CH 2
TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

- Seul mode de transfert de chaleur possible dans un solide

- Transfert sans transport de matière.

- Transfert dû à une différence de température.

- Propagation de la chaleur des zones chaudes vers les zones froides.

I. Loi de Fourier:

- Etablie expérimentalement par Joseph Fourier en 1822 : **loi empirique**.

- Elle exprime **la densité de flux** de chaleur (w/m^2) par conduction à travers une surface S dans un milieu.

$$\vec{\Phi} = -k.\overrightarrow{gradT}$$

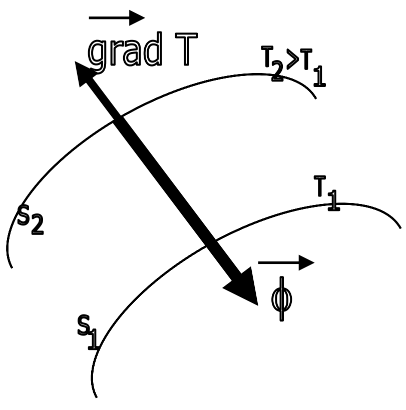
- k conductivité thermique du milieu caractérisant son aptitude à conduire la chaleur.

- Matériau isotrope $k(M,T)$.

- Matériau isotrope et homogène $k(T)$, si intervalle de T réduit, alors $k : C^{te}$.

- Signe (-) : flux orienté dans le sens des T décroissantes.

- Flux de chaleur orthogonales aux surfaces isothermes.



- Propagation de la chaleur mutidirectionnelle :

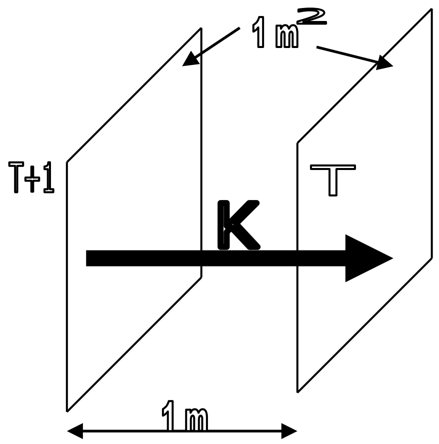
$$\Phi_x = -k.\frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \Phi_y = -k.\frac{\partial T}{\partial y} \quad , \quad \Phi_z = -k.\frac{\partial T}{\partial z}$$

- Propagation de la chaleur unidirectionnelle (x):

$$\Phi = -k.\frac{dT}{dx}$$

- $k(w.m^{-1}.K^{-1})$

- $\Phi = k$ si $\Delta T = \Delta x = 1$



K : densité de flux de chaleur

entre deux surface distantes de 1 m

tel que $\Delta T = 1°C$

- Plus k grand plus échange important.

- Facteur de comparaison entre matériau.

- K fonction de :

  * nature chimique du matériau.

  * nature de la phase : S, L, G.

  * Température.

- Conduction en phase liquide et gazeuse par chocs moléculaires.
- Conduction dans les solides par vibration et par transport par les e^- libres.
- Solide conducteur électriquement ------> conducteur thermiquement.
- Solide isolant électriquement ------> isolant thermiquement.
- Ordre de grandeur $k(w/m.°C)$:

  * Métaux :

    - Cu 360
    - Fe 48

  * Isolants :

    - Polystyrène : 0.037 - 0.047

- Laine de verre :	0.034 - 0.047
* Matériaux de construction :	
- Briques terre cuites :	1.1
- Béton	1.4
- Plâtre	0.5
- Bois	0.12-0.23
- Verre	1.1
- Liège	0.03
* Fluide :	
- Air	0.025
- Eau	0.6

II Equation de la conduction de la chaleur en milieu solide.

* Objectif : déterminer la loi de variation de la température en milieu solide en régime permanent sans source dans un milieu isotrope et homogène (K : C^{te}).

* Cette distribution de température est donnée par la résolution de l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0$$

* Equation différentielle de 2ème degré nécessitant deux conditions aux limites.

III. Conditions aux limites.

* Conditions aux limites : Informations sur l'état thermique à la paroi (frontière) du milieu:

a- Température imposée : T(frontière , t) : <u>donnée</u> $\forall t$.

b- Flux imposé : $\forall t$, T(frontière ,t) : <u>inconnue </u>, à calculer.

c- Frontière échangeant de la chaleur par convection avec un fluide selon :

$$q = h.S.(T_{frontière} - T_{fluide})$$

q : flux de chaleur échangé par convection (w).

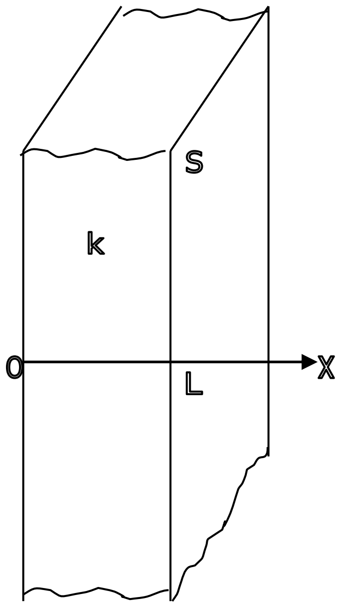
h : Coefficient de transfert de chaleur par convection (W/m^2/°C).

S : surface de contact solide fluide (m^2).

T_{fluide} : température du fluide loin du solide: °C.

$T_{frontière}$: inconnue au départ , à calculer par la suite.

IV. Cas de la plaque (Mur).



* Milieu formé par deux plans parallèles de même surface S d'épaisseur L selon l'axe et de grandes dimensions selon y et z.

IV.1 Conditions aux limites de Dirichlet.

* les faces $x = 0$ *et* $x = L$ sont à des températures uniformes : $T(0) = T_1$ *et* $T(L) = T_2$.

* Dans la plaque $\partial T/\partial z = \partial T/\partial y = 0 \Rightarrow T(x)$

* Flux de chaleur orthogonal aux faces $x = 0$ *et* $x = L$.

* Surfaces isothermes : plans parallèles aux faces $x = 0$ *et* $x = L$.

* $k : C^{te} \quad \Rightarrow \quad d^2T/dx^2 = 0$

$$d^2T/dx^2 = 0 \Rightarrow dT/dx = C^{te} = C \Rightarrow T(x) = C.x + D$$

$$T(0) = T_1 = B \, , \, T(L) = T_2 = C.L + B \Rightarrow C = (T_2 - T_1) / L$$

La loi de variation de la température au sein de la plaque est ainsi donnée selon la loi :

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \, .x / L$$

$$(T(x) - T_1) / (T_2 - T_1) = x / L$$

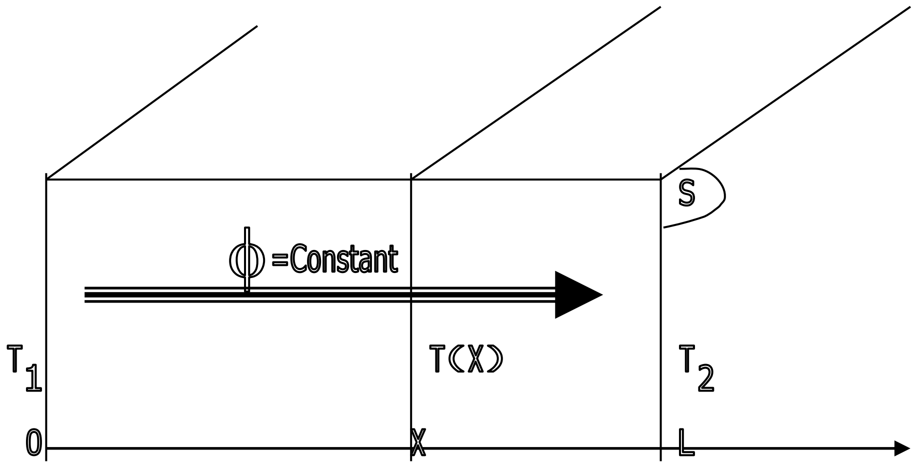
* Densité de flux de chaleur :

$$\Phi = - k.dT / dx = - k.C = k \frac{T_1 - T_2}{L} = C^{te}$$

La densité de flux de chaleur est constante : régime permanent.

Inversement : Régime permanent

$$\Phi = -k.dT/dx = C^{te} \Rightarrow dT/dx = C \Rightarrow T(x) = CX + D$$



$$\Phi = k.\frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_1 - T_2}{L/k} = k.\frac{T_1 - \mathrm{T(x)}}{\mathrm{x}} = k.\frac{T(x) - T_2}{L - x}$$

*Flux de chaleur à travers une surface S quelconque au sein de la plaque :

$$q = \phi.S = \frac{T_1 - T_2}{L/(k.S)}$$

*Similitude avec la loi d'ohm

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_{éle}}$$

$$q = \phi.S = \frac{T_1 - T_2}{L/(k.S)} = \frac{T_1 - T_2}{R_{thermique}} = C^{te}$$

$$R_{thermique}(Plaque) = L/(k.S) = m/(w.m^{-1}.°C^{-1}.m^{2}) = °C/w$$

$$1/R_{thermique} = U = Conductance = k.S/L \ : w/°C$$

$$q = U.(T_1 - T_2) = u.S.(T_1 - T_2)$$

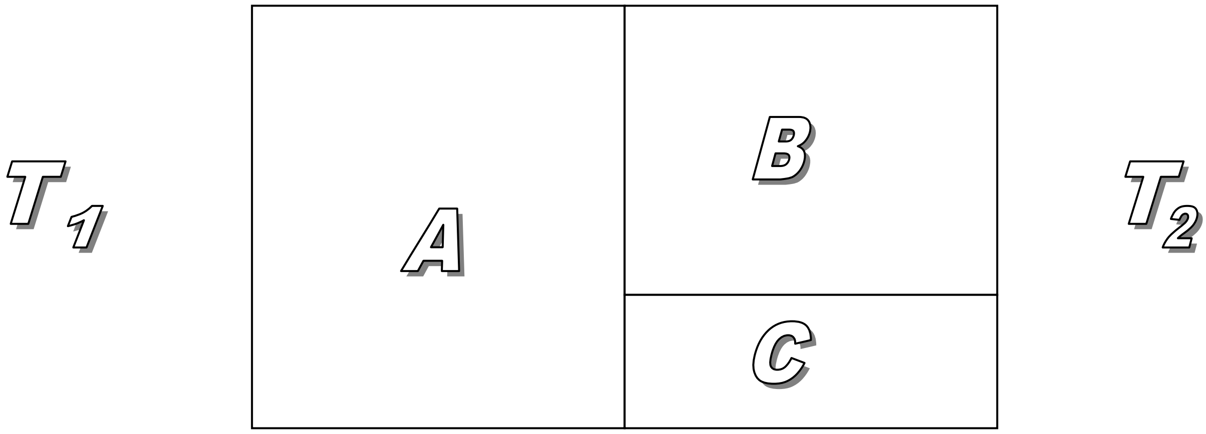
U : coefficient de transmission thermique global.

u : coefficient de transmission thermique surfacique c'est-à-dire par unité de surface en : $w/°C.m^2$

$$T(x) = T_1 - q.x/(k.S)$$

*Analogie électrique :

* Cas d'une combinaison de plusieurs plaques:



IV.2 Conditions aux limites de Robin:

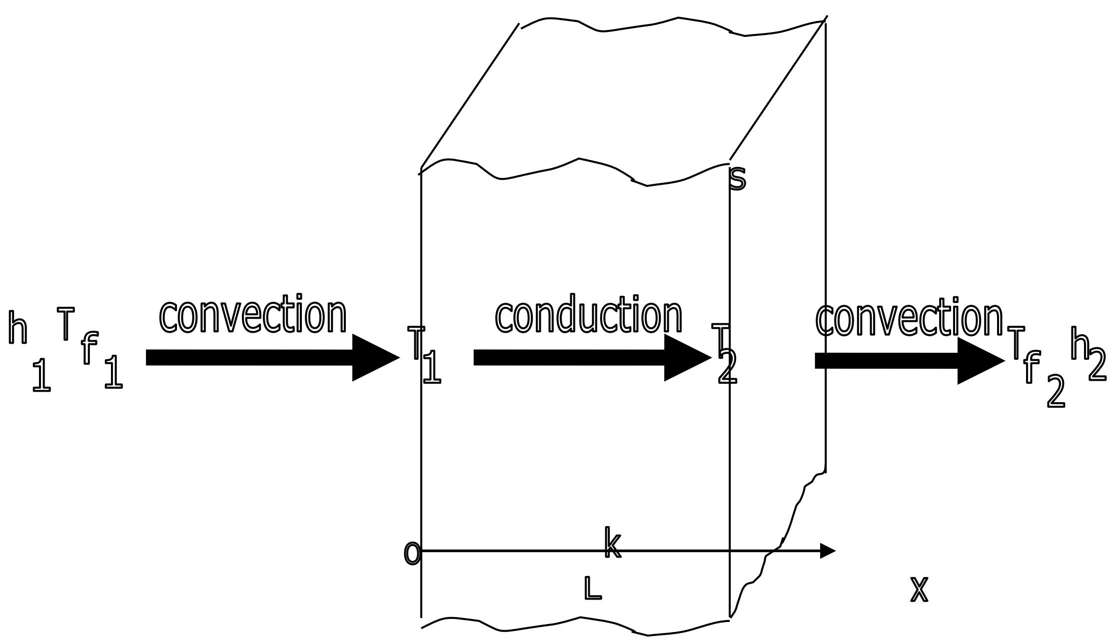
* Une Plaque homogène de grande dimension et d'épaisseur L selon l'axe x.

* La plaque est en contact à travers ses deux faces de surface S avec deux fluides de température T_{f1} , T_{f_2} avec des coefficients d'échange par convection h_1 , h_2 .

* Chaque surface est dans le même état thermique.

* Données du problème : L , k , S , T_{f1} , T_{f_2} , h_1 , h_2 .

* Supposons $T_{f1} \rangle T_{f_2} \Rightarrow$ transfert de chaleur du fluide chaud au fluide froid à travers la plaque.



* Soit T_1 , T_2 les températures des deux faces à l'équilibre à calculées.

* L'échange de chaleur est selon :

  - Fluide chaud vers la face de gauche : convection

  - A travers le solide : conduction

  - Entre face de droite et fluide froid : convection

* Distribution de la température au sein de la plaque en régime permanent:

$$k:C^{te} \quad \Rightarrow \quad d^2T/dx^2 \; = \; 0$$

* Condition aux limites sur les faces gauche et droite :

$$x = 0 \qquad , \qquad h_1.S.(T_{f1} - T_1) = -k.S.(\frac{dT}{dx})_0$$

$$x = L \qquad , \qquad -k.S.(\frac{dT}{dx})_L = h_2.S.(T_2 - T_{f2})$$

* T_1 , T_2 températures des faces <u>inconnues</u>.

* Résolution de l'équation de la chaleur avec les deux conditions aux limites : $T(x)$, T_1 , T_2 .

* $T(x)$, T_1 , T_2 par une deuxième 2ème méthode : En régime permanent on a conservation du flux de chaleur qui se propage du fluide chaud ($T_{f1} > T_{f2}$) au fluide froid en traversant le mur :

- Du fluide chaud vers la face de gauche :

$$q = h_1 S \, (T_{f_1} - T_1) = \frac{T_{f_1} - T_1}{1/h_1 S} = \frac{T_{f_1} - T_1}{R_{therconv1}}$$

- A travers le solide par conduction :

$$q = kS \, \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{T_1 - T_2}{L/kS} = \frac{T_1 - T_2}{R_{thermconduction}}$$

- De la face droite vers le fluide froid :

$$q = h_2 S\,(T_2 - T_{f_2}) = \frac{T_2 - T_{f_2}}{1/h_2 S} = \frac{T_2 - T_{f_2}}{R_{therconv2}}$$

$$q = \frac{T_{f_1} - T_1}{1/h_1 S} = \frac{T_1 - T_2}{L/kS} = \frac{T_2 - T_{f_2}}{1/h_2 S}$$

$$q = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{1/h_1 S + L/kS + 1/h_2 S} = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{R_{thermique\ \ globale}}$$

$$R_{ther\,globale} = R_{ther\,convection1} + R_{ther\,conduction} + R_{ther\,convection2}$$

Par unité de surface :

$$R_{thermique} = 1/h_1 + L/k + 1/h_2$$

* Températures des faces :

- De la 1[er] expression de q on déduit :

$$T_1 = T_{f_1} - q/h_1 S$$

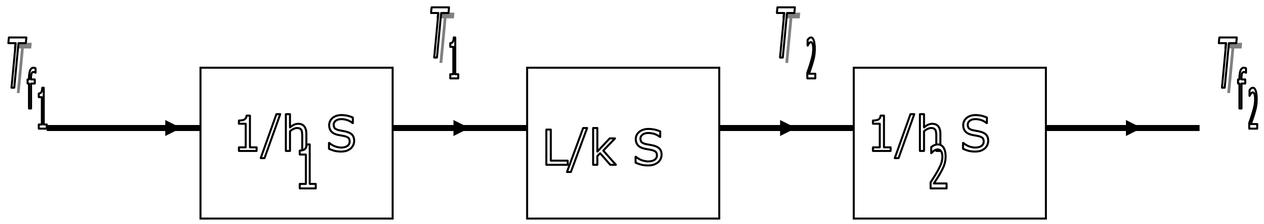
- Des autres expressions de q on a :

$$T_2 \;=\; T_{f_2} + q/h_2S \;=\; T_1 - q.L/ks$$

* Température au sein de la plaque :

$$q \;=\; \frac{T_1 - T(x)}{x/ks} \quad \Rightarrow \quad T(x) \;=\; T_1 - q.x/KS$$

* Analogie électrique :



$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{thermique\,globale}} = U.(T_{f1} - T_{f2})$$

$$R_{thermique\,globale} = 1/h_1S + L/kS + 1/h_2S$$

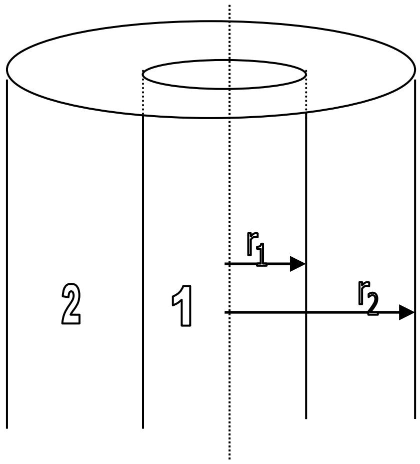
U coefficient de transmission thermique global en w/°C

$$q = U.(T_{f1} - T_{f2}) = u.S.(T_{f1} - Tf_2)$$

u coefficient de transmission thermique surfacique en w/°C.m^2

V . CAS DE CYLINDRES COAXIAUX.

* Deux cylindres coaxiaux de longueurs assez grande et de rayons r_1, r_2 .



* Surfaces latérales à température imposée : condition de Dirichlet :

$$T(r = r_1) = T_1 \, , \, T(r = r_2) = T_2$$

* Coordonnées cylindriques : r, z, θ
* Au sein du système :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(r)$$

* Isothermes : $T : Constante \qquad \Rightarrow \; r : Constante$

Cylindres coaxiaux de même axe de rayon $r_1 \langle \; r \; \langle \; r_2$.

* Flux de chaleur normal aux surfaces isothermes est donc radial.

* La température $T(r)$ est donnée par résolution de :

$$\Delta T = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dT}{dr}) = 0$$

$$T(r) = ALn(r) + B$$

* Les constantes A et B à déterminer par les conditions aux limites.

$$T(r) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{Ln(r_2 / r_1)} Ln(r / r_1) = \frac{T_1 Ln(r_2 / r) + T_2 Ln(r / r_1)}{Ln(r_2 / r_1)}$$

* Densité de flux de chaleur :

$$\phi = -k\frac{dT}{dr} = k\frac{T_1 - T_2}{Ln(r_2 / r_1)} . \frac{1}{r}$$

* Flux de chaleur à travers un cylindre quelconque de de rayon r et de longueur l :

$$q = \varphi S = \varphi .2\pi rl = 2\pi kl \frac{T_1 - T_2}{Ln(r_2 / r_1)} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi kl} Ln(r_2 / r_1)} = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}$$

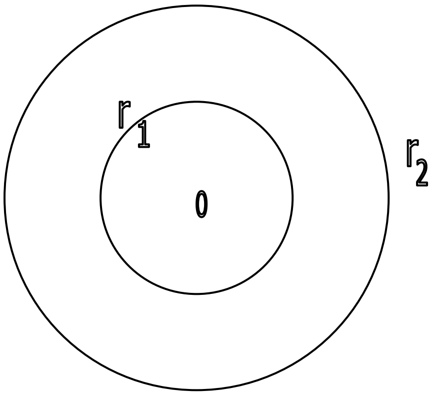
$$R_{thermique} = \frac{1}{2\pi kl} Ln(r_2 / r_1)$$

VI. CAS DE SPHERES CONCENTRIQUES.

Deux sphères concentriques de rayons r_1, r_2.

* Surfaces à température imposée :

condition de Dirichlet :



$$T(r = r_1) = T_1 \text{ , } T(r = r_2) = T_2$$

* Coordonnées sphériques : r, θ, φ

* Au sein de la plaque :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(r)$$

* Isothermes : $T : Constante \qquad \Rightarrow \; r : Constante$

Sphères concentriques de même centre et de rayon $r_1 \langle\, r \,\langle\, r_2$.

* Flux de chaleur normal aux surfaces isothermes est donc radial.

* La température fonction uniquement de r : $T(r)$ donnée par résolution de :

$$\Delta T = \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dT}{dr}) = 0$$

* $$T(r) = A/r + B$$

* Les constantes A et B à déterminer par les conditions aux limites.

$$T(r) = T_1 + (T_1 - T_2)\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

* Densité de flux de chaleur :

$$\phi = -k\frac{dT}{dr} = k\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

* Flux de chaleur à travers une sphère de référence de rayon r :

$$q = \phi S = \phi.4\pi r^2 = 4\pi k\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi k}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}$$

$$R_{thermique} = \frac{1}{4\pi k}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$