

CHAPITRE 1

CONCEPTS DE BASE DES FILTRES À DÉCIMATION

1.1 Introduction

Le réajustement de la fréquence d'échantillonnage suivant le signal d'intérêt est une tâche assez fréquente dans le traitement numérique du signal. Les deux principales raisons de ce réajustement de fréquence sont : la performance et le coût. Par exemple, en audio, trois fréquences d'échantillonnage sont actuellement utilisées : 32 KHz pour la diffusion, 44.1 KHz pour le disque compact numérique et 48 KHz dans la bande sonore numérique. Des systèmes, qui utilisent plusieurs fréquences d'échantillonnage différentes, sont connus sous le nom de systèmes multicaudences. Ces systèmes, comparés aux systèmes traditionnels, offrent de meilleures performances à un coût réduit [14]. Ce réajustement de fréquence peut se faire de deux façons : la première façon est de passer d'une grande fréquence d'échantillonnage à une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus petite (décimation) à l'aide d'un filtre à décimation. La deuxième façon, consiste à transformer une petite fréquence d'échantillonnage en une beaucoup plus grande (interpolation) à l'aide d'un filtre à interpolation. Ainsi, dans ce chapitre, les concepts de base du traitement numérique multicaudence du signal et quelques structures de filtres à décimation sont présentés. La priorité est accordée à la décimation plutôt qu'à l'interpolation.

1.2 Traitement numérique multicaudence du signal

La conversion d'une fréquence d'échantillonnage d'un signal à une fréquence plus grande ou plus petite peut se faire par deux méthodes différentes. La première méthode consiste à utiliser un CNA pour convertir le signal numérique en signal analogique et le rééchantillonner à la fréquence désirée en utilisant un CAN. Cette méthode augmente les

ressources du système et introduit de l'erreur de quantification à chaque fois qu'un CAN ou un CNA est utilisé. La deuxième méthode consiste à faire la conversion dans le domaine numérique en utilisant un facteur de décimation ou d'interpolation. Cette deuxième méthode est plus avantageuse que la première parcequ'elle n'utilise que des filtres numériques. Chester a fait la comparaison entre les filtres analogiques et les filtres numériques [15]. Il explique que les filtres numériques, par rapport à la surface occupée et la puissance, sont plus efficaces que les filtres analogiques dans le cadre des applications qui demandent une phase linéaire, une bonne atténuation dans la bande arrêtée et une petite déviation dans la bande passante. Un autre aspect qui rend attrayant la méthode purement numérique est la flexibilité des filtres numériques par rapport à une réponse programmable ou adaptive.

1.3 Décimation

La façon la plus simple de décimer une séquence $x(n)$ par un facteur de décimation R est de choisir chaque $R^{\text{ième}}$ donnée de la séquence et supprimer le reste. Si $x(n) = [\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots]$, la séquence décimée est donnée par $[\dots, x(-2R), x(-R), x(0), x(R), x(2R), \dots]$ et peut s'écrire sous forme d'équation comme suit [16] :

$$x_R(n) = (\downarrow R)x(n) = x(Rn) \quad \text{avec } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

Considérons le cas simple d'une décimation par un facteur de 2 et essayons de déduire la relation entre les spectres de la séquence originale et décimée :

$$x_2(n) = [\dots, x(-2), x(0), x(2), x(4), \dots]$$

Posons $v(n)$, le produit de la séquence $x(n)$ par $h(m)$ défini par l'équation (1.2). Le résultat est donné par l'équation (1.3).

$$h(m) = \begin{cases} 1, & m = 2n \\ 0, & m \neq 2n \end{cases} \quad (1.2)$$

$$v(n) = [\dots, x(-2), 0, x(0), 0, x(2), 0, x(4), \dots] \quad (1.3)$$

$v(n)$ peut être écrit en fonction de $x(n)$ comme suit [16] :

$$v(n) = \frac{1}{2} [x(n) + (-1)^n x(n)] \quad (1.4)$$

Étant donné que $-1 = e^{-j\pi}$, alors l'équation (1.4) devient :

$$v(n) = \frac{1}{2} [x(n) + e^{-j\pi n} x(n)] \quad (1.5)$$

1.3.1 Analyse spectrale

L'une des propriétés de la transformée de Fourier dit qu'un décalage par ω_0 dans le domaine fréquentiel entraîne une multiplication par $e^{j\omega_0 n}$ dans le domaine temporel. Cette propriété sur le décalage fréquentiel est représentée par l'équation suivante :

$$x(n)e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{TF} X(\omega - \omega_0) \quad (1.6)$$

Ainsi, en utilisant cette propriété, la transformée de Fourier discrète de l'équation (1.5) est donnée par :

$$V(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega) + X(\omega + \pi)] \quad (1.7)$$

Maintenant, essayons de trouver la relation entre les spectres de $v(n)$ et $x_2(n)$. La transformée de Fourier discrète de $x_2(n)$ est donnée par [16]:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(2n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) e^{-j\frac{\omega}{2}m} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$= V\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.9)$$

Dans l'équation (1.8), l'indice m est pair et égal à $2n$. Ceci veut dire que seules les composantes paires de $v(m)$ sont prises en compte. Alors, on pourrait se poser des questions sur la validité de cette équation. Mais, comme les composantes impaires de $v(m)$ sont nulles, alors le fait de ne pas les tenir en compte n'influence en rien l'équation (1.8). En combinant les équations (1.7) et (1.9), le spectre du signal décimé en fonction du signal original peut s'écrire comme suit [16] :

$$X_2(\omega) = \frac{1}{2} \left[X\left(\frac{\omega}{2}\right) + X\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right] \quad (1.10)$$

Cette équation montre que le spectre du signal décimé n'est rien d'autre que la somme des spectres rétrécis et décalés en fréquence du signal original. La figure 1 illustre bien ce processus [16].

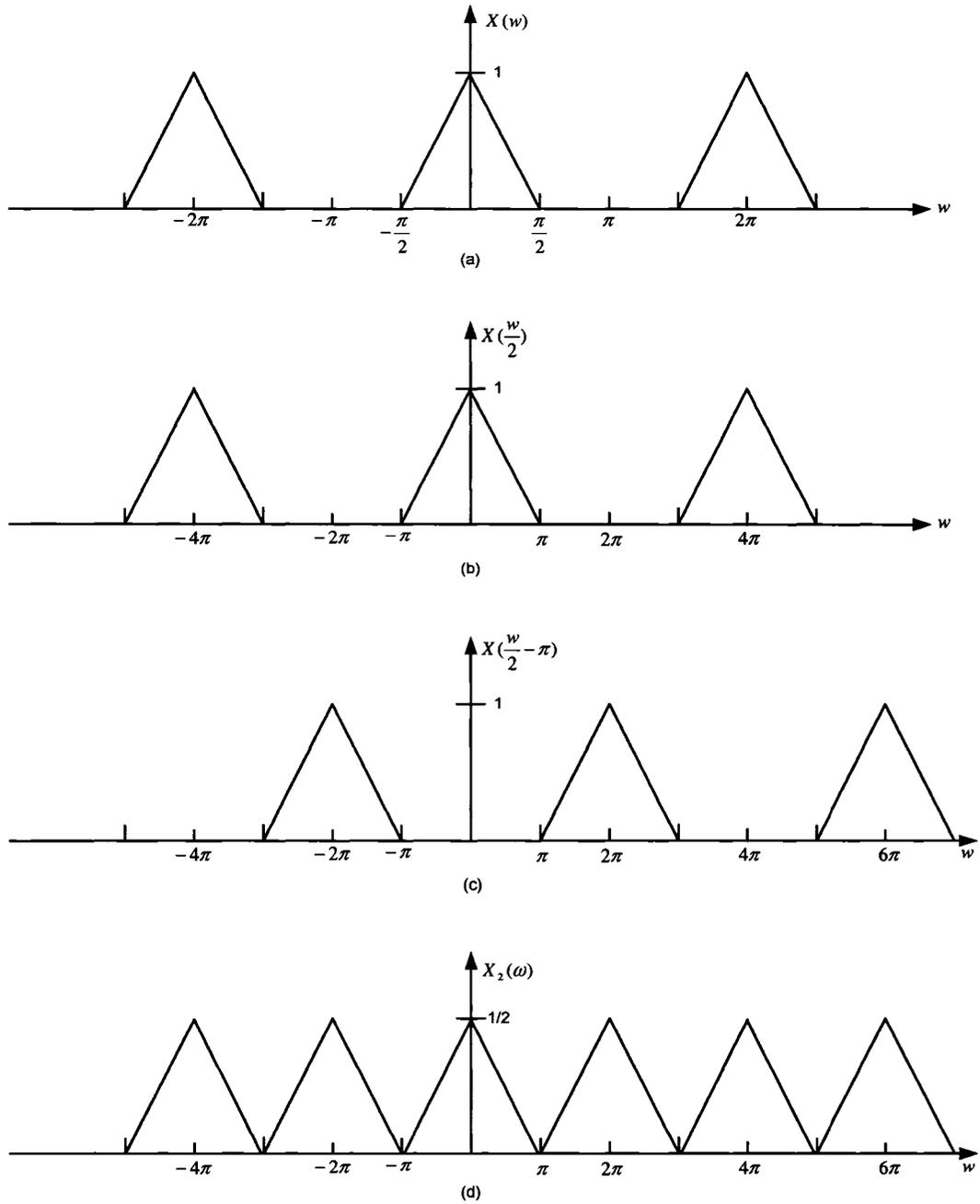
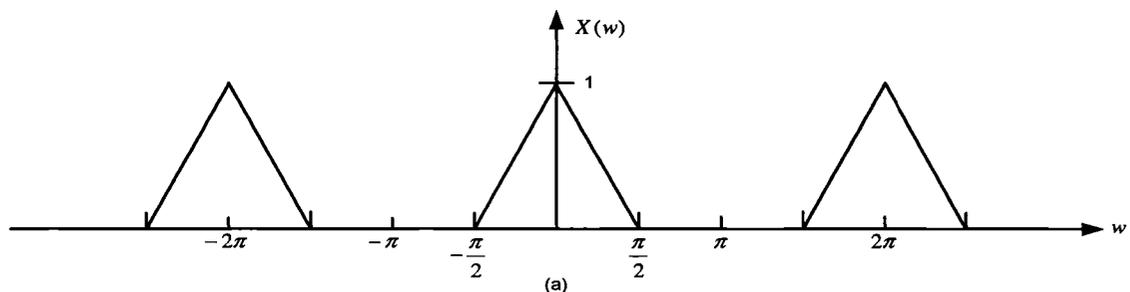


Figure 1 Obtention du spectre du signal décimé à partir du spectre du signal original

La figure 1(a) montre le spectre du signal original. Le premier terme de l'équation (1.10), $X\left(\frac{\omega}{2}\right)$, est présenté dans la figure 1(b). Il est intéressant de remarquer que la fréquence est divisée par 2. Ceci se traduit par une multiplication par 2 sur l'axe horizontal d'où un étirement du spectre. Le deuxième terme de l'équation (1.10), $X\left(\frac{\omega+2\pi}{2}\right)$, est présenté dans la figure 1(c). Cette figure est obtenue en décalant en fréquence la figure 1(b) par 2π . Le spectre du signal décimé, présenté dans la figure 1(d), est la somme des figures 1(b) et 1(c) avec une amplitude de $1/2$.

1.3.2 Effet de chevauchement

Le spectre du signal original et du signal décimé sont repris respectivement à la figure 2 (a) et (b). La figure 2(b) est obtenue en étirant chaque triangle de la figure 2(a) jusqu'à ce que sa largeur soit doublée. Nous pouvons observer que les triangles de la figure 2(b) sont à la limite du chevauchement. Ceci veut dire que les triangles sont à la limite de la distorsion de repliement (*aliasing*).



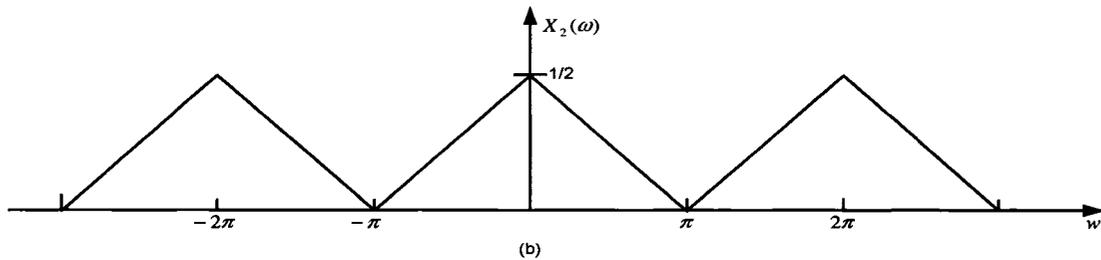
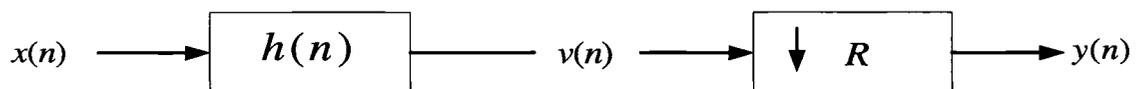
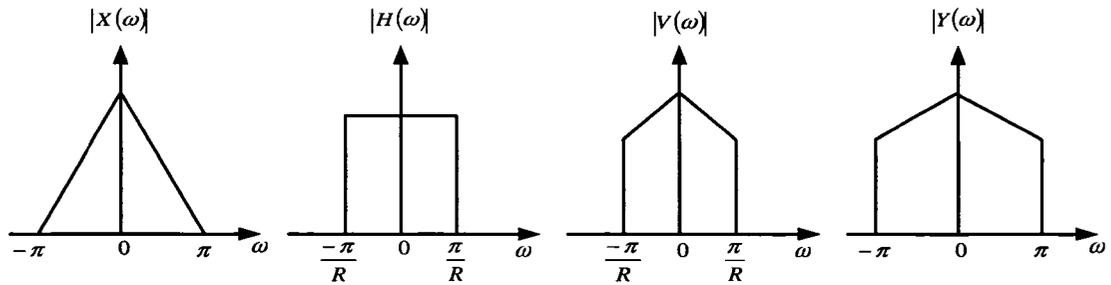


Figure 2 Spectres du signal original et du signal décimé

La figure 2 montre qu'il peut y avoir du chevauchement dans le spectre du signal décimé si le spectre du signal d'entrée n'est pas dans la plage $\left[-\frac{\pi}{R}, \frac{\pi}{R}\right]$. Le chevauchement dans le spectre du signal décimé rend impossible la reconstruction exacte du signal d'entrée. Pour éviter ce problème, un filtre passe bas doit être utilisé pour limiter la largeur de bande du signal d'entrée. Ceci est illustré à la figure 3. Celle-ci montre bien l'utilité du filtre passe bas dans le processus de décimation. Le signal à la sortie du filtre passe bas $|V(\omega)|$ est limité en fréquence entre $-\frac{\pi}{R}$ et $\frac{\pi}{R}$. Le facteur de décimation, quand à lui, étend entre $-\pi$ et π le spectre présentée à son entrée en choisissant chaque $R^{\text{ième}}$ échantillon. Le spectre du signal décimé est $|Y(\omega)|$. Cette figure montre bien que, sans l'utilisation du filtre passe bas pour limiter en fréquence le signal d'entrée, la décimation crée du chevauchement pour les signaux dont le spectre se situe en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{R}; \frac{\pi}{R}\right]$.



(a) bloc diagramme du filtre passe-bas $h(n)$ et du facteur de décimation R



(b) relation entre le spectre d'entrée du filtre passe-bas et le spectre de sortie du facteur de décimation

Figure 3 Décimation par R dans le domaine fréquentiel

La méthode utilisée pour aboutir à l'équation (1.10) peut être généralisée pour une décimation avec un facteur R . Ceci donnera la relation générale entre le spectre du signal original et celui du signal décimé. Cette équation générale est donnée par [16] :

$$X_R(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X\left(\frac{\omega}{R} + \frac{2\pi k}{R}\right) \quad (1.11)$$

Cette équation peut être étendue dans le domaine Z en faisant les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow z \\ \frac{\omega}{R} &\rightarrow z^{1/R} \\ \omega R &\rightarrow z^R \\ \frac{\omega + \frac{2\pi}{R}}{R} &\rightarrow z e^{j2\pi/R} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (1.11) s'écrit, dans le domaine Z , comme suit [16] :

$$X_R(z) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X(z^{1/R} e^{j2\pi k/R}) \quad (1.12)$$

1.4 Structure des filtres décimateurs

Dans un processus de décimation, il est montré que le facteur de décimation R doit être précédé par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure qui est égale à $\frac{\pi}{R}$ pour limiter la largeur de bande du signal d'entrée. La figure 4 montre la structure de forme directe d'un filtre décimateur [16].

Le filtre $H(z)$ d'ordre M permet de limiter la largeur de bande du signal d'entrée. Ce filtre est constitué de M multiplicateurs. Si la fréquence du signal d'entrée est f_s , alors le filtre exécute $M \times f_s$ multiplications par cycle. Cette structure peut être améliorée en utilisant la décomposition polyphasée. Cette technique est illustrée au chapitre 2.

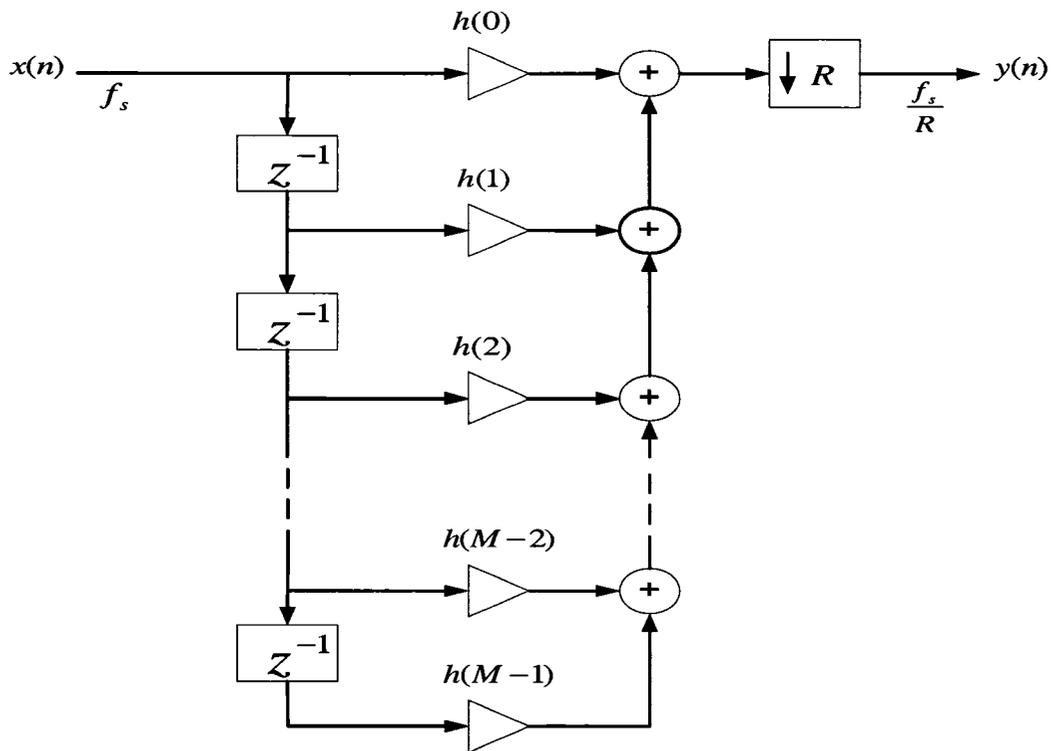


Figure 4 Structure de forme directe d'un filtre décimateur

1.5 Applications des filtres décimateurs

Les filtres décimateurs peuvent être utilisés dans plusieurs domaines d'application. Entre autres, leur utilisation dans les récepteurs radio numériques est très populaire. Un récepteur radio numérique effectue une décimation et une démodulation d'un signal RF à bande étroite incorporé dans un paquet de fréquences assignées à d'autres services. L'architecture traditionnelle d'un récepteur radio qui effectue cette tâche est présentée à la figure 5 [14].

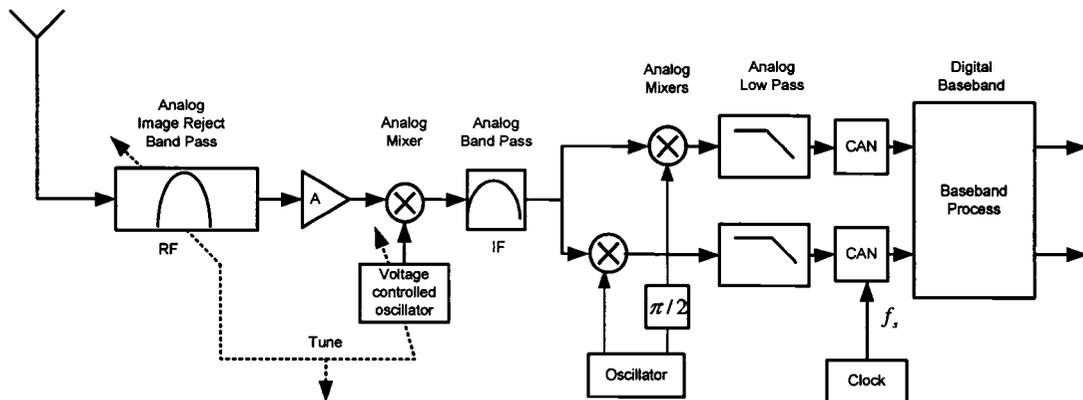


Figure 5 Architecture d'un récepteur radio standard

Cette architecture standard effectue deux translations de fréquence. Le signal d'entrée passe à travers un filtre passe bande qui rejette les images, puis par un amplificateur. Le signal RF amplifié est ensuite traduit en une fréquence intermédiaire IF pour limiter la largeur de bande du signal. Pour pouvoir être traité en bande de base, le signal à la sortie du filtre IF est retranslaté en fréquence par des mixeurs en quadrature qui sont suivis par des filtres analogiques qui effectuent le contrôle final sur la largeur de bande du signal. Chaque signal en quadrature est converti en numérique par une paire de convertisseurs analogiques numériques (CAN). La sortie des CAN est traitée par une unité de traitement numérique qui permet de faire la synchronisation, l'égalisation, la démodulation, la détection et le décodage de canal.

Cependant, le déséquilibre du gain et de la phase des mixeurs en quadrature, les filtres analogiques en bande de base et les CAN sont à l'origine de la diaphonie qui peut exister entre le signal en phase et le signal en quadrature. Les CAN injectent du DC dans le signal en bande de base et les filtres analogiques introduisent de la distorsion au niveau du délai de groupe.

Ces problèmes numériques, causés par les composantes analogiques, peuvent être résolus en utilisant des algorithmes adaptatifs. Ceci augmenterait la complexité du récepteur. Au lieu de réparer ces problèmes analogiques, il est beaucoup plus intéressant de numériser le plus tôt possible sur la chaîne de réception. Ainsi, en plus d'éviter la dégradation des performances due au déséquilibre des signaux en phase et en quadrature qui est provoqué par la tolérance des composantes analogiques, d'éviter le coût des mixeurs et d'éviter la distorsion au niveau du délai de groupe causé par les filtres analogiques, cette technique permet d'augmenter la flexibilité des composantes. Ceci permet d'avoir des filtres avec des largeurs de bandes et des facteurs de décimations programmables.

La figure 6 [14] présente l'architecture d'un récepteur radio de deuxième génération. La conversion analogique numérique se fait maintenant au niveau de l'étage IF. Dans cette architecture, les CAN doivent fonctionner avec une plus grande fréquence d'échantillonnage. Il est aussi intéressant de remarquer que la translation en bande de base se fait par un filtre et un décimateur numérique. Un autre avantage de cette translation numérique en bande de base est que les filtres numériques sont conçus de façon à avoir des réponses en phases linéaires.

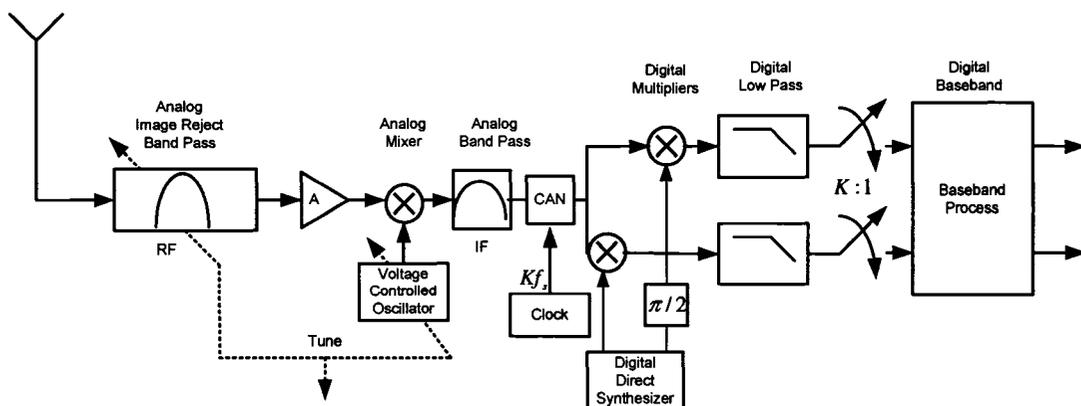


Figure 6 Architecture d'un récepteur radio de deuxième génération

1.6 Conclusion

Les concepts de base de la décimation ont été présentés dans ce chapitre. Ainsi, l'analyse temporelle et fréquentielle du signal décimé ont été faites. La structure standard des filtres à décimation ainsi que leur application dans les récepteurs radio ont été décrits. Le chapitre suivant présentera les spécifications du noyau et le choix de l'architecture à implémenter.