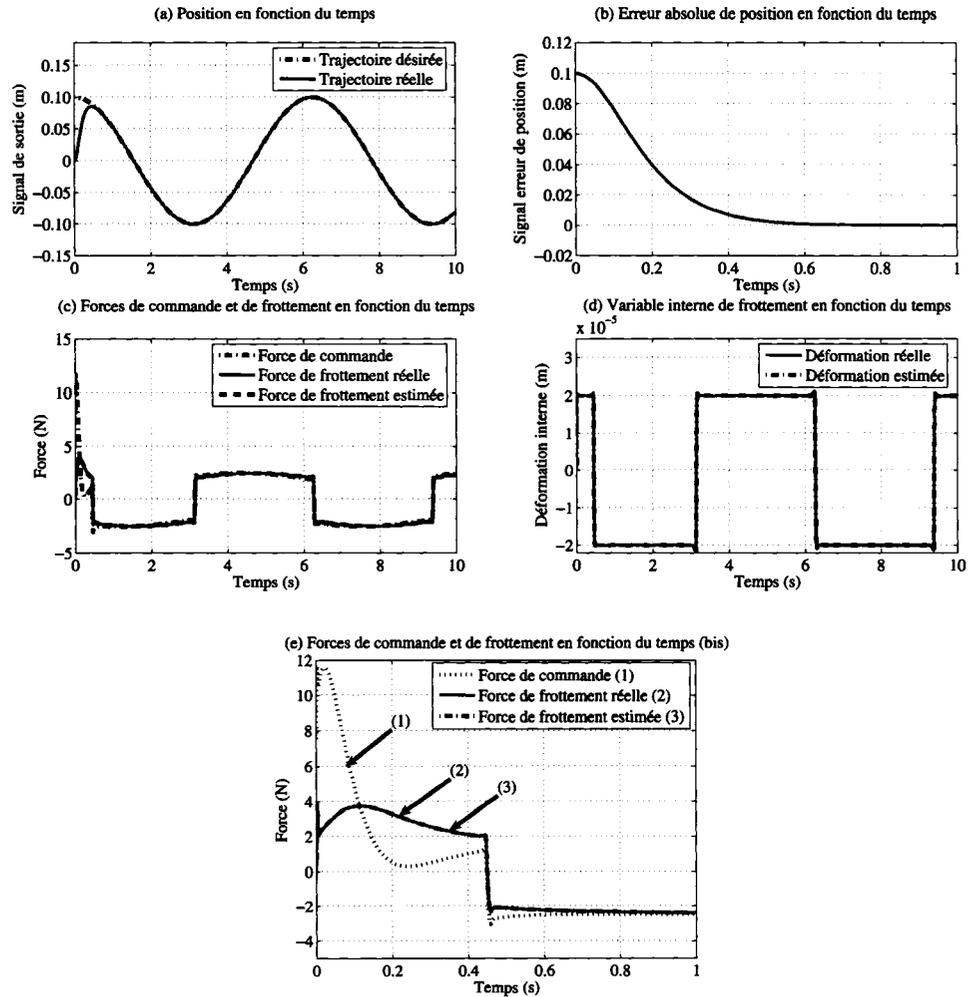


Figure 17 Performances de contrôle de position du solide (S) sous frottement

### 2.4.4.3 Commentaires et discussions

Nous constatons d'abord la convergence de la solution. Le dispositif de retour de sortie proposé ici permet de prédire efficacement l'évolution des états du système (estimation de la force de frottement et suivi de trajectoire de position), au profit d'un effort de commande raisonnable (*i.e.* pas trop élevé).

Le problème de faisabilité mis en œuvre par l'entremise de la méthode énoncée dans ce chapitre est résolu ainsi dans un contexte de multi-objectifs (*i.e.* à plusieurs contraintes)

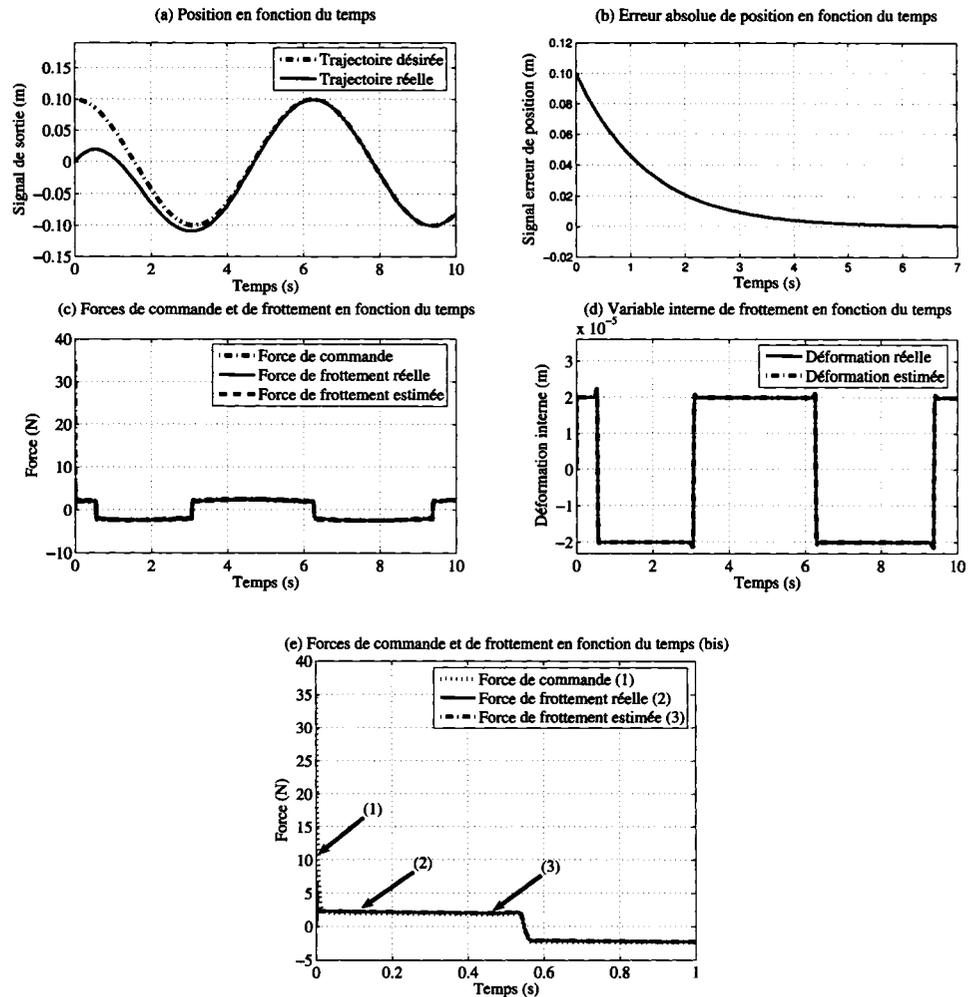


Figure 18 Performances de contrôleur de Canudas *et al.* de position du solide (S) sous frottement

grâce essentiellement à la flexibilité du type de contrôle linéaire proposé. Le retour de sortie dynamique offre plus de ddl comparé par exemple à la commande statique de retour d'état. En particulier, ce résultat peut être facilement étendu pour inclure une optimisation de type  $H_2$  par exemple [204]. Grâce à cette technique de résolution de problème de commande de système sous frottement et cette structure dynamique du contrôleur, il est possible de spécifier, avec plus de rigueur, les conditions de la réponse; en particulier, la caractéristique de la bande passante en boucle fermée. Cette dernière constitue le maillon

faible dans la formule de contrôle statique (PD et PID filtré) discutée dans [20, 34]. Il faut noter, en plus, que l'utilisation de cette technique (commande linéaire par retour de sortie et résolution de problème à multi-objectifs) est rendue possible grâce au formalisme LMI; qui offre un outil puissant de résolution numérique, au moment où la solution analytique est difficile à avoir. Finalement, nous constatons l'amélioration de la réponse obtenue avec notre approche comparativement à celle obtenue avec le compensateur par retour d'état statique proposé par Canudas *et al.* [20]. Il est important de noter aussi que malgré un temps de réponse nettement plus court obtenu en utilisant notre méthode, la méthode de Canudas *et al.* exige un effort de commande beaucoup plus important.

## 2.5 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est dédié au développement d'une technique de commande stabilisante robuste des servo-systèmes mécaniques sous frottement. L'objectif principal est lié à :

- la résolution du problème de contrôle de mouvement avec une compensation de frottement basée sur le modèle de *LuGre*, jugé suffisamment complet et dont l'implémentation est relativement facile.
- l'utilisation de la commande linéaire par *feed-back* de sortie qui offre une extension par rapport aux modèles de commande statique par retour d'état. Cette extension permet d'augmenter la flexibilité de la technique et aussi les conditions de résolution du problème grâce au formalisme LMI qui lui est associé dans ce cas.

L'exemple illustratif que nous avons développé dans ce chapitre permet d'élucider le principe de la stratégie proposée dans un contexte simplifié. Des situations plus complexes et/ou plus complètes seront discutées dans les chapitres suivants. Il faut noter que l'étape de commande de force/couple constitue un artifice de moindre importance dans notre sujet. La stratégie adoptée dans cette étape diffère d'une application à une autre avec le niveau de couplage force/position et sa complexité. Le but reste, tout de même, de trouver une

solution à ce sous-problème qui s'adhère avec le schéma de principe mis en place pour la commande de position.

MCours.com