Fonctions de plusieurs variables

Bernard Ycart

Ce chapitre contient des techniques que vous utiliserez très souvent en physique, mais les justifications mathématiques rigoureuses ne sont pas encore à votre portée. Vous allez donc devoir admettre que ce que vous savez faire pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'étend raisonnablement en dimension supérieure. À condition bien sûr que vous sachiez déjà le faire : avant de vous lancer, révisez ce qui concerne la dérivabilité et le calcul de primitives pour les fonctions d'une variable. Il n'est pas exclu que vous ayez aussi besoin d'un petit rafraîchissement sur les applications linéaires, les matrices et les déterminants.

Table des matières

8 novembre 2011

1 Cours

1.1 Continuité

Nous étudions dans ce chapitre des techniques de calcul pour des fonctions définies sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$, donc dépendant de n variables réelles, et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Nous nous limiterons souvent aux dimensions 2 et 3, la généralisation aux dimensions supérieures ne posant pas de problème particulier. Voici quelques exemples simples.

Surface d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy\ . \end{array}$$

Surface d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2(xy+yz+xz)\ . \end{array}$$

Surface et volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \Big(2(xy+yz+xz)\,,\ xyz\Big)\ . \end{array}$$

Coordonnées polaires d'un point du plan (figure 1) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) \\ & & x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\ . \end{array}$$

Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace (figure 2) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (x,y,z) \\ & & x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta\ . \end{array}$$

Coordonnées sphériques d'un point de l'espace (figure 3) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) & \longmapsto & (x,y,z) \\ & & x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta\ . \end{array}$$

Représenter graphiquement une fonction de plusieurs variables n'est possible que pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La fonction $f\ :(x,y)\mapsto f(x,y)$ est représentée en dimension 3 par la surface d'équation $z = f(x,y)$. La figure 4 montre une représentation de la surface d'équation $z = \sin(xy)$.

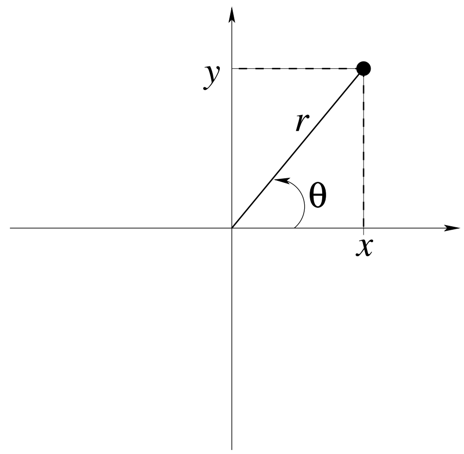

FIGURE 1 – Coordonnées polaires d'un point du plan.

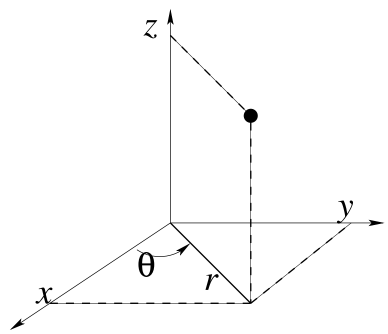

FIGURE 2 – Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace.

Pour ne pas compliquer les notations dans les définitions qui viennent, nous prendrons l'exemple d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \; . \end{array}$$

Les applications f et g, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, sont les *applications coordonnées*. Si on fixe un point (a,b,c) dans l'espace de départ, on définit 3 *applications partielles* pour chaque application coordonnée.

$$\begin{array}{ccccccc} x & \longmapsto & f(x,b,c) & , & x & \longmapsto & g(x,b,c) \\ y & \longmapsto & f(a,y,c) & , & y & \longmapsto & g(a,y,c) \\ z & \longmapsto & f(a,b,z) & , & z & \longmapsto & g(a,b,z) \end{array}$$

Avant de pouvoir parler de continuité et de dérivabilité, nous devons définir la notion de limite dans l'espace $\mathbb{R}^n$.

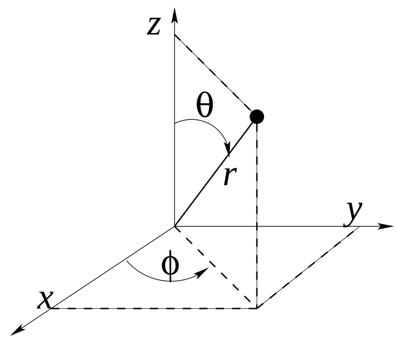

FIGURE 3 – Coordonnées sphériques d'un point de l'espace.

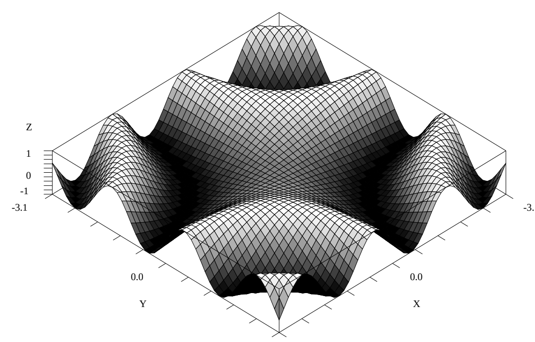

FIGURE 4 – Surface d'équation $z = \sin(xy)$.

Définition 1. *On dit qu'une suite de points converge dans* $\mathbb{R}^n$ *vers un point* $\mathbf{x}$ *si pour tout* i*, la suite des* i*-ièmes coordonnées converge dans* $\mathbb{R}$ *vers la* i*-ième coordonnée de* $\mathbf{x}$*.*

Dans $\mathbb{R}^3$, la suite $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{R}$. Par exemple, la suite $(2^{-n}, 2^{1/n}, 2 + 1/n)$ converge dans $\mathbb{R}^3$ vers $(0, 1, 2)$.

Définition 2. *On dit qu'une application* Φ *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *est* continue *en un point* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *si l'image par* Φ *de toute suite de points de* $\mathbb{R}^n$ *qui converge vers* $\mathbf{x}$*, converge* *vers* $\Phi(\mathbf{x})$ *dans* $\mathbb{R}^m$*.*

Comme cas particulier, l'application qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe la coordonnée x_i est continue. D'après la définition de la convergence, l'application Φ est continue si et seulement si ses applications coordonnées le sont. Il suffit donc d'examiner la continuité des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Si Φ est continue, alors ses *applications partielles* le sont aussi. Malheureusement, il peut se faire que les applications partielles soient continues sans que l'application Φ le soit. Nous n'aborderons pas ce cas pathologique. Toutes les applications que nous rencontrerons seront continues sur leur domaine de définition. Pour le vérifier, il suffira en général d'invoquer le théorème suivant.

Théorème 1.

1. *La somme et le produit de deux applications continues de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont continues.*
2. *La composée d'une application continue de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *par une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue.*

Comme premier exemple, considérons n applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_n$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_i(x_i)$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, comme composée de f_i et de la i-ième application coordonnée.
Leur somme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$ et leur produit $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ sont aussi continues.

Vérifions maintenant que l'application suivante est continue en tout point de $\mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{\exp(xy)\sin(z + \ln(1 + y^2))}{1 + x^2 + y^2} \, , \, \sqrt{\frac{2\cos^2(x + y)}{1 + z^4}} \right) \, .$$

Il suffit de montrer que les deux applications coordonnées sont continues. L'application qui à (x, y, z) associe xy est continue comme produit de deux applications coordonnées (point *1*). Sa composée par exp l'est d'après le point *2*. L'application qui à (x, y, z) associe $z + \ln(1+y^2)$ est continue d'après le point *1* et la composée par sin l'est d'après *2*. L'application qui à (x, y, z) associe $1 + x^2 + y^2$ est continue d'après *1*, l'inverse d'après *2* (car le dénominateur ne s'annule pas). Finalement le produit de trois applications continues est continu d'après *1*. On procède de même pour l'autre application coordonnée.

1.2 Dérivées partielles

Les définitions et résultats de cette section sont énoncés pour la dimension 3, afin de ne pas compliquer les notations. Ils se généralisent facilement en dimension quelconque.

Soit $f\,:\,(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Etant donné un point de coordonnées (a,b,c) dans $\mathbb{R}^3$, on définit 3 applications partielles en (a,b,c).

$$\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & f(x,b,c) \\ y & \longmapsto & f(a,y,c) \\ z & \longmapsto & f(a,b,z) \end{array}$$

Nous souhaitons dériver ces trois applications. Or on ne peut dériver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que si elle est définie au voisinage du point où on souhaite la dériver, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant ce point. Ceci nous amène à introduire la définition suivante.

Définition 3. *Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. On dit que D est un* domaine ouvert *de $\mathbb{R}^3$ si pour tout point (x,y,z) de D, il existe $\epsilon>0$ tel que D contient le cube de côté 2ϵ et de centre (x,y,z).*

$$]x-\epsilon,x+\epsilon[\times]y-\epsilon,y+\epsilon[\times]z-\epsilon,z+\epsilon[\;\subset\; D\;.$$

Le cube de centre (x,y,z) et de côté 2ϵ doit être vu comme un *voisinage* de (x,y,z). Dorénavant les fonctions que nous considérons sont définies sur un domaine ouvert D inclus dans $\mathbb{R}^3$. Si les applications partielles sont dérivables, leurs dérivées s'appellent les *dérivées partielles* de f en (a,b,c).

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) & = & \dfrac{\mathrm{d}f(x,b,c)}{\mathrm{d}x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) & = & \dfrac{\mathrm{d}f(a,y,c)}{\mathrm{d}y}(b) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) & = & \dfrac{\mathrm{d}f(a,b,z)}{\mathrm{d}z}(c) \end{array}$$

Pour calculer la dérivée partielle par rapport à x, il suffit de dériver en x l'expression de f, en traitant les autres variables comme des constantes paramétriques.

Supposons par exemple que f soit l'application qui à (x,y,z) associe la surface du parallélépipède dont les longueurs d'arêtes sont x,y,z.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2(xy+yz+xz) \end{array}$$

Voici ses trois dérivées partielles.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) & = & 2(b+c) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) & = & 2(a+c) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) & = & 2(a+b) \end{array}$$

Nous éviterons systématiquement les cas pathologiques en supposant que les dérivées partielles sont des fonctions continues.

Définition 4. *Soit f une application définie sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^3$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est* continûment différentiable *sur D si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, et $\frac{\partial f}{\partial z}$, vues comme des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en tout point de D.*

Si elles sont continues, les dérivées partielles permettent d'approcher la fonction par une application linéaire au voisinage d'un point. Le résultat qui suit est l'analogue pour les fonctions de deux variables d'un développement limité d'ordre 1.

Théorème 2. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application continûment différentiable de D dans $\mathbb{R}$ et (a, b) un point de D. Notons $o(x, y)$ la fonction définie par :*

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(x,y) \ .$$

Alors :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{o(x,y)}{\max\{|x-a|, |y-b|\}} = 0 \ .$$

Ce théorème dit que les variations de la fonction f autour du point (a, b) peuvent être approchées par une application linéaire, la *différentielle* de f.

Définition 5. *On appelle* différentielle *de f au point (a, b) l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (h_x, h_y) associe :*

$$h_x \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \ .$$

La différentielle peut être vue comme l'application qui à un vecteur associe son produit scalaire par le vecteur des dérivées partielles, qu'on appelle le *gradient* de f au point (a, b), et que l'on note $\nabla f(a, b)$ (prononcez : « nabla »). En physique, on interprète h_x et h_y comme de petites variations des variables x et y, et on les note plutôt $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. Si on note $\mathrm{d}f$ la différentielle de f, ceci justifie l'écriture abrégée suivante.

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \ .$$

Le théorème 2 donne une approximation de $f(x, y)$ sous la forme :

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \ .$$

La surface d'équation $z = f(a, b) + (x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ est celle du *plan tangent* à la surface $z = f(x, y)$ au point $(a, b, f(a, b))$ (cf. figure 5). Pour rappeler

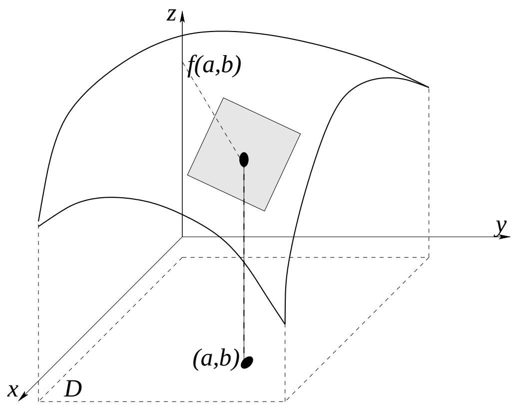

FIGURE 5 – Plan tangent à une surface en un point.

cette interprétation géométrique, la différentielle de f au point (a, b) porte aussi le nom d'*application linéaire tangente.*

Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est continûment différentiable si ses m applications coordonnées le sont, au sens de la définition 4. La différentielle en un point de $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Sa matrice est la *matrice jacobienne.* Ici encore nous donnons la définition en dimension réduite pour des raisons de clarté.

Définition 6. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^3$ et Φ une application de D dans $\mathbb{R}^2$.*

$$\Phi \;:\; \begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (f(x,y,z), g(x,y,z)) \; . \end{array}$$

Soit (a, b, c) un point de D. On appelle matrice jacobienne *de Φ au point (a, b, c), la matrice des dérivées partielles de f et g :*

$$MJ(\Phi)(a,b,c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} (a,b,c) \; .$$

On appelle différentielle *de Φ au point (a, b, c) l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est la matrice jacobienne.*

On ne distinguera pas en général la matrice jacobienne au point (x, y, z) de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans l'ensemble des matrices qui à (x, y, z) associe cette matrice jacobienne. Nous reprenons les exemples de la section précédente, en donnant pour chacun la matrice jacobienne.

Surface d'un rectangle en fonction de sa longueur et sa largeur :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \; .$$

Surface d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2(xy+yz+xz) \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} 2(y+z) & 2(x+z) & 2(x+y) \end{pmatrix} .$$

Surface et volume d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \Big(2(xy+yz+xz)\,,\, xyz\Big) \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} 2(y+z) & 2(x+z) & 2(x+y) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} .$$

Coordonnées polaires d'un point du plan :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*}\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) \\ & & x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Coordonnées cylindriques d'un point de l'espace :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*}\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & (x,y,z) \\ & & x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Coordonnées sphériques d'un point de l'espace :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*}\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) & \longmapsto & (x,y,z) \\ & & x = r\cos\phi\cos\theta\,,\ y = r\cos\phi\sin\theta\,,\ z = r\sin\phi \end{array}$$

$$MJ = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{pmatrix} .$$

Pour le calcul des différentielles, on est souvent amené à utiliser la règle de dérivation selon laquelle la différentielle d'une fonction composée est la composée des différentielles.

Théorème 3. *Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, différentiable au point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit g une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^k$, différentiable au point $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^m$. La différentielle de la composée $g \circ f$ au point $\mathbf{x}$ est la composée des différentielles de g au point $f(\mathbf{x})$ et de f au point $\mathbf{x}$. La matrice jacobienne est le produit des matrices jacobiennes de g au point $f(\mathbf{x})$ et de f au point $\mathbf{x}$.*

$$MJ(g\circ f)(\mathbf{x}) = MJ(g)(f(\mathbf{x}))MJ(f)(\mathbf{x}) .$$

Voici un exemple. Considérons l'application f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui aux coordonnées polaires d'un point du plan associe ses coordonnées cartésiennes.

$$f \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*}\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (x,y) \\ & & x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \qquad MJ(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\,.$$

Considérons maintenant la fonction g, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $x^2 + y^2$.

$$g \;:\; \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \right. \qquad MJ(g) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}\,.$$

La matrice jacobienne de g au point $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est donc $\begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta \end{pmatrix}$. Le produit des deux est :

$$\begin{pmatrix} 2r\cos\theta & 2r\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Effectivement, la composée $g \circ f$ est la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (r, θ) associe r^2. En pratique, on calcule rarement les différentielles sous forme matricielle. On écrira plutôt :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\,.$$

1.3 Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ une application d'un domaine D de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, continûment différentiable sur D. Les trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont encore des applications de D dans $\mathbb{R}$. Si elles-mêmes sont continûment différentiables, on dit que f est « deux fois continûment différentiable ». Leurs dérivées partielles, au nombre de 9, sont les dérivées partielles secondes de f. Nous admettrons que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations ; c'est le *théorème de Schwarz*.

Théorème 4. *Soit f une application deux fois continûment différentiable sur un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $i, j = 1, \ldots, n$, on a :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\,.$$

La notation pour la dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j est $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Leur matrice est la *matrice hessienne* de f, qui est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

Ainsi, pour une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, la matrice hessienne a 3 lignes et 3 colonnes.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Reprenons l'exemple de la surface d'un parallélépipède en fonction de ses trois dimensions.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2(xy+yz+xz) \end{array} \qquad MJ = \begin{pmatrix} 2(y+z) & 2(x+z) & 2(x+y) \end{pmatrix} .$$

La matrice hessienne s'obtient en dérivant chacune des dérivées partielles d'ordre 1, par rapport aux trois variables.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Si les dérivées partielles secondes sont elles-mêmes différentiables, on peut définir les dérivées partielles troisièmes, et en itérant le procédé, des dérivées partielles de tous ordres.

Les équations aux dérivées partielles, qui sont aux fonctions à plusieurs variables ce que les équations différentielles sont aux fonctions d'une variable, sont omniprésentes en physique. Elles relient en général entre elles les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et font intervenir des combinaisons de dérivées partielles comme le gradient, la divergence, le rotationnel, ou le laplacien.

Définition 7.

1. *Soit $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ une application deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On appelle :*
   (a) Gradient *de f le vecteur, noté ∇f :*
   $$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} .$$
   (b) Laplacien *de f le réel, noté Δf :*
   $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

2. *Soit* $F : (x,y,z) \mapsto (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ *une application deux fois continûment différentiable de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$*. On appelle :*
   (a) Rotationnel *de* F *le vecteur, noté* $\text{rot}(F)$ *:*
   $$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} .$$
   (b) Divergence *de* F *le réel, noté* $\text{div}(F)$ *:*
   $$\text{div}(F) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} .$$

Le lecteur vérifiera les relations classiques suivantes, à partir des définitions précédentes et du théorème de Schwarz 4.

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f \quad , \quad \text{div}(\text{rot}(F)) = 0 \quad , \quad \text{rot}(\nabla f) = 0 .$$

À titre d'exemple, voici la plus célèbre des équations aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur. Considérons un corps homogène dans l'espace, et notons $f(t,x,y,z)$ la température au temps t du point de coordonnées (x,y,z). Des considérations physiques amènent à montrer que l'application f doit être solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\Delta_{xyz} f\right) ,$$

où λ est la conductivité thermique, ρ la masse volumique et C_p la chaleur spécifique. L'application suivante porte le nom de « noyau de la chaleur » car elle est solution de l'équation de la chaleur, ce que nous allons vérifier.

$$f(t,x,y,z) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2+y^2+z^2)\right) ,$$

où c est une constante.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(-\frac{3}{2t^2\sqrt{t}} + c\frac{x^2+y^2+z^2}{t^3\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2+y^2+z^2)\right) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \left(-\frac{2cx}{t^2\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2+y^2+z^2)\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(-\frac{2c}{t^2\sqrt{t}} + 4c^2\frac{x^2}{t^3\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{c}{t}(x^2+y^2+z^2)\right)
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles par rapport à y et z s'obtiennent en permutant les 3 variables, qui jouent des rôles symétriques. On obtient :

$$\Delta_{xyz} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4c\frac{\partial f}{\partial t} .$$

Pour $c = \frac{\rho C_p}{4\lambda}$, f est donc une solution particulière de l'équation de la chaleur.

1.4 Extrema

Le but de cette section est d'étudier les variations d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, et en particulier de déterminer les points de l'espace où elle atteint son maximum et son minimum. Afin de mieux visualiser les notions introduites, nous nous plaçons en dimension 2. La fonction $f\ :\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ se représente par la surface d'équation $z = f(x, y)$ dans l'espace. Nous commençons par la notion de *dérivée directionnelle*.

Définition 8. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continûment différentiable sur D. Soit (a, b) un point de D et (u, v) un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On appelle* dérivée directionnelle *de f en (a, b) dans la direction de (u, v) la quantité :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v\ .$$

Pour comprendre cette définition, considérons la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui à t associe :

$$g(t) = f(a + tu, b + tv)\ .$$

Elle définit une courbe sur la surface d'équation $z = f(x, y)$, au-dessus de la droite $\{(a+tu, b+tv)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ (voir figure 6). On dérive cette fonction par rapport à t comme une fonction composée :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + tu, b + tv) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a + tu, b + tv)\, \frac{\mathrm{d}(a + tu)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(a + tu, b + tv)\, \frac{\mathrm{d}(b + tv)}{\mathrm{d}t}\ . \end{aligned}$$

Soit en $t = 0$:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v\ .$$

La dérivée directionnelle décrit les variations de $f(a + tu, b + tv)$ autour de (a, b), dans la direction du vecteur (u, v).

La direction selon laquelle la croissance de la surface est la plus forte est celle du gradient de la fonction. À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 7 quelques valeurs du gradient de la fonction $\sin(xy)$. Pour comparaison, nous avons mis à côté une représentation de la fonction par niveaux de gris : au lieu de la surface $z = \sin(xy)$ (figure 4), les valeurs de la fonction sont symbolisées par des niveaux de gris, d'autant plus clairs que les valeurs sont plus fortes. Les points blancs sont des maxima de la fonction, et les points noirs des minima. On constate que le gradient, s'il est non nul, est toujours orienté vers le haut, dans la direction de la « ligne de plus grande pente ».

Sur la figure 7, on observe que le gradient est nul pour les maxima et les minima. Définissons d'abord la notion de maximum et minimum *local*.

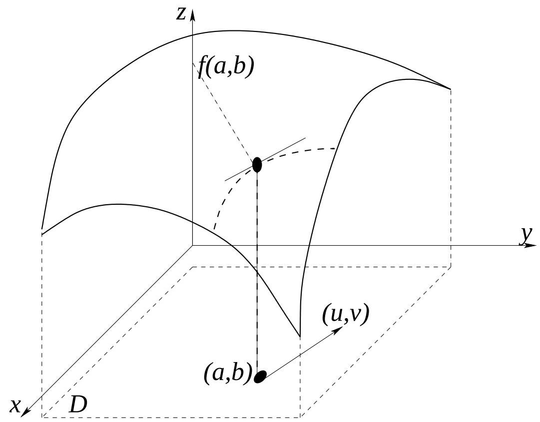

FIGURE 6 – Dérivée directionnelle.

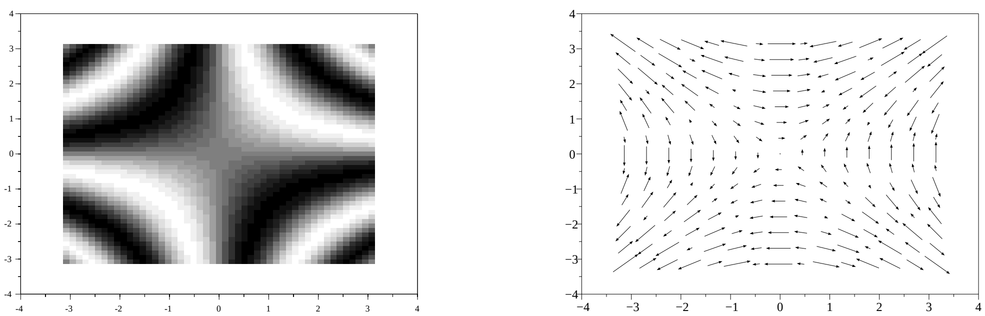

FIGURE 7 – Représentation par niveaux de gris de $z = \sin(xy)$ et champ de gradient correspondant.

Définition 9. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction définie sur D, et (a, b) un point de D. On dit que f admet un maximum (respectivement un minimum) local en (a, b), s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(a, b) \geqslant f(x, y)$ (respectivement $f(a, b) \leqslant f(x, y)$), pour tout (x, y) tel que $|x - a| < \epsilon$ et $|y - b| < \epsilon$.*

Théorème 5. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continûment différentiable sur D. Soit (a, b) un point de D. Si f admet un maximum local ou un minimum local en (a, b) alors le gradient de f au point (a, b) est nul :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \; .$$

Démonstration : Si f admet un extremum (maximum ou minimum) local en (a, b) alors il en est de même si on restreint f à la direction (u, v) autour de (a, b). La dérivée de la fonction (de t) $f(a + tu, b + tv)$ doit donc être nulle en $t = 0$. Donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, u + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, v = 0 \; .$$

Mais les dérivées directionnelles ne peuvent être nulles dans toutes les directions que si le gradient lui même est nul. □

Les points du plan où le gradient de f s'annule sont les *points critiques* de f. La nullité du gradient n'est qu'une condition nécessaire pour qu'un point soit un extremum. Rappelons tout d'abord quelle est la situation pour les fonctions d'une variable, deux fois continûment dérivable. Si la fonction $t \mapsto g(t)$ admet un maximum ou un minimum local en $t = 0$ alors $g'(0) = 0$. Réciproquement :

- Si $g'(0) = 0$ et si $g''(0) < 0$, alors 0 est un maximum local pour g.
- Si $g'(0) = 0$ et si $g''(0) > 0$, alors 0 est un minimum local pour g.

Revenons alors à une fonction de 2 variables, que nous supposons deux fois continûment différentiable. Examinons cette fonction dans la direction (u, v) autour de (a, b).

$$g(t) = f(a + tu, b + tv) \; .$$

Le point (a, b) sera un maximum de f si 0 est un maximum pour g, quelle que soit la direction (u, v). Calculons la dérivée seconde de g :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(a + tu, b + tv) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\,\frac{\partial f}{\partial x}(a + tu, b + tv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(a + tu, b + tv) \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + tu, b + tv)\, u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + tu, b + tv)\, uv \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + tu, b + tv)\, v^2 \; .
\end{aligned}$$

Donc en $t = 0$:

$$g''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, v^2 \; .$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme matricielle suivante, qui fait intervenir la matrice hessienne de f.

$$(u, v) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u, v) H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \; .$$

Il se trouve que, comme pour toute matrice symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ (vérifiant $P^{-1} = {}^tP$) et deux réels λ et μ tels que :

$$H = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \; .$$

Les réels λ et μ sont les *valeurs propres* de la matrice hessienne. Pour les calculer, il suffit de connaître leur somme, qui est la trace de la matrice hessienne, et leur produit, qui est son déterminant.

$$\lambda + \mu = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \quad \text{et} \quad \lambda\mu = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

On résoud alors l'équation du second degré dont λ et μ sont solution.

Posons :

$$\begin{pmatrix} u_* \\ \\ v_* \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} \iff (u_*, v_*) = (u, v)P \ .$$

La dérivée seconde de g en 0 s'écrit :

$$g''(0) = (u_*, v_*) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_* \\ \\ v_* \end{pmatrix} = \lambda u_*^2 + \mu v_*^2 \ .$$

Le signe de $g''(0)$ dépend donc des signes de λ et μ.

- Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, alors $g''(0) < 0$ quelle que soit la direction (u, v), donc le point (a, b) est un *maximum* local pour f.
- Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors $g''(0) > 0$ quelle que soit la direction (u, v), donc le point (a, b) est un *minimum* local pour f.
- Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, alors $g''(0) < 0$ dans la direction $(u_*, 0)P$, et $g''(0) > 0$ dans la direction $(0, v_*)P$. Dans ce cas on dit que le point (a, b) est un *point selle* pour f.

Les trois cas sont illustrés sur la figure 8.

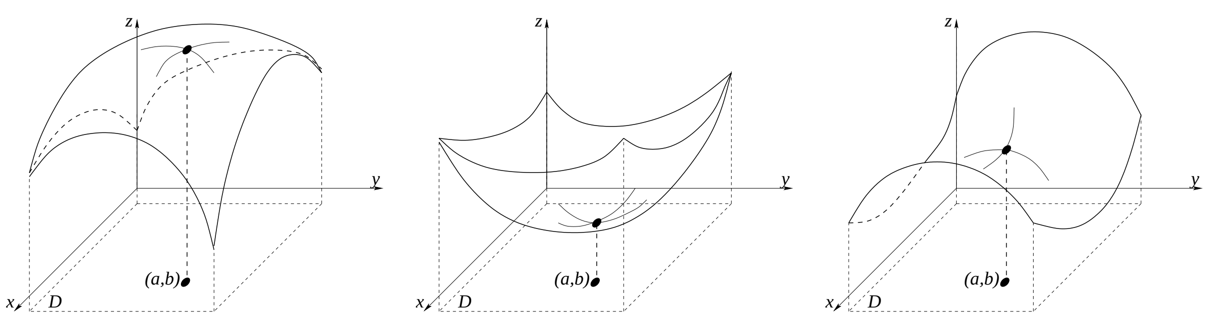

FIGURE 8 – Maximum, minimum et point selle pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Voici un exemple.

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ .$$

Le gradient et la matrice hessienne au point (x, y) sont :

$$\nabla = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{pmatrix} \quad , \quad H = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \ .$$

Le gradient s'annule en 4 points dans le plan. Nous les donnons avec les valeurs propres de la matrice hessienne et la nature du point.

$(2,1)$	$\lambda = 6\,,\ \mu = 18$	minimum
$(-2,-1)$	$\lambda = -6\,,\ \mu = -18$	maximum
$(1,2)$	$\lambda = -6\,,\ \mu = 18$	point selle
$(-1,-2)$	$\lambda = 6\,,\ \mu = -18$	point selle

L'étude précédente se généralise aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction deux fois continûment différentiable sur D et (a,b) un point de D. Notons ∇ le gradient et H la matrice hessienne de f au point (a,b).*

1. *Si $\nabla = 0$ et si H a toutes ses valeurs propres strictement négatives, alors (a,b) est un maximum local pour f.*
2. *Si $\nabla = 0$ et si H a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors (a,b) est un minimum local pour f.*

Les valeurs propres de H sont les racines du polynôme $\Pi(x)$, où $\Pi(x)$ est le déterminant de la matrice $H - xI$, I étant la matrice indentité de taille $n \times n$.

1.5 Extrema liés

Nous passons maintenant à un problème un peu différent : la recherche d'*extrema liés*, aussi appelés *extrema sous contrainte*. Commençons par un exemple simple. Parmi les parallélépipèdes de surface S fixée, lesquels ont un volume maximal ? Si x, y, z désignent les longueurs des côtés du parallélépipède, la surface est $2(xy + yz + xz)$ et le volume xyz. Le problème est de trouver le maximum atteint par le volume xyz, non pas parmi tous les points de $\mathbb{R}^3$, mais seulement parmi ceux vérifiant la contrainte $2(xy+yz+xz) = S$, où S est fixé. Bien sûr, on peut utiliser la contrainte pour calculer une des variables en fonction des deux autres. Par exemple pour z :

$$2(xy + yz + xz) = S \implies z = \frac{\frac{S}{2} - xy}{x + y}\ .$$

En reportant cette valeur de z dans l'expression du volume, on obtient :

$$V_S(x,y) = xy\,\frac{\frac{S}{2} - xy}{x + y}\ .$$

On peut calculer le maximum de cette fonction avec la technique du gradient. Le lecteur vérifiera que le maximum de $V_S(x,y)$ est atteint pour :

$$x = y = \sqrt{\frac{S}{6}}\ ,$$

ce qui entraîne aussi $z = \sqrt{\frac{S}{6}}$: à surface fixée, le parallélépipède de volume maximal est le cube.

Il est rare que l'on puisse effectivement appliquer cette technique de substitution, surtout s'il y a plusieurs contraintes. On utilise alors le *théorème des multiplicateurs de Lagrange*, qui dit que si un problème d'optimisation sous contrainte a une solution en un point, alors les gradients de la fonction et des contraintes sont des vecteurs *linéairement dépendants*.

Théorème 7. *Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \dots, g_k$ des applications continûment différentiables de D dans $\mathbb{R}$. Notons :*

$$A = \{\mathbf{x} \in D\,,\ g_1(\mathbf{x}) = \cdots = g_k(\mathbf{x}) = 0\}\ .$$

Si la restriction de f à A présente un extremum au point $\mathbf{a}$ de A, et si les vecteurs $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_k(\mathbf{a})$ sont linéairement indépendants, alors il existe k réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{a}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a})\ .$$

Dans ce théorème, f est la fonction dont on cherche un maximum ou un minimum, et $g_1, \dots, g_k$ sont les contraintes. Remarquons qu'il y a au plus n contraintes, car leurs gradients doivent être linéairement indépendants. En fait pour que le théorème ait un intérêt, il ne peut pas y avoir plus de $n-1$ contraintes. Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les *multiplicateurs de Lagrange*. Appliquons ce théorème au problème du volume sous contrainte de surface.

$$f(x,y,z) = xyz \quad , \quad g_1(x,y,z) = 2(xy + yz + xz) - S\ .$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2(y+z) \\ 2(x+z) \\ 2(x+y) \end{pmatrix}\ .$$

Si un point (x,y,z) est solution, alors il existe un multiplicateur λ_1 tel que $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1$. On doit donc avoir :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} yz &=& 2\lambda_1(y+z) \\ xz &=& 2\lambda_1(x+z) \\ xy &=& 2\lambda_1(x+y) \end{array} \right.$$

En soustrayant ces équations deux à deux, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x-y)z &=& 2\lambda_1(x-y) \\ (y-z)x &=& 2\lambda_1(y-z) \\ (z-x)y &=& 2\lambda_1(z-x) \end{array} \right.$$

qui implique que $x = y = z$. On retrouve donc la solution précédente.

Voici maintenant un exemple similaire, mais avec deux contraintes.

$$f(x,y,z) = xyz\ ,\ g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1\ ,\ g_2(x,y,z) = x + y + z - 1\ .$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \;,\; \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \;,\; \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;.$$

La contrainte $g_1(x, y, z) = 0$ est l'équation de la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1 ; la contrainte $g_2(x, y, z) = 0$ est l'équation d'un plan. On cherche donc les extrema de f sur l'intersection de la sphère unité et d'un plan, à savoir sur un cercle dans l'espace. Si un point (x, y, z) est solution, alors il existe deux multiplicateurs λ_1, λ_2 tels que $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$. On doit donc avoir :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} yz & = & 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ xz & = & 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ xy & = & 2\lambda_1 z + \lambda_2 \end{array} \right. .$$

On obtient donc un système de 5 équations (les 3 précédentes et les 2 contraintes), et 5 inconnues : $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. L'étude de ce système montre qu'il a 6 solutions, données dans le tableau ci-dessous.

x	y	z	λ_1	λ_2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire. Rien dans le théorème 7 ne permet de savoir si ce sont des maxima, des minima ou ni l'un ni l'autre.

1.6 Difféomorphismes

Les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui sont bijectives, et continûment différentiables ainsi que leur réciproque, sont utilisées comme changements de variables. On les appelle des *difféomorphismes.*

Définition 10. *Soient D et Δ deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit Φ une application de D dans Δ. On dit que Φ est un* difféomorphisme *si :*

1. *Φ est une bijection de D sur Δ,*
2. *Φ ainsi que sa réciproque Φ^{-1} sont continûment différentiables.*

Les différentielles de Φ et Φ^{-1} sont elles aussi réciproques l'une de l'autre. Les matrices jacobiennes, qui sont des matrices carrées $n \times n$, sont inverses l'une de l'autre. Ceci découle du théorème de composition des différentielles 3.

Proposition 1. *Soit Φ un difféomorphisme de D sur Δ,* **a** *un point de D et* **b** *un point de Δ. Alors :*

$$\mathrm{d}\Phi^{-1}(\Phi(a)) = \Big(\mathrm{d}\Phi(a)\Big)^{-1} \qquad \mathrm{d}\Phi(\Phi^{-1}(b)) = \Big(\mathrm{d}\Phi^{-1}(b)\Big)^{-1},$$

$$MJ(\Phi^{-1})(\Phi(a)) = \Big(MJ(\Phi)(a)\Big)^{-1} \quad MJ(\Phi)(\Phi^{-1}(b)) = \Big(MJ(\Phi^{-1})(b)\Big)^{-1}.$$

Pour un difféomorphisme, le déterminant de la matrice jacobienne joue un rôle particulier.

Définition 11. *Soient D et Δ deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit Φ une application continûment différentiable de D dans Δ. On appelle* déterminant jacobien *de Φ, ou simplement* jacobien*, le déterminant de la matrice jacobienne.*

$$J(\Phi) = Det(MJ(\Phi)) .$$

Comme conséquence de la proposition 1, le jacobien d'un difféomorphisme ne s'annule pas, puisque la matrice jacobienne est inversible. De plus, le jacobien de Φ et le jacobien de Φ^{-1} sont inverses l'un de l'autre.

$$J(\Phi^{-1})(\Phi(a)) = \frac{1}{J(\Phi)(a)} \qquad J(\Phi)(\Phi^{-1}(b)) = \frac{1}{J(\Phi^{-1})(b)} .$$

Les changements de variables en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques, sont très souvent utilisés. Nous détaillons le premier, qui consiste à remplacer les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point du plan, par le module r et l'argument θ du point dans le plan complexe (figure 1).

$$\Phi \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} D = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^+ \times \{0\} & \longrightarrow & \Delta =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\\ (x, y) & \longmapsto & (r, \theta) \end{array} \right.$$

Le module r s'écrit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Par contre il n'est pas facile de donner une expression explicite de θ en fonction de x et y, à cause des problèmes de signe. On utilise plutôt l'expression de la réciproque Φ^{-1}, que nous avons déjà donnée en exemple.

$$\Phi^{-1} \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \Delta =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[& \longrightarrow & D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \longmapsto & (x, y) \\ & & x = r\cos\theta \,, \ y = r\sin\theta \,. \end{array} \right.$$

La matrice jacobienne de Φ^{-1} au point (r, θ) est :

$$MJ(\Phi^{-1})(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Remarquons que le déterminant jacobien de Φ^{-1}, qui vaut r, ne s'annule pas sur le domaine Δ. La matrice jacobienne est donc bien inversible en tout point de Δ. Voici son inverse :

$$\left(MJ(\Phi^{-1})(r,\theta)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Pour obtenir la matrice jacobienne de Φ en un point (x,y) de D, il suffit de remplacer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et r par leurs expressions en fonction de x et y :

$$MJ(\Phi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

Observons qu'on a bien la relation attendue entre les jacobiens.

$$J(\Phi)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{J(\phi^{-1})(r,\theta)} .$$

Considérons maintenant une application $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$, de D dans $\mathbb{R}$. Pour utiliser le changement de variables Φ, on doit remplacer les anciennes coordonnées (x,y), par les nouvelles coordonnées (r,θ), et donc considérer la fonction g, de Δ dans $\mathbb{R}$, qui à (r,θ) associe :

$$g(r,\theta) = f(\Phi^{-1}(r,\theta)) = f(x(r,\theta), y(r,\theta)) .$$

On est alors amené à utiliser le théorème 3 pour calculer les dérivées partielles successives de g en fonction de celles de f, et réciproquement. À titre d'exemple, voici le calcul classique du laplacien de f (supposée deux fois continûment différentiable) en fonction des dérivées partielles de g.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} ,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} ,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} ,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y} .
\end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} .$$

1.7 Intégrales multiples

Il n'est pas question de développer ici une théorie générale de l'intégrale d'une fonction de n variables sur un domaine de $\mathbb{R}^n$. Nous nous limiterons à des domaines ouverts particuliers en dimension 2, ceux dont on peut délimiter la frontière *verticalement* par deux fonctions continues dans le plan.

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\; a < x < b \,,\; \alpha(x) < y < \beta(x) \,\} \;,$$

où α et β sont deux fonctions continues de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. En général, ce même domaine pourra être délimité *horizontalement* par deux autres fonctions (figure 9).

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\; \gamma(y) < x < \delta(y) \,,\; c < y < d \,\} \;,$$

où γ et δ sont deux fonctions continues de $]c,d[$ dans $\mathbb{R}$.

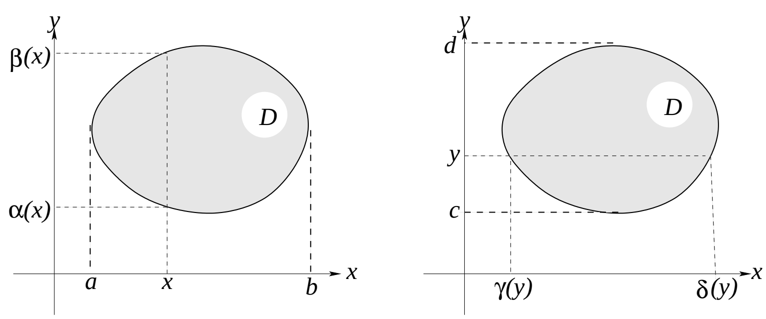

FIGURE 9 – Domaine du plan délimité par deux fonctions, verticalement et horizontalement.

Soit f une fonction continue sur le domaine D. Pour x fixé dans l'intervalle $]a,b[$, l'application partielle $y \mapsto f(x,y)$, définie sur $]\alpha(x),\beta(x)[$ est continue, donc intégrable. La fonction qui à $x \in]a,b[$ associe :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;,$$

est continue sur $]a,b[$. Il est logique de définir l'intégrale de f sur D comme son intégrale. Encore faut-il s'assurer que le résultat aurait été le même si on avait intégré d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y : le *théorème de Fubini* l'assure, et nous l'admettrons.

Théorème 8. *Avec les hypothèses précédentes, l'égalité suivante est vérifiée.*

$$\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \;.$$

Définition 12. *On appelle intégrale de f sur D, la valeur commune des deux expressions :*

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \ .$$

Voici un premier exemple, dans le cas particulier où D est un rectangle :

$$D =]a,b[\times]c,d[\ .$$

La fonction à intégrer est $f \ : \ (x,y) \mapsto x^3y^2$.

$$\begin{aligned} \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left(\int_c^d x^3y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b x^3 \left[\frac{y^3}{3} \right]_c^d \mathrm{d}x \\ &= \frac{d^3-c^3}{3} \int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{d^3-c^3}{3}\,\frac{b^4-a^4}{4} \ . \end{aligned}$$

En fait si $f(x,y) = g(x)h(y)$, alors l'intégrale de f sur $D =]a,b[\times]c,d[$ est le produit des intégrales de g sur $]a,b[$ et de h sur $]c,d[$.

Voici l'intégrale de la même fonction f sur un domaine triangulaire (figure 10) :

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < x \,\} \ .$$

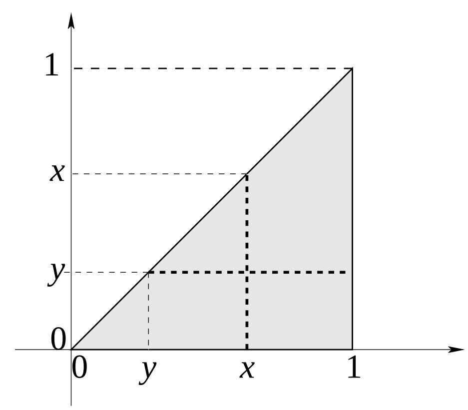

Figure 10 – Domaine triangulaire.

$$\begin{aligned} \int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^3y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^x \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^6}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^7}{21} \right]_0^1 = \frac{1}{21} \ . \end{aligned}$$

Si on commence par la variable x, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3y^2\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2\left[\frac{x^4}{4}\right]_y^1\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{y^2}{4} - \frac{y^6}{4}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{12} - \frac{y^7}{28}\right]_0^1 = \frac{1}{21}\,.
\end{aligned}$$

Cette méthode de calcul s'étend aux intégrales triples, et plus généralement aux intégrales sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Voici un exemple. Notons D le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$D = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ 0<x<y<z<1\,\}\,.$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui à (x,y,z) associe xyz. Calculons l'intégrale de f sur D.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1\left(\int_x^1\left(\int_y^1 xyz\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(\int_x^1\left(xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_y^1\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{xy}{2}(1-y^2)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(x\left[\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{8}\right]_x^1\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{8}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{16}+\frac{x^6}{48}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{48}\,.
\end{aligned}$$

Voici un autre calcul, conduisant au même résultat.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y xyz\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(yz\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z \frac{zy^3}{2}\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(z\left[\frac{y^4}{8}\right]_0^z\right)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \frac{z^5}{8}\,\mathrm{d}z \\
&= \left[\frac{z^6}{48}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{48}\,.
\end{aligned}$$

Les intégrales doubles et triples permettent de résoudre les problèmes de calcul d'aires, volumes, centres de gravité, moments d'inertie etc. de la mécanique du solide. Si D est un domaine du plan, son aire est l'intégrale sur D de la fonction constante égale à 1. Son centre de gravité a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\displaystyle\int_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,.$$

La détermination du volume et du centre de gravité d'un solide dans l'espace s'effectue de façon analogue.

1.8 Changement de variables

Les intégrations successives peuvent conduire à des calculs fastidieux si la fonction ou le domaine sont compliqués. La technique du changement de variables permet de les simplifier.

Théorème 9. *Soient D et Δ deux domaines ouverts de $\mathbb{R}^2$, et Φ un difféomorphisme de D sur Δ.*

$$\Phi\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \Delta \\ (x,y) & \longmapsto & \Phi(x,y)=(u,v) \\ & & u=u(x,y)\,,v=v(x,y) \end{array}\right.$$

Soit $f\ :\ (x,y)\mapsto f(x,y)$ une fonction continue sur D.

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Delta f(\Phi^{-1}(u,v))\,|J(\Phi^{-1})(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ ,$$

où $J(\Phi^{-1})(u,v)$ *est le déterminant jacobien de* Φ^{-1} *au point* (u,v) *de* Δ.

Pour comprendre ce résultat, nous devons donner une interprétation géométrique de l'intégrale et du jacobien. Dans l'écriture $\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, il faut voir $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ comme la surface d'un petit rectangle de largeur $\mathrm{d}x$ et de longueur $\mathrm{d}y$ autour du point (x,y). Le produit $f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est le volume d'un petit parallélépipède dont la base est ce rectangle et la hauteur $f(x,y)$. L'intégrale est la somme de ces petits éléments de volume (figure 11).

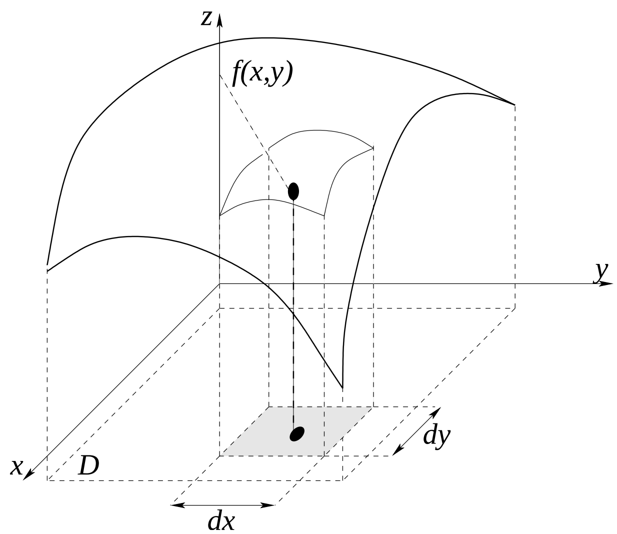

FIGURE 11 – Interprétation géométrique d'une intégrale double.

Appliquer le difféomorphisme Φ au domaine D revient à le déformer, comme si c'était une plaque de caoutchouc. Le petit rectangle de largeur $\mathrm{d}x$ et de longueur $\mathrm{d}y$ autour du point (x,y) est lui aussi déformé en une petite surface, autour de $(u,v) = \Phi(x,y)$. En première approximation, cette petite surface peut être vue comme un parallélogramme, dont l'aire est $|J\Phi^{-1}(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$: rappelons que le déterminant de deux vecteurs dans le plan est au signe près l'aire du parallélogramme qu'ils délimitent (cf. figure 12).

Soit à calculer $\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où le domaine D est délimité par deux paraboles et deux hyperboles (figure 13).

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\; \frac{x^2}{2} < y < x^2 \,,\; \frac{1}{2x} < y < \frac{1}{x} \right\} .$$

On pourrait calculer directement cette intégrale de la façon suivante.

$$\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{2^{-1/3}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{2x}}^{x^2} (x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{2^{1/3}} \left(\int_{\frac{x^2}{2}}^{\frac{1}{x}} (x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \,.$$

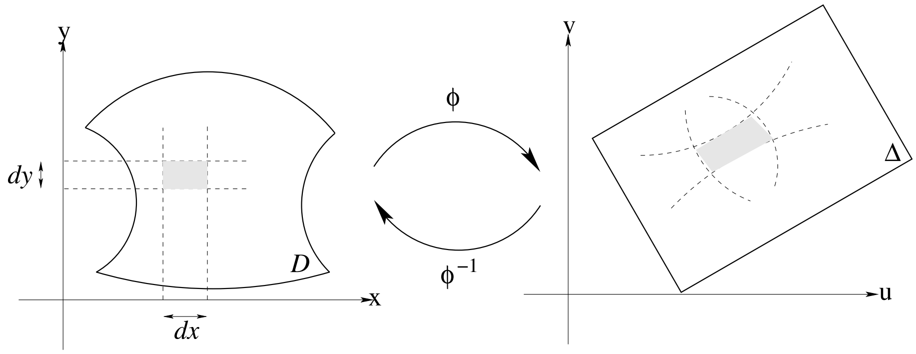

FIGURE 12 – Interprétation géométrique du terme $|J(\Phi^{-1})(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ dans un changement de variables.

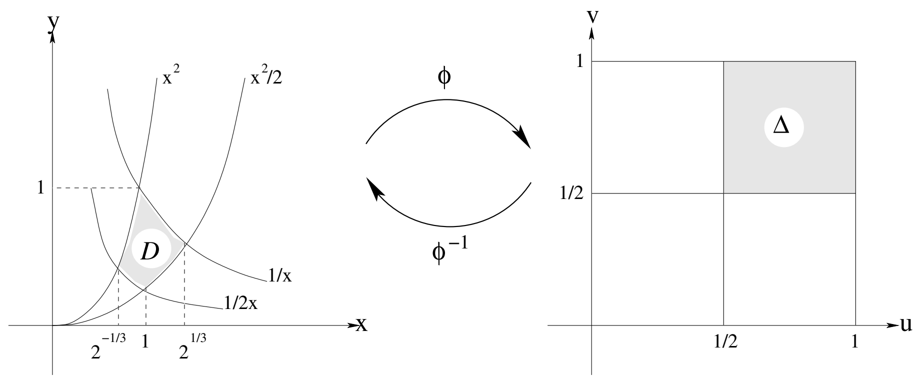

FIGURE 13 – Exemple de changement de variables.

Nous proposons le changement de variables suivant.

$$\Phi\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} D & \longrightarrow & \Delta \\ (x,y) & \longmapsto & \Phi(x,y)=(u,v) \\ & & u=\frac{y}{x^2}\,,\, v=xy\ . \end{array}\right.$$

La première étape consiste à déterminer Φ^{-1}, en résolvant en x et y le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} u & = & \dfrac{y}{x^2} \\ v & = & xy \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccl} x & = & u^{-1/3}v^{1/3} \\ y & = & u^{1/3}v^{2/3}\ . \end{array}\right.$$

Ceci fournit l'expression explicite de Φ^{-1}.

$$\Phi^{-1}\ :\ \left\{\begin{array}{ccl} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & \Phi^{-1}(u,v)=(x,y) \\ & & x=u^{-1/3}v^{1/3}\,,\ y=u^{1/3}v^{2/3}\ . \end{array}\right.$$

La seconde étape consiste à déterminer Δ, qui est l'image par Φ de D. Pour cela, on remplace x et y par leurs expressions en fonction de u et v dans les inégalités définissant

D.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Big\{(u,v)\,,\ \frac{(u^{-1/3}v^{1/3})^2}{2} < u^{1/3}v^{2/3} < (u^{-1/3}v^{1/3})^2\,,\\
&\qquad \frac{1}{2u^{-1/3}v^{1/3}} < u^{1/3}v^{2/3} < \frac{1}{u^{-1/3}v^{1/3}}\Big\}\\
&= \Big\{\,(u,v)\,,\ \frac{1}{2} < u < 1\,,\ \frac{1}{2} < v < 1\Big\}\,.
\end{aligned}$$

La troisième étape consiste à calculer le déterminant jacobien de Φ^{-1}. Pour cela, il faut d'abord écrire la matrice jacobienne, en dérivant les expressions de x et y en fonction de u et v.

$$J\Phi^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{-1/3}v^{-2/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}\,.$$

La quatrième étape consiste à appliquer le théorème 9. Pour cela, on remplace x et y par leurs expressions en fonction de u et v dans la fonction, et on multiplie par la valeur absolue du jacobien. Il ne reste plus qu'à calculer cette nouvelle intégrale.

$$\begin{aligned}
\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Delta (u^{-1/3}v^{1/3} + u^{1/3}v^{2/3})\,\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-4/3}v^{1/3} + u^{-2/3}v^{2/3}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-4/3}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 v^{1/3}\,\mathrm{d}v\right) + \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-2/3}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 v^{2/3}\,\mathrm{d}v\right)\\
&= \frac{3}{4}\left(-1+2^{1/3}\right)\left(1-2^{-4/3}\right) + \frac{3}{5}\left(1-2^{-1/3}\right)\left(1-2^{-5/3}\right)\,.
\end{aligned}$$

Le *changement de variables en coordonnées polaires* s'impose quand le domaine D est un disque centré en 0. Soit à calculer $\int_{D_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où :

$$D_R = \{\,(x,y)\,,\ x^2+y^2 < R^2\,\}\,.$$

Le changement en coordonnées polaires envoie le disque D_R, privé du segment joignant l'origine à $(0,-R)$, sur un domaine rectangulaire :

$$\Delta_R = \{\,(r,\theta)\,,\ 0 < r < R\,,\ 0 < \theta < 2\pi\,\}\,.$$

Le jacobien de Φ^{-1}, déjà calculé, vaut r. On a donc :

$$\int_{D_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\,.$$

Calculons le volume de la boule de rayon R, à l'aide du changement de variables en coordonnées sphériques.

$$B_R = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,,\ x^2+y^2+z^2 < R\Big\}\,.$$

Le difféomorphisme Φ^{-1} est :

$$
\begin{array}{rcl}
]0,R[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & B_R \setminus \{(x,y,z)\,,\ y=0, x\geqslant 0\} \\
(r,\theta,\phi) & \longmapsto & (x,y,z) \\
 & & x=r\cos\phi\cos\theta\,,\ y=r\cos\phi\sin\theta\,,\ z=r\sin\phi
\end{array}
$$

Nous avons déjà écrit sa matrice jacobienne, et nous laissons au lecteur le calcul de son déterminant : $J(\Phi^{-1}) = r^2\cos\phi$.
Le volume de la boule B_R est :

$$\int_{B_R} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2\cos\phi\,\mathrm{d}r\right)\,d\theta\right)\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}R^3$$

2 Entraînement

2.1 Vrai ou faux

Vrai-Faux 1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe $f(x, y, z) = \sin(xyz)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ L'application f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^3$.
2. ☐ La différentielle de f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. ☐ Le gradient de f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. ☒ Le gradient de f au point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ est nul.
5. ☒ Le gradient de f au point $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ est nul.
6. ☐ La matrice jacobienne de f au point (x, y, z) est une matrice réelle 3×3.
7. ☒ La matrice hessienne de f au point (x, y, z) est une matrice réelle 3×3.
8. ☒ La matrice hessienne de f au point $(0, 0, 0)$ est la matrice nulle.
9. ☐ La matrice hessienne de f au point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ est la matrice nulle.
10. ☐ La matrice hessienne de f au point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ a toutes ses valeurs propres strictement négatives.
11. ☒ La matrice hessienne de f au point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ a pour valeurs propres 0, $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.
12. ☐ Le point $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ est un maximum local de f.
13. ☒ La matrice hessienne de f au point $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ a tous ses coefficients strictement négatifs.
14. ☒ La matrice hessienne de f au point $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$ a pour valeurs propres 0 et $-\frac{\pi^2}{2} - 1$.
15. ☒ f atteint son maximum au point $(\frac{\pi}{2}, 1, 1)$.

Vrai-Faux 2. Soit f une application deux fois continûment différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si le gradient de f au point (a, b) est nul, alors f atteint son maximum en (a, b).
2. ☐ Si le gradient de f au point (a, b) est nul, et si la matrice hessienne de f en (a, b) a deux valeurs propres strictement négatives, alors f atteint son maximum en (a, b).
3. ☒ Si le gradient de f au point (a, b) est nul, et si sa matrice hessienne a deux valeurs propres strictement négatives, alors (a, b) est un maximum local pour f.
4. ☐ Si la matrice hessienne de f au point (a, b) a deux valeurs propres strictement positives alors (a, b) est un minimum local pour f.

5. ☒ Si la matrice hessienne de f au point (a,b) a un déterminant strictement négatif, alors (a,b) est un point selle pour f.
6. ☐ Si le gradient et la matrice hessienne de f au point (a,b) sont nuls, alors (a,b) ne peut pas être un maximum local pour f.
7. ☐ Si le gradient de f est nul et si le déterminant de sa matrice hessienne au point (a,b) est nul, alors (a,b) ne peut pas être un maximum local pour f.
8. ☒ Si le gradient de f est nul, si le déterminant de la matrice hessienne de f au point (a,b) est strictement positif et sa trace négative, alors (a,b) est un maximum local pour f.

Vrai-Faux 3. Soient f et g deux applications continûment différentiables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $A = \{(x,y)\,,\ g(x,y) = 0\}$ et (a,b) un point de A. On note ∇_f et ∇_g les gradients de f et g au point (a,b), et on suppose que ∇_g est non nul. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si $\nabla_f = 2\nabla_g$ alors f atteint forcément son maximum au point (a,b).
2. ☒ Si f atteint son maximum sur A au point (a,b), alors ∇_f et ∇_g sont proportionnels.
3. ☐ Si f atteint son maximum sur $\mathbb{R}^2$ au point (a,b), alors ∇f peut être égal à $2\nabla_g$.
4. ☒ Si $\nabla_f = 2\nabla_g$, alors (a,b) n'est pas un maximum local pour f sur $\mathbb{R}^2$.
5. ☐ Si $\nabla_f = 2\nabla g$, alors f atteint au point (a,b), soit son maximum sur A, soit son minimum sur A.

Vrai-Faux 4. Soient f et g les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$ et $g(x,y) = x^2 - y$. On note $A = \{(x,y)\,,\ g(x,y) = 0\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ Si le gradient de f au point (a,b) est nul, alors $a = b = 0$.
2. ☒ Les points de $\mathbb{R}^2$ où le gradient de f s'annule sont $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.
3. ☐ Les trois points $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ sont des minima locaux de f.
4. ☒ Le point $(0,0)$ est un point selle.
5. ☐ Les points $(0,0)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sont des points de A.
6. ☐ Le seul point de A où la restriction de f à A peut atteindre son minimum est $(0,0)$.
7. ☐ On ne peut pas savoir si la restriction de f à A atteint son minimum en $(0,0)$.
8. ☒ Le point $(0,0)$ n'est pas un minimum pour la restriction de f à A.
9. ☒ La restriction de f à A atteint son minimum en un point dont l'abscisse est comprise entre 0.59 et 0.6.

Vrai-Faux 5. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $\Phi(x, y) = (u, v)$, avec $u = x^2+y^2$, $v = x^2-y^2$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ Φ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
2. ☒ si $(u, v) = \Phi(x, y)$, alors $-u \leqslant v \leqslant u$.
3. ☐ Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.
4. ☐ Φ est un difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur lui même.
5. ☒ Φ est un difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur son image.
6. ☒ Φ est un difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ sur $\{(u, v)\,,\ -u < v < u\}$.
7. ☐ Φ est un difféomorphisme de $]0, 1[^2$ sur $\{(u, v)\,,\ 0 < u+v < 1\,,\ 0 < u-v < 1\}$.
8. ☒ Φ est un difféomorphisme de $]0, 1[^2$ sur $\{(u, v)\,,\ -u < v < u\,,\ u - 2 < v < 2 - u\}$.
9. ☒ Φ est un difféomorphisme de $]-1, 0[^2$ sur $\{(u, v)\,,\ -u < v < u\,,\ u-2 < v < 2-u\}$.
10. ☒ Si $D = \{(x, y)\,,\ 0 < y < x\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$, alors Φ est un difféomorphisme de D sur son image Δ.
11. ☐ Si $D = \{(x, y)\,,\ 0 < y < x\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$, alors $\Phi(D) = D$.
12. ☒ Si $D = \{(x, y)\,,\ 0 < y < x\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$, alors $\Phi(D) = \{(u, v)\,,\ 0 < u < 1\,,\ 0 < v < u\}$.
13. ☒ La matrice jacobienne de Φ au point (x, y) est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
14. ☐ Si $x > 0$ et $y > 0$, alors le déterminant jacobien de Φ au point (x, y) est strictement positif.

Vrai-Faux 6. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $\Phi(x, y) = (u, v)$, avec $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. On pose $f(x, y) = \sin(x^4 - y^4)$ et $g(u, v) = \sin(uv)$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $MJ(f)(1, 0) = MJ(g)(1, 0)\, MJ(\Phi)(1, 0)$.
2. ☒ $MJ(f)(1, 0) = MJ(g)(1, 1)\, MJ(\Phi)(1, 0)$.
3. ☐ $MJ(g)(1, 1) = MJ(f)(1, 0)\, MJ(\Phi^{-1})(1, 1)$.
4. ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$.
5. ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.
6. ☒ $\Delta g(u, v) = -(u^2 + v^2) \sin(uv)$.
7. ☐ $\Delta f(x, y) = 12(x^2 - y^2) \cos(x^4 - y^4) + 16(x^6 + y^6) \sin(x^4 - y^4)$.

Vrai-Faux 7. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $\Phi(x, y) = (u, v)$, avec $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. On pose $D = \{(x, y)\,,\ 0 < y < x\,,\ x^2 + y^2 < 1\}$ et $\Delta = \{(u, v)\,,\ 0 < u < 1\,,\ 0 < v < u\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Delta \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$
2. ☒ $\displaystyle\int_D 8xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Delta \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$
3. ☐ $\displaystyle\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$
4. ☒ $\displaystyle\int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}.$
5. ☐ $\displaystyle\int_D x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Delta (u+v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$
6. ☐ $\displaystyle\int_D x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_0^1 (u+v)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v.$
7. ☒ $\displaystyle\int_D x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_0^u (u+v)\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u.$
8. ☒ $\displaystyle\int_D x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_v^1 (u+v)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v.$
9. ☒ $\displaystyle\int_D x^3y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{32}.$
10. ☐ $\displaystyle\int_D xy^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_\Delta (u+v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$
11. ☐ $\displaystyle\int_D xy^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_0^v (u-v)\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u.$
12. ☒ $\displaystyle\int_D xy^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_0^u (u-v)\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u.$
13. ☒ $\displaystyle\int_D xy^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{16}\int_0^1 \left(\int_v^1 (u-v)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v.$
14. ☒ $\displaystyle\int_D xy^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{96}.$

Vrai-Faux 8. On pose $D = \{(x, y)\,,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}\,,\ 0 < y < \frac{\pi}{4}\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$
2. ☒ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$
3. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\,\mathrm{d}y.$

4. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(y)+\sin(y))\,\mathrm{d}y.$
5. ☒ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(y)-\sin(y))\,\mathrm{d}y.$
6. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}+1.$
7. ☒ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}-1.$
8. ☒ $\displaystyle\int_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^x \cos(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x.$

Vrai-Faux 9. On pose $D = \{(x,y)\,,\ 0 < x < \frac{\pi}{4}\,,\ 0 < y < x\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☒ $\displaystyle\int_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$
2. ☒ $\displaystyle\int_D \sin(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{8}(4-\pi).$
3. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{8}(4+\pi).$
4. ☒ $\displaystyle\int_D \sin(2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$
5. ☐ $\displaystyle\int_D \cos(2x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}.$
6. ☒ $\displaystyle\int_D \sin^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{64}-\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}.$
7. ☐ $\displaystyle\int_D \cos^2(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}.$
8. ☒ $\displaystyle\int_D 8xy\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\cos(\pi^2/16)-\cos(\pi^2/8)-1.$
9. ☐ $\displaystyle\int_D 8xy\sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sin(\pi^2/16)-\sin(\pi^2/8)-1.$

Vrai-Faux 10. On pose $D = \{(x,y)\,,\ x^2+y^2 < 1\}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. ☐ $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi.$
2. ☒ $\displaystyle\int_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$
3. ☐ $\displaystyle\int_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$
4. ☒ $\displaystyle\int_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$
5. ☐ $\displaystyle\int_D \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{3}.$

6. ☒ $\displaystyle\int_D (x+y)^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2\pi}{5}$.
7. ☒ $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi(\cos(1)+\sin(1)-1)$.
8. ☐ $\displaystyle\int_D (x+y)^2\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi(\cos(1)+\sin(1))$.

2.2 Exercices

Exercice 1. Pour chacune des applications f suivantes.

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad x^2+y^2-xy\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad x^2-y^2-xy\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad x^3+y^3-x^2y^2\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \quad 4x^2+4y^2-(x+y)^4\ ; \end{cases}$$

1. Calculer le gradient de f.
2. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$, aux points $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$.
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Calculer la matrice hessienne de f.
5. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^{-x}. Calculer directement, puis en utilisant les dérivées partielles de f, la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x,g(x))$.
6. Pour chacun des points critiques de f, donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
7. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f.

Exercice 2. Pour chacune des applications f suivantes.

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto \quad x^2+2y^2+3z^2\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto \quad x^2+2y^2-3z^2\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^4+y^2+z^2-4x-2y-2z+4\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^4-2x^2y+2y^2+2z^2+2yz-2y-2z+2\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)^4\ ; \end{cases}$$

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)^3\ . \end{cases}$$

1. Calculer le gradient de f.
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne de f.
4. Calculer le laplacien de f.
5. Vérifier que $\mathrm{rot}(\nabla f)=0$.
6. Pour chacun des points critiques de f, donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
7. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f.

Exercice 3. Donner une valeur approchée des quantités suivantes, pour $x=3.04$ et $y=2.05$.

1. xy
2. x^2y^3
3. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
4. $\dfrac{x+y}{x-y}$
5. $\dfrac{\ln(x+y)}{xy}$

Exercice 4. Soit f l'application de $D=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $y^3\ln(x)$. Vérifier que partout sur D :

1.
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x + y^2, xy^2z)$. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à (u, v) associe $(u^2 + v, uv, \mathrm{e}^v)$.

1. Écrire la matrice jacobienne de f au point (x, y, z).
2. Écrire la matrice jacobienne de g au point (u, v).
3. Écrire la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point (u, v).
4. Écrire la matrice jacobienne de $g \circ f$ au point (x, y, z).

Exercice 6. On note $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2 + y^2 = 1\,\}\ .$$

On considère les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies comme suit.

$$f(x, y) = x + y\ ; \quad f(x, y) = x + y - xy\ ;$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy\ ; \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2y^2\ .$$

Pour chacune de ces fonctions :

1. Utiliser le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour déterminer quels points de $\mathcal{C}$ sont des extrema possibles pour la restriction de f à $\mathcal{C}$.
2. Pour chacun de ces points, dire s'il s'agit ou non d'un extremum pour la restriction de f à $\mathcal{C}$.

Exercice 7. Étant donné le domaine D du plan, et la fonction f, calculer l'intégrale double de f sur D, dans les cas suivants.

1. $D = \{\,(x, y)\,,\ 0 < x < y\,,\ 0 < y < 1\,\}\,,\quad f(x, y) = x^2 + y\,.$
2. $D = \{\,(x, y)\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < y < 1\,\}\,,\quad f(x, y) = x\sin(xy)\,.$
3. $D = \{\,(x, y)\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < y < x\,\}\,,\quad f(x, y) = x^2\sin(xy)\,.$
4. $D = \{\,(x, y)\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < y < 1 - x\,\}\,,\quad f(x, y) = x(1 - 2x)\sin(xy)\,.$
5. $D = \{\,(x, y)\,,\ 1 < x < 3\,,\ 1 < y < 4 - x\,\}\,,\quad f(x, y) = (x + y)^{-4}\,.$
6. $D = \{\,(x, y)\,,\ -1 < x < 1\,,\ 0 < y < 2\,\}\,,\quad f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}\,.$

Exercice 8. Étant donné le domaine D de l'espace, et la fonction f, calculer l'intégrale triple de f sur D, dans les cas suivants.

1. $D = \{\,(x, y, z)\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < y < z < 1\,\}\,,\quad f(x, y, z) = xyz\,.$
2. $D = \{\,(x, y, z)\,,\ 0 < x < y < z < 1\,\}\,,\quad f(x, y, z) = x + y + z\,.$
3. $D = \{\,(x, y, z)\,,\ 0 < x < 1\,,\ 0 < y < x\,,\ 0 < z < xy\,\}\,,\quad f(x, y, z) = x^3y^2z\,.$
4. $D = \{\,(x, y, z)\,,\ 0 < x\,,\ 0 < y\,,\ 0 < z\,,\ x + y + z < 1\,\}\,,\quad f(x, y, z) = z\,.$

Exercice 9. On note D le domaine du plan défini comme suit.

$$D = \{\,(x, y)\,,\ -1 - x < y < 1 - x\,,\ x - 1 < y < x + 1\,\}\,.$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x, y) = (u, v)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} u &=& x + y \\ \\ v &=& x - y\,. \end{array}\right.$$

1. Calculer l'expression de Φ^{-1}.
2. Déterminer le domaine Δ, image de D par Φ.
3. Représenter graphiquement les domaines D et Δ.
4. Vérifier que Φ est une bijection de D sur Δ.
5. Calculer la matrice jacobienne de Φ au point (x, y) et la matrice jacobienne de Φ^{-1} au point (u, v). Vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.
6. Calculer le déterminant jacobien de Φ au point (x, y) et le déterminant jacobien de Φ^{-1} au point (u, v).
7. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer les intégrales suivantes.

$$\int_D x^2 - y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D (x^2 - y^2)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{|x^2 - y^2|}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D \cos(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 10. On note D le domaine du plan défini comme suit.

$$D = \{\, (x,y)\,,\ x>0\,,\ y>0\,, x^2+y^2<1\,\}\ .$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x,y) = (u,v)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} u &=& \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \\ v &=& x^2+y^2\ . \end{array}\right.$$

1. Calculer l'expression de Φ^{-1}.
2. Déterminer le domaine Δ, image de D par Φ.
3. Représenter graphiquement les domaines D et Δ.
4. Vérifier que Φ est une bijection de D sur Δ.
5. Calculer la matrice jacobienne de Φ au point (x,y) et la matrice jacobienne de Φ^{-1} au point (u,v). Vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.
6. Calculer le déterminant jacobien de Φ au point (x,y) et le déterminant jacobien de Φ^{-1} au point (u,v).
7. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer les intégrales suivantes.

$$\int_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$

$$\int_D x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Exercice 11. On note D le domaine du plan défini comme suit.

$$D = \left\{\, (x,y)\,,\ 0<x<\frac{1}{1+2y}\,,\ 0<y<\frac{1}{1+2x}\,\right\}\ .$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x,y) = (u,v)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} u &=& \dfrac{x(1+y)}{1-xy} \\ v &=& \dfrac{y(1+x)}{1-xy}\ . \end{array}\right.$$

1. Calculer l'expression de Φ^{-1}.
2. Déterminer le domaine Δ, image de D par Φ.
3. Représenter graphiquement les domaines D et Δ.
4. Vérifier que Φ est une bijection de D sur Δ.

5. Calculer la matrice jacobienne de Φ au point (x, y) et la matrice jacobienne de Φ^{-1} au point (u, v). Vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.
6. Calculer le déterminant jacobien de Φ au point (x, y) et le déterminant jacobien de Φ^{-1} au point (u, v).
7. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer les intégrales suivantes.

$$\int_D \frac{(1+x)(1+y)}{(1-xy)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D \frac{1-xy}{(1+x)(1+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;$$
$$\int_D \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ;\quad \int_D \frac{1}{(1-xy)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

Exercice 12. Soit D le disque ouvert de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 :

$$D = \{\,(x, y)\,,\ x^2 + y^2 < 1\,\}\ .$$

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. $\displaystyle\int_D (x^2+y^2)^{-1/4}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
3. $\displaystyle\int_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
4. $\displaystyle\int_D x^2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice 13. Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1. On considère les domaines D du plan définis par :

$$\begin{array}{rcl} D &=& \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2 + y^2 < 1\,,\ x > a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ x^2 < y < a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 1/x < y < -x + 1/a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 < y < x^2 + a\,\}\ . \end{array}$$

Pour chacun de ces domaines, calculer en fonction de a :

1. l'aire de D,
2. les coordonnées du centre de gravité de D.

Exercice 14. Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1. On considère les domaines D de l'espace définis par :

$$\begin{array}{rcl} D &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\,,\ z > a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ \sqrt{x^2 + y^2} < 1 - z\,,\ 0 < z < a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2 + y^2 < z < a\,\}\ ;\\ D &=& \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\,,\ x^2 + y^2 < a\,,\ z > 0\,\}\ . \end{array}$$

Pour chacun de ces domaines, calculer en fonction de a :

1. l'aire de D,
2. les coordonnées du centre de gravité de D.

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $1/(xy)$.

$\boxed{\text{A}}$ L'application f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
$\boxed{\text{B}}$ L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
$\boxed{\text{C}}$ L'application f est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
$\boxed{\text{D}}$ L'application f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{E}}$ L'application f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

Question 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe $x + y + z$.

$\boxed{\text{A}}$ La divergence de f est nulle.
$\boxed{\text{B}}$ Le gradient de f est constant.
$\boxed{\text{C}}$ Le laplacien de f est nul.
$\boxed{\text{D}}$ Le rotationnel de f est constant.
$\boxed{\text{E}}$ L'application f admet un extremum local.

Question 3. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x + y + z, xyz)$.

$\boxed{\text{A}}$ L'application Φ est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^3$.
$\boxed{\text{B}}$ La divergence de Φ est nulle.
$\boxed{\text{C}}$ La matrice jacobienne de Φ a deux lignes et trois colonnes.
$\boxed{\text{D}}$ La première colonne de la matrice jacobienne de Φ est constante.
$\boxed{\text{E}}$ L'application Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Question 4. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $x^2 + y^2$.

$\boxed{\text{A}}$ Le gradient de f s'annule au point $(1, -1)$.
$\boxed{\text{B}}$ La matrice hessienne de f au point $(1, -1)$ a deux valeurs propres positives.
$\boxed{\text{C}}$ L'application f admet un minimum local au point $(1, -1)$.
$\boxed{\text{D}}$ L'application f admet un minimum global au point $(0, 0)$.
$\boxed{\text{E}}$ Le point $(0, 0)$ est un point selle pour l'application f.

Question 5. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe xy, ainsi que l'ensemble $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ 2x + y = 4 \,\}$.

$\boxed{\text{A}}$ L'application f admet un maximum global en $(1,2)$.
$\boxed{\text{B}}$ Le gradient de f au point $(1,2)$ est $(2,1)$.
$\boxed{\text{C}}$ La restriction de f à A admet un minimum local en $(1,2)$.
$\boxed{\text{D}}$ Le point $(1,2)$ est un maximum global pour la restriction de f à A.
$\boxed{\text{E}}$ La restriction de f à A admet un maximum local au point $(2,4)$.

Question 6. On considère l'application Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(x+y\,,\,xy)$.
$\boxed{\text{A}}$ La matrice jacobienne de Φ au point $(1,1)$ est une matrice carrée
$\boxed{\text{B}}$ La matrice jacobienne de Φ au point $(1,1)$ est inversible.
$\boxed{\text{C}}$ La matrice jacobienne de Φ au point $(0,0)$ a une ligne nulle
$\boxed{\text{D}}$ L'application Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ sur son image.
$\boxed{\text{E}}$ L'application réciproque de Φ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Question 7. On considère l'application Φ qui à (x,y) associe $(x+y, x-y)$.
$\boxed{\text{A}}$ L'application Φ est une bijection du disque unité de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
$\boxed{\text{B}}$ L'image par Φ d'un disque centré en 0 est un disque centré en 0.
$\boxed{\text{C}}$ L'image par Φ du carré $[0,1]^2$ a pour aire $1/2$.
$\boxed{\text{D}}$ L'application Φ est un difféomorphisme de la droite d'équation $x=y$ sur l'axe des abscisses.
$\boxed{\text{E}}$ L'image par Φ d'un domaine D du plan a pour aire le double de l'aire de D.

Question 8. On considère le domaine D du plan défini par $D = \{\,(x,y)\,,\ x>0\,,\ y>0\,,\ x+y<1\,\}$, et la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe xy.
$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right)$.
$\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y\right)$.
$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\left(\int_0^{1-x} y\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$.
$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\left(\int_{1-y}^1 x\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$.
$\boxed{\text{E}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y\,\left(\int_0^{1-y} x\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$.

Question 9. La pyramide de base $[-1,1]^2$ et de sommet $(0,0,1)$ a pour volume :
$\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}z$.
$\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_0^1 4(1-z)^2\,\mathrm{d}z$.
$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z} \mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}z$.
$\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\frac{4}{3}$.
$\boxed{\text{E}}$ $\displaystyle\frac{8}{3}$.

Question 10. On considère le domaine D du plan défini par $D = \{\, (x, y)\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2 + y^2 < 1 \,\}$, et la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe xy.

- $\boxed{\text{A}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta\ .$
- $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{1} \left(\int_0^{\pi/2} r^3\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta\ .$
- $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta\ .$
- $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_{-1}^{1}\ .$
- $\boxed{\text{E}}$ $\displaystyle\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{r^4}{4}\right]_{0}^{1}\ .$

Réponses : 1–CE 2–BC 3–AC 4–BD 5–BD 6–AC 7–BE 8–CE 9–BD 10–AE

2.4 Devoir

Essayez de bien rédiger vos réponses, sans vous reporter ni au cours, ni au corrigé. Si vous souhaitez vous évaluer, donnez-vous deux heures ; puis comparez vos réponses avec le corrigé et comptez un point pour chaque question à laquelle vous aurez correctement répondu.

Questions de cours : On considère une application f définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, continûment différentiable. On note (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$, (u, v) un vecteur non nul à deux dimensions, et A la droite passant par (a, b) de vecteur directeur (u, v), donc d'équation $(x - a)u = (y - b)v$. On note g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $f(a + tu, b + tv)$.

1. Énoncer la définition de la dérivée directionnelle de f au point (a, b) dans la direction (u, v), et reliez cette définition à la dérivée de g et au gradient de f.
2. En appliquant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, montrer qu'une condition nécessaire pour que la restriction de f à la droite A admette un extremum local en (a, b), est que la dérivée directionnelle de f au point (a, b) dans la direction (u, v) s'annule.
3. Exprimer la dérivée seconde de g en 0, en fonction du vecteur (u, v) et de la matrice hessienne de f au point (a, b).
4. On fait désormais l'hypothèse que pour tout (u, v), la restriction de f à A admet un minimum. Montrer que le gradient de f est nul.
5. Montrer que le déterminant et la trace de la matrice hessienne sont positifs ou nuls.

Exercice 1 : On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $x^3 + y^3 + 3xy$.

1. Calculer le gradient de f et sa matrice hessienne.
2. Utiliser le gradient de f pour calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, \mathrm{e}^x)$.

3. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(1, 1, 5)$.
4. Déterminer les points critiques de f.
5. Utiliser la matrice hessienne de f pour déterminer la nature de ces points critiques.
6. En considérant l'application $x \mapsto f(x, x)$, montrer que f n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe :

$$\Phi(x, y) = (u, v) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x + y \\ \\ v & = & x - y \ . \end{array} \right.$$

1. Calculer l'expression de l'application réciproque Φ^{-1}, et vérifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la matrice jacobienne de Φ au point (x, y) et la matrice jacobienne de Φ^{-1} au point (u, v). Vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre.
3. Calculer le déterminant jacobien de Φ au point (x, y) et le déterminant jacobien de Φ^{-1} au point (u, v).
4. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $\mathrm{e}^{x^2 - y^2}$. Soit g l'application composée qui à (u, v) associe $g(u, v) = f(\Phi^{-1}(u, v))$. Calculer les dérivées partielles de g par rapport à u et v et retrouver le résultat à partir des dérivées partielles de f et de la matrice jacobienne de Φ^{-1}.
5. On note D le domaine du plan défini comme suit.

   $$D = \{ \, (x, y) \, , \ x > 0 \, , \ x - 1 < y < 1 - x \, \} \ .$$

   Déterminer le domaine Δ, image de D par Φ.
6. Utiliser le changement de variable Φ pour calculer l'intégrale de l'application f sur le domaine D.

Exercice 3 : On considère le domaine D du plan, défini par $D = \{ \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, , \ 0 < x \, , \ 0 < y < x \, , \ x^2 + y^2 < 1 \, \}$, et l'application f définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à (x, y) associe xy. Calculer $\int_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$:

1. en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y,
2. en intégrant d'abord par rapport à y puis par rapport à x,
3. en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

2.5 Corrigé du devoir

Questions de cours :

1. On appelle *dérivée directionnelle* de f en (a,b) dans la direction de (u,v) la quantité :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,v\;.$$
C'est le produit scalaire de ∇f par le vecteur (u,v). C'est aussi la dérivée en 0 de l'application $t \mapsto g(t)$.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(a+tu,b+tv)(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\frac{d(a+tu)}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\frac{d(b+tv)}{dt}(0)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,v\;.\end{aligned}$$

2. La droite A a pour équation $h(x,y)=0$, où :
$$h(x,y) = (x-a)v - (y-b)u\;.$$
D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, si la restriction de f à A admet un extremum au point (a,b), alors les gradients de f et h en ce point doivent être proportionnels :
$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,v\right) \quad\text{et}\quad \nabla h(a,b) = (v,-u)\;.$$
Si ces deux vecteurs sont proportionnels, alors leur déterminant est nul, soit :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,v = 0\;.$$

3.
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(a+tu,b+tv) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\,\frac{\partial f}{\partial x}(a+tu,b+tv) + v\,\frac{\partial f}{\partial y}(a+tu,b+tv)\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+tu,b+tv)\,u^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+tu,b+tv)\,vu\\ &\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+tu,b+tv)\,uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+tu,b+tv)\,v^2\;.\end{aligned}$$
En utilisant le théorème de Schwarz et en prenant la valeur en $t=0$, on obtient la dérivée seconde de g en 0.
$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\,uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,v^2\;.$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme matricielle suivante, qui fait intervenir la matrice hessienne de f.

$$(u,v)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

4. Si la restriction de f à A admet un minimum, alors la dérivée directionnelle de f en (a,b) dans la direction (u,v) est nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,u + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,v = 0$$

   Si ceci a lieu en particulier pour $(u,v)=(1,0)$ et $(u,v)=(0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

   Donc le gradient de f est nul.

5. Si la restriction de f à A admet un minimum, alors la dérivée seconde de g en 0 est positive ou nulle, soit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\,uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,v^2 \geqslant 0 .$$

   Si ceci a lieu pour tous (u,v), alors les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont positives ou nulles. Il en est de même de leur somme (la trace) et de leur produit (le déterminant).

Exercice 1 :

1. Les dérivées partielles de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x .$$

   Le gradient en (x,y) est le vecteur $(3x^2+3y, 3y^2+3x)$.

   Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 3 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y .$$

   La matrice hessienne en (x,y) est la matrice :

$$\begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{pmatrix} .$$

2. Le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées $(1, 1, f(1, 1))$ a pour équation :

$$z = f(1,1) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5 + 6(x-1) + 6(y-1) \; .$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(x, \mathrm{e}^x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} \\ &= (3x^2 + 3\mathrm{e}^x) + (3\mathrm{e}^{2x} + 3x)\mathrm{e}^x \; .\end{aligned}$$

4. Le gradient s'annule pour toute solution du système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{array}\right. .$$

En reportant $y = -x^2$ dans la seconde équation, on obtient $x^4 + x = 0$, qui a pour seules solutions réelles $x = 0$ et $x = -1$. On trouve donc deux points critiques $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.

5. Les matrices hessiennes aux points $(0, 0)$ et $(-1, -1)$ valent respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} .$$

Les valeurs propres de la première matrice sont $+3$ et -3. Donc le point $(0, 0)$ est un point selle pour la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Les valeurs propres de la seconde matrice sont -9 et -3. Donc le point $(-1, -1)$ est un maximum pour la surface d'équation $z = f(x, y)$.

6. L'application $x \mapsto f(x, x) = 2x^3 + 3x^2$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, donc aucun point de $\mathbb{R}^2$ ne peut être un minimum global. Elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc aucun point de $\mathbb{R}^2$ ne peut être un maximum global.

Exercice 2 :

1.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& x + y \\ v &=& x - y \; . \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{u+v}{2} \\ y &=& \dfrac{u-v}{2} \; . \end{array}\right.$$

À tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ correspond un unique couple (x, y) tel que $\Phi(x, y) = (u, v)$. Donc Φ est une bijection et l'application réciproque Φ^{-1} est définie pour tout (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$\Phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) .$$

2.
$$MJ(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MJ(\Phi^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Le produit des deux matrices est égal à la matrice identité.

3. Les déterminants jacobiens sont constants et valent :
$$J(\Phi) = 2 \quad \text{et} \quad J(\Phi^{-1}) = \frac{1}{2}.$$

4.
$$g(u,v) = f(\Phi^{-1}(u,v)) = \mathrm{e}^{uv}.$$
On a donc :
$$\frac{\partial g}{\partial u} = v\mathrm{e}^{uv} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial u} = u\mathrm{e}^{uv}.$$
Mais aussi :
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{1}{2}2x\mathrm{e}^{x^2-y^2} - \frac{1}{2}2y\mathrm{e}^{x^2-y^2} \\ &= (x+y)\mathrm{e}^{x^2-y^2} = u\mathrm{e}^{uv}, \end{aligned}$$
et,
$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{1}{2}2x\mathrm{e}^{x^2-y^2} - \frac{1}{2}2y\mathrm{e}^{x^2-y^2} \\ &= (x-y)\mathrm{e}^{x^2-y^2} = v\mathrm{e}^{uv}, \end{aligned}$$

5. Les trois inégalités qui définissent D se traduisent ainsi.
   (a) $x > 0 \iff u + v > 0$
   (b) $x - 1 < y \iff v < 1$
   (c) $y < 1 - x \iff u < 1$

   Le domaine Δ est le triangle limité par les droites $v = -u$, $u = 1$, $v = 1$.
$$\Delta = \{\,(u,v)\,,\ v > -u\,,\ u < 1\,,\ v < 1\,\}.$$

6.
$$\begin{aligned} \int_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Delta \mathrm{e}^{uv}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-u}^{1}\mathrm{e}^{uv}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{e}^{uv}}{2u}\right]_{-u}^{1}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{u}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{2u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Posons :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^u}{2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{2u}\,\mathrm{d}u\ .$$

Dans I_2, la fonction à intégrer est impaire, donc l'intégrale est nulle. L'intégrale cherchée vaut donc :

$$\int_D \mathrm{e}^{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 = \frac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2} = \sinh(1)\ .$$

Exercice 3 : Le domaine D est la portion du disque unité compris entre l'axe des x et la première bissectrice.

1. En intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y,

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{(1-y^2)y}{2} - \frac{y^3}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}/2} \\
&= \frac{1}{16}\ .
\end{aligned}$$

2. En intégrant d'abord par rapport à y puis par rapport à x, on doit décomposer le domaine en deux parties, une limitée par la droite $y = x$, l'autre par le cercle unité.

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\int_0^x xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{x(1-x^2)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^{\sqrt{2}/2} + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 \\
&= \frac{1}{16}\ .
\end{aligned}$$

3. En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} r^3 \cos\theta \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \times \left[\frac{-\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{16} \; .
\end{aligned}$$

3 Compléments

3.1 Le palimpseste d'Archimède

D'après Pline l'Ancien, le roi de Pergame aurait introduit l'emploi du parchemin au IIe siècle av. J.C. à la suite d'une interdiction des exportations de papyrus décrétée par les Égyptiens, qui craignaient que la bibliothèque de Pergame ne concurrence celle d'Alexandrie. Fabriqué à partir de peaux animales, raclées, poncées, traitées à la chaux puis à la craie, le parchemin était long à produire, plutôt rare en regard des besoins en écriture, et donc cher. On avait pris l'habitude de recycler les parchemins dont les écrits étaient considérés comme obsolètes et de peu de valeur : grattés à la pierre ponce, reblanchis à la chaux, les parchemins pouvaient resservir : un parchemin ainsi recyclé s'appelle un palimpseste. C'est ce que fit un prêtre grec vers le XIIIe siècle quand il se mit en devoir de copier un livre de prières. On ignore s'il eut la curiosité de lire avant ce qu'il effaçait : rien moins qu'une copie des œuvres mathématiques d'Archimède ! Heureusement, le prêtre n'était pas très soigneux. Il se contenta d'un grattage superficiel, suffisant pour écrire perpendiculairement au texte originel, qui resta en grande partie visible. Les ultraviolets et les rayons X firent le reste. Découvert en 1906, le Palimpseste d'Archimède est la plus ancienne copie connue de ses œuvres. Elle contient deux mémoires que l'on croyait perdus et dont il n'existe qu'un seul exemplaire. Le plus remarquable est un traité intitulé « La méthode ». Il permet de comprendre comment procédait Archimède pour déterminer des mesures d'aires ou de volume. On y trouve le volume de la sphère, le calcul du centre de gravité d'une demi-sphère et celui d'un tronc de paraboloïde.

Bien avant Archimède, les Grecs calculaient des aires ou des volumes par la *méthode d'exhaustion*. Elle consiste à établir l'égalité de deux aires ou deux volumes en montrant par l'absurde qu'aucun n'est supérieur à l'autre. Les raisonnements reposent généralement sur des encadrements de la figure par des figures quarrables de plus en plus précises. La méthode nécessite cependant de connaître a priori le résultat final, d'autant qu'il n'est pas exprimé par un nombre, mais comme un rapport : on ne calcule pas le volume de la sphère ; on prouve que ce volume est le quadruple du volume d'un cône de base égale à un grand cercle de la sphère et de hauteur égale au rayon. Comment Archimède procédait-il pour deviner quels étaient les rapports à établir ? Il explique dans « la méthode » qu'il utilise des méthodes mécaniques par pesées, en découpant en tranches les surfaces ou les volumes considérés.

Sa méthode, Archimède l'a exercée principalement à partir des cylindres, des cônes et des sphères. Ses résultats figurent dans le traité « de la sphère et du cylindre ». Il commence ainsi.

> Archimède, à Dosithée, salut
>
> Je t'avais déjà envoyé, avec leurs démonstrations, les théorèmes que mes réflexions m'avaient fait découvrir ; le suivant était au nombre de ces théorèmes :

> Tout segment compris entre une droite et la section du cône rectangle, est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.
>
> J'ai terminé aujourd'hui les démonstrations de plusieurs théorèmes qui se sont présentés ; et parmi ces théorèmes, on distingue ceux qui suivent.
>
> La surface de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles.
>
> La surface d'un segment sphérique est égale à un cercle ayant un rayon égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment.
>
> Un cylindre qui a une base égale à un grand cercle de la sphère, et une hauteur égale au diamètre de cette même sphère, est égal à trois fois la moitié de la sphère.
>
> La surface du cylindre est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de la sphère.
>
> Quoique ces propriétés existassent essentiellement dans les figures dont nous venons de parler, elles n'avaient point été remarquées par ceux qui ont cultivé la géométrie avant nous ; cependant il sera facile de connaître la vérité de nos théorèmes, à ceux qui liront attentivement les démonstrations que nous en avons données. Il en a été de même de plusieurs choses qu'Eudoxe a considérées dans les solides, et qui ont été admises, comme les théorèmes suivants :
>
> Une pyramide est le tiers d'un prisme qui a la même base et la même hauteur que la pyramide.
>
> Un cône est le tiers d'un cylindre qui a la même base et la même hauteur que le cône.
>
> Ces propriétés existaient essentiellement dans ces figures, et quoiqu'avant Eudoxe, il eût paru plusieurs géomètres qui n'étaient point à mépriser, cependant ces propriétés leur étaient inconnues, et ne furent découvertes par aucun d'eux.
>
> Au reste, il sera permis, à ceux qui le pourront, d'examiner ce que je viens de dire. Il eût été à désirer que mes découvertes eussent été publiées du vivant de Conon ; car je pense qu'il était très capable d'en prendre connaissance et d'en porter un juste jugement. Quoi qu'il en soit, ayant pensé qu'il était bon de les faire connaître à ceux qui cultivent les mathématiques, je te les envoie appuyées de leurs démonstrations : les personnes versées dans cette science pourront les examiner à loisir.
>
> Porte-toi bien.

On dit qu'Archimède était si fier d'avoir trouvé le rapport entre le volume de la sphère et celui du cylindre qui la contient (2/3), qu'il demanda que la figure soit gravée sur sa tombe. Quelque 140 ans plus tard, le jeune Cicéron, récemment nommé en Sicile, retrouve la tombe grâce à cette indication.

> Quand j'étais questeur, j'ai découvert son tombeau que les Syracusains ignoraient ; ils affirmaient même qu'il n'existait point. Je l'ai découvert entouré et recouvert entièrement de ronces et de buissons. Je connaissais quelques petits vers dont j'avais appris qu'ils étaient inscrits sur sa tombe. Ceux-ci faisaient connaître qu'en haut du monument il y avait une sphère avec un cylindre. Or, en parcourant des yeux toutes les tombes, qui sont très nombreuses à la sortie d'Agrigente, j'aperçus une petite colonne qui émergeait à peine des buissons, sur laquelle se trouvaient les figures d'une sphère et d'un cylindre. Aussitôt je dis aux notables syracusains qui se trouvaient à mes côtés qu'à mon avis c'était là précisément la tombe que je cherchais. Plusieurs hommes, venus avec des faux, débroussaillèrent l'endroit. Une fois le lieu dégagé, nous nous approchâmes du soubassement qui nous faisait face. L'épigramme apparut avec la fin des vers rongée presqu'à moitié. C'est ainsi que la plus illustre cité de la Grande Grèce, jadis même la plus savante, aurait ignoré le tombeau de son concitoyen le plus intelligent si un homme d'Arpinum ne le leur avait pas révélé.

Archimède aurait sans doute aimé lire la phrase suivante de Paul Cézanne, souvent répétée pour justifier les théories cubistes :

> Traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône, le tout mis en perspective, soit que chaque côté d'un objet, d'un plan, se dirige vers un point central.

Elle date de 1904, soit deux ans avant que le Palimpeste d'Archimède ait été retrouvé, mais tout de même plus de 2000 ans après qu'il ait été écrit.

3.2 Le principe de Cavalieri

Le volume d'un prisme, qu'il soit droit ou oblique, ne dépend que de sa base et et de sa hauteur : imaginez le prisme comme une pile de tranches fines identiques qui peuvent glisser les unes par rapport aux autres : une pile de pièces de monnaie par exemple. Vous pouvez modifier la forme de la pile, mais tant qu'elle contient les mêmes pièces, ni sa hauteur ni son volume ne changent. La même chose vaut par exemple pour un cône. Bonaventura Cavalieri (1598–1647) est habituellement crédité de cette observation, qu'il exprime en dimension deux : si deux figures planes, comprises entre deux droites parallèles sont telles que les intersections avec les deux figures des parallèles aux droites sont toujours de mêmes longueurs, alors les deux surfaces sont égales. Plus de dix siècles avant Cavalieri, les chinois avaient déjà fait la remarque pour la dimension trois. Voici comment Zu Gengzhi [1] (V^e^ siècle) exprime cela : « Si des surfaces sont empilées pour former des volumes, et si les aires correspondantes sont égales, alors les volumes ne peuvent pas être différents »

1. D.B. Wagner : Liu Hui and Zu Genzhi on the volume of a sphere, *Chinese Science, 3, p. 59–79 (1978)*

En 263, Liu Hui[2] édite et commente les « Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul », le texte fondateur des mathématiques chinoises. Même s'il ne l'exprime pas aussi clairement que son successeur Zu Genzhi, il est parfaitement conscient du principe de Cavalieri, et l'utilise pour déterminer certains volumes dans sa quête de la détermination du volume de la sphère. Mais il échoue, et reconnaît honnêtement :

> Je souhaite exposer mes humbles réflexions, mais je crains de manquer le principe correct. J'ose laisser les points douteux en l'état, en attendant qu'un autre les résolve.

Deux siècles plus tard, Zu Genzhi réussit et ne boude pas son triomphe.

> Les proportions sont extrêmement précises et mon cœur brille. Zhang Heng avait copié les anciens, souriant à la postérité. Liu Hui avait suivi les anciens, mais n'avait pas eu le temps de les corriger. Mais qu'y a-t-il de difficile à cela ? Il suffit de réfléchir.

Il y avait beaucoup plus chez Liu Hui et Zu Genzhi qu'un principe de comparaison de volumes. Comme Archimède et sa méthode d'exhaustion, comme Cavalieri et sa géométrie des indivisibles, comme Thabit Ibn Qurra, Roberval, Pascal et bien d'autres, il cherchaient tous par leurs découpages de surfaces ou de volumes, à maîtriser cette notion d'intégrale qui a mis si longtemps à émerger.

3.3 La roulette de Pascal

Voici comment Pascal définit la roulette.

> La ROULETTE est une ligne si commune, qu'après la droite et la circonférence, il n'y en a point de si fréquente ; et elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait pas été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que le clou commence à s'élever de terre, jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane.

Il suffit de suivre la description pour en écrire la définition paramétrique : Si R désigne le rayon de la roue, θ l'angle du rayon menant au point avec la verticale, le point du cercle en mouvement a pour coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & R(\theta - \sin(\theta)) \\ y & = & R(1 - \cos(\theta)) \; . \end{array} \right.$$

2. K. Chemla : Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (IIIe siècle) aux Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques (Ier siècle), *Extrême-Orient Extrême-Occident, 14, p. 91-129 (1992)*

De nos jours, on appelle plutôt cette courbe une *cycloïde*. Elle avait été proposée par Mersenne à Roberval qui avait déterminé l'aire sous une des arches : trois fois l'aire du cercle qui l'engendre. Mais Pascal se pose bien d'autres questions que celle de l'aire sous la courbe : surface, volume et centre de gravité des solides engendrés par la rotation de la courbe autour des axes, surface et volume de parties tronquées, etc. Selon l'usage de l'époque, il propose un défi aux savants européens.

> La connaissance de la roulette ayant été jusque là portée par M. de Roberval, la chose était demeurée en cet état depuis 14 ans, lorsqu'une occasion imprévue m'ayant fait penser à la géométrie que j'avais quittée il y a longtemps, je me formai des méthodes pour la dimension et les centres de gravité des solides, des surfaces planes et courbes, et des lignes courbes, auxquelles il me sembla que peu de choses pourraient échapper : et pour en faire l'essai sur un sujet des plus difficiles, je me proposai ce qui restait à connaître de la nature de cette ligne ; savoir les centres de gravité de ses solides et les solides de ses parties ; la dimension et les centres de gravité des surfaces de tous ces solides ; la dimension et les centres de gravité de la courbe même de la Roulette et de ses parties.
>
> Je commençai par les centres de gravité des solides et des demi-solides, que je trouvai par ma méthode, et qui me parurent si difficiles par toute autre voie, que, pour savoir s'ils l'étaient en effet autant que je me l'étais imaginé, je me résolus d'en proposer la recherche à tous les géomètres, et même avec des prix. Ce fut alors que je fis mes écrits latins, lesquels ont été envoyés partout. Et pendant qu'on cherchait ces problèmes touchant les solides, j'ai résolu tous les autres, comme on verra à la fin de ce discours, quand j'aurai parlé des réponses qu'on a reçues des géomètres sur le sujet de mes écrits.
>
> Elles sont de deux sortes. Les uns prétendent d'avoir résolu les problèmes posés, et ainsi avoir droit aux prix ; et les écrits de ceux-là seront vus dans l'examen régulier qui doit s'en faire. Les autres n'ont point voulu prétendre à ces solutions, et se sont contentés de donner leurs premières pensées sur cette ligne.
>
> J'ai trouvé de belles choses dans leurs lettres, et des manières fort subtiles de mesurer le plan de la Roulette, et entre autres dans celles de M. Sluze, chanoine de la cathédrale de Liège, de M. Richi, Romain, de M. Huygens, Hollandais, qui a le premier produit que la portion de la Roulette retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du côté du sommet, est égale à un espace rectiligne donné. Et j'ai trouvé la même chose dans une lettre de M. Wren, Anglais, écrite presque en même temps.

Il n'y a pas que de « belles choses » dans les lettres reçues : Pascal s'énerve.

> Et c'est pourquoi je ne puis assez admirer la vaine imagination de quelques autres, qui ont cru qu'il leur suffirait d'envoyer un calcul faux et fabriqué au hasard pour prendre date du jour qu'ils l'auraient donné, sans avoir produit

> autre marque qui fasse connaître qu'ils ont résolu les problèmes : ce qui est une imagination si ridicule que j'ai honte de m'amuser à la réfuter.

Quelles sont donc ces « méthodes pour la dimension et les centres de gravité des solides, des surfaces planes et courbes, et des lignes courbes » ? Une évolution de la « méthode des indivisibles » de ses prédécesseurs Roberval et Cavalieri, le rapport entre les « touchantes » (tangentes) et les « quadratures » (intégrales), bref, presque une théorie du calcul différentiel. Leibniz a soigneusement étudié le « Traité du triangle arithmétique », dans lequel Pascal montre comment calculer les aires sous les courbes de fonctions puissance, et ce « Traité de la roulette ». Il reconnaît d'ailleurs volontiers ce que sa théorie du calcul intégral doit à Pascal et s'en étonne même : « il avait tout en main mais il est resté aveugle ». Peut-être pas, mais en 1658 les mathématiques ne sont plus le centre d'intérêt principal de Pascal. Dans les 4 ans qui lui restent à vivre, il profite des répits de plus en plus rares que lui laissent sa maladie pour commencer un grand ouvrage sur la « vérité de la religion chrétienne », et mettre en ordre ses « Pensées ».

Au fait, dans sa présentation, Pascal parle d'« une occasion imprévue » qui lui a fait repenser à la géométrie : quelle est cette occasion ? Sa sœur nous en dit plus.

> Ce renouvellement des maux de mon frère commença par le mal de dents qui lui ôta absolument le sommeil. Mais quel moyen a un esprit comme le sien d'être éveillé et de ne penser à rien ? C'est pourquoi dans les insomnies mêmes, qui sont d'ailleurs si fréquentes et si fatiguantes, il lui vint une nuit dans l'esprit quelques pensées sur la roulette.

Au fond, penser à la roulette quand on a mal aux dents : quoi de plus naturel ?

3.4 Le paraboloïde hyperbolique

La zoologie des surfaces est un sujet quelque peu désuet, même si on trouve sur le web de nombreux sites qui permettent de se faire une idée de sa beauté et de sa poésie : visitez au moins `http://www.mathcurve.com/`. Nous allons essayer de vous donner envie d'en savoir plus, en partant de l'équation la plus simple possible : $z = xy$.

Pour imaginer la surface d'équation $z = xy$, examinons d'abord quelques unes de ses sections planes. Nous notons S la surface et nous considérons son intersection avec le plan P dont nous donnons l'équation, en fonction d'un paramètre réel a.

- $S \cap P \;:\; \left\{\begin{array}{rcl} y &=& ax \\ z &=& ax^2 \end{array}\right.$: S contient une famille de paraboles.
- $S \cap P \;:\; \left\{\begin{array}{rcl} z &=& a \\ xy &=& a \end{array}\right.$: S contient aussi une famille d'hyperboles (d'où le nom de *paraboloïde hyperbolique*).
- $S \cap P \;:\; \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a \\ z &=& ay \end{array}\right.$: S contient une famille de droites.
- $S \cap P \;:\; \left\{\begin{array}{rcl} y &=& a \\ z &=& ax \end{array}\right.$: S contient une autre famille de droites.

- $S \cap P \ : \begin{cases} y = x + a \\ z = x^2 + ax \end{cases}$: S contient une autre famille de paraboles dans des plans parallèles ;
- $S \cap P \ : \begin{cases} y = -x + a \\ z = -x^2 + ax \end{cases}$: encore une autre famille de paraboles, orientées vers le bas, dans des plans orthogonaux aux précédents.

Une surface engendrée par une famille de droites est dite *réglée*. Celle-ci l'est doublement, puisqu'elle contient deux familles de droites. Pour vous en faire une idée, imaginez un cadre rectangulaire, formé de quatre tiges rigides articulées entre elles. Des élastiques sont tendus d'une tige à son opposée, dans les deux sens (comme un sommier de sangles). Imaginez maintenant que vous tordiez le cadre, de sorte que les tiges opposées ne soient plus parallèles. Les élastiques restent tendus, matérialisant une surface qui est doublement réglée. Une autre manière de visualiser le paraboloïde hyperbolique est d'imaginer une parabole glissant le long d'une autre parabole, en sens inverse : on obtient une sorte de selle de cheval (figure 14).

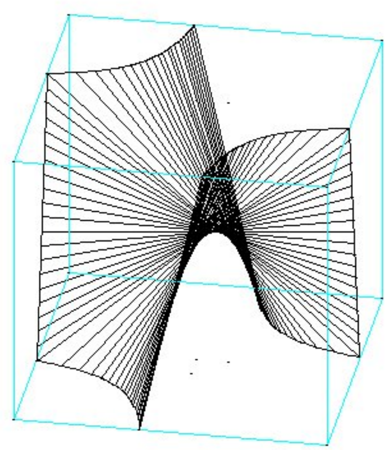

FIGURE 14 – Paraboloïde hyperbolique

Les surfaces doublement réglées font le bonheur des architectes : on peut couler d'immenses dalles de béton en les armant selon une des deux familles de droites, tout en coffrant le long l'autre famille, ce qui confère à la structure d'excellentes propriétés mécaniques : le toit de la cathédrale de la Sagrada Familia à Barcelone celui du musée océanographique de Valence, sont des portions de paraboloïde hyperbolique. Au fait, vous êtes-vous demandé pourquoi les biscuits d'apéritif de la marque Pringles ont cette forme en selle de cheval plutôt que d'être plats ?

L'hyperboloïde de révolution est un autre exemple de surface doublement réglée. Pour vous en faire une idée, prenez un paquet de tiges rigides (baguettes de mikado, pailles ...) que vous maintenez en son milieu par un élastique. Élargissez ensuite le paquet par en haut et par en bas en penchant les baguettes d'un même angle : vous venez de matérialiser un hyperboloïde de révolution (figure 15). Il est aussi très utilisé en architecture : châteaux d'eau, cheminées de centrale nucléaire...

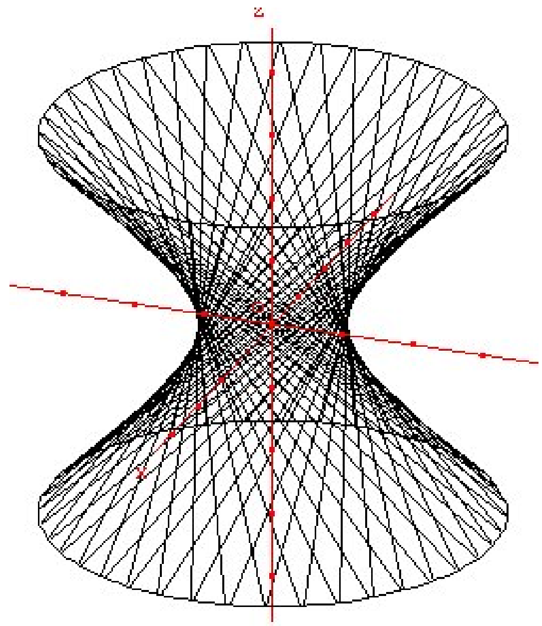

FIGURE 15 – Hyperboloïde de révolution

3.5 Le tailleur de pierres de Mézières

Femme d'esprit et de caractère, Mme Roland avait exercé une influence importante au début de la Révolution. Résolument engagée du côté des Girondins, elle fut une des victimes de la Terreur en 1793. En attendant son procès en prison, elle se venge par la plume de ceux qui vont l'envoyer à la guillotine.

> Bonhomme, épais et pasquin, Monge, autrefois tailleur de pierres à Mézières, où l'abbé Bossut lui trouvant quelques dispositions, l'initia aux mathématiques et l'encouragea de six livres par semaine, avait fait son chemin en travaillant, mais sans revoir son bienfaiteur depuis qu'il était devenu son égal. Habitué à calculer avec des éléments inaltérables, Monge n'entendait rien aux hommes ni aux affaires d'administration : lourd et mauvais plaisant il m'a toujours rappelé, quand il voulait faire l'agréable, un ours que la ville de Berne fait nourrir dans ses fossés, et dont les gentillesses, appropriées à leurs formes grossières, amusent les passants.
>
> Le nouveau ministre plaça dans les bureaux des hommes aussi peu capables d'agir que lui l'était de les juger : il se donnait beaucoup de mal sans rien faire ; et avec la meilleure volonté du monde, il laissa désorganiser la marine dans le temps où il était le plus important de l'entretenir et de la remonter. Il faut rendre justice à sa bonne foi ; il fut effrayé du fardeau et désira

> s'en décharger ; mais l'embarras de trouver mieux le fit inviter à demeurer. Insensiblement sa situation lui parut douce, et il s'imaginait en remplir les devoirs aussi bien qu'eût fait personne autre. Mais s'il fut mauvais administrateur, il était encore pire conseiller, et n'a jamais occupé que sa chaise dans les délibérations du pouvoir exécutif, se rangeant constamment à l'avis le plus timide, parce que, n'en ayant point à lui, il ne pouvait adopter que le plus convenable aux vues d'un esprit borné.
>
> Lorsque Pache devint ministre, il fut le régulateur de Monge, son admirateur et son ami, qui n'eut plus d'opinion que la sienne et la recevait comme l'inspiration divine ; c'est ainsi qu'il s'est maratisé, et que cet homme qui eût dû avoir son genre de bonté, s'est rendu fauteur de la doctrine la plus sanguinaire et la plus atroce.

Comment Gaspard Monge (1746–1818), un savant renommé, s'était-il retrouvé dans le camp des extrémistes, ainsi « maratisé » ? Mme Roland n'a pas tort : probablement plus par faiblesse et par amitié pour Pache que par conviction profonde. Tout « lourd et mauvais plaisant » qu'il ait pu être jugé, il aura au moins eu le mérite dans une époque troublée de surnager aux vagues des régimes successifs. Lors du Consulat, il est envoyé en Italie, puis en Égypte au gré des campagnes de Napoléon. Après le coup d'état du 18 Brumaire, il est nommé membre du « Sénat conservateur », chargé de veiller sur les constitutions successives du Consulat puis de l'Empire.

Quel rapport entre cette brillante carrière politique et les mathématiques ? Même s'il n'a pas été un administrateur exceptionnel, Monge aura pesé de tout son poids politique dans la réforme du système éducatif : École Normale Supérieure, École Polytechnique, École des Ponts et Chaussées, École des Arts et Métiers. . . , on doit à Monge (et aussi à Laplace et Lagrange) le système si typiquement français des Grandes Écoles. Ils ne se contentèrent pas d'en définir les programmes et le niveau d'exigence ; ils en furent les premiers professeurs, et se dévouèrent à leur enseignement au point de laisser une empreinte pédagogique qui devait leur survivre au-delà du XIXe siècle.

À peine finies ses études au Collège de la Trinité de Lyon, Monge avait été engagé à 19 ans à l'École royale du génie de Mézières, non pas comme tailleur de pierres, mais comme dessinateur, et dès l'année suivante avait eu à dessiner des plans de fortifications. Cette expérience devait influencer durablement ses travaux de géométrie, et par suite l'enseignement des futurs cadres de la nation. Quand il rédige les notes de son cours « Application de l'Analyse à la Géométrie, à l'usage de l'École Impériale Polytechnique », il consacre une monumentale seconde partie (415 pages) à la « Théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure ». Voici ce qu'il écrit à la fin du chapitre « Ellipsoïdes ».

> S'il était question de voûter un espace circonscrit en projection horizontale par une ellipse, on ne pourrait pas donner à la voûte une surface plus convenable que celle de la moitié d'une ellipsoïde dont une des ellipses principales coïnciderait avec l'ellipse de la naissance ; et en supposant que

> cette voûte dût être exécutée en pierres de taille, il faudrait que la division en voussoirs fût opérée au moyen des lignes de courbure dont nous avons donné la construction, et que les joints fussent les surfaces développables normales à la voûte.

C'est ainsi que jusqu'aux années 1970, des générations d'étudiants en mathématiques devront au « tailleur de pierres de Mézières » d'avoir été formés à la géométrie cotée, aux projections frontales et horizontales, et autres surfaces développables.

3.6 Et ignem regunt numeri

« Même le feu est régi par les nombres » : c'est la citation attribuée à Platon que porte en exergue la « Théorie Analytique de la chaleur » de Joseph Fourier (1768–1830). Quel est le problème ?

> Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre, et passe lentement des parties les plus échauffées dans celles qui le sont moins ; en même temps elle se dissipe par la surface, et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, et cette émission spontanée qui s'opère à la surface des corps, changent continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont connues.

Cette « question de la propagation de la chaleur », Fourier estime l'avoir résolue dès 1807. Si $v(t,x,y,z)$ désigne la température d'un corps au point de coordonnées (x,y,z) et au temps t, alors à l'intérieur du corps :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D}.\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) \ ,$$

où K est la conductibilité interne, D la densité et C la chaleur spécifique. Les conditions aux bords, la manière de résoudre numériquement les équations différentielles avec des séries trigonométriques, tout avait été établi, et soigneusement validé par de nombreuses expériences sur des corps de différentes formes. Alors pourquoi son premier mémoire de 1807 n'a-t-il pas été considéré ? Pourquoi sa nouvelle soumission en 1812 a-t-elle été primée, mais curieusement non publiée ?

> Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface ; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque choses à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.

Une première élection à l'Académie des Sciences est récusée par Louis XVIII (sous la Restauration, ceux qui s'étaient trop marqués du côté de Napoléon n'étaient pas en odeur de sainteté). Candidat à nouveau dans la section de Physique générale, il est réélu et enfin nommé en mai 1817. C'est la consécration ; il réunit ses différents travaux, et la publication en 1822 de la Théorie Analytique de la Chaleur marque son triomphe : 660 pages, dont 21 de discours préliminaire, où profitant de son autorité enfin reconnue, il énonce sa philosophie de la science, au risque de pontifier un tantinet.

> Les équations du mouvement de la chaleur, comme celles qui expriment les vibrations des corps sonores, ou les dernières oscillations des liquides, appartiennent à une des branches de la science du calcul les plus récemment découvertes, et qu'il importait beaucoup de perfectionner. Après avoir établi ces équations différentielles, il fallait en établir les intégrales ; ce qui consiste à passer d'une expression commune à une solution propre assujettie à toutes les conditions données. Cette recherche difficile exigeait une analyse spéciale, fondée sur des théorèmes nouveaux dont nous ne pourrions ici faire connaître l'objet. La méthode qui en dérive ne laisse rien de vague, ni d'indéterminé dans les solutions ; elle les conduit jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche, sans lesquelles on n'arriverait qu'à des transformations inutiles.
> [. . .]
> L'étude de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue ; elle est encore un moyen assuré de former l'analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver : ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.
> Les équations analytiques, ignorées des anciens géomètres, que Descartes a introduites le premier dans l'étude des courbes et des surfaces, ne sont pas restreintes aux propriétés des figures, et à celles qui sont l'objet de la mécanique rationnelle : elles s'étendent à tous les phénomènes généraux. Il ne peut y avoir de langage universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.
> Considérée sous ce point de vue, l'analyse mathématique est aussi étendue que la nature elle-même ; elle définit tous les rapports sensibles, mesure les temps, les espaces, les forces, les températures ; cette science difficile se forme avec lenteur, mais elle conserve tous les principes qu'elle a une fois acquis ; elle s'accroît et s'affermit sans cesse au milien de tant de variations et d'erreurs de l'esprit humain.
> Son attribut principal est la clarté. Elle n'a point de signes pour exprimer les notions confuses. Elle rapproche les phénomènes les plus divers, et dé-

> couvre les analogies secrètes qui les unissent. Si la matière nous échappe comme celle de l'air et de la lumière par son extrême ténuité, si les corps sont placés loin de nous, dans l'immensité de l'espace, si l'homme veut connaître le spectacle des cieux pour des époques successives que sépare un grand nombre de siècles, si les actions de la gravité et de la chaleur s'exercent dans l'intérieur du globe solide à des profondeurs qui seront toujours inaccessibles, l'analyse mathématique peut encore saisir les lois de ces phénomènes. Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens ; et ce qui est plus remarquable encore, elle suit la même marche dans l'étude de tous les phénomènes ; elle les interprète dans le même langage, comme pour attester l'unité et la simplicité du plan de l'univers, et rendre encore plus manifeste cet ordre immuable qui préside à toutes les causes naturelles.
> [...]
> Les théories nouvelles, expliquées dans notre ouvrage sont réunies pour toujours aux sciences mathématiques, et reposent comme elles sur des fondements invariables ; elles conserveront tous les éléments qu'elles possèdent aujourd'hui, et elles acquerront continuellement plus d'étendue. On perfectionnera les instruments et l'on multipliera les expériences. L'analyse que nous avons formée sera déduite de méthodes plus générales, c'est-à-dire plus simples et plus fécondes, communes à plusieurs stances solides ou liquides, pour les vapeurs et pour les gaz permanents, toutes les qualités spécifiques relatives à la chaleur, et les variations des coefficients qui les expriment. On observera, dans divers lieux du globe, les températures du sol à diverses profondeurs, l'intensité de la chaleur solaire, et ses effets, ou constants ou variables, dans l'atmosphère, dans l'Océan et les lacs ; et l'on connaîtra cette température constante du Ciel, qui est propre aux régions planétaires. La théorie elle-même dirigera toutes ces mesures, et en assignera la précision. Elle ne peut faire désormais aucun progrès considérable qui ne soit fondé sur ces expériences ; car l'analyse mathématique peut déduire des phénomènes généraux et simples l'expression des lois de la nature ; mais l'application spéciale de ces lois à des effets très composés exige une longue suite d'observations exactes.

Fourier revendique hautement l'« étude de la Nature », jusqu'aux « applications numériques, condition nécessaire de toute recherche ». Déjà à l'époque, ce n'était pas le point de vue unanime. Voici ce que le jeune Jacobi écrit à Legendre peu après la mort de Fourier :

> Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû saisir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de

nombres vaut autant qu'une question de système du monde.

Après 1922, Fourier écrit encore plusieurs articles sur la chaleur, dont deux consacrés à la température du globe terrestre, dans lesquels la mode actuelle veut voir l'anticipation de l'effet de serre et du réchauffement climatique. L'avènement de l'ordinateur avait déjà fait de la transformée de Fourier un nom commun, le voici promu fer de lance du sauvetage planétaire : quelle revanche !