

## SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	1
--------------------	---

### **CHAPITRE I :\_Généralités sur le processus de magnétoformage.**

1. Introduction .....	3
2. principe .....	3
3. Schéma de principe de l'installation .....	3
3.1. Générateur ... ..	4
3.2. Bobine de champ .....	6
3.3. Conformateur de champ.....	6
3.4. Matrices .....	7
4. Application .....	8
4.1. Mise en forme par compression .....	8
4.2. Mise en forme par expansion.....	9
4.3. Formage des pièces planes (placage) .....	10
4.4. Découpage.....	10
5. Applications industrielles.....	10
6. vitesse de déformation.....	13
7. Avantages et limites de la technique.....	13
7.1. Avantages .....	13
7.2. Limitation de vitesse .....	13
8. Influence des divers paramètres sur la déformation.....	14
9. conclusion.....	15

### **CHAPITRE II : Formulation du problème électromagnétique.**

1. Introduction.....	16
2. Equation électromagnétique.....	16
3. Equation de Maxwell .....	16
Première équation de Maxwell (équation Maxwell Gauss) .....	16

Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell Faraday) .....	17
Troisième équation de Maxwell (équation du flux conservatif) .....	18
Quatrième équation de Maxwell .....	19
4. Lois de comportement .....	20
Relation de milieu (relations constitutives) .....	20
Loi d'Ohm .....	20
5. L'équation de conservation de charge.....	20
6. Intervention du terme de vitesse.....	21
7. Formulation utilisant le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire V .....	22
8. Equations aux dérivées partielles.....	23
Equation elliptique .....	23
Equation parabolique .....	24
Equation hyperbolique .....	25
9. Formulation utilisant le vecteur potentiel .....	25
Modèle électrostatique 2D .....	25
Modèle magnétostatique 2D .....	26
Modèle magnétodynamique .....	28
10. Energie, force et pression magnétiques .....	29
Energie magnétique .....	29
Force magnétique .....	30
Pression magnétique .....	31
11. Méthodes de résolution .....	31
Méthodes numériques .....	31
Méthode des différences finies .....	32
Méthode des éléments finis .....	33
Méthode de volumes finis .....	34
Méthodes analytiques .....	35
Méthode de séparation de variable .....	35
Méthode d'intégrale de frontière .....	35
Méthode des équations intégrales .....	36

12. L'expression analytique du potentiel vecteur magnétique .....	38
Application à cas axisymétrique.....	38
Calcul des intégrales elliptiques de LEGENDRE .....	40
13. Conclusion.....	41

### **CHAPITRE III : Etude de l'effet d'un conformateur de champ.**

1. Introduction .....	42
2. Expression du courant de décharge .....	42
3. Analyse numérique sans conformateur de champ .....	44
3.1. Maillage de la pièce .....	44
3.2. Calcul du potentiel vecteur magnétique .....	44
3.2.1. Le potentiel vecteur magnétique créé par la bobine .....	44
3.2.2. Le potentiel vecteur magnétique créé par les éléments de la pièce.....	45
3.2.3. Le potentiel vecteur magnétique total.....	45
3.3. Densité de courant .....	47
3.4. Calcul de l'induction magnétique .....	47
3.5. L'expression de la densité volumique de la force .....	48
3.6. Equation de la pression électromagnétique .....	49
4. Modèle numérique avec conformateur de champ .....	49
4.1. Modélisation du conformateur .....	50
4.1.1. Hypothèse de base.....	50
4.1.2. Courant effectif .....	52
4.1.3. Courant superficiel.....	53
4.2. Modèle numérique d'un système contenant un conformateur .....	55
4.3. Le potentiel vecteur magnétique total .....	55
4.4. Application.....	56
CONCLUSION .....	65

### **BIBLIOGRAPHIE**



## **Introduction générale**

Tout conducteur électrique soumis à un flux magnétique variable dans le temps est le siège de courants induits. Combinés avec un champ magnétique, Ces derniers engendrent d'une part, des pertes électromagnétiques qui engendrent des échauffements plus ou moins importants qui se propagent par conduction thermique et, d'autres part, des forces électromagnétiques qui développent soit un déplacement ou des déformations de structures sur les quelles elles s'exercent.

Dans certaines applications, comme le chauffage par induction, on exploite des pertes électromagnétiques pour produire de la chaleur, dans d'autres applications, comme le magnétoformage qui sera l'objet de notre travail, on utilise plutôt les forces électromagnétiques.

Le magnétoformage est une technique de mise en forme des métaux par forces électromagnétiques, elle est connue au début du 19<sup>ème</sup> siècle, mais il n'a pas été étudiée car l'application au niveau industriel n'était pas possible, à cause de diverses limitations techniques, dues aux manques de performances des matériaux. Le magnétoformage est un processus multidisciplinaire très complexe. Il fait appel à l'électromagnétisme, à la thermodynamique à la mécanique et à la métallurgie.

Quand une batterie de condensateur d'une énergie très importante se décharge à travers une bobine placée au voisinage d'un conducteur électrique, un champ magnétique intense, pulsé sera créé par la bobine qui va développer dans le conducteur électrique, des pressions suffisantes qui permettent sa mise en forme.

Si l'énergie électrique disponible dans une batterie de condensateur n'est pas suffisante pour développer des forces électromagnétiques, capables de provoquer les déformations désirées, on intercale un conformateur de champ entre la bobine et le conducteur. Le conformateur de champ a pour rôle d'augmenter les efforts magnétiques, afin d'obtenir les déformations plus importantes sans changer les paramètres électriques et la géométrie des

installations. Notons que ce dernier rend la modélisation du processus de magnétoformage délicate.

Dans ce travail, nous présenterons une étude sur l'effet d'un conformateur de champ sur le processus de magnétoformage. Nous avons réparti notre travail en trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré à certaines notions de base sur le formage électromagnétique, les généralités et les notions sur électromagnétisme nécessaires pour notre étude feront l'objet du deuxième chapitre. Dans le troisième, nous présenterons un modèle numérique pour la modélisation du processus de magnétoformage avec un conformateur de champ. Nous terminerons notre étude par une conclusion générale.

## I-1-Introduction

Le magnétoformage, permet la mise en forme des pièce métallique à grande vitesses, en utilisant la pression magnétique, résultante d'une présence simultanée d'un champ magnétique intense transitoire et des courants induits dans la pièce à déformer .

Un tel processus nécessite des matériaux très bons conducteurs d'électricité tel que : le Cuivre, l'Aluminium ou l'acier doux. Son principe fait appel aux lois de Foucault, de Laplace et de Lenz, connus depuis le 19<sup>ème</sup> siècle, mais ce n'est que dans les années soixante qu'apparaissent aux Etats-Unis les premiers développements industriels [1] [2] [3].

## I-2- principe

Un champ magnétique pulsé amortis est crée par la décharge d'une batterie de condensateurs à travers une bobine d'induction ;

Pour une pièce métallique placée au voisinage de la bobine, elle sera parcourue par des courants d'induit [2];

La combinaison du champ magnétique et des courants induits, engendre des forces de Laplace, c'est ce champ de force élémentaire qui crée la pression intense entraînant la déformation; elle est donnée en Newton par mètre carré [N/m<sup>2</sup>] :

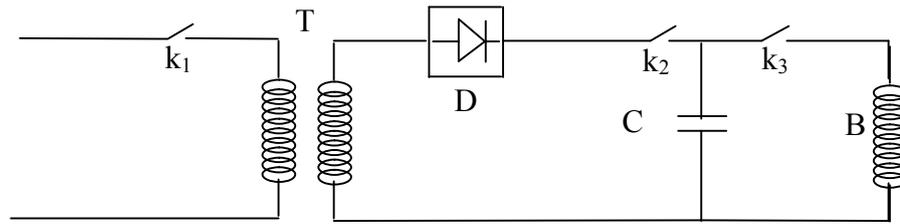
$$P = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad (\text{I-1})$$

Avec  $\mu_0$  : la perméabilité magnétique du vide

$H$  : l'intensité du champ magnétique en [A/m]

## I-3- Schéma de principe de l'installation

Une installation de formage électromagnétique est généralement constituée d'un générateur capable de délivrer des courants de forme impulsionnelle d'amplitude l'ordre de plusieurs kA ; d'une bobine de champ capable de supporter ce courant et les efforts mécaniques (pression électromagnétique) résultants et d'une pièce à déformer en métal bon conducteur de l'électricité.



**Fig-I-1-Schema de principe de l'installation**

$k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  : Interrupteurs  
 T : Transformateur de haute tension  
 D : Redresseur double alternances  
 C : Capacité de la batterie de condensateur  
 B : Bobine de champ

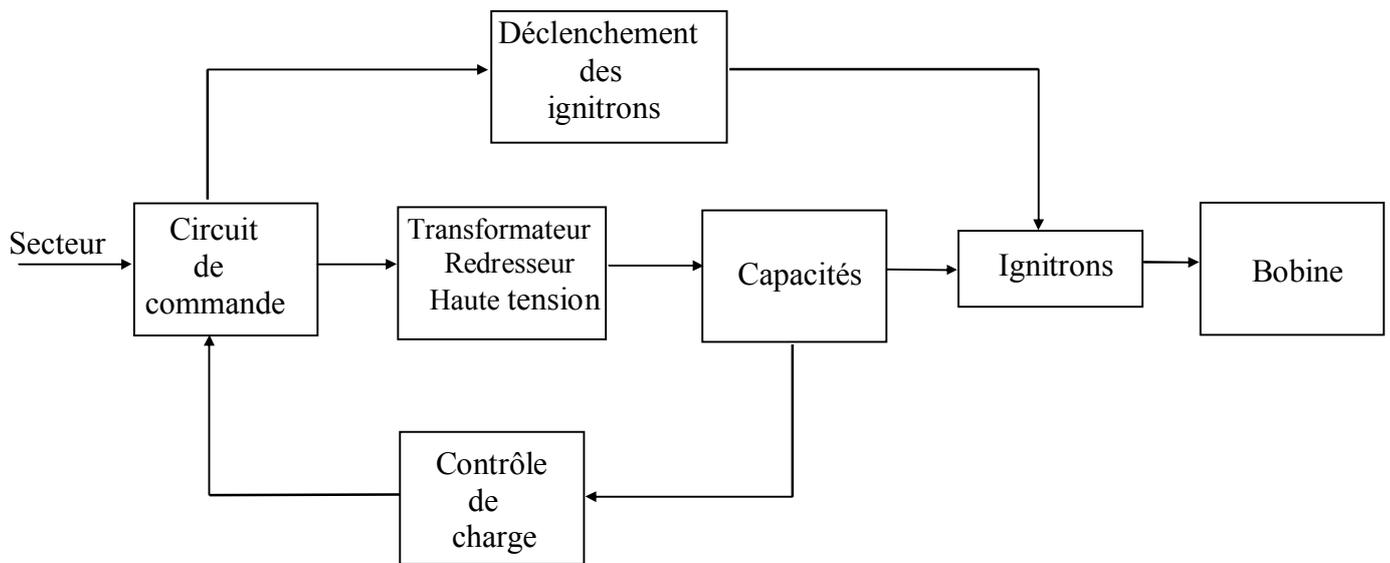
### I-3-1-Générateur

Dans ce processus de formage, les générateurs utilisés sont des machines capables de délivrer des impulsions électriques de plusieurs centaines de kA, sous des tensions de quelques kV pendant une durée d'une centaine de microsecondes.

Plusieurs moyen de stockage d'énergie peuvent être utilisés : les machines tournantes qui stockent de l'énergie cinétique dans le rotor, les inducteurs qui stockent de l'énergie magnétique, et les batteries de condensateurs qui stockent de l'énergie électrique.

Dans cette industrie, l'énergie désirée est de l'ordre d'une dizaine de kJ, pour cela les batteries de condensateurs sont les plus employées, vu leur facilité de mise en œuvre et leur souplesse d'utilisation [1] [3].

Le générateur d'impulsion pourrait s'identifier au schéma de la (Fig-I-2)



**Fig-I-2 : Schéma synoptique d'un générateur d'impulsions**

Pour le réglage de l'énergie désirée  $1/2CV^2$ , la tension de charge des condensateurs est affichée, alors le circuit primaire délivre une tension primaire qui augmente progressivement afin de ne pas surcharger le condensateur par une élévation brutale de la tension secondaire fournie par le transformateur redresseur .

Dans un tel système de générateur d'impulsion, un circuit de contrôle de charge assure la comparaison permanente de la tension aux bornes du condensateur à la tension affichée, lorsque cette dernière est atteinte, on a un arrêt automatique de la charge et déclenchement des ignitrons (tube à vapeur de mercure), ce qui provoque la décharge des condensateurs à travers la bobine de formage.

Ce type de générateur évite de conserver les condensateurs chargés, et éliminent les risques d'accidents électriques [2] [1] [3].

### **I-3-2-Bobine de champ**

La bobine constitue l'élément moteur de ce procédé, en effet, il assure la transformation de l'impulsion électrique de décharge des condensateurs en un champ magnétique intense, et permet la mise en forme de la pièce, tout en supportant la pression magnétique et les efforts mécaniques sans autant se déformer. Elle est constituée des spires en Cuivres, au Béryllium acier inoxydable, enroulées sur un corps ayant une haute résistivité et une excellente tenue mécanique (tenue aux chocs répétés), le polyuréthane donne de bons résultats dans ce domaine.

Des bobines de différentes géométries peuvent être réalisées pour obtenir des déformations particulières, le sens opposé des courants induits aux courants de décharge sont réalisés par l'application d'une force magnétique qui tend toujours à éloigner la pièce de la bobine.

En général, l'induction des bobines utilisées en magnétoformage varie de 0.1 à 5μH, elle peut être calculée par la formule suivante [4] :

$$L = 0.4 \pi \frac{N^2}{L} S \quad (I-2)$$

Avec :

N : le nombre de spires.

S : la section interne de la bobine.

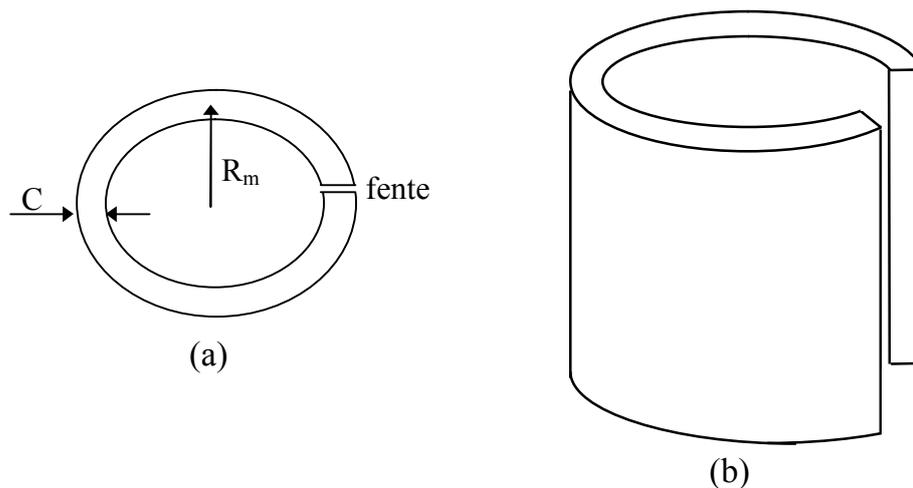
L : la longueur active.

Comme nous avons des courants de très fortes intensités, délivrés par le générateur, ce qui conduit à un échauffement rapide, d'où la nécessité d'un système de refroidissement pour les bobines travaillant à des cadences supérieures à trois décharges par minute [2] [1].

Pour une fabrication prototype ou en petite série, ou fabrication en grande série, on utilise des bobines perdues ou bobines permanentes

### **I-3-3-Conformateur de champ**

Le conformateur de champ, appelé aussi concentrateur ou focalisateur de champ, ce dernier est généralement un cylindre évidé en cuivre, Cuivre au Béryllium ou alliages d'Aluminium [5] [6]. Il s'intercale entre la bobine de champ et la pièce à déformer. Il est fendu suivant un demi plan vertical passant par son axe et la fente est isolée électriquement. La coupe transversale d'un conformateur de champ est représentée sur la figure I-3.



**Figure I-3 : (a) Coupe transversale d'un conformateur  
(b) Représentation schématique d'un conformateur**

L'ensemble bobine conformateur se comporte comme un transformateur dont le primaire est la bobine de champ et le secondaire est le conformateur de spire unique en court-circuit. Les courants qui circulent dans le conformateur se bouclent au niveau de la fente isolé. Il apparaît directement que le conformateur offre la possibilité d'augmenter le courant de décharge, le champ magnétique étant proportionnelle au courant se trouve donc nettement multiplié [3].

L'utilisation d'un conformateur de champ, nous offre des multiples avantages résumés par [2] [3] :

- Rééducation des efforts de déformation sur le corps de la bobine ;
- Augmentation de champ magnétique par la concentration des courants inducteur ;
- Distribution particulièrement des forces électromagnétiques.

#### **I-3-4-Matrices**

La mise en forme des pièces est généralement obtenue en utilisant des matrices. La pièce, étant accélérée par l'application de forces électromagnétiques intenses, vient épouser la forme de la matrice placée à proximité de la pièce.

Etant donné que le placage de la pièce contre la matrice se fait à haute vitesse, il est nécessaire d'utiliser, pour la réalisation de la matrice, des matériaux résistants aux chocs (acier doux) [5].

Après le magnétoformage, il suffit de réduire les pressions internes exercées sur la matrice pour démouler la pièce formée. [2] [1] [3].

## I-4-Applications

Dans la technique de magnétoformage, plusieurs applications sont possibles. On distingue quatre opérations essentielles : la compression, l'expansion, le placage et le découpage.

### I-4-1-Mise en forme par compression

Dans cette application, la bobine placée à l'extérieur de l'ébauche permet de créer une pression radiale dirigée vers l'intérieur (Fig-I-4).

Ce type de magnétoformage permet de réaliser des assemblages et des sertissages.

Une application de ce procédé existe aux Etats-Unis, dans l'industrie automobile, pour la mise en forme et couplage d'un tube sur une roue dentée [2].

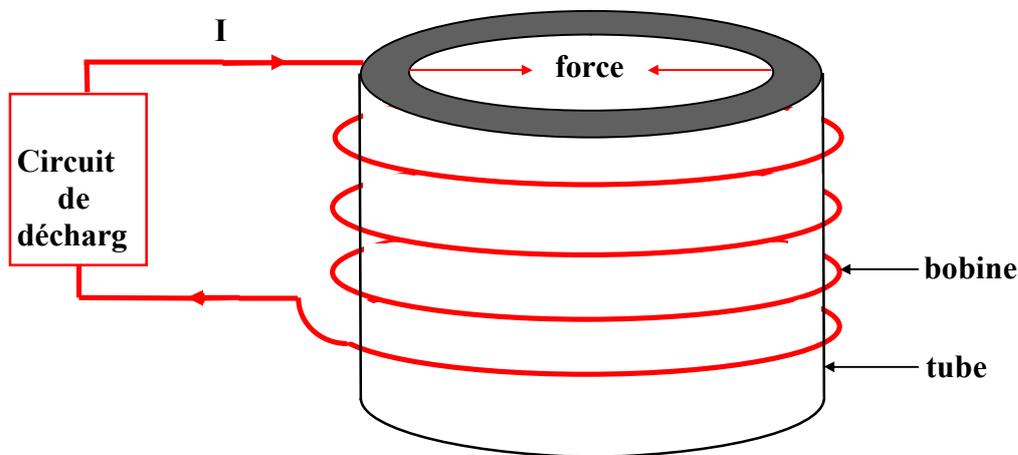
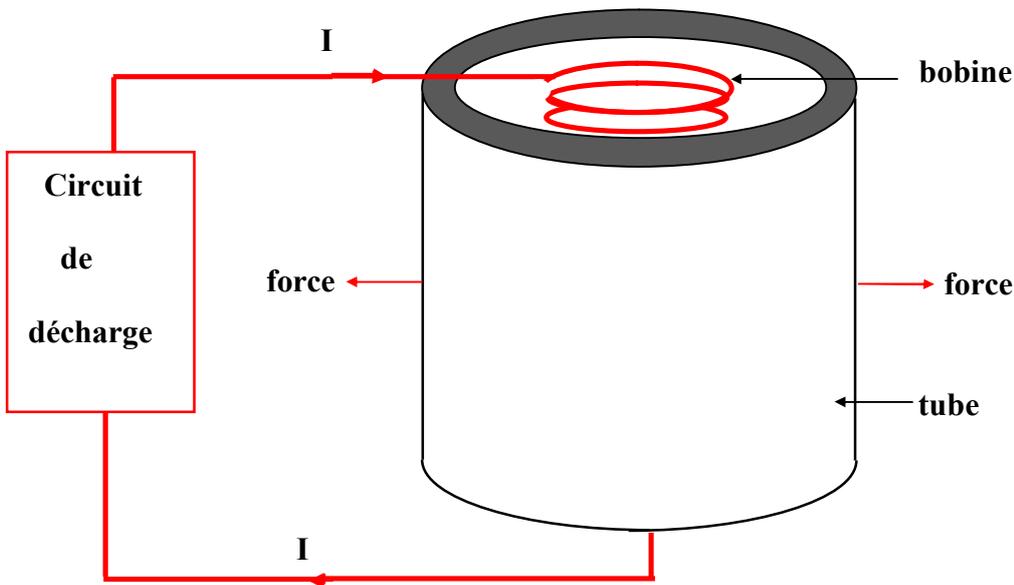


Fig-I-4-Compression d'un tube

**I-4-2-Mise en forme par expansion**

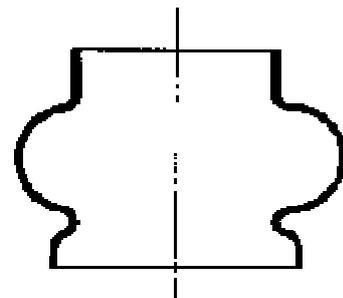
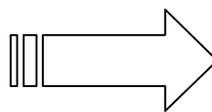
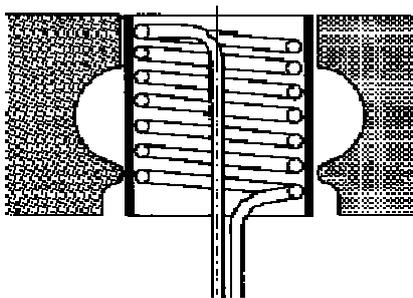
L'expansion est destinée à des opérations de mise en forme des pièces tubulaires(Fig-5), elle est en général plus aisée et donne de meilleurs résultats que les techniques d'emboutissages classiques (poussée d'élastomère ou gonflement hydrauliques) [2] .

Dans ce cas, la pièce est placée à l'extérieur de la bobine, et le champ magnétique crée par cette dernière induit un courant dans la pièce qui crée à son tour des efforts électromagnétiques assurant l'expansion.



**Fig-I-5-Expansion d'un tube**

**Exemple de formage d'un tube par expansion**

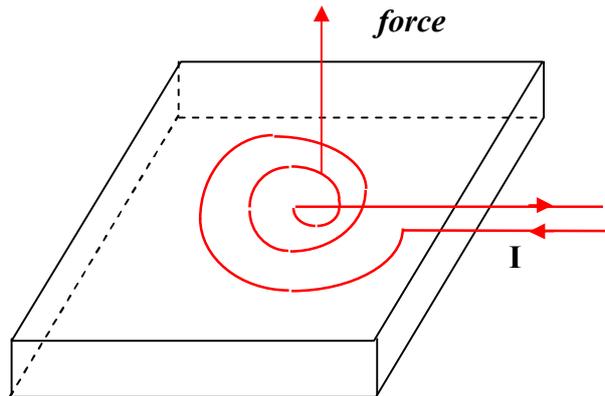


**Avant application du champ magnétique**

**Tube formé**

### I-4-3-Formage des pièces planes (placage)

Cette opération consiste à faire passer un courant dans une bobine spirale plane au-dessus de laquelle est placée une plaque à former (Fig-I-6). Le passage du courant dans la bobine induit un courant dans la plaque qui est propulsée perpendiculairement à la bobine. L'utilisation du placage se révèle très intéressante dans les opérations d'emboutissage ou pour obtenir des pièces à tolérance serrée ou encore ne présentant pas des défauts de surface [5] [11].



**Fig-I-6 : Projection d'une pièce plane**

### I-4-4-Découpage

Pour se faire, une matrice munie d'arêtes vives permet de réaliser des ouvertures par découpage du matériau ;

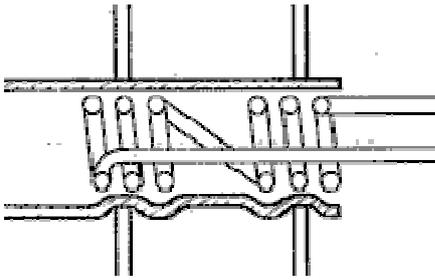
Les hautes vitesses de déformation atteintes par le matériau, lui confèrent une énergie cinétique importante. Si la matrice comporte des trous, le métal est alors éjecté par ces trous et on obtient une découpe exempte de bavures [1].

La combinaison des procédés de placage et de découpage est possible pour réaliser des joints d'étanchéités en alliages légers [2].

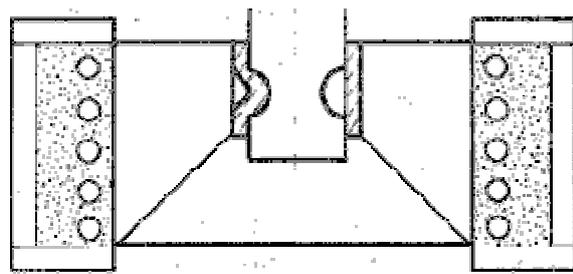
## I-5-Applications industrielles [25]

### Assemblage

Le magnétoformage est avant tout un procédé d'assemblage d'une pièce tubulaire sur support résistant mécaniquement.



Assemblage par expansion

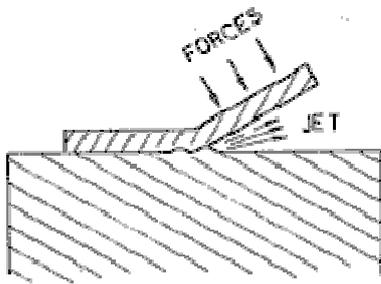


Assemblage par rétreint

### Soudage par Magnétoformage

Le Magnétoformage, grâce à sa haute vitesse de propulsion, est un procédé permettant le soudage des métaux.

Le phénomène s'apparente au soudage par explosion. Il s'applique sur des pièces de forme tubulaire de petite taille. Il permet de "souder" des matériaux tels que l'aluminium sur le cuivre, l'aluminium sur l'acier...



Principe



Coupe

Quelques unes des applications sont présentées ci-dessous classées par domaine.

### Applications dans le domaine nucléaire

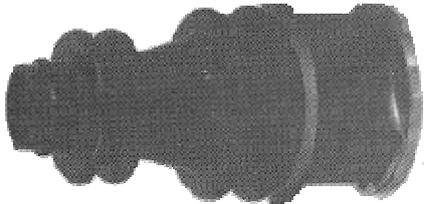
Le Magnétoformage est utilisé dans la fabrication de pièces en acier inox, gaines de combustibles ou barres de contrôle utilisés dans le domaine nucléaire.

### Gaines de combustible soudées

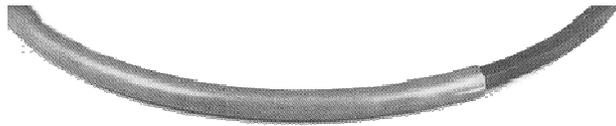


**Application dans le domaine de l'automobile**

Le domaine de l'automobile est sans conteste celui qui utilise le plus le procédé de Magnétoformage.



**Soufflet de cardans**

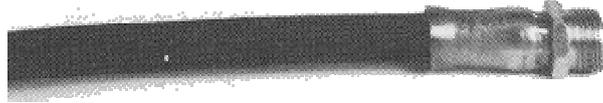


**Armatures de volants**

**Application dans le domaine de l'aviation et l'espace**

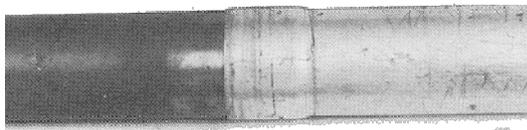


**Roules de pompe hydraulique**



**Raccord hydraulique**

**Application dans le bâtiment**



**Conduite de gaz**



**Echafaudages**

## **I-6-vitesse de déformation**

Le rôle de la vitesse de déformation, ou plus exactement de déplacement de la paroi de la pièce à déformer, durant l'opération de mise en forme est prépondérant car le travail de déformation est obtenu par la transformation de l'énergie cinétique emmagasinée par l'ébauche [5].

En formage électromagnétique, la vitesse atteinte par le matériau dépend essentiellement de la nature de l'ébauche (forme, épaisseur, dimensions, masse volumique) et de l'énergie mise en jeu.

Les vitesses obtenues durant diverses opérations de magnétoformage varient entre 100 et 500 m/s [17] [6]. Or le comportement des matériaux à grandes vitesses n'est pas le même que sous les conditions quasi-statiques [17] [6]. Ce caractère dynamique nécessite donc le recours à la théorie de la plasticité des métaux [17] [27] [11]. Les vitesses les plus importantes apparaissent en emboutissage des tôles fines (quelques dixièmes de millimètres d'épaisseur), les plus lentes en formage par expansion d'un tube en cuivre de 2 à 3mm d'épaisseur [5].

## **I-7-Avantages et limites de la technique**

### **I-7-1-Avantages**

Parmi les avantages du procédé, on peut retenir [2] [1]:

- la suppression du contact entre l'outil et la pièce ;
- une excellente répartition des contraintes dans la pièce à déformer ;
- simplicité de l'outillage et de l'automatisation.

### **I-7-2-Limitation de vitesse**

Toute pièce formée doit être examinée cas par cas, car le magnétoformage fait intervenir beaucoup de paramètres tel que :

- amplitude de déformation,
- état initial du matériau avant la déformation,
- la nature de la déformation,
- la masse de la pièce,
- le nombre de pièces à déformer,
- les caractéristiques intrinsèques de la pièce,

### **1-Résistivité de l'ébauche :**

La résistivité du matériau constitutif de l'ébauche doit être la plus faible possible.

**2-Géométrie des pièces**

Certaines géométries de pièces ne permettent pas toujours l'application correcte de la pression magnétique, d'autre part, l'épaisseur des pièces doit être comprise dans certaines limites. En effet, aux fréquences courantes, d'environ 10kHz, l'épaisseur de peau est de 0,6 à 0,8 mm pour le cuivre, de 0,8 à 1,0 mm pour l'aluminium et de 1,6 à 2,0 mm pour l'acier doux. Pour des épaisseurs inférieures à ces valeurs, celles-ci conduisent à ne transformer en pression magnétique qu'une partie de l'énergie électrique stockée dans les conducteurs. Par contre, si elles sont supérieures à ces valeurs, la résistance à la déformation augmente sans pour autant augmenter la pression magnétique [2].

Nous pouvons rajouter certaines limitations telles que [8].

- les bobines utilisées sont relativement chères,
- les matériaux doivent être d'une grande conductivité électrique,
- le procédé est meilleur que pour des pièces fines.

**I-8-Influence des divers paramètres sur la déformation**

L'influence des divers paramètres sur la déformation par pression électromagnétique est résumée dans le tableau suivant [6] :

<b>Paramètres</b>	<b>Déformation</b>
Résistivité de la pièce augmente	diminue
Nombre de spires de la bobine de champ augmente	augmente
Intensité du courant de décharge augmente	augmente
Distance entre la bobine et la pièce augmente	diminue
Epaisseur de la pièce augmente	diminue
Fréquence de travail augmente	augmente
Ductilité du métal de la pièce augmente	augmente

## **Conclusion**

Ce chapitre a été consacré à la description de la technique du magnétoformage et le rôle de la vitesse dans le processus de magnétoformage a été mis en évidence ainsi qu'à la présentation des différents dispositifs utilisés.

## II-1- Introduction

Le magnétoformage est une technique de déformation rapide des matériaux soumis à des efforts électriques intenses. Les efforts développés dans les métaux sont dus à la présence d'un champ magnétique et d'un courant induit.

La connaissance de la distribution dans le temps et dans l'espace du champ magnétique et du courant induit constitue la première approche pour la modélisation du processus du magnétoformage. Dans ce cadre bien défini, ce chapitre sera entièrement consacré à la description des équations utilisées pour la modélisation des phénomènes électromagnétique ainsi que le modèle mathématique du calcul du champ.

## II-2-Equation électromagnétique

Parmi les grandes inventions qui marquent l'histoire du développement de la physique, celle de James Clerck Maxwell fut capital ; elle prend place à la fin de 19<sup>ème</sup> siècle, époque où de nombreux composants de la physique tels que la thermodynamique, la mécanique moderne, électricité, l'optique, ..... Et le magnétisme atteint une certaine maturité ; les travaux de Maxwell sont liés à la quasi-totalité de ces branches. Par ailleurs, dans le domaine électromagnétique ils ouvrent la voie à une des premières unifications théoriques.

Les équations de Maxwell, unifiant l'électricité et le magnétisme de façon complète, ouvriront aussi la voie à une écriture des lois fondamentales de l'optique et de la propagation des ondes électromagnétiques en général.

Cette même théorie, ouvrira la voie à des développements ultérieurs en mécanique, comme le théorie de la relativité restreinte présentée par Albert Einstein dans les premières années du 20<sup>ème</sup> siècle [7].

## II-3-Equation de Maxwell

### II-3-1-Première équation de Maxwell (équation Maxwell Gauss)

Le flux du déplacement calculé à travers une surface sphérique centré sur une charge ponctuelle  $q$  vaut précisément cette charge soit [9] :

$$\oint_{\text{sphère}} \vec{D} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi} \oint_{\text{sphère}} \frac{ds}{r^2} = q \quad (\text{II-1})$$

Avec  $\vec{D}$  : densité du flux électrique définit par :  $\vec{D} = \frac{q}{4\pi.r^2} \vec{a}_r$

$q$  = la charge ponctuelle ;

$r$  = vecteur position ;

$\vec{a}_r$  = vecteur unitaire ;

La loi de Gauss est une généralité de l'équation (II-1) soit :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \text{charge totale à l'intérieur.}$$

En introduisant le concept de densité volumique de charge  $\rho$  (C/m<sup>3</sup>) on peut écrire :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho . dv \quad (\text{II-2})$$

Où  $v$  est le volume délimité par surface(s).

Si on applique le théorème de la divergence, qui stipule que :  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} . dv = \oint_S \vec{A} d\vec{s}$

$$\text{On aura : } \oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dv = \int_V \rho . dv \quad (\text{II-3})$$

Pour un volume infinitésimal, on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II-4})$$

C'est la première équation de Maxwell, connue sous le nom de l'équation de Maxwell-Gauss.

La différence entre l'équation (II-2) et (II-4), c'est que la première est une relation intégrale, traitant donc des valeurs moyennes, alors que la deuxième est une relation ponctuelle, exprimant en tous points la relation entre le déplacement et la densité de charge [9].

La première équation de Maxwell met en évidence qu'une charge électrique est source d'un champ électrique, autrement dit, les lignes de champ électrique commencent et se terminent sur des électriques. Physiquement elle traduit un caractère non conservatif du champ électrique [13].

### II-3-2-Deuxième équation de Maxwell (équation de Maxwell Faraday)

Considérant, un contour simple ayant la forme d'une boucle, on a alors, si  $\phi$  est le flux magnétique traversant la boucle :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (\text{II-5})$$

Sachant que  $d\phi = B ds$  ;

$$\text{Donc (II-5) peut s'écrire sous forme: } \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int B ds \quad (\text{II-6})$$

### -Théorème des stockes [21]

Il stipule que  $\oint \vec{A} d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) ds$ , c'est-à-dire, il relie une intégrale curviligne à une intégrale de surface, donc (II-6) devient :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) ds = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} ds$$

$$\text{Il résulte que : } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{II-7})$$

C'est la deuxième équation de Maxwell, appelée aussi équation de Maxwell Faraday. Elle met en évidence qu'une tension est engendrée dans un conducteur lorsqu'il traverse un champ magnétique, c'est la grande découverte de Faraday en 1831 [9].

Physiquement, elle traduit qu'un champ variable  $\vec{B}$  engendre un champ électrique  $\vec{E}$  à circulation non conservative [13].

### II-3-3- Troisième équation de Maxwell (équation du flux conservatif)

Exploitation la deuxième équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{II-8})$$

Si on applique la divergence membre à membre à l'équation (II-8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Comme la divergence d'un rotationnel est nulle, il résulte que :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{constante}$$

Du moment qu'il n'existe pas de charge magnétique, on admet que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II-9})$$

C'est la troisième équation de Maxwell, elle met en évidence qu'il n'existe pas de charge magnétique, c'est pourquoi les lignes d'inductions se ferment toujours sur elle mêmes, elles forment des boucles [9].

Elle traduit le caractère conservatif du flux du champ magnétique  $\vec{H}$  à travers n'importe quelle surface fermée [13].

### II-3-4-Quatrième équation de Maxwell

Elle se base principalement sur la loi d'Ampère exprimant que la circulation du champ magnétique sur un contour fermé vaut le courant qui le traverse [9].

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I \quad (\text{II-10})$$

Sachant que :  $I = \oiint_S \vec{J} d\vec{s}$

D'où  $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \oiint_S \vec{J} d\vec{s}$

D'après le théorème de Stokes, on trouve que :  $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \oint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) ds = \oiint_S \vec{J} d\vec{s}$

$$\text{Donc : } \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II-11})$$

Certains phénomènes physiques liés aux champs électriques et induction magnétique, ne peuvent être décrits par la loi d'Ampère uniquement ; c'est pourquoi James Clerk Maxwell mit en évidence le fait qu'un terme supplémentaire de courant devait être ajouté aux autres termes déjà connus : le courant de déplacement dû à la simple existence d'un champ variable dans le temps en l'absence de tout déplacement de charge et de tout courant de conduction [9].

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D \quad (\text{II-12})$$

Avec

$\vec{J}_C$  : La densité de courant de conduction

$\vec{J}_D$  : La densité de courant de déplacement

Finalement, nous aurons :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II-13})$$

C'est la quatrième loi de Maxwell, connue sous le nom de Maxwell Ampère. Dans cette dernière, il est mis en évidence qu'un courant électrique est toujours entouré d'un champ magnétique, c'est une conclusion déduite par Faraday des expériences de Oersted [9].

Physiquement, elle traduit qu'un champ variable  $\vec{E}$  engendre un champ magnétique  $\vec{B}$  à circulation non conservative [13].

## II-4-Lois de comportement

### II-4-1-Relation de milieu (relation constitutives)

Les champs électrique et magnétique font apparaître des polarisations électrique et magnétique, déterminées par :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \text{Relation diélectrique}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \text{Relation magnétique}$$

$\mu$  : Perméabilité magnétique [H/m]

$\epsilon$  : Perméabilité électrique [F/m]

Dans le cas linéaire,  $\epsilon$  et  $\mu$  sont indépendants du champ.

### II-4-2-Loi d'Ohm

Elle traduit la relation qui lie le champ électrique à la densité de courant à travers la conductivité ( $\sigma$ ), donnée par :

$$\vec{J} = \sigma_i \vec{E}_i \quad (\text{II-14})$$

$\sigma_i$  : Conductivité du milieu  $i$  [ $\Omega/m$ ]

## II-5-L'équation de conservation de charge

En partant de l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Et sachant que :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = 0$$

On aura :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_C = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{D})}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_C = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{Loi de conservation de la charge}) \quad (\text{II-15})$$

## II-6-Intervention du terme de vitesse

Sachant que

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{ind}} + \vec{J}_s$$

D'après la loi d'Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

S'il y a mouvement on aura :

$$\vec{J} = \sigma [\vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B})] \quad (\text{II-16})$$

-  $\vec{J}_s$  : densité du courant imposé dans l'inducteur

-  $\vec{J}_{\text{ind}}$  : densité de courant induit.

-  $\sigma \vec{E}$  : densité de courant de conduction résultant du champ appliqué

-  $\sigma(\vec{V} \wedge \vec{B})$  : densité de courant résultant du mouvement de vitesse

### II-7-Formulation utilisant le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire V

D'après la troisième équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} / \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Sachant que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Donc :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Alors

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{II-17}$$

En considérant un repère Galiléen. Au point M et à l'instant t, il existe un champ électromagnétique  $(\vec{E}', \vec{B})$ .

Si ce point appartient à un corps en mouvement et si  $\vec{V}$  est la vitesse d'entraînement de ce point, il y règne un champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{V} \wedge \vec{B} \tag{II-18}$$

Or, d'après l'équation de Maxwell Faraday, le champ  $\vec{E}'$  lié au repère mobile dérive dans l'espace du potentiel scalaire V et dans le temps du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overline{\nabla V} \tag{II-19}$$

L'équation du champ électrique dans le repère fixe s'écrit :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overline{\nabla V} + (\vec{V} \wedge \vec{B}) \tag{II-20}$$

L'équation généralisée de diffusion électrique, dans ce cas devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) + \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{V} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \right) = -\sigma \overline{\nabla V} \tag{II-21}$$

On remarque bien que la variation spatiale du flux magnétique est prise en considération par l'intermédiaire de la vitesse.

L'équation est résolue dans un repère fixe, comme si le mouvement était immobile (configuration géométrique invariable).

Alors l'équation (II-19) peut se réduire à :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = -\sigma \left( \frac{\vec{A}}{\sigma t} - \overline{\nabla V} \right) \quad (\text{II-22})$$

Si  $\mu$  est constante on aura

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\nabla \vec{A} + \overline{\nabla \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} \quad (\text{II-23})$$

-  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  : condition de Jauge Coulomb qui assure l'unité de la solution

Dans certains cas on utilise la condition de Jauge Lorentz

$$- \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\sigma \mu V \quad (\text{II-24})$$

## II-8-Equations aux dérivées partielles

Elles sont définies comme étant des équations différentielles dépendantes d'une ou plusieurs variables, souvent sous la formes suivante.

$$\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{En une dimension}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{En deux dimension}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{En trois dimension}$$

La majorité des phénomènes physiques sont régis par les équations suivantes [10].

### II-8-1-Equation elliptique

Elle est destinée à la traduction des phénomènes physique stationnaires (c'est-à-dire indépendant du temps), définit par :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{Soit} \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{En trois dimensions}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{En deux dimensions}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} = 0$$

En une dimension

Pour  $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ , on aura la forme vectorielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation de Laplace en est un exemple

### II-8-2-Equation parabolique

Elles traduisent les phénomènes dépendants du temps, à titre d'exemple, la pénétration des courant de Foucault ou équation de diffusion dans un milieu dissipatif (le courant de conduction supérieur au courant de déplacement).

Elle sont données par :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Ces équation présentent une dérivée d'ordre 2 par rapport aux coordonnées et une dérivée temporelle.

Pour un cas vectoriel, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} - \frac{\partial \phi_z}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

### II-8-3-Equation hyperbolique

De telles équations, traitent plutôt les phénomènes de propagation des ondes électriques, on parle d'équations d'onde définies par :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

Pour  $\Phi(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

### II-9-Formulation utilisant le vecteur potentiel

Comme formulé précédemment, les équations de Maxwell contiennent plusieurs inconnues, ce qui rend délicate sa résolution.

La formulation en potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et en potentiel scalaire électrique  $\phi$ , nous permet de condenser et de réduire le nombre d'inconnues. Ces méthodes sont bien connues et largement utilisées dans le domaine du calcul du champ électromagnétique [3].

#### II-9-1-Modele électrostatique 2D

Il traduit des phénomènes électriques statiques, donnés en terme du potentiel scalaire  $V$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II-4})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{II-7})$$

$$\text{Statique} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \text{l'équation (II-7) devient } \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (\text{II-25})$$

Clicours.COM

$$\begin{aligned}
 \text{(II-25)} \Rightarrow \exists V \text{ tel que } \vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} & \quad \text{(II-26)} \\
 \text{Sachant que } \vec{D} = \epsilon \vec{E} & \quad \text{(II-27)}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{(II-25)} \Rightarrow \exists V \text{ tel que } \vec{E} = -\overrightarrow{\nabla V} \\ \text{Sachant que } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \vec{D} = -\epsilon \overrightarrow{\nabla V} \quad \text{(II-28)}$$

Introduisant (II-28) dans (II-4)

$$\overrightarrow{\nabla}(-\epsilon \overrightarrow{\nabla V}) = \rho$$

Donc :

$$\overrightarrow{\nabla}(-\epsilon \overrightarrow{\nabla V}) = -\rho \quad \text{(II-29)}$$

Définissant le Laplacien comme la divergence du gradient [9]

Laplacien =  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  , exprimé sous la forme :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{En coordonnées}$$

cartésien

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{En coordonnées}$$

cylindrique

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \text{En coordonnées}$$

sphérique

On obtient l'équation de poisson  $\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon}$  dont un cas particulier est l'équation de

Laplace, obtenue en tout point où la densité de charge est nulle :  $\nabla^2 V = 0$  qu'on écrit aussi  $\Delta V = 0$ .

### II-9-2-Modèle magnétostatique 2D

Dans ce cas, les phénomènes traités sont magnétiques et indépendants du temps. Pour ce on dispose des deux relations suivantes:

$$\overrightarrow{\nabla} \vec{B} = 0 \quad \text{(II-9)}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_C \quad \text{(II-30)}$$

L'équation (II-9)  $\Rightarrow$  il existe un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II-31})$$

Pour l'unicité de solution, on impose une condition dite de Jauge de Coulomb, qui consiste à imposer [7] [12].

$$\vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (\text{II-32})$$

Introduisant la relation du milieu  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

(II-31) et (II-32) dans (II-30)

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{J} \quad (\text{II-33})$$

Pour  $\mu = \text{constante}$

$$\text{Sachant que } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \Delta \vec{A} + \overrightarrow{\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} \quad (\text{II-34})$$

$$\text{Et } \vec{\nabla} \vec{A} = 0$$

$$\text{Alors } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\Delta \vec{A} \quad (\text{II-35})$$

$$\text{Par ailleurs, nous avons } \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Les équations (II-7), (II-31) et (II-27) qui nous amènent à :

$$\vec{J} = -\sigma \overrightarrow{\nabla V} = \vec{J}_S \quad (\text{II-36})$$

La combinaison de (II-14), (II-34), (II-35) et (II-36) nous donne

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}_S \quad (\text{II-37})$$

Elle traduit le phénomène magnétique en régime permanent, l'équation (II-37) s'exprime :

### En coordonnées cartésiennes

Soit  $\vec{A} (0,0, A_z)$ ,  $\vec{J}_S (0,0, J_{sz})$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_{sz}$$

### En coordonnées axisymétriques

Soit  $\vec{A} (0, A_\varphi, 0)$ ,  $\vec{J}_S (0,0, J_{S\varphi})$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial z} \right) = -\mu J_{S\varphi}.$$

**Remarque** [14] [15]

Il existe une infinité de vecteurs  $\vec{A}$  qui satisfait la relation (II-32) du moment que le rotationnel du gradient de toute fonction scalaire est nul, afin d'assurer l'unicité de la solution, une condition de Jauge est imposée, mais ceci n'est pas nécessaire dans le cas particulier des système axisymétrique 2D, la Jauge de Coulomb est automatiquement vérifiée, et le problème d'unicité de la solution ne se pose pas.

**II-9-3-Modèle magnétodynamique**

Dans une équation magnétodynamique, les sources dépendent du temps, donc  $\frac{\partial}{\partial t}$  est différent de zéro, ce qui nous amène à considérer les courants induits dans la quatrième équation de Maxwell, soit :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_S$$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{ind} = -\vec{\Delta}V \\ \vec{E}_S = \frac{-\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right.$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma \vec{E} + \sigma \vec{E} \\ &= \sigma' \left( -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (*) \\ &= \vec{J}_S + \vec{J}_{ind} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

En adaptant la notion  $\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\vec{v} \wedge \vec{B})$

(\*) Devient :  $\vec{J} = \vec{J}_S + \sigma \frac{D\vec{A}}{Dt}$

Portant  $\vec{J}$  dans l'expression (II-33) précédente, on trouve :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \mu\sigma \frac{D\vec{A}}{Dt} = \mu \vec{J}_S \quad (II-38)$$

C'est équation magnétodynamique en terme de potentiel vecteur magnétique, elle traduit le phénomène de pénétration des courants, et le comportement du régime transitoire des machines électriques [10].

En régime harmonique :  $\frac{\partial}{\partial t} \approx j\omega$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j\omega\mu\sigma\vec{A} = \mu\vec{J}_S$$

Si  $\vec{A}(0,0,A_Z)$ ,  $\vec{J}_S(0,0,j_{SZ})$  ou  $\vec{A}(0,A_\varphi,0)$ ,  $\vec{J}_S(0,j_{S\varphi},0)$

Cette expression devient dans le cas :

**a-2D cartésien**

$$\frac{\partial^2 A_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_Z}{\partial y^2} + \sigma\mu \frac{DA_Z}{Dt} = -\mu J_{SZ}$$

**b-2D axisymétrique**

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial z} \right) + \sigma\mu \frac{DA_\varphi}{Dt} = -\mu J_{S\varphi}$$

**II-10-Energie, force et pression magnétiques**

**II-10-1-Energie magnétique**

La puissance totale fournie par la source vaut :

$$\frac{dw}{dt} = \int_{\Gamma} \left( EJ + \frac{\partial A}{\partial t} J \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{J^2}{\sigma} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial t} J d\Gamma \tag{II-39}$$

Le premier terme correspond à la puissance dépensée par effet joule, tandis que le deuxième terme représente la puissance dépensée par la source à cause de l'existence d'une force électromagnétique induite [16].

L'énergie emmagasinée dans le champ magnétique vaut alors :

$$\frac{dw_m}{dt} = \int_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial t} \tag{II-40}$$

Sachant que  $\vec{J} = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$ , il en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{dw_m}{dt} &= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} \frac{\partial A}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) d\Gamma \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} [B(\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial A}{\partial t}) - \vec{\nabla}(\frac{\partial A}{\partial t} \wedge \vec{B})] d\Gamma \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} (B \frac{\partial B}{\partial t}) d\Gamma + \frac{1}{\mu} \int_S B \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ds \end{aligned}$$

$\Gamma$  : est volume contenant les points où la densité de courant est non nulle

$S$  : est la surface correspondante

Si nous considérons le volume de tout l'espace, cela revient à tendre la surface ( $S$ ) à l'infini, et il en résulte que :

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} B \frac{\partial B}{\partial t} \tag{II-41}$$

En sortant la dérivée de l'induction sous le signe de l'intégrale, nous aurons

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} B^2 d\Gamma \tag{II-42}$$

Posant  $w_m=0$  quand  $B=0$ , on trouvera finalement que

$$w_m = \frac{1}{2\mu} \int_{\Gamma} B^2 dt \tag{II-43}$$

### II-10-2-Force magnétique

La force électromagnétique de Lorentz, résulte de la coexistence d'une induction magnétique résulte d'une source d'excitation et d'une densité de courant induite dans un milieu conducteur.

L'expression de cette force est donnée par

$$\vec{F} = \iiint_V (\vec{J} \wedge \vec{B}) dv \tag{II-44}$$

Le terme :  $\vec{J} \wedge \vec{B}$  représente la densité de force magnétique qui est souvent utilisée à la place de la force magnétique.

Les composante de la force de Lorentz dans le cas d'un système axisymétrique 2D, se déduit à partir de :

$$\vec{F}_r = 2\pi \int_S \int J_\varphi B_z r dr dz \quad (\text{Force radiale}) \quad (\text{II-45})$$

$$\vec{F}_z = -2\pi \int_S \int J_\varphi B_r r dr dz \quad (\text{Force axiale}) \quad (\text{II-46})$$

Avec :

$$B_r = \frac{-1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z}$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$$

$$J_\varphi = \frac{-\sigma}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial t}$$

### II-10-3-Pression magnétique

Elle est donnée par le rapport de la force magnétique sur la surface où elle s'exerce, comme suite :

$$P = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} \quad [\text{N/m}^2] \quad (\text{II-47})$$

Sachant que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , on peut écrire donc

$$P = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (\text{II-48})$$

### II-11-Méthodes de résolution

L'efficacité de ces méthodes dépend essentiellement de la nature du problème et de la géométrie des systèmes à étudier.

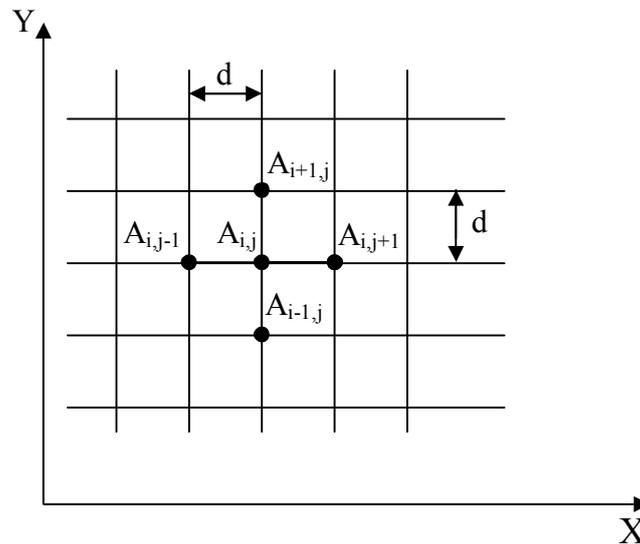
#### II-11-1-Méthodes numériques

Hormis le cas des problèmes très simples où de géométries très particulières, il ne faut pas trop espérer de résoudre à la main, or l'ordinateur tout comme l'homme qui l'a inventé est « fini » dans toutes les directions, il est limité en place mémoire, en précision, en durée de fonctionnement. Résoudre numériquement le problème continu est une utopie.

C'est pourquoi, il faut discrétiser le problème (c'est-à-dire le remplacer par problème discret censé lui être proche en certain sens). On peut réaliser une approximation par différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis ou une combinaison de ces méthodes [18].

### II-11-1-1-Méthode des différences finies

Cette méthode est utilisée depuis de nombreuses années en électromagnétique. Elle consiste en la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences finies, où chaque dérivée est remplacée par une valeur en un certain nombre fini de points, en considérant ces points à une distance  $d$  les uns des autres [20].



**Fig-II-1-Réseau carré d'un maillage différences finies**

L'approximation des dérivées au point A ( $i, j$ ) sera

$$\left[ \frac{\partial A}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2d}$$

$$\left[ \frac{\partial A}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2d}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{d^2}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y^2} \right]_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{d^2}$$

Ce permet la déduction de l'expression du laplacien par :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{d^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{d^2}$$

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{d^2}$$

C'est la forme à cinq points.

Cette méthode est très difficile à généraliser aux problèmes à géométrie complexe et condition aux limites quelconques [23].

### **-Avantages de cette méthode**

- Cette méthode est très attrayante par sa simplicité quand il s'agit de problèmes à géométrie régulière.
- Le maillage carré est plus simple à réaliser

### **-Inconvénients de cette méthode**

- Elle ne s'applique pas aux problèmes non linéaires
- Elle est difficile à généraliser pour des géométries complexes
- La taille du système d'équations est très importante. Cela revient à dire que le temps résolution l'est aussi, ainsi que l'espace mémoire alloué à la résolution.

## **II-11-1-2-Méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis est utilisée pour la résolution des problèmes à valeurs limites avec des conditions aux limites. Elle consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnue pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques [24].

Pour pouvoir trouver une solution à des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur des frontières. La méthode des éléments finis consiste à [23],[26] :

- subdiviser le domaine géométrique en éléments ;

- remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations algébriques à l'aide de calcul variationnelle ou minimisation de l'erreur comme méthode des résidus pondérés.

La solution finale s'obtient en assemblant des équations algébriques sur tous les éléments.

**II-11-1-2-Méthode de volumes finis [28] [29]**

Le domaine est divisé en un nombre fini d'éléments de volume entourant le point P. L'équation est intégrée sur chaque élément. Dans cette méthode, contrairement à la méthode des éléments finis, la variation linéaire de l'inconnue peut être remplacée par d'autre fonction d'interpolation. On peut alors approximer par un sous domaine en fonction de la variation de la grandeur en y choisissant une interpolation convenable.

Pour le problème à deux équations on suppose une épaisseur unité suivant Z, le volume d'un élément est :

$$\Delta X . \Delta Y . 1$$

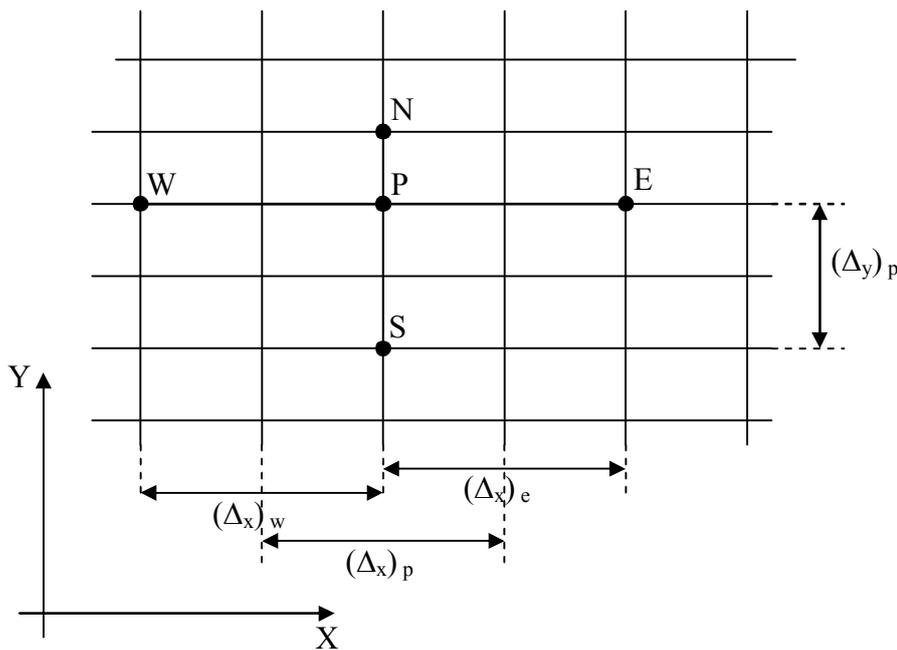
L'intégration de l'équation  $L(p) A(p) = f(p_s)$  sur le volume entourant P est :

$$\int L(x, y) . A(p) (dx)_p . (dy)_p = \int f . (dx)_p (dy)_p$$

Considérons un seul terme de l'équation présente qui s'écrit dans le cas de variation linéaire comme suite :

$$\left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_p = \left[ \frac{A(E) - A(p)}{(\Delta x)_e} - \frac{A(p) - A(\omega)}{(\Delta x)_\omega} \right] \frac{1}{(\Delta y)_p}$$

Les points de calcul peuvent être au milieu des éléments (fig-II-2), dans ce cas le terme source au point P est représenté par une valeur moyenne dans l'élément  $(\Delta y)_p$ . Si on les dispose d'une manière à avoir des l'interfaces au milieu de deux points consécutifs, le principe d'établissement de l'équation discrétisées est identique des différences finis.



**Fig-II-2- Maillage type volume finis**

## II-11-2-Méthode analytiques

### II-11-2-1-Méthode de séparation de variable [29]

La résolution d'une équation aux dérivées partielles en terme de coordonnées spatiales dans le cas général est délicate, c'est pour cela qu'on fait recours à certains systèmes de coordonnées pour réduire leurs complexités. Ces systèmes sont les systèmes cartésiens, les systèmes cylindriques et les systèmes sphériques.

Le potentiel peut se mettre sous forme d'un produit de fonction de chacune des coordonnées. Il faudra ensuite satisfaire les conditions aux limites, qui en fait imposent le choix du système de coordonnées.

### II-11-2-2-Méthode d'intégrale de frontière

La méthode permet de déterminer les grandeurs inconnues tout en limitant la discrétisation sur la frontière du domaine. Elle est d'un emploi restreint aux milieux linéaires [30] [31]. Elle trouve son application dans le domaine de hautes fréquences, car profondeur de pénétration est très faible vis-à-vis d'autres dimensions géométriques.

Clicours.COM

### II-11-2-3-Méthode des équations intégrales

Contrairement aux autres méthodes présentées précédemment qui résolvent directement l'équation aux dérivées partielles, la méthode des équations intégrales est basée sur la résolution de l'équation de poisson. Cette équation définit le lien entre le potentiel vecteur magnétique et sa source qui est une densité de courant dans le cas d'un milieu linéaire [3].

Sachant que l'équation de poisson s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{II-49})$$

Cette équation peut s'écrire comme suite

$$L(A) = g(p)$$

Où :

- L : opérateur différentiel
- g (p) : fonction d'excitation

Sa solution est donnée par

$$A(p) = \int_{\Omega} F(p_0, p) g(p) d\Omega \quad (\text{II-50})$$

Avec A (p) : potentiel vecteur magnétique inconnu en un point P(r, z)

F(p<sub>0</sub>, p) : Fonction de GREEN dans notre cas cette fonction peut être approximée par :

$$F(p_0, p) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{P} - \vec{P}_0|} \quad (\text{II-51})$$

En remplaçant l'équation (II-4) avec  $\rho = 0$  (conducteur) dans (II-9) on aboutit à une équation qui n'est que l'équation de (Biot et Savart)

$$A(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{J_S(P_0)}{|\vec{P} - \vec{P}_0|} \quad (\text{II-52})$$

Où :

- J<sub>S</sub> (P<sub>0</sub>) : représente la densité du courant d'excitation
- A (P<sub>0</sub>) : le potentiel vecteur magnétique crée en un point P dans l'air

Cas d'un système source-charge (linéaire)

Dans le système électromagnétique représenté sur la figure ci-dessous l'équation s'écrira

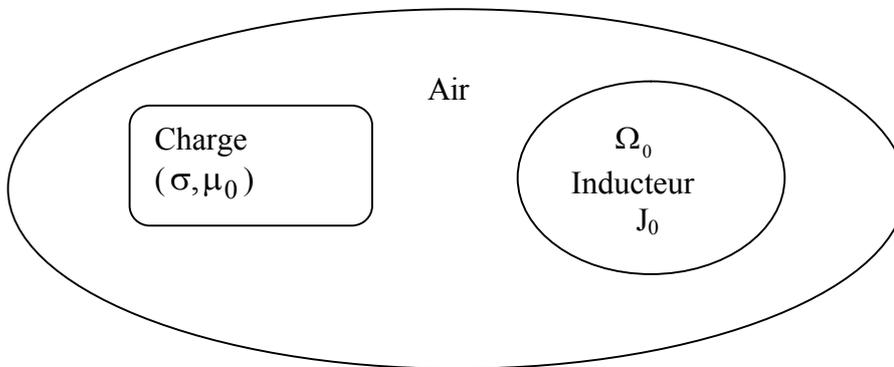
$$A(P) = \int_{\Omega_0} F(P, P_0) J_S(P_0) d\Omega_0 + \int_{\Omega_1} F(P_1, P) J_1(P_1) d\Omega_1 \quad (\text{II-53})$$

$-J_S(P_0)$  : densité de courant de source

$-J(P_1)$  : densité de courant induit en un point P de charge

Avec

$$J(P_1) = -\sigma \frac{\partial A(P_1)}{\partial t} \quad (\text{II-54})$$



**Fig-II-3-probleme magnétique linéaire**

### Avantage de la méthode [20]

- cette méthode se base sur des expressions analytiques (loi de Biot et Savart), donc elle est plus précise que les autres méthodes.
- Son utilisation ne nécessite pas la connaissance des conditions aux limites, ce qui permet de réduire le domaine d'étude à la charge seulement, par contre elle présente un inconvénient vu qu'elle ne s'applique pas aux géométries complexes et aux problèmes non linéaires.

II-12-L'expression analytique du potentiel vecteur magnétique

II-12-1-Application à cas axisymétrique

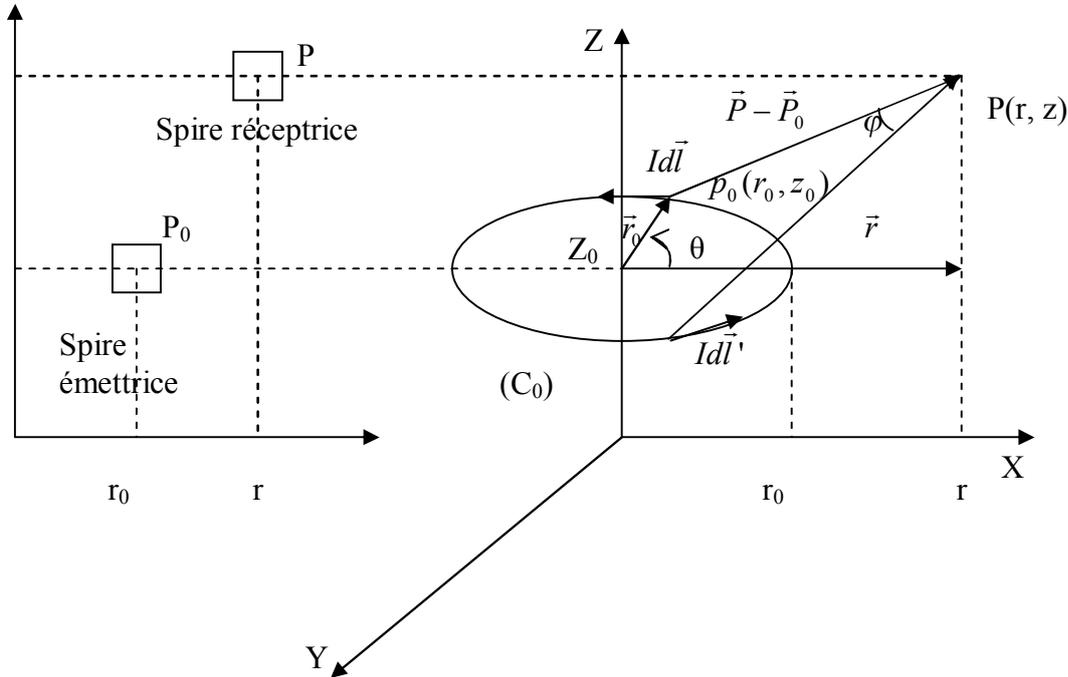


Fig-II-4-Représentation des spires émettrices et réceptrices

Les composantes radiales et longitudinales du potentiel vecteur magnétique sont nulles à cause de symétrie. Il nous reste la composante azimutale ; qui est donnée par la formule suivante.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_S(P_0) d\Omega}{|\vec{P} - \vec{P}_0|} \tag{II-55}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(P_0) dv}{|\vec{P} - \vec{P}_0|} \tag{II-56}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}}{|\vec{P} - \vec{P}_0|} \tag{II-57}$$

Avec

- $\mu_0$  : perméabiliser magnétique du vide.
- $J_S$  : densité surfacique du courant.

- J : densité volumique du courant.

$$dl = R \cos \varphi d\varphi$$

$$|\vec{P} - \vec{P}_0| = \sqrt{(z - Z)^2 + (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi)} \quad (\text{II-58})$$

$$\vec{A} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{J(P_0).S.R \cos \varphi.d\varphi}{\sqrt{(z - Z)^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi}} \quad (\text{II-59})$$

On pose :

$$2\theta = \pi - \varphi$$

D'où :

$$d\varphi = -2d\theta \quad \text{et} \quad \cos \varphi = 2 \sin^2 \theta - 1$$

$$K = \frac{\sqrt{4Rr}}{\sqrt{(R+r)^2 + (z-Z)^2}} \quad 0 < K < 1 \quad (\text{II-60})$$

D'où :

$$A = \frac{-\mu_0}{2\pi} K \sqrt{\frac{R}{r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{J(P_0).S.(2 \sin^2 \theta - 1)}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (\text{II-61})$$

Sachant que :

$$\frac{K^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta}} - \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{II-62})$$

On aura :

$$A = \frac{\mu_0 J(P_0).S}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} G(K) \quad (\text{II-63})$$

Avec :

$$G(K) = \frac{(2 - K^2)E_1(K) - 2E_2(K)}{K} \quad (\text{II-64})$$

$$E_1(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{II-65})$$

$$E_2(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{II-66})$$

$E_1(K)$  et  $E_2(K)$  représentent respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce.

### II-12-2-Calcul des intégrales elliptiques de LEGENDRE

Ces fonctions sont très importantes dans les systèmes de révolution, car elles permettent de déterminer de la distribution du courant induit. Elles sont définies pour  $K$  compris entre 0 et 1, sauf que pour  $K=1$  la fonction  $E_1(k)$  ne l'est pas.

$$E_1(K = 0) = E_2(K = 0) = \frac{\pi}{2}$$

$$E_1(K = 1) = \infty; E_2(K = 1) = 1$$

La dérivée de  $E_1(K)$  et  $E_2(K)$  s'expriment par :

$$\frac{dE_1(K)}{dK} = \left[ \frac{E_2(k)}{1 - K^2} - E_1(K) \right] \frac{1}{K} \quad (\text{II-67})$$

$$\frac{dE_2(K)}{dK} = [E_2(k) - E_1(k)] \frac{1}{K} \quad (\text{II-68})$$

Le calcul de  $E_1(K)$  et  $E_2(K)$  se fait en utilisant le développement limité suivant :

$$E_1(K) = \log(4) + \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i + \left[ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^N d_i \lambda_i \right] \log \frac{1}{\lambda} \quad (\text{II-69})$$

$$E_2(K) = 1 + \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i + \left[ \sum_{i=1}^N d_i \lambda_i \right] \log \frac{1}{\lambda} \quad (\text{II-70})$$

Avec :

$$\lambda = 1 - K^2 \quad (\text{II-71})$$

Une approximation satisfaisante a été établie pour N=4 [ 3 ]

i	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>	c <sub>i</sub>	d <sub>i</sub>
1	9.666338350	1.24985468	4.432515145	2.499836641
2	3.589980090	6.8802295505	6.260761942	9.200109374
3	3.742539571	3.328521016	4.757404429	4.069468414
4	1.451338556	4.418398230	1.736314854	5.263789328

### II-13- Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les modèles mathématiques qui permettent de caractériser les phénomènes électromagnétiques et les différentes méthodes de résolutions. On retiendra, particulièrement, l'hypothèse des structures axisymétriques qui nous intéressent où nous avons réduit le nombre d'inconnues à une seule variable qui est le potentiel vecteur magnétique et la méthode des équations intégrales pour des raisons suivantes [3].

- Elle se base sur des expressions analytiques (loi de Biot et Savart), donc elle est plus précise que les autres méthodes.
- Contrairement aux autres méthodes, son utilisation ne nécessite pas la connaissance des conditions aux limites, cela permet de réduire le domaine de résolution à la charge seulement.



### III-1-Introduction

La déformation par champ électromagnétique intense présente un intérêt important, cette technique est plus précise que les autres méthodes utilisant les forces classiques. Néanmoins son étude reste complexe à cause:

- 1- La forme impulsionnelle du courant, du champ et de la force magnétique
- 2- Modification des paramètres géométriques du système durant le processus de magnétoformage
- 3- Le couplage des phénomènes électrique, magnétique et mécanique,

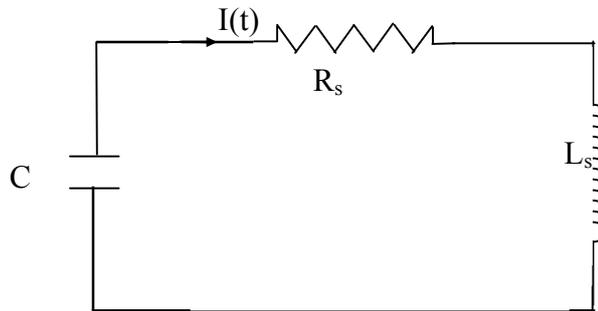
Quand l'énergie électrique délivrée par une installation de magnétoformage n'est pas suffisante pour développer des forces électromagnétiques capables de provoquer les déformations souhaitées d'une pièce quelconque, on intercale un conformateur entre la bobine et la pièce à déformer. Ce dernier joue un rôle d'un secondaire d'un transformateur en court circuit, permettant l'augmentation du courant de décharge, le champ magnétique étant proportionnel au courant se trouve donc nettement multiplié.

Dans ce chapitre nous développerons un modèle numérique pour calculer la pression électromagnétique développée par un système de magnétoformage avec et sans conformateur de champ.

### III-2-Expression du courant de décharge

Le système que nous étudions est équivalent à la mise en série d'une résistance  $R_s$  et d'une inductance  $L_s$ , que nous supposons constantes dans notre étude (Fig-III-1). Lorsque une batterie de condensateur se décharge à travers une bobine de champ placée à l'intérieur de la pièce à déformer, il sera l'objet d'un courant induit azimutal. Ce courant, placé dans un champ magnétique, donne naissance à des forces électromagnétiques radiales intenses orientées vers les parois du tube. Ces forces conduisent à la déformation plastique du tube, une fois la limite élastique du matériau dépassée.

La détermination de ce courant se fait en résolvant l'équation électrique régissant le circuit électrique équivalent du système.



**Fig-III-1 Circuit équivalent du système**

L'équation électrique régissant le circuit est alors :

$$L_S \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R_S \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0 \quad (\text{III-1})$$

Si le condensateur est chargé sous une tension  $V_0$ , en résolvant l'équation (III-1), on aura :

$$I(t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L_S}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(2\pi f t) \quad (\text{III-2})$$

Où :

$$\tau = \frac{2L_S}{R_S}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L_S C} - \frac{1}{\tau^2}} \quad (\text{III-3})$$

### III-3-Analyse numérique sans conformateur de champ

#### III-3-1-Maillage de la pièce

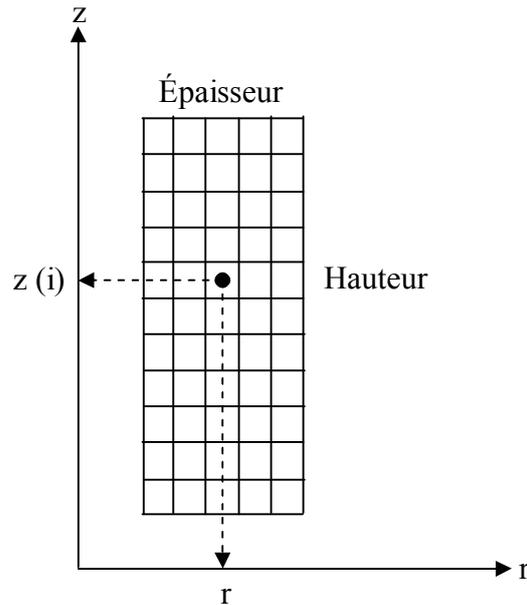


Fig-III-2-Maillage de la pièce

La pièce est divisée en M éléments coaxiaux, chaque élément (i) est déterminé par ses coordonnées r (i) et z (i).

#### III-3-2-Calcul du potentiel vecteur magnétique

##### III-3-2-1-Le potentiel vecteur magnétique créé par la bobine

Le potentiel vecteur magnétique créé par la bobine en un élément (i) de coordonnées r(i) et z(i) est la somme des potentiels vecteur magnétiques créés par chaque spire de la bobine en cet élément.

$$A_0(i) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{r_i}} \sum_{j=1}^N G(K_{ij}) \quad (\text{III-4})$$

Avec :

$$K_{ij}^2 = \frac{4r(i)R}{(R + r(i))^2 + (z(i) - Z(i))^2} \quad (\text{III-5})$$

- $\mu_0$  : la perméabilité magnétique du vide.
- I : courant inducteur.
- R : rayon moyen de la bobine.

- Z (j) : la coordonnée axiale de la spire j de la bobine.
- R (i) : la coordonnée radiale de l'élément i de la pièce.
- Z (i) : la coordonnée axiale de l'élément i de la pièce.
- N : nombre de spires de la bobine.

**III-3-2-2-Le potentiel vecteur magnétique créé par les éléments de la pièce**

De la même manière que pour le potentiel vecteur magnétique créé par les spires la bobine, on peut calculer l'effet de tous les éléments de la pièce sur l'élément (i) de la pièce elle-même comme suit :

$$A_1(i) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{j=1}^M \sqrt{\frac{r(j)}{r(i)}} J(j) S_j G(k_{ij}) \tag{III-6}$$

Avec :

$$k^2_{ij} = \frac{4r(i)r(j)}{(r(j) + r(i))^2 + (z(i) - z(j))^2} \tag{III-7}$$

- S (j) : section de l'élément j de la pièce
- M : nombre d'élément de la pièce
- J (j) : densité volumique du courant dans l'élément j de la pièce. Elle est donnée par la formule suivante :

$$J(j) = -\sigma_p \frac{dA(j)}{dt} \tag{III-8}$$

- $\sigma_p$  : la conductivité électrique de la pièce

**III-3-2-3-le potentiel vecteur magnétique total**

C'est la somme du potentiel vecteur magnétique dû aux spires de la bobine (sans conformateur de champ) et celui dû aux éléments de la pièce. La relation donnant sa valeur en un élément i de la pièce s'écrit comme suit :

$$A_{sc}(i) = A_0(i) + A_1(i) \tag{III-9}$$

Avec:

$A_{sc}(i)$ : potentiel vecteur magnétique total sans conformateur

$A_0(i)$  : potentiel vecteur magnétique dû au courant d'excitation

$A_1(i)$  : potentiel vecteur magnétique dû aux courants induits

En remplaçant (III-6) et (III-8) dans (III-9) on aura :

$$A_{sc}(i) = A_0(i) - \sum_{j=1}^M \frac{\mu_0 \sigma_p S_j}{2\pi} \sqrt{\frac{r(j)}{r(i)}} G(k_{ij}) \cdot \frac{dA_{sc}(i)}{dt} \quad (III-10)$$

On pose :

$$T_{ij} = \frac{\sigma_p S_j}{2\pi} \sqrt{\frac{r_j}{r_i}} G(k_{ij})$$

La relation (III-10) devient :

$$A_{sc}(i) = A_0(i) - \sum_{j=1}^M T_{ij} \frac{dA_{sc}(i)}{dt} \quad (III-11)$$

L'équation (III-11) peut s'écrire sous forme matricielle à l'instant t, pour chaque élément i comme suit :

$$\{A_{sc}\}^t = \{A_0\}^t - [T]^t \left\{ \frac{dA_{sc}}{dt} \right\}^t \quad (III-12)$$

Où :

$\{A_{sc}\}$ ,  $\{A_0\}$  et  $\left\{ \frac{dA_{sc}}{dt} \right\}$  sont des vecteurs de M éléments et :

- [T] : Matrice pleine M X M

Le terme  $\frac{dA_{sc}}{dt}$  est remplacé à tout instant, par une dérivée numérique :

$$\left\{ \frac{dA_{sc}}{dt} \right\}^t = \frac{\{A_{sc}\}^t - \{A_{sc}\}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (III-13)$$

-  $\Delta t$  : pas de temps

En remplaçant l'expression (III-13) dans l'équation (III-12), on aura :

$$\left[ \Delta t [I] + [T]^t \right] \{A_{sc}\}^t = \Delta t \{A_0\}^t + [T]^t \{A_{sc}\}^{t-\Delta t} \quad (III-14)$$

[I] : matrice identité (M X M)

Pour résoudre ce système, on utilise la méthode de Gauss avec pivotation partielle à chaque pas du temps.

### III-3-3-Densité de courant

Connaissant les valeurs du potentiel vecteur magnétique, la distribution des densités de courant sera calculée en utilisant la relation :

$$\{J\}^t = -\sigma_p \left[ \frac{\{A_{sc}\}^t - \{A_{sc}\}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right] \quad (III-15)$$

-  $\{J\}$  : vecteur de M élément.

### III-3-4-Calcul de l'induction magnétique

La troisième équation de Maxwell est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{sc} = 0$$

Donc :

$$\vec{B}_{sc} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{sc} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A}_0 + A_1) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_0) + (\vec{\nabla} \wedge A_1) \quad (III-16)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_0 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_0 \\ \vec{B}_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1 \end{array} \right. \quad (III-17)$$

Donc :

$$\vec{B}_{sc} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (III-18)$$

-  $\vec{B}_0$  : Induction magnétique due au courant inducteur

-  $\vec{B}_1$  : Induction magnétique due au courant induit

Les composantes de  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_1$  en coordonnées cylindriques sont :

$$\vec{B}_1 \begin{cases} B_{1r} = -\frac{\partial A_1}{\partial z} \\ 0 \\ B_{1z} = \frac{1}{r} \frac{\partial [rA_1]}{\partial r} \end{cases} \quad \text{(III-19)}$$

$$\vec{B}_1 \begin{cases} B_{1r} = -\frac{\partial A_1}{\partial z} \\ 0 \\ B_{1z} = \frac{1}{r} \frac{\partial [rA_1]}{\partial r} \end{cases} \quad \text{(III-20)}$$

### III-3-5-L'expression de la densité volumique de la force

La densité de force volumique est donnée par la loi de Laplace pour chaque élément  $i$  :

$$\vec{f}(i) = \vec{J}(i) \wedge \vec{B}(i) \quad \text{(III-21)}$$

Les composantes de cette densité de force en coordonnées cylindriques sont :

- la composante radiale :

$$f_r(i) = J(i) \cdot B_z(i) \quad \text{(III-22)}$$

- La composante axiale :

$$f_z(i) = -J(i) B_r(i)$$

$f_r$  : densité volumique de la force radiale

$f_z$  : densité volumique de la force axiale

### III-3-6-Equation de la pression électromagnétique

La pièce est propulsée par une pression électromagnétique répartie sur sa surface interne, son expression est donnée par l'expression suivante : [6], [30], [31] :

$$P_m = \frac{2\pi \iint f_r r dr dz}{2\pi r_0 L} \quad (\text{III.23})$$

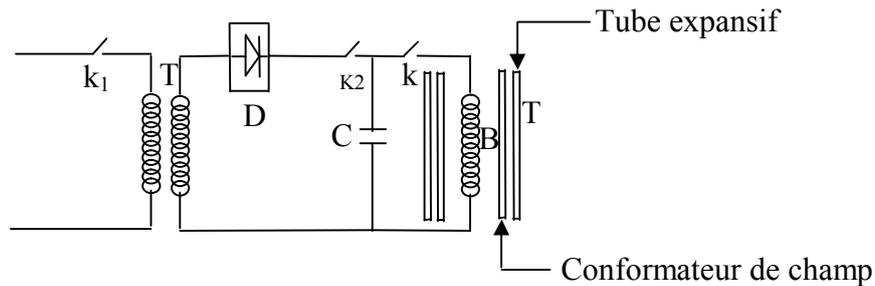
$r_0$  : rayon intérieur du tube

$L$  : longueur du tube

### III-4-Modèle numérique avec conformateur de champ

Le conformateur de champ prend une place importante dans l'industrie, il est principalement utilisé dans les installations de magnétoformage. Son utilisation est motivée par le fait que certains générateurs ne délivrent pas une énergie suffisante, son introduction augmente sensiblement cette dernière et permis d'avoir des déformations désirées.

Dans le cas de l'expansion d'un tube, la surface interne du conformateur sera parcourue par des courants induit crée par le courant de décharge du condensateur. Quand les courants atteignent la fente du conformateur, cette dernière les oblige à passer au voisinage de la pièce à déformer. On est alors en présence d'un transformateur dont le primaire est la bobine multispire, et le secondaire est le conformateur monospire en court-circuit. En raison de la présence de la fente isolée, le système ne possède plus de symétrie axiale. Il en résulte que les grandeurs électromagnétiques sont tridimensionnelles ; il faudrait donc traiter les équations de Maxwell en tridimensionnel.



**Fig-III-3- Schéma de principe d'une installation contenant un conformateur**

Avec :

- $k_1, k_2$  et  $k$  : Interrupteurs
- $T$  : transformateur de haute tension
- $D$  : redresseur double alternances
- $C$  : capacité de la batterie de condensateurs
- $B$  : bobine de champ
- $T$  : tube (pièce à déformer)

### III-4-1-Modélisation du conformateur

#### III-4-1-1-Hypothèses de base

Les courants qui circulent dans la bobine et les parois cylindriques internes et externes sont azimutaux. A cause des fréquences utilisées en magnétoformage, de l'effet de peau est important, nous pourrions exprimer ces courants par leurs densités linéiques azimutales  $i_c$ . La distribution de  $i_c$  peut être différente entre les deux parois du conformateur. Pour cela on suppose que (voir la figure III-5) :

- 1- Les courants circulant sur la paroi interne sont exprimés par leur densité linéique  $i_c^{in}$  ;
- 2- Les courants circulant sur la paroi externe sont exprimés par leur densité linéique  $i_c^{ex}$  ;
- 3- Les courants circulant peuvent circuler sur les parois de la fente sont exprimés par leur densité linéique  $i_s$

Nous supposons que les conditions géométriques représentées par (III-24) sont vérifiées.

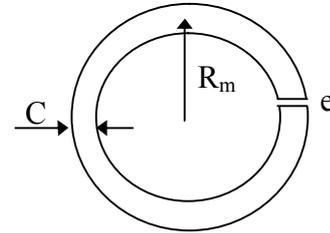
- 1- C est faible devant  $R_m$
- 2- e est faible devant C

Avec :

$R_m$  : rayon moyen du conformateur

C : épaisseur du conformateur

e : longueur de la fente.

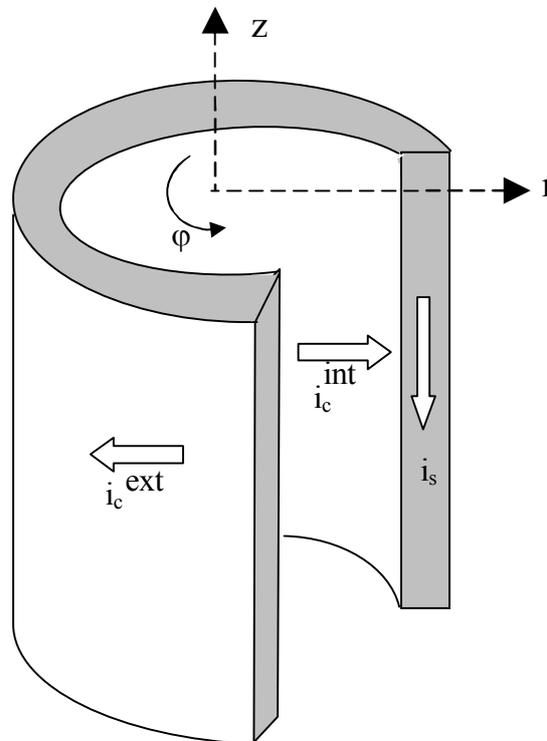


**Fig-III-4-conformateur**

Dans chaque section de coordonnée z, nous pouvons considérer deux boucles de courant  $i_c^{ex}(z)$  et  $i_c^{in}(z)$ . Sachant que l'épaisseur C du conformateur est très inférieur au rayon moyen  $R_m$  du conformateur, on introduit une densité linéique superficielle effective  $i_c^{eff}(z)$ , cette dernière peut se situer soit sur la paroi externe ou sur la paroi interne du conformateur.

$$i_c^{eff}(z) = i_c^{ext}(z) - i_c^{int}(z)$$

(III-25)



**Fig-III-5-Representation schématique du conformateur et des différents courants induits**

Nous supposons aussi que la longueur de la fente « e » est très inférieure à l'épaisseur du conformateur « C ». Pour des raisons de symétrie, on ne tiendra pas compte de l'effet des courants  $i_s$  dans les parois opposées à la fente, car ils sont opposés et leurs effets magnétiques se compensent mutuellement. De ce fait, le champ magnétique développé par le système n'est engendré que par des courants azimutaux, le potentiel vecteur magnétique n'a par conséquent, qu'une seule composante azimutale.

En résumé, dans ce modèle simplifié, on considère que

- L'effet des courants axiaux est négligé
- Les courants  $i_c^{ex}(z)$  et  $i_c^{in}(z)$  induits respectivement, dans les surfaces externe et interne du conformateur sont remplacés par une seule boucle de courant effectif azimutal  $i_c^{eff}(z)$ , ne dépendant que de la coordonnée z.

### III-4-1-2-Courant effectif

En appliquant la loi de conservation du courant dans un volume élémentaire du conformateur de faible hauteur «  $\Delta z$  » que nous allons schématiser dans la (Fig-III-6), on peut alors écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{III-26}$$

Avec :

S : surface fermée de l'élément.

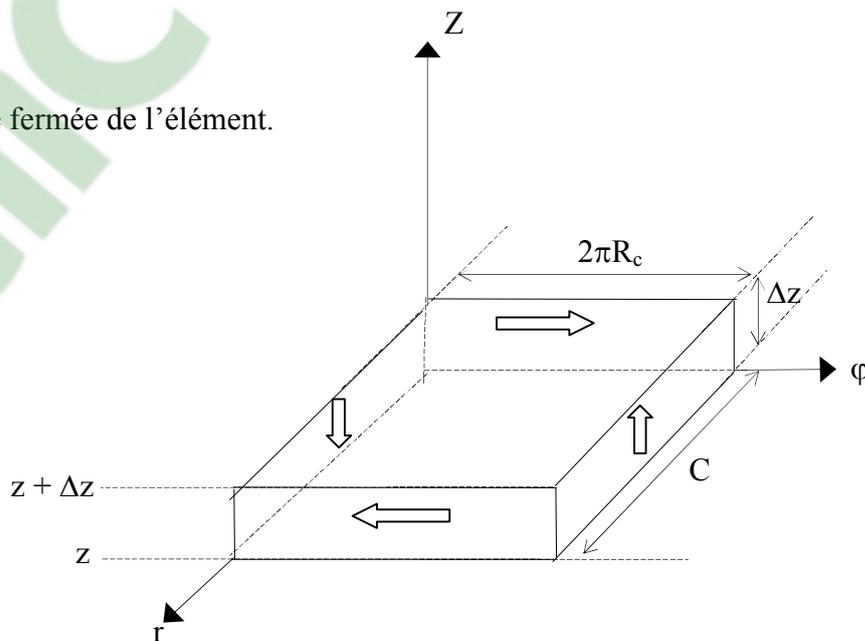


Fig-III-6-Volume élémentaire de conformateur

Par l'utilisation de densités linéiques, la relation (III-26) devient :

$$i_c^{ex}(z) \Delta z - i_c^{in}(z) \Delta z - C [i_s(z + \Delta z) - i_s(z)] = 0 \quad (III-27)$$

On aura :

$$i_c^{eff}(z) = -C \frac{i_s(z + \Delta z) - i_s(z)}{\Delta z} \quad (III-28)$$

Soit :

$$\text{Quand } \Delta z \rightarrow 0 \text{ on aura : } i_c^{eff}(z) = -C \frac{d i_s(z)}{d z} \quad (III-29)$$

### Remarque :

L'induction magnétique dans la fente est créée essentiellement par les courants axiaux dans les parois de la fente, de plus que la relation (III-29) exprime le courant effectif  $i_c^{eff}$  en fonction du courant axial  $i_s$  induit dans la fente du conformateur. Cette induction sera supposée radiale car l'épaisseur de la fente « e » est très inférieure à l'épaisseur du conformateur « C »

### III-4-1-3-Courant superficiel

L'induction à l'intérieur de la fente de conformateur  $B_{conf}$  s'exprime directement en utilisant le théorème d'Ampère [32], [33].

$$B_{conf} = \mu_0 i_s \quad (III-30)$$

Avec :

$\mu_0$  : Perméabilité magnétique du vide

En appliquant le théorème de conservation du flux  $\oint_s \vec{B} ds$  à un volume élémentaire de faible hauteur «  $\Delta z$  », nous donne :

$$B_{\text{conf}} \cdot e - B_r (2 R \pi C) = 0 \quad (\text{III-31})$$

Avec :

$B_r$  : la composante radiale de l'induction magnétique à l'extérieur de la fente

$R_C$  : rayon extérieur du conformateur

En combinons les relations (III-30) et (III-31), nous aurons l'expression du courant superficiel :

$$i_s = \frac{2\pi R_C}{\mu_0 e} B_r \quad (\text{III-32})$$

Sachant qu'en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \vec{A} \Rightarrow B_r = -\frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{III-33})$$

En remplaçant la valeur de  $B_r$  dans l'équation (III-32), nous aurons :

$$i_s = -\frac{\partial A}{\partial z} \frac{2\pi R_C}{\mu_0 e} \quad (\text{III-34})$$

A partir de l'équation (III-29), nous obtenons, l'expression du courant effectif  $i_c^{\text{eff}}$  en fonction du potentiel vecteur magnétique.

$$i_c^{\text{eff}} = \frac{2\pi R_C C}{\mu_0 e} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (\text{III-35})$$

En posant :

$$K = \frac{2\pi R_C C}{e}$$

Le courant effectif  $i_c^{\text{eff}}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

Clicours.COM

$$i_c^{\text{effe}} = \frac{K}{\mu_0} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \quad (\text{III-36})$$

Avec :

K : paramètre géométrique caractérisant du conformateur

### III-4-2-Modèle numérique d'un système contenant un conformateur

Pendant l'application, Nous supposons que l'effet de conformateur sur le courant inducteur est négligé, les mêmes équations électriques développées dans le cas sans conformateur de champ seront considérées valables.

Un nouveau courant linéique azimuthal sera induit au niveau du conformateur de champ, l'équation électromagnétique, se trouvera modifiée par l'introduction d'un nouveau potentiel vecteur magnétique  $A_f$ . On découpe le conformateur en  $N_c$  éléments suivant l'axe z, nous considérons  $N_c$  boucles de courant linéique créées par le courant inducteur :

$$i_c^{\text{eff}}(i) = \frac{K}{\mu_0} \frac{\partial^2 A_{0f}(i)}{\partial z^2} \quad (\text{III-37})$$

Avec :

$A_{0f}(i)$  : représente le potentiel vecteur magnétique crée par le courant inducteur dans un élément i du conformateur.

$$A_{0f}(i) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{R_C}} \sum_{j=1}^N G(K_{ij}) \quad (\text{III-38})$$

Avec :

$$K_{ij}^2 = \frac{4R_C R}{(R + R_C)^2 + (Z_i - Z_{ci})^2}$$

### III-4-3-Le potentiel vecteur magnétique total

Le potentiel vecteur magnétique  $A_{avc}$  (i) crée dans chaque élément de la pièce à déformer est :

$$A_{avc} (i) = A_{sc} (i) + A_f(i) \quad (III-39)$$

Avec:

- $A_{avc}$  : potentiel vecteur magnétique total
- $A_{sc}$  : potentiel vecteur magnétique total crée sans conformateur de champ
- $A_f$  : potentiel vecteur magnétique crée par le conformateur de champ

$$A_f (i) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\frac{R_C}{r_i}} \sum_{j=1}^{N_c} G(k_{ij}) i_c^{eff} (j) \Delta z \quad (III-40)$$

Avec :

- $\Delta z$  : hauteur d'un élément du conformateur
- $Z_{c_j}$  : coordonnée axiale de l'élément j du conformateur

$$k_{ij}^2 = \frac{4R_C r_i}{(r_i + R_C)^2 + (z_i - z_{c_j})^2}$$

Le potentiel vecteur magnétique sans conformateur de champ se trouve modifié par l'introduction d'un nouveau potentiel vecteur magnétique du à la présence du conformateur. Les relations données pour le premier cas restent valables pour le calcul des autres grandeurs électromagnétiques (courants induits, inductions magnétiques, les forces magnétiques et la pression électromagnétique).

### **III-4-4-application**

Le processus de calcul, dans le cas du modèle approché développé pour la modélisation du magnétoformage dans une installation, avec et sans conformateur de champ est représenté dans la figure (III-7).

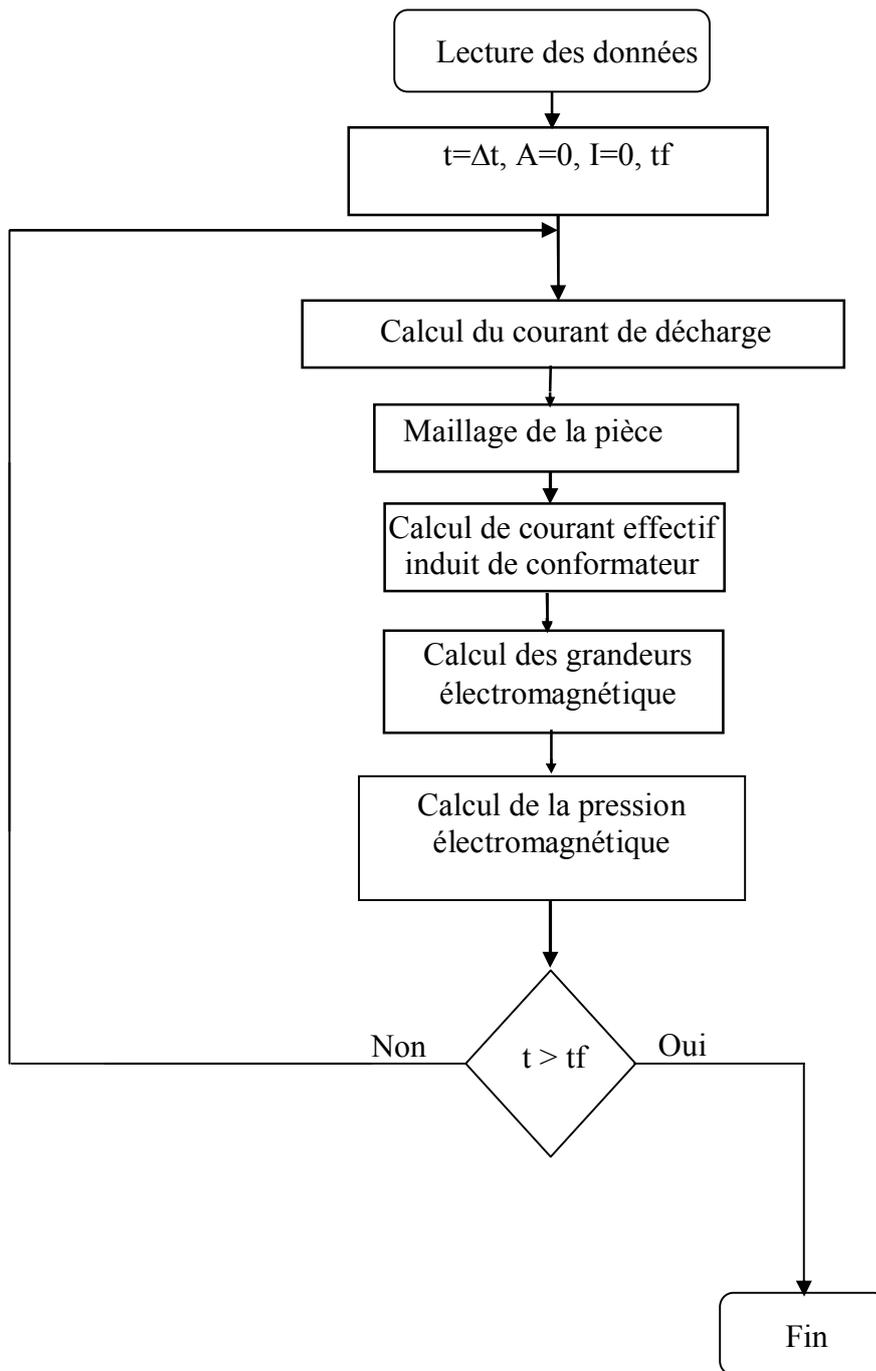


Fig-III-7-Organigramme de calcul

**III-4-4-1-Données de l'installation [19]****- Générateur d'impulsions électriques**

- Tension de décharge :  $V_0 = 8 \text{ KV}$
- Capacité de la batterie de condensateurs :  $C_0 = 40 \mu F$

**- Bobine de champ**

- Matière constituante : cuivre
- Nombre de spire :  $N=12$
- Rayon intérieur :  $R_0=12.8\text{mm}$
- Longueur :  $L=40\text{mm}$
- Conductivité électrique :  $\sigma_b = 0.57 \cdot 10^8 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
- Section du fil :  $S=2.5\text{mm}^2$

**- Pièce à déformer**

- Matière constituante : aluminium
- Rayon intérieur :  $R_0=15\text{mm}$
- Epaisseur :  $e=1\text{mm}$
- Longueur :  $L=38\text{mm}$
- Conductivité électrique :  $\sigma_p = 0.34 \cdot 10^8 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
- Densité volumique de masse :  $\rho = 2325 \text{ Kg} / \text{m}^3$

**- Conformateur de champ :**

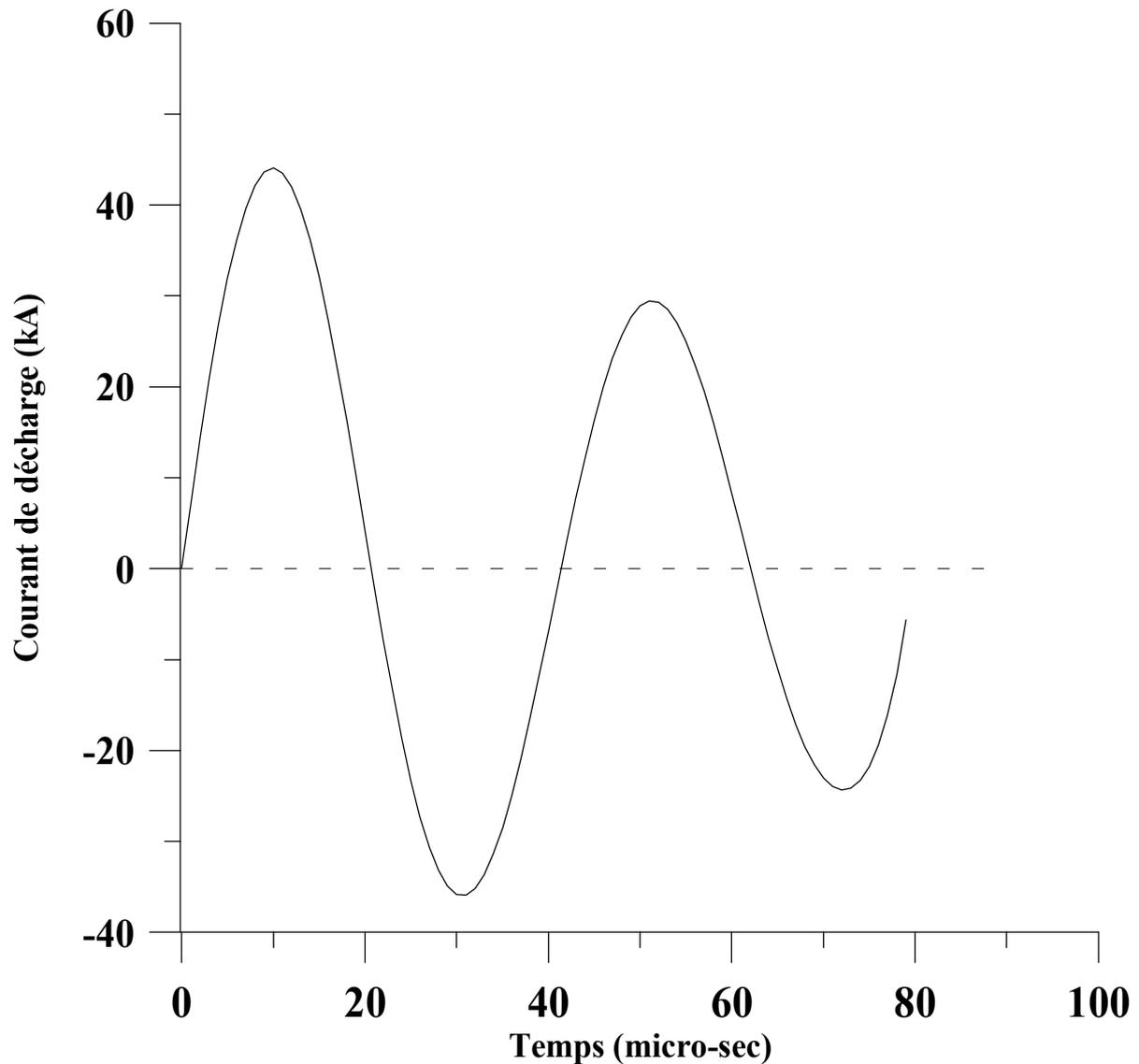
- Matière constituante : Cuivre
- Rayon moyen :  $R_m=14.7\text{mm}$
- Epaisseur :  $C=1.4 \text{ mm}$
- Longueur de la fente  $e = 0.2\text{mm}$  et  $e = 0.3\text{mm}$

**-Inductance et résistance du système :**

- L'inductance du système :  $L_s = 1.06 \mu H$
- La résistance du système :  $R=0.0218 \Omega$

### III-5-Résultats et discussions

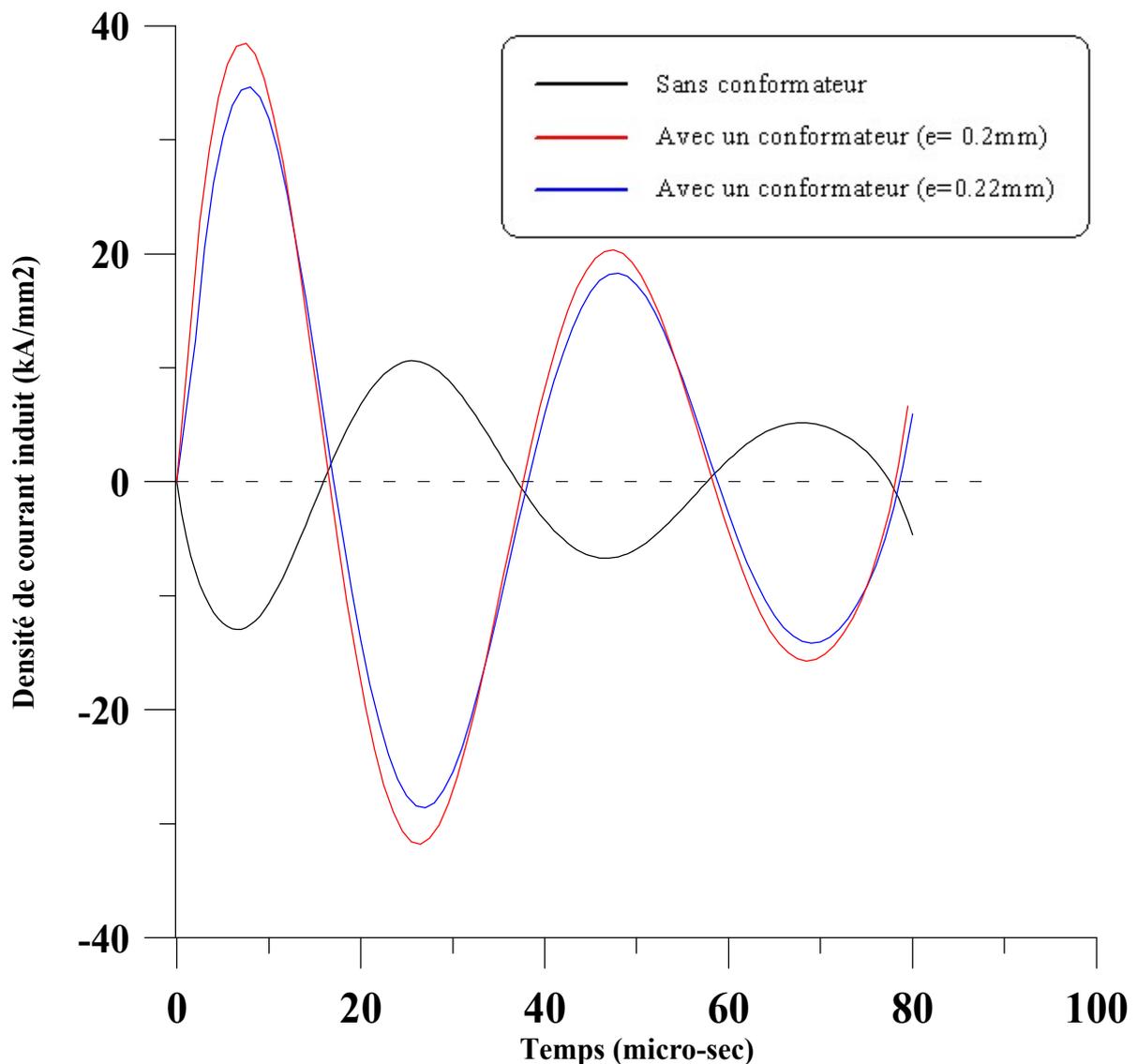
Nous avons subdiviser la pièce en 200 éléments ( $M_r = 40$  et  $M_z = 50$ ), le conformateur de champ est découpé en 100 éléments suivant l'axe z. Après voir appliqué notre modèle, nous avons obtenu les résultats suivants :



**Fig-III-8-Courant de décharge**

Sur la figure (III-8), nous avons représenté la variation du courant de décharge en fonction du temps, ce dernier a une forme sinusoïdale amortie, notons que le courant de

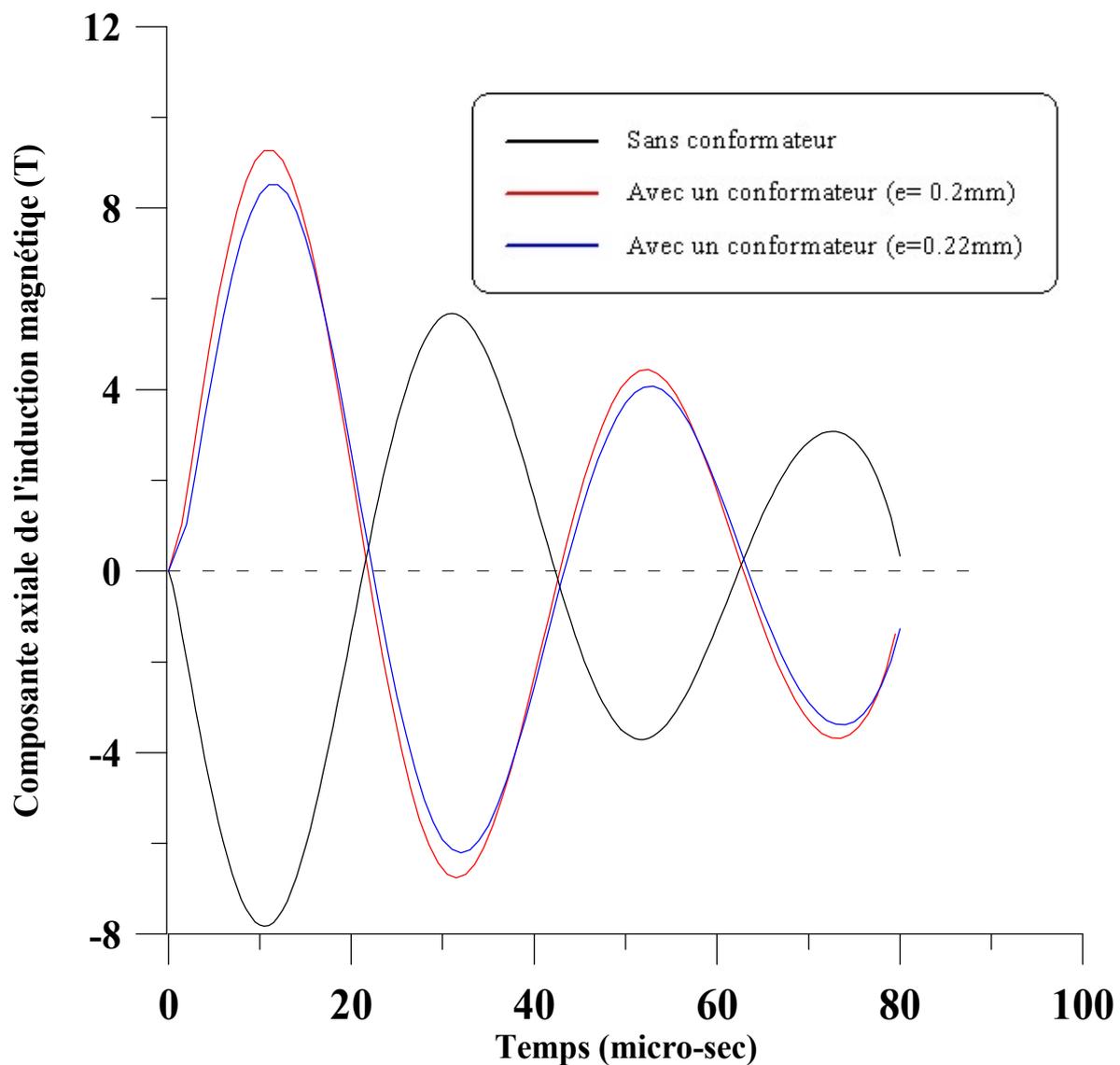
décharge n'est pas modifié par l'introduction d'un conformateur de champ car nous avons pas tenu compte des variations dans notre étude de la variations des paramètres électriques et géométriques de l'installation.



**Fig-III-9-Densité de courant induit dans la pièce**

La figure (III-9), illustre la variation de la densité du courant induit, ce dernier a la même forme de sinusoïdale amortie que celle du courant de source. Conformément à la loi de Lenz, le courant induit s'oppose au courant de décharge dans le cas sans conformateur de

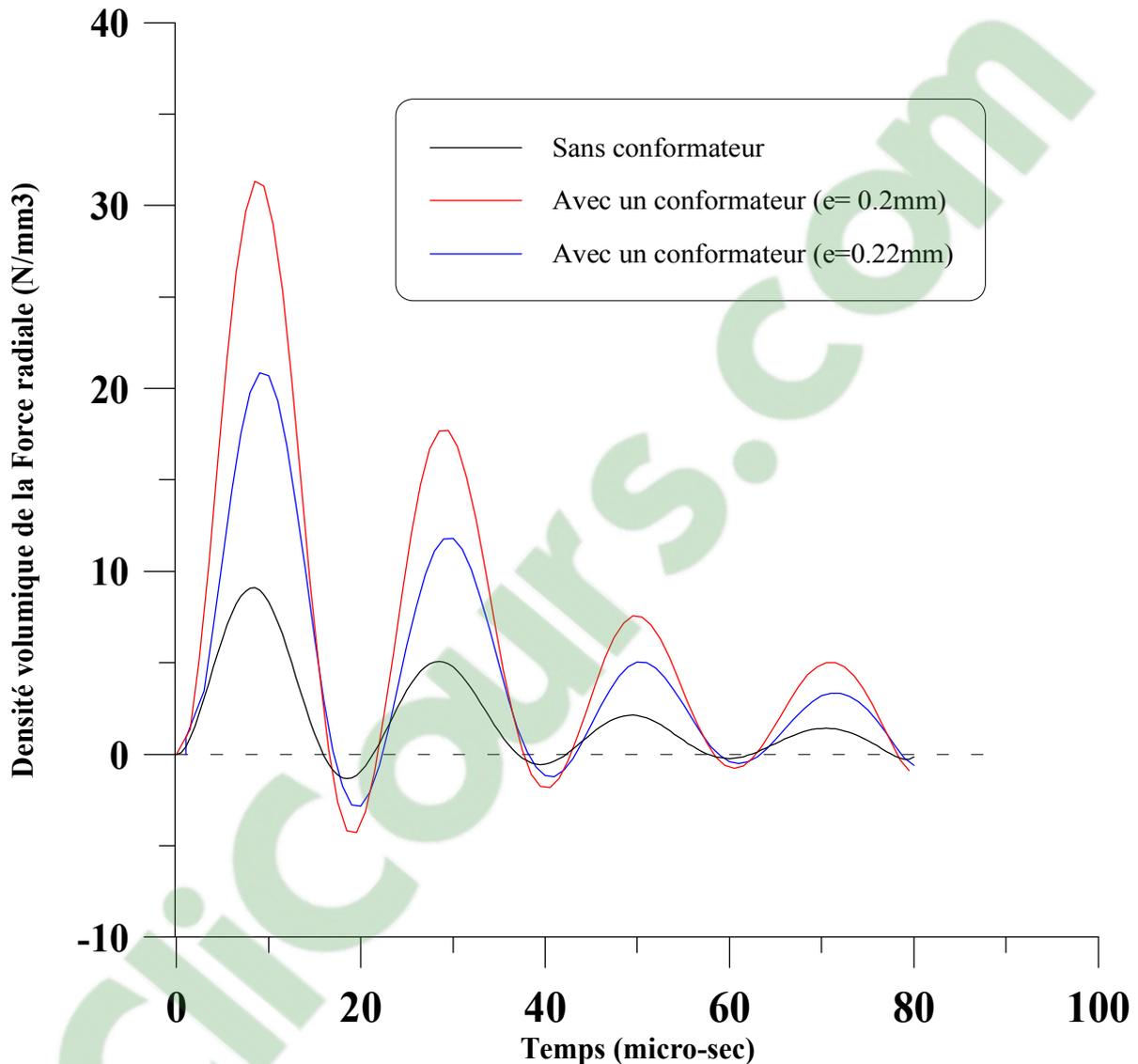
champ et il est de même sens que le courant dans le cas avec conformateur. Notons que l'introduction du conformateur augmente sensiblement le courant induit.



**Fig-III-10-Composante axiale de l'induction magnétique axiale**

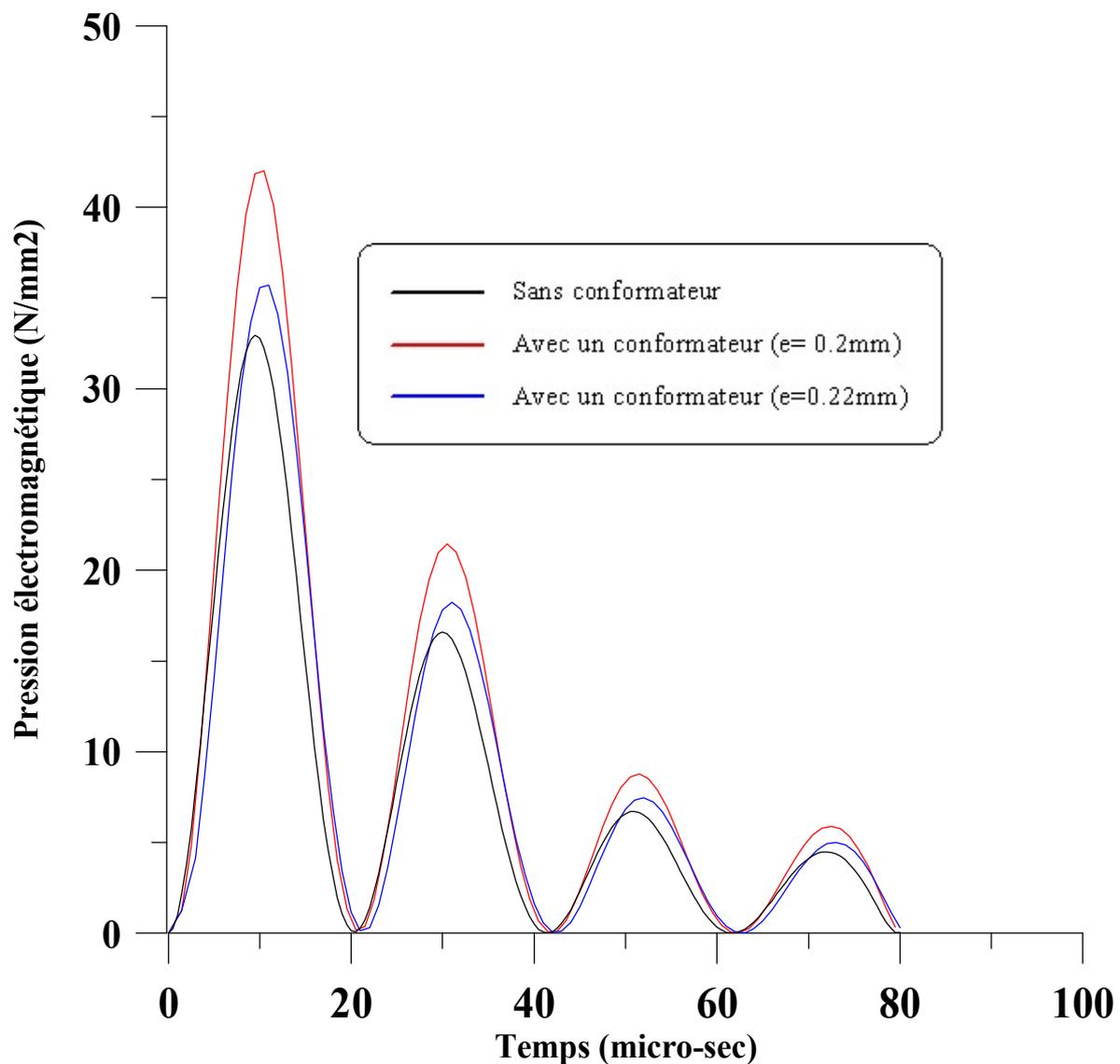
L'allure de la composante axiale de l'induction magnétique responsable de la déformation radiale de la pièce est représentée en figure (III-10), on remarque toujours une

forme sinusoïdale amortie, cette induction atteint une valeur importante de 7.7 T sans conformateur de champ et elle nettement augmentée par la présence du conformateur.



**Fig-III-11-Densité de la force radiale**

La figure (III-11), représente la variation de la densité de force radiale exercée sur les parois de la pièce à déformer, cette dernière a une forme pulsatoire amortie, la présence des valeurs négatives est due au déphasage entre la densité de courant induit et la composante axiale de l'induction magnétique. L'introduction d'un conformateur de champ rend la densité de force radiale plus intense, ce qui engendre une nette augmentation de la pression électromagnétique développée dans la pièce (Figure III- 12)



**Fig-III-12-Pression électromagnétique**

D'après les résultats trouvés, on remarque que l'introduction d'un conformateur de champ présente un intérêt particulier, car il offre la possibilité d'augmenter la pression électromagnétique responsable de la déformation de la pièce sans toucher les paramètres électriques et géométriques du système de magnétoformage.

**Conclusion**

Grâce à la méthode des équations intégrales, nous avons pu déterminer les principales grandeurs électromagnétiques régissant l'opération du magnétoformage, dans une installation avec et sans conformateur de champ. Nous avons montré l'intérêt du conformateur de champ qui augmente l'efficacité des installations de magnétoformage.

## Conclusion générale

Notre travail consiste en la modélisation d'un processus de déformation d'une pièce métallique sous l'effet d'une pression magnétique. Cette étude est effectuée sous certaines hypothèses simplificatrices pour faciliter les calculs et faire juste apparaître l'effet de l'introduction d'un conformateur de champ sur le processus, parmi lesquelles nous citons :

- l'utilisation d'un schéma équivalent simplifié du circuit
- les paramètres du circuit de décharge sont considérés constants (inductance et résistance)
- la déformation de la pièce est négligée.

Le modèle que nous avons développé est basé sur la méthode des équations intégrales basée sur la formulation de Biot et Savart.

Afin d'optimiser l'efficacité du processus de magnétoformage, nous avons introduit un conformateur de champ qui rend la modélisation du problème délicate vu que la configuration du système ne possède plus de symétrie axiale. Pour éviter l'analyse en trois dimensions qui est très coûteuse, nous avons développé une approche qui permet de remplacer l'effet du conformateur par une boucle de courant orthoradiale.

Les résultats de la modélisation ont montré que le conformateur de champ présente un intérêt particulier, il permet l'augmentation des efforts électromagnétiques développés dans les installations sans modifier les paramètres géométriques ou électriques de ces dernières, ce qui permettra d'effectuer des déformations désirées.

Nous espérons que ce travail servira de base pour d'autres études plus approfondies sur l'optimisation du processus de magnétoformage.

- [1] **MAURICE LEROY et JEAN YEVES RENAUD** '«Travail des métaux à grandes vitesse de déformation, formage électromagnétique »' **TECHNIQUES D'INGENIEUR**, M708-1
- [2] **JEAN LUCAS** '« Induction conduction électrique dans l'industrie »' Edition Dopée 1996.
- [3] **C.BIROUCHE** '« Etude numérique du problème de magnétoformage avec conformateur de champ »'Mémoire de magister, Bejaia 1998.
- [4] **K.BAINES, J.L.DUNCAN, B.MACH, W.JOHNSON** '« Electromagnétic metal formig »'Proc Instn Mech Engrs, volume 180, 1965-66.
- [5] **M.LEROY, J.Y.RENAUD** '« Formage électromagnétique »'Technique de l'ingénieur, M708, pp.1-18.
- [6] **B.BENDJIMA** '« Contribution à la modélisation par éléments finis des phénomènes électromagnétiques relatifs au magnétoformage »'Thèse de doctorat, Nantes 1997.
- [7] **P.ROUX** '« Electromagnétisme »'Edition Ellipses.
- [8] **TECH COMMENTARY** '« Electroforming »'Volume 3 N°05 1986.
- [9] **A.V.VORST** '« Electromagnétisme champ et circuit »' Edition de Boeck 1994
- [10] **H.MOHELLEBI** '« cours de 5<sup>ème</sup> année ingénieur en Tec 431 »'
- [11] **V.TORTEL** '« Conception d'un générateur d'impulsions de 1 KJ pour le magnétoformage »' thèse de doctorat, Lille Flandres Artois, 1993.
- [12] **G ROUSSEAU** '« Remarques supplémentaires sur l'approximation des régimes quasi stationnaires en électromagnétisme »' Février 2003 (page 159, 170).
- [13] **H.LUMBROSO** '« Ondes électromagnétiques dans le vide et les conducteurs »'Edition Dunod 1996.

- [14] **F .HOCINI'** « Mise en œuvre d'un modèle de couplage magnétiques de dispositifs à supraconducteur destinés à la lévitation magnétique et effet de la température »'mémoire d'ingénieur, université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou 2005.
- [15] **K. SRAIRI'** « Modélisation d'actionneur électromagnétique alimenté en régime transitoire »' Thèse de doctorat université de Nantes 1997. France.
- [16] **P. LORRAIN et D.R CORSON'** « Champ et ondes électromagnétique »' Edition Librairie Armand Colin 1970.
- [17] **S.T.S. AL-HASSANI, J.L. DUNCAN and W.JOHNSON'**« The influence of the electrical and geometrical parameters in magnetic in incorporating 2<sup>nd</sup> int »' Cirp production engineering, Manchester, pp .1333-1347; 1967.
- [18] **D.EUVARD'**«Résolution Numériques des Equations aux dérivées Partielles, Différences Finies Eléments Finis, Problèmes en domaines non Borné »' 3<sup>eme</sup> édition.
- [19] **C.FLUERASU'** «Electromagnetic forming of tubular conductor»' Rev.Roumaine des sciences techniques. Electromagnetique et énergétique, Vol.15, N°3, pp.457-488 ,1970.
- [20] **B.BELAID, M.MUSTAPHA, M.RABAH'** « Etude numérique de l'expansion d'un tube par procédé électromagnétique »' Thèse d'ingénieur université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou 2002
- [21] **H.GIE, J.P.SARMANT'** « A discretized integral method for eddy current computation in moving objects with the coexistence of the velocity and time terms, »' IEEE Transactions on Magnetic Volume 34, N°05, September 1998.
- [22] **OC. ZIENKIEWEZ, R.L.TAYLOR'**« La méthode des éléments finis »' Formulation de Base et Problèmes Linéaires.

[23] **A.KHENNEANE**' « Méthode des Elément finis, Enoncé des principes de Base »'1997.

[24] **C.BIROUCHE, A.MERICED, M.FELIACHI**' « Optimisation des Installations de Formage Electromagnétique»'CIMASI 98, conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquée et les Sciences de l'ingénieur, du 15 au 17 Novembre 98, Casablanca, Maroc (à apparaître ).

[25] <http://Www.provence-logiciels.com/magnétoformage/ltml> (conseils sur le magnétoformage)

[26] **G. DHATT, G. TOUZOT, et E. LE FRACOIS**' « Méthode des Eléments finis »' Edition Lavoisier 2005

[27] **H. JANSEN**' « Some Measurements of the expansion of a metallic cylinder with electromagnetic pulses »'IEEE Trans. On Ind and Gen. Appl. Vol 4, N°4, pp 428-440, 1968.

[28] **M. HADJARI, L.FLISSI**' « Modélisation des phénomènes électromagnétiques et mécaniques en régime transitoire en utilisant la méthode des éléments finis avec prise En compte du mouvement »' Mémoire d'ingénieur, UMMTO, 2002.

[29] **H. SADI, D. TEDJANI** ' « Modélisation des phénomènes magnétothermiques par la méthode des éléments finis»' Mémoire d'ingénieur, UMMTO, 1999.

[30] **A.MERICED, C.BIROUCHE, R.IKENE, M.FELIACHI , B.BENDJIMA**' « A study of the electromagnetic forming problem »' proceedings of the 3<sup>rd</sup> international Workshop on Electric and magnetic Fields, N°3, pp.225-229, Liege, Belgique, 1996.