

Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Etude bibliographique des décharges électriques sur les isolants gazeux.

I.1. Introduction.....	3
I.2. Définitions.....	3
I.2.1. Isolant	3
I.2.2. Diélectrique	3
I.3. Types d'isolants	4
I.3.1. Isolants gazeux.....	4
I.3.1.1. Critères de sélection des gaz.....	5
I.3.1.1.1. Critères de sélection primaires	5
I.3.1.1.2. Critères diélectriques	7
I.4. Processus d'excitation et d'ionisation	8
I.4.1. Ionisation thermique	8
I.4.2. Ionisation par choc	8
I.4.3. Ionisation par photon.....	9
I.5. Processus de désexcitation et de desionisation	9
I.6. Décharges électriques dans les gaz	10
I.6.1. Décharges électriques non autonomes dans les gaz.....	10
I.6.2. Décharges électriques autonomes dans les gaz.....	12
I.6.3. Critère de TOWNSEND.....	12
I.6.4. La théorie des STREAMERS.....	13
I.6.5. Loi de PASCHEEN.....	14
I.7. Types de décharge.....	16
I.7.1. Décharge pointe-pointe	16
I.7.2. Décharge pointe-plan	16
I.7.3. Décharge plan-plan	17
I.7.4. Applications industrielles	17
I.8. Conclusion	19

Chapitre II : Méthodes numériques de calcul du champ et du potentiel électriques.

II.1. Introduction	20
II.2. Equations de base de l'électromagnétisme	20
II.2.1. Historique	20
II.2.2. Equations de Maxwell.....	20
II.2.3. Lois de comportement des milieux.....	21
II.2.4. Equation de continuité	22
II.2.5. Relations de passage.....	22
II.2.6. Conditions aux limites	23

II.3. Méthodes de résolution	24
II.3.1. Méthode des différences finies	24
II.3.2. Méthode d'intégrale de frontière	25
II.3.3. Méthode des éléments finis	26
II.3.3.1. Introduction	26
II.3.3.2. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques	26
a) Formulation variationnelle	26
b) Formulation résidus pondérés	28
II.3.3.3. Discrétisation du domaine d'étude	29
II.3.3.4. Fonction d'interpolation	30
a) Principe de l'état complet	31
b) Principe de comptabilité	31
II.3.3.5. Fonction d'approximation sur un élément	31
II.4. Equation électrostatique	32
II.5. Conclusion	32

Chapitre III : Modélisation de la configuration pointe-plan sous PDETOOL.

III.1. Introduction	33
III.2. Présentation du logiciel PDETOOL	33
III.3. Manipulation	34
III.3.1. Structure pointe-plan étudiée	34
III.3.2. Equation de MAXWELL	36
III.3.3. Equations du milieu	36
III.3.4. Loi d'OHM	36
III.4. Méthode de calcul de champ électrique en configuration pointe-plan	36
III.5. Les différentes instructions permettant la manipulation du logiciel via le clavier	38
III.5.1. Introduction des variables	39
III.5.2. Introduction des constantes	39
III.5.3. Maillage du domaine	40
III.6. Résultats	41
III.6.1. Cartographies du potentiel	41
III.6.2. Commentaires sur les cartographies du potentiel	46
III.6.3. Cartographies du champ électrique	47
III.6.4. Commentaires sur les cartographies du champ électrique	50
III.7. Représentation des courbes	50
III.7.1. Interprétation des résultats obtenus	57
III.8. Formule de Hartmann	58
III.8.1. Représentation des courbes	59
III.8.2. Interprétation des courbes $E = f(r)$	62
III.8.2. Interprétation des courbes $E = f(x)$	62
III.9. comparaison des résultats	65
III.10. Conclusion	67
Conclusion générale	68

INTRODUCTION GENERALE :

Dans un certain nombre de situations en Electrotechnique, par exemple dans les dépoussiéreurs électrostatiques, une électrode injecte des charges dans un isolant fluide, gaz ou liquide et la charge d'espace qui en résulte modifie la distribution du champ électrique. Par ailleurs, plusieurs formes d'électrodes sont utilisées dans les divers dispositifs pour étudier les propriétés des matériaux isolants gazeux, liquides ou solides soumis à un champ électrique intense continu ou lentement variable ; souvent ces électrodes sont le siège de décharges localisées ou le point de départ de streamers.

Ces applications électrostatiques, et notamment les dépoussiéreurs électrostatiques, dépendent du phénomène de décharge électrique dans les gaz. Notre objectif est de déterminer par une méthode numérique la distribution du champ et potentiel électriques dans une configuration pointe plan.

La détermination de la distribution du champ et du potentiel électrique entre les deux électrodes est délicate à cause de plusieurs facteurs. Par exemple, la géométrie des électrodes "pointe-plan" est relativement complexe. Pour cette configuration, le rayon de courbure de la pointe peut être plusieurs centaines de fois plus petit que la distance séparant la pointe du plan.

Les progrès de l'informatique ont permis de développer des méthodes numériques de calcul afin de déterminer de façon précise la distribution du champ et du potentiel électrique. Les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées dans ce type de problème sont la Méthode des Différences Finies (*M.D.F*), la Méthode des Éléments Finis (*M.E.F*).

Le problème qui nous intéresse, est la modélisation du champ et du potentiel électrique dans un système pointe plan, en utilisant un logiciel Pdetool, avec variation de rayon de courbure de la pointe et la distance interélectrode.

Le présent mémoire comporte trois chapitres. Le premier sera consacré aux généralités sur le comportement d'un isolant gazeux auquel on applique un champ électrique en configuration pointe-plan.

Dans le deuxième nous allons présenter les équations de Maxwell qui sont les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Nous présenterons ensuite les différentes méthodes numériques, pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

La mise en œuvre de cette étude sera faite à l'aide d'un calcul par éléments finis effectué sous l'environnement MATLAB PDETOOL en modélisant le diélectrique gazeux (air) en configuration pointe-plan. On termine par tirer une conclusion générale.

I.1. Introduction :

Les phénomènes de décharge électrique, étudiés pourtant depuis près de deux siècles [3], font toujours l'objet de recherches actives auprès des scientifiques. On pourrait s'étonner de cet état de fait mais on comprendrait vite que cela n'est dû qu'à la très grande complexité du phénomène et des mécanismes qui le constituent. Cependant de grandes avancées ont été faites ces dernières décennies dans l'amélioration des moyens de diagnostic des premiers instants de la décharge et donc dans l'étude des mécanismes d'initiation [3-5]. Cela a permis d'accroître les connaissances sur le phénomène.

Ce chapitre est consacré aux systèmes d'isolation gaz, qui est largement utilisés dans les équipements de haute et moyenne tension. La rigidité diélectrique de ces structures dépend des propriétés du gaz ainsi que de la pression et de la température de ce dernier. Le comportement de ces structures isolantes face aux différentes contraintes auxquelles elles sont exposées (pollution, humidité,...etc.) et plus particulièrement aux décharges qui peuvent se développer dans le volume ou à l'interface des deux matériaux, constitue l'un des principaux critères de dimensionnement et de conception d'une structure isolante pour un composant ou un système haute ou moyenne tension donné .

I.2. Définitions :

I.2.1. Isolant :

Un isolant est une substance ayant une conductivité électrique suffisamment faible pour être utilisé pour séparer des pièces conductrices portées à des potentiels différents. On peut considérer comme isolant, tous les matériaux dont la résistivité est supérieure à $10^{10} \Omega.cm$ [3].

I.2.2. Diélectrique :

Un diélectrique est défini comme un milieu matériel dans lequel les bandes de conduction et de valence sont séparées par une énergie supérieure à 5 eV et ayant une résistivité très élevée (10^8 à $10^{15} \Omega.m$). On le définit aussi comme un milieu dans lequel tout

volume de la substance possède un moment dipolaire (polarisation permanente) ou susceptible d'en acquérir sous l'action d'un champ électrique (polarisation induite) [4].

I.3. Types d'isolants :

Les isolants sont groupés dans deux grandes classes :

Les isolants organiques et les isolants inorganiques :

En général, les isolants organiques tels que le caoutchouc, le papier l'huile, le coton, les matériaux thermoplastiques, etc.....sont composés de longues chaînes moléculaires de carbone et d'hydrogène. Ils ne peuvent pas supporter des températures élevées sans se décomposer.

Par ailleurs, les isolants inorganiques tels que le mica, la porcelaine, l'air, peuvent tolérer des températures dépassant parfois 1000°C.

Le nombre d'isolants disponibles est impressionnant, de sorte qu'il est difficile aujourd'hui d'en dresser une liste complète.

Cette diversité est due à l'arrivée sur le marché des isolants synthétique (parfois appelés plastiques) inventés et développées par les chimistes. Possédant des propriétés thermiques, électriques et mécaniques bien supérieures à celles des isolants naturels, ces isolants synthétiques ont grandement modifié la fabrication des fils, des câbles et des appareils électriques de toutes sortes.

D'après leurs états, on distingue les isolants liquides, solides et gazeux et dans notre travail on s'intéresse aux isolants gazeux ainsi que leur interface.

I.3.1. Isolants gazeux :

Le gaz le plus abondant et le plus utilisé dans l'isolation électrique (postes classiques, lignes aériennes, électrostatiques,...) est l'air. Cependant, d'autres gaz tels que l'azote (N_2), le dioxyde de carbone (CO_2) et surtout l'hexafluorure de soufre (SF_6) connaissent un succès grandissant dans le domaine des systèmes haute tension (postes

blindés, câbles à isolation gazeuse, etc.). Leur utilisation a permis d'améliorer la fiabilité des systèmes et d'en réduire leurs poids et dimensions [2].

I.3.1.1. Critères de sélection des gaz :

Compte tenu des enjeux écologiques et de certaines contraintes liées à l'utilisation des gaz isolants, on va déterminer certains critères de sélection de gaz, qui respectent l'environnement d'une part et les exigences diélectriques et sanitaires d'autre part. Ces critères peuvent être classés en deux groupes à savoir les critères primaires de sélection (indépendants des propriétés diélectriques) et les critères diélectriques (par comparaison au SF6) [2].

I.3.1.1.1. Critères primaires de sélection :

Il s'agit entre autres de :

- **Non toxicité** : les gaz doivent être non toxiques pour le personnel d'entretien et technique ainsi que pour les équipements avec lesquels ils interagissent. Il existe deux catégories de toxicité : la toxicité aiguë et la toxicité à long terme [2].

- **Température de liquéfaction** : frontière entre la phase gazeuse et liquide, elle doit être inférieure à la température minimale (T_{min}) de fonctionnement de l'équipement à la pression de fonctionnement choisie p (minimum en dessous de zéro degré Celsius à 0,1 MPa).

La température de liquéfaction (T_{liq}) dépend de la pression du gaz utilisé ; elle peut être déduite de la température d'ébullition (T_{eb}) à la pression atmosphérique par une expression approximative de la forme :

$$T_{liq}(p) = T_{eb} + 27 \ln(p)$$

où T_{liq} et T_{eb} sont en degré Celsius et p en bar.

Cette relation peut être dérivée de l'équation de Clausius-Clapeyron pour la courbe de pression de vapeur et laisse apparaître le critère de non liquéfaction sous forme de limite supérieure au point d'ébullition (T_{eb}) :

$$T_{eb} < T_{min} - 27 \ln(p) [\text{bar}] < -20 \text{ °C (supposant } p > 1,2 \text{ et } T_{min} < -20 \text{ °C)} \quad [2].$$

Stabilité chimique : elle peut être exprimée sous forme de deux critères. Le premier critère concerne la température de décomposition T_{dec} du gaz qui doit être supérieure à la température maximale qui pourrait se produire dans l'équipement sous test (en général autour de 200 °C aux points chauds, $T_{dec} > 200\text{°C}$). Pour le second critère, le gaz ne doit pas prendre feu (non inflammabilité) dans une réaction de décomposition provoquée par une décharge partielle produisant des étincelles qui peuvent avoir des températures supérieures à 10000 °K.

Un moyen sûr est de faire en sorte que le gaz choisi soit un composé exothermique (c'est à dire qui a son enthalpie inférieure à zéro) [2].

●**Inerte :** le gaz ne doit pas oxyder ou réagir avec les pièces de l'équipement pour éviter leur dégradation [2].

●**Critères environnementaux :** Les paramètres critiques qui ont le plus d'impact sur l'environnement sont le potentiel de dégradation de l'ozone (PDO) et le potentiel d'échauffement global (PEG). Ce dernier caractérise l'accumulation à long terme d'un gaz dans l'atmosphère. Le PEG du gaz doit, de préférence, être inférieur de 100 fois à celui du SF6. Tous les gaz contenant du chlore ou du brome sont à proscrire car susceptibles de détériorer la couche d'ozone [2].

I.3.1.1.2. Critères diélectriques :

- Le champ critique E_{cr} (rigidité diélectrique intrinsèque) qui mesure la capacité d'isolation d'un diélectrique. Il sera exprimé par rapport à la valeur du SF6 (référence).
- Non formation de produits de décomposition, au cours de la décharge, dont le dépôt sur les isolants solides de la structure (par exemple : buse dans un disjoncteur HT) pourrait créer des surfaces conductrices et favoriser l'amorçage d'étincelles.
- Critères de commutation : Ces critères englobent entre autres les propriétés suivantes :
 - Bonnes propriétés de coupure d'arc et d'isolation (stabilité à la formation d'arc, faible constante de temps d'arc..).
 - Electronégativité pour permettre la capture d'électrons libres et prévenir le phénomène d'avalanche à l'origine de l'amorçage de la décharge.
 - Grosse section efficace, stabilité chimique et thermique avec dissociation des molécules réversible (recombinaison) si possible pour une grande efficacité de coupure.
 - Grande énergie de dissociation pour un refroidissement optimal de l'arc.
 - La réaction des produits d'érosion d'arc (souvent inévitable) dus aux matériaux

proches de l'arc ne doit pas former de dépôts conducteurs tels que les couches de carbone, de métal ou de semi-conducteur qui induiraient des conductivités parasites pouvant mener à la formation d'étincelles. [2]

On sait que les gaz sont généralement des bons isolants néanmoins, sous Certaines conditions, il est possible de les faire traverser par un courant de particules chargées, lié au déplacement des ions sous l'effet du champ électrique $\vec{E}$, on dit alors que le gaz est le siège d'une décharge. Puisque l'arc électrique peut être défini comme une décharge a fort courant.

il est donc important de connaitre tous les mécanismes régissant l'existence de la décharge électrique dans les gaz.

I.4. Processus d'excitation et d'ionisation :

Les ions ou les électrons dans le gaz soumis à un champ électrique ont un mouvement superposé d'agitation thermique et de translation moyenne parallèle au champ ; la direction de ce mouvement dépend du signe de la charge et la vitesse de migration d'un ion v_i est proportionnelle au champ électrique E et à la mobilité des porteurs de charge :

$$v_i = K_i . E$$

$$v_e = K_e . E$$

- K_i est la mobilité des ions.

- K_e celle des électrons.

I.4.1. Ionisation thermique :

Malgré l'action du champ électrique extérieur, l'énergie cinétique reste pour l'ion pratiquement égale à l'énergie cinétique d'agitation thermique. Cette énergie joue un rôle très important dans la production des chocs.

A température ordinaire, cette énergie n'est pas assez suffisante pour générer ces chocs, à une élévation de température, l'agitation thermique croît, ce qui explique l'élévation de la densité des particules. Par conséquent l'élévation de la fréquence des chocs ainsi que la diminution du temps moyen entre les chocs successifs sont tels que les excitations successives d'atomes se cumulent pour aboutir à l'ionisation.

I.4.2. Ionisation par choc :

Un électron peut ioniser une particule neutre si son énergie est supérieure à l'énergie requise pour l'ionisation « $e V_i$ », donc :

$$\frac{1}{2} m v^2 > e V_i$$

Dans le cas d'une collision avec une particule excitée, l'énergie requise par ionisation est plus faible :

$$\frac{1}{2}mv^2 = e.V_i - e.V_e$$

Ou V_e est le potentiel d'excitation de l'atome.

à chaque choc, l'ion échange de l'énergie cinétique avec les molécules neutres ou avec les autres ions; il n'acquiert pas d'énergie cinétique supplémentaire. Au contraire, pour un électron, les chocs élastiques avec les molécules n'entraînent que de très faibles échanges d'énergie cinétique; malgré ces chocs l'électron peut donc acquérir une énergie cinétique beaucoup plus grande que l'énergie d'agitation thermique.

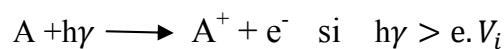
Dans un gaz qui est soumis à un champ électrique extérieur, seuls les électrons reçoivent assez d'énergie pour ioniser les atomes ou les molécules. Les électrons libres qui circulent dans certains gaz peuvent être capturés par les atomes ou les molécules et forment des ions négatifs.

Les électrons accélérés par un champ électrique extérieur suffisamment élevé accumulent une énergie suffisante pour provoquer l'ionisation des molécules neutres lors de chocs inélastiques.

L'ionisation peut être produite aussi par les ions positifs, mais ce processus exige que la particule incidente ait un haut niveau énergétique.

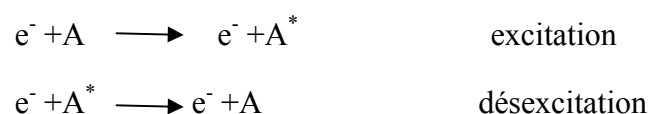
I.4.3. Ionisation par photon :

Un photon peut exciter ou même ioniser une particule neutre suivant le principe :



I.5. Processus de désexcitation et de désionisation :

Ce processus ramène les particules à leur états fondamental, il peut se produire lorsque l'électron d'un atome excité revient sur son orbite fondamentale



La perte d'énergie est composée par l'émission d'un photon.

Le processus peut aussi résulter du choc avec une particule, celle-ci bénéficiant alors, sous forme d'énergie cinétique de la perte d'énergie interne subite par l'atome.

I.6. Décharges électriques dans les gaz:

A l'état naturel, les gaz peuvent présenter une certaine conductibilité, celle-ci s'explique par l'existence d'électrons libres produit par une ionisation due aux rayons cosmique ou aux substances radioactives ou à un échauffement

I.6.1. Décharges électriques non autonome dans les gaz:

Une décharge électrique suppose toujours l'existence de charge libre et d'un champ électrique qui peut être continu ou alternatif, uniforme ou non. Les charges électrique peuvent être produites dans le volume du gaz ou a la surface des électrodes à l'aide d'un agent ionisant extérieur : Rayonnement de particules ou électromagnétique, chaleur, etc.

Pour simplifier l'étude des décharges non autonomes, on utilise des électrodes planes parallèles, distantes de d et baignant dans un gaz.les électrodes sont alimentées avec une tension continue a travers une résistance variable. Qu'on représente sur la figure suivante :

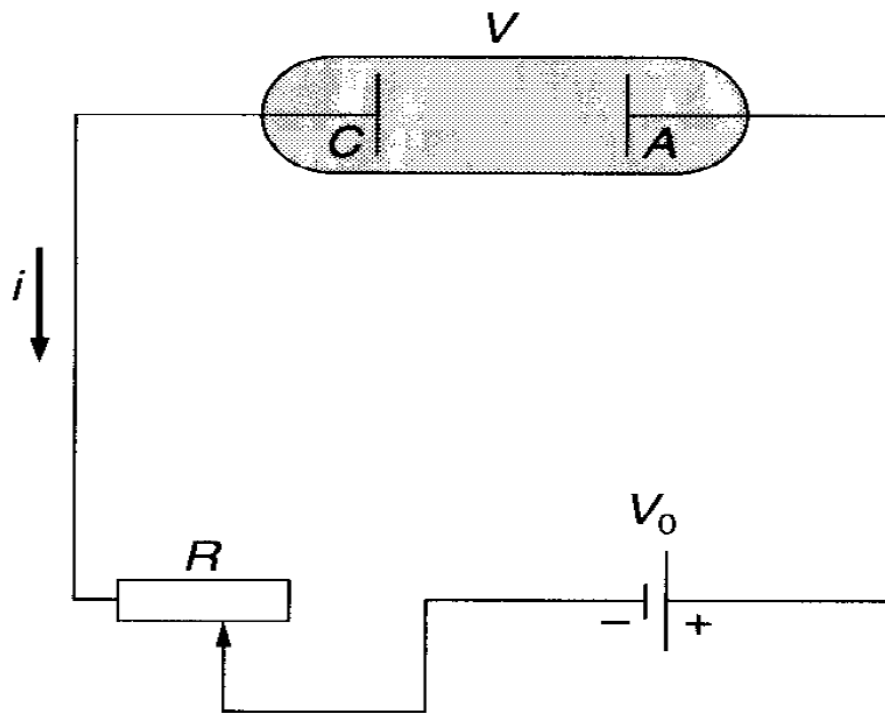


Figure : Circuit d'alimentation d'un tube à décharge en courant continu.

Les charges primaires sont produites en bombardant, la cathode par des rayons ultraviolets

. Soit n_0 le nombre des électrons émis par la cathode, ce qui correspond à un courant I_0 , et n le nombre d'électrons reçus par l'anode, (Courant I).

L'expérience montre que :

$$I(x) = I_0 \cdot \exp(\alpha \cdot x)$$

Donc les électrons se multiplient selon la loi :

$$n = n_0 \cdot \exp(\alpha \cdot x)$$

Où

x représente la distance entre les électrodes.

α est le coefficient d'ionisation qui dépend de :

-la nature du gaz

-l'intensité du champ électrique E

-la pression p du gaz : quand la pression augmente, le nombre de collision augmente, alors que le libre parcours moyen λ diminue. D'où la loi de similitude :

$$\alpha = pf(E/p)$$

En se déplaçant de dx dans le sens du champ, un électron produit donc $\alpha \cdot dx$ électrons.

Le nombre d'électrons créés par un électron donné, dans un champ donné, est donc proportionnel à la distance dx parcourue par cet électron parallèlement au champ et au coefficient α qui est une constante qui ne dépend pas du nombre d'électrons.

On peut dire que chaque électron primaire est à l'origine d'une avalanche électronique à multiplication exponentielle. Et on peut dire aussi que la décharge n'est pas encore autonome. En effet, pour $n_0 = 0$, on aura $n = 0$, c'est-à-dire lorsque on fait cesser l'action de l'agent ionisant extérieur, le courant anodique disparaît, la décharge s'éteint.

I.6.2. Décharges électriques autonome dans les gaz :

Les décharges qui peuvent survivre à l'agent ionisant extérieur sont dites autonomes

I.6.2.3. Critère de TOWNSEND :

Le critère de TOWNSEND s'interprète en considérant qu'un électron produit dans l'avalanche $e^{\alpha x}$ ions. Ces derniers en bombardant la cathode, vont produire $\gamma e^{\alpha x}$ électron.

Le deuxième coefficient noté γ , représente le nombre moyen d'électrons produits à la cathode par un ion positif incident. Ainsi la décharge autonome apparaît d'après TOWNSEND quand le critère suivant est rempli :

$$\gamma(e^{\alpha x} - 1) = 1$$

X : est la distance interélectrode.

Si α est très grand, on aura $e^{\alpha x} \gg 1$; alors on néglige 1 devant $e^{\alpha x}$, le critère de Townsend devient alors :

$$e^{\alpha x} = 1$$

En introduisant dans la relation de Townsend une probabilité d'attachement électronique η , l'équation du courant devient :

$$I(x) = I_0 e^{(\alpha - \eta)x}$$

Le critère de Townsend devient alors :

$$\gamma(e^{(\alpha - \eta)x} - 1) = 1$$

Le courant prend la forme suivante :

$$I = I_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)}$$

La théorie de TOWNSEND ne peut expliquer complètement la décharge par étincelle ou arc.

Pour combler cette anomalie Meek, Raether et Loeb ont proposé la théorie du streamers.

I.6.2.4. La théorie du streamers :

Pour qu'un ion se déplace jusqu'à la cathode il lui faut 10^{-5} à 10^{-4} s. l'expérience réalisée par Meek, Raether et Loeb a montré que le temps de la formation d'étincelle est de 10^{-7} s et moins, donc l'émission secondaire ne peut expliquer la décharge par étincelle.

La théorie des streamers justifie par des données expérimentales la grande vitesse avec laquelle se développe l'étincelle :

Une première avalanche de TOWNSEND faiblement luminescente prend naissance. Sous l'effet de la photo ionisation due aux rayonnements émis par cette avalanche, de nouvelles avalanches prennent naissance et donnent naissance à leur tour à d'autres avalanches dans le volume du gaz.

Au cours de leur développement, les diverses avalanches se rattrapent les unes les autres et se confondent en donnant un canal bon conducteur du streamer.

Ce canal à grande conductivité constitué de charges positives et de charges négatives formées dans le gaz court-circuitera les deux électrodes et conduira les charges en provenance de la source.

La grande vitesse à laquelle se produit la décharge est due au fait que le streamer est conduit par plusieurs avalanches qui se développent simultanément entre les deux électrodes.

Au moment où le canal de plasma atteint l'anode, nous aurons une décharge complète sous forme d'arc.

I.6.2.5. Loi de PASCHEN :

La loi de PASCHEN traduit la relation qui existe entre la tension de claquage (tension minimale pour déclencher une décharge), et le produit pression du gaz-distance inter-électrode.

$$U_c = f(p.d)$$

U_c : tension de claquage.

P: pression du gaz.

D: distance inter-électrode.

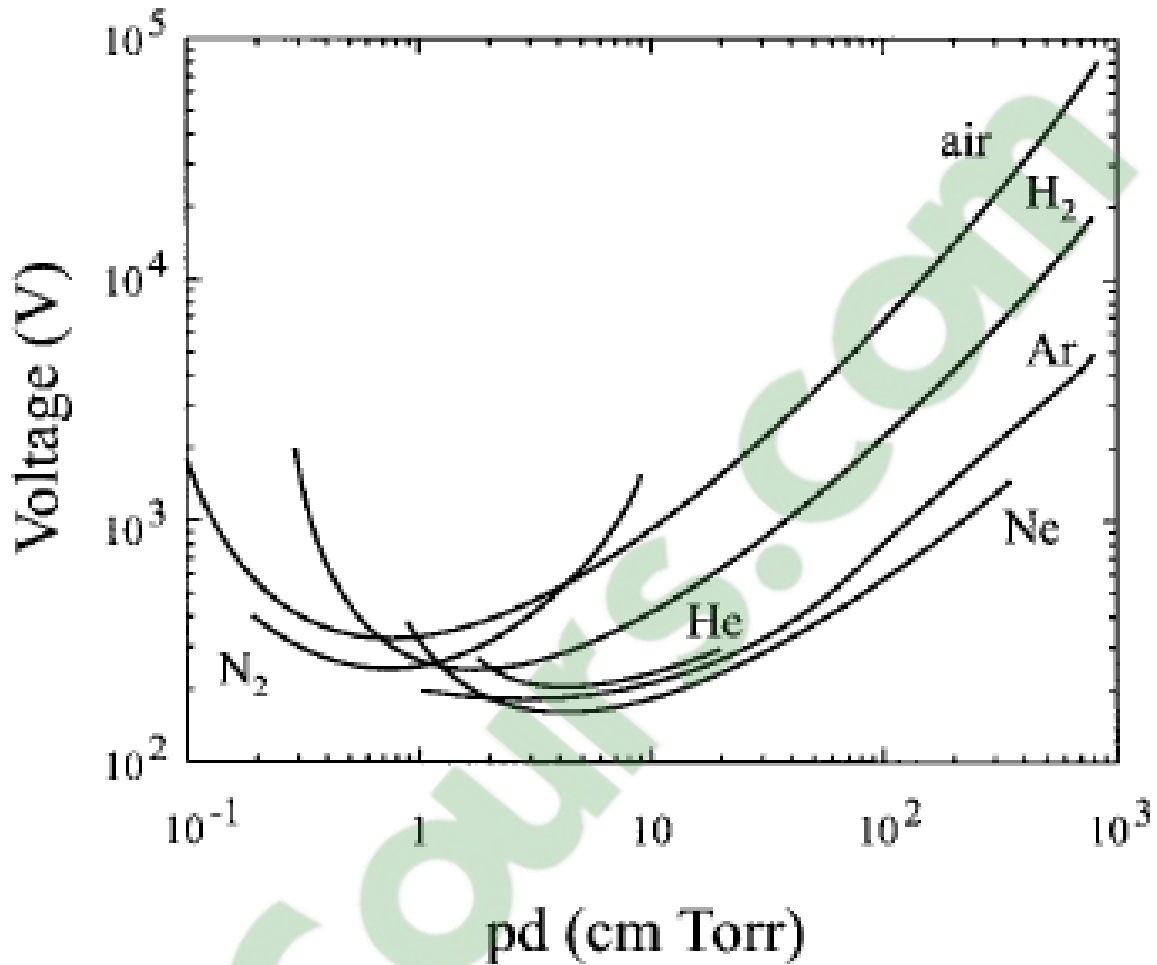


Figure : tension de claquage pour différents gaz en fonction du produit p.d

D'après la figure, on constate que pour un gaz à pression atmosphérique ($p=1,013 \cdot 10^5$ Pa), les courbes passent par un minimum pour une distance inter-électrode d'environ $1 \mu m$ ($p.d=0.5$ à 5 environ). Cela signifie que, pour la production de décharge à pression atmosphérique, dans des conditions d'utilisation usuelles ($d \geq 1 mm$) la tension de claquage est une fonction croissante de la distance inter-électrode.

Elle est utilisée dans l'industrie pour la fabrication des tubes de néon, la lumière de ces néons est due à la peinture qui se trouve à la paroi du néon.

I.7. Types de décharges :

Les caractéristiques électriques des décharges dépendent fortement de la géométrie des électrodes. On classe celle-ci en trois familles qui induisent des comportements électriques et des applications différentes.

I.7.1. Décharges pointe-pointe :

L'utilisation de pointes métalliques pour l'étude des décharges est assez courante. Cela est dû à l'effet de pointe, qui permet d'obtenir localement un champ intense (au niveau des pointes et des angles métalliques). Ce champ intense favorise le claquage électrique des gaz.

C'est pour cela que l'on utilise des pointes comme paratonnerre et que la machine de Watson était équipée d'une pointe...

L'utilisation de pointes a l'avantage de stabiliser le lieu de la décharge. puisqu'on est sûr du point de départ et du point d'arrivée de la décharge, mais rien n'impose que le trajet entre ces deux point soit une ligne droite.

I.7.2. Décharges pointe-plan :

Ce sont des arcs dont le chemin peut être instable on connaît de manière certaine le point de départ de l'arc mais qu'on ne peut pas prédire quel sera le point d'arrivée sur le plan ni même le chemin parcouru.

On peut distinguer trois types de décharge pointe-plan :

Les arcs transférés, les arcs non transférés et les arcs glissants, qui ont des utilisations industrielles différentes.

- **Les arcs transférés ou non transférés** : sont utilisés tous les deux en sidérurgie pour obtenir des gaz à de très hautes températures, à l'aide de courants importants.
- **Arc transféré** : un arc transféré est un arc pointe-plan utilisé couramment pour la soudure. La pointe est l'électrode utilisée par le soudeur et le plan est la plaque de métal à souder. Il arrive qu'on utilise un gaz sous pression pour protéger la zone de soudage (protection contre les oxydations) mais cela ne change pas fondamentalement le trajet de l'arc qui va naturellement d'une électrode à l'autre.

- **Arc non transféré** : la pointe de cet arc est le centre du dispositif et le plan est le tube qui entoure la pointe (cathode le plus souvent). La différence essentielle avec l'arc précédent est que celui-ci est soufflé par un flux de gaz (gaz plasmagène), ce qui crée un arc projeté (jet de plasma) ; c'est une torche à plasma. La plupart du temps, on se sert de ce type de dispositif pour réaliser des dépôts de métaux sur différents matériaux.
- **Décharge glissante** : on fait glisser l'arc en le soufflant le long d'une des électrodes, dans une configuration géométrique de décharge plan-plan ou pointe-plan. Ce sont des dispositifs à arc glissant, généralement caractérisés par un courant de faible intensité ; l'allongement de la longueur de l'arc qui résulte du soufflage peut conduire à des tensions élevées relativement à celles qui seraient obtenues sans soufflage.

I.7.3. Décharges plan-plan :

Les décharges plan-plan sont rarement des décharges entre électrodes métalliques. En effet, dans le cas d'une utilisation d'électrodes métalliques planes, on ne connaît ni le point de départ de la décharge, ni le point d'arrivée et, sans traitement particulier sur ces électrodes, on n'obtient pas un arc homogène, réparti sur toute la surface des électrodes : on observe un arc unique se déplaçant dans l'espace inter électrodes, ou parfois, plusieurs arcs apparaissant et disparaissant dans ce même espace.

I.7.4. Applications industrielles :

Les applications industrielles des décharges électriques sont très variées et touchent à des domaines d'applications assez hétérogènes. Les plasmas sont utilisés à différents titres : pour leurs hautes températures et également pour leurs propriétés lumineuses.

a)Dépollution, traitements des déchets :

Une première utilisation des hautes températures des plasmas est le traitement de déchets afin de limiter la toxicité de certains résidus ou de recycler des matières métalliques.

-Décontamination du sol : les déchets (terre polluée par des produits chimiques) sont mis en suspension dans de l'eau et le tout est injecté au centre d'un dard de plasma d'arc non transféré de 350 kW. Ce type de procédé permet de transformer les déchets chimiques et non

organiques, qui sont nocifs pour l'environnement, en un matériau vitreux stable et non toxique.

- Incinération des déchets ménagers : l'utilisation de plasmas permet de limiter au maximum la pollution engendrée ; en effet, les déchets ménagers sont dans un premier temps triés pour être recyclés. La partie non recyclable des déchets est incinérée.

- Récupération de métaux précieux : des installations de récupération de métaux précieux (palladium, platine, iridium).

b) Métallurgie :

La métallurgie utilise les fours à arc pour obtenir les températures élevées nécessaires au traitement de l'acier. Les fours destinés à cet usage peuvent fonctionner en courant alternatif

ou en courant continu. Ce sont de gros consommateurs d'électricité.

c) Dépôts et gravure :

L'utilisation de plasmas permet de réaliser des traitements de surface, afin d'obtenir ou d'améliorer certaines propriétés spécifiques. On peut ainsi solidifier des pièces métalliques en faisant le Rechargement des pièces usées : certaines pièces de métallurgie s'usent de manière importante, notamment lorsqu'elles sont sujettes à de fortes contraintes mécaniques : pièces de centrales nucléaires, pièces de matériaux de forage... Ces pièces peuvent être traitées et renforcées en y déposant du carbure de tungstène ou d'autres composés en fonction des propriétés recherchées.

d) Lumière :

Les décharges électriques possèdent des propriétés lumineuses qui sont exploitées dans divers domaines, notamment l'éclairage, où on cherche à obtenir des caractéristiques d'éclairages.

- Tube fluorescent : le tube fluorescent, ou tube néon, est très utilisé pour l'éclairage dans des bâtiments accueillant du public ; celui-ci consomme peu d'énergie pour un éclairage important.

I.8.CONCLUSION :

Après avoir donné quelques notions sur les critères de sélection des gaz isolants, nous avons vu que le gaz devient conducteur lors de l'application d'un champ électrique fort. Le volume s'ionise, les paires é-ion se produisent et des électrons sont arrachés des surfaces des électrodes grâce aux processus de collision. La section efficace est un paramètre important qui nous donne des informations sur le type de collision. De même, l'évolution du claquage électrique est caractérisé par deux mécanismes fondamentaux : Townsend et Streamer qui expliquent le claquage sous les différentes conditions (pression, température, champ, nature des surfaces des électrodes...).

II.1. Introduction :

L'objectif de ce chapitre est de présenter les équations mathématiques de base qui décrivent les phénomènes électromagnétiques et leurs méthodes de résolutions.

II.2. Equations de base de l'électromagnétisme :

II.2.1. Historique :

Tout au début, les phénomènes électriques et magnétiques ont été étudiés séparément. Les interactions entre ces deux phénomènes ont été mises en évidence pour la première fois par : Ampère (1775-1836), qui a prouvé que la source du magnétisme est le courant électrique, Gauss (1777-1855), qui a démontré que la source du champ électrique est la charge électrique statique, et Faraday (1791-1867) qui relie la création de l'un des champs électrique et magnétique par l'autre et vis versa. Le couplage des deux phénomènes qu'on regroupe en un mot «Electromagnétisme », on le doit à James Clerk Maxwell (1831-1879). Ce génie a exploité les découvertes des précédents, pour donner une formulation la plus complète de l'électromagnétisme liant les grandeurs électriques et magnétiques [17].

II.2.2. Equations de Maxwell :

Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale ou temporelle d'un champ électromagnétique en un point de l'espace est due à l'existence d'un autre champ au même point. Ces équations sont donc locales et sont valables dans n'importe quel système d'axes. Ainsi, dans tous les problèmes nécessitant le calcul du champ électromagnétique qui règne dans un système matériel, on utilise les quatre équations fondamentales aux dérivées partielles de MAXWELL, qui sous leurs formes la plus générale s'écrivent [18][19]:

$$\text{Maxwell-Gauss:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Maxwell-Faraday:} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Conservation du flux:} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Maxwell-Ampère:} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

$\vec{E}$ [V/m] et $\vec{H}$ [A/m] : Champ électrique et magnétique.

$\vec{D}$ [C/m²] et $\vec{B}$ [T] : Induction électrique et magnétique.

$\vec{J}_c$ [A/m²] et ρ [C/m³] : Densité de courants de conduction et de charge électrique.

L'équation (II.4) est une généralisation du théorème d'Ampère. Elle permet d'établir la relation entre le champ électromagnétique et les courants électriques. Elle traduit la création d'un champ magnétique par les courants électriques de conduction et de déplacement.

L'équation (II.2) correspond à la loi d'induction de Faraday, qui établit le lien entre un champ électrique et un flux magnétique. Cette loi traduit le phénomène inductif qui se produit dans un conducteur soumis à un champ magnétique variable ou dans un conducteur en mouvement soumis à un champ magnétique constant.

Ces deux équations (II.4) et (II.2) définissent la relation entre les champs et leurs sources.

Les équations (II.1) et (II.3) traduisent respectivement la conservation de la charge électrique et du champ magnétique.

II.2.3. Lois de comportement des milieux :

Les grandeurs et les liaisons des cinq champs vectoriels précédents dépendent des caractéristiques électromagnétiques du milieu où ils règnent. Ainsi, pour définir complètement le phénomène électromagnétique à l'intérieur d'un milieu isotrope et homogène, on rajoute aux équations précédentes les lois de comportement de ce milieu [20]:

- **Relations du milieu :**

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (II.5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (II.6)$$

Dans le cas linéaire nous avons :

$$\mu = \mu_0 \mu_r = C^{te} \quad (II.7)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = C^{te} \quad (II.8)$$

μ : Perméabilité magnétique [H/m].

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$: Perméabilité magnétique du vide [H/m].

μ_r : Perméabilité magnétique relative du milieu considéré.

ϵ : Permittivité électrique [F/m].

ϵ_0 : Permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ [F/m].

ϵ_r : Permittivité relative du milieu considéré.

Loi d'Ohm :

Elle exprime la relation liant la densité du courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ à travers la conductivité σ , elle est donnée par :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{II.9})$$

σ : Conductivité électrique $[(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$.

II.2.4. Equation de continuité :

L'équation de continuité appelée aussi équation de la conservation de la charge électrique est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.10})$$

II.2.5. Relations de passages :

A l'interface entre deux milieux différents respectivement (1) et (2), les champs de vecteurs doivent vérifier certaines conditions dites relations de passages. Elles s'énoncent comme suit [20]:

- **Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique :**

$$(\vec{D}_{n1} - \vec{D}_{n2}) \cdot \vec{n} = \sigma_s \quad (\text{II.11})$$

$\vec{D}_{n1}$: La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 1.

$\vec{D}_{n2}$: La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 2.

σ_s : Densité de charge électrique portée par la surface de séparation.

$\vec{n}$: Vecteur unité suivant la normale de l'interface.

- **Conservation de la composante tangentielle du champ électrique :**

$$(\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.12})$$

$\vec{E}_{t1}$: La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1.

$\vec{E}_{t2}$: La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2.

- **Conservation de la composante normale de l'induction magnétique :**

$$(\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$\vec{B}_{n1}$: La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 1.

$\vec{B}_{n2}$: La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 2.

- **Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique :**

$$(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}) \wedge \vec{n} = \vec{k} \quad (\text{II.14})$$

$\vec{H}_{t1}$: La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 1.

$\vec{H}_{t2}$: La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 2.

k : Densité de courant porté par la surface de séparation.

II.2.6. Conditions aux limites [21][22]:

- **Condition type Dirichlet :**

Cette condition nous informe sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude.

Elle est sous forme :

$$A = A_0 \quad (\text{II.15})$$

A : La fonction inconnue.

A_0 : Constante.

- **Condition type Neumann :**

Elle est appliquée sur la frontière lorsque la valeur de la grandeur calculée n'est pas connue à la frontière du domaine d'étude.

$$\frac{\partial A}{\partial n} = A_0 \quad (\text{II.16})$$

- **Condition mixte :**

C'est la combinaison des deux types précédents, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} = \gamma \quad (\text{II.17})$$

Où : α , β et γ sont des constantes.

II.3. Méthodes de résolution :

II.3.1. Méthodes des différences finies :

Cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentielle en un opérateur aux différences, où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue déterminée en un certain nombre de points du domaine de résolution.

Soit le réseau carré suivant [14]:

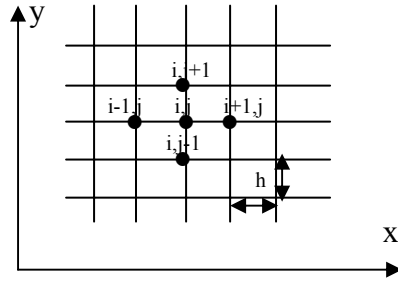


Figure IV-1 : maillage type différences finis

Si on applique un développement limité en séries de TAYLOR de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \\ \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \end{aligned} \right\} \quad (II.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (II.20)$$

Ainsi Le Laplacien discrétisé sera alors :

$$(\Delta A)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_{i,j} \quad (II.21)$$

D'où :

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \quad (II.22)$$

Cette formule est appelée la forme à cinq points.

La forme de cette formule aux différents nœuds du domaine, aboutit au système matriciel suivant :

$$[M][A]=[S] \quad (\text{II.23})$$

Avec :

$[M]$: Matrice inversible.

$[A]$: Vecteur des inconnues.

$[S]$: Terme source.

Dans les cas des dispositifs à géométries complexes, cette méthode s'adapte difficilement, car elle présente des inconvénients relatifs à la définition des valeurs de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude.

II.3.2. Méthode d'intégrale de frontière :

Cette méthode permet la présentation du domaine tout en limitant la discrétisation à la frontière, cette méthode est mise en œuvre par la méthode directe qui est basée sur la loi de Biot et Savart ou bien sur la méthode de l'identité de Green[14].

Elle est utilisée dans l'étude des structures de grande dimension, et elle s'adapte aux problèmes à frontières ouvertes (exemple : le vecteur $V=0$ à l'infini), généralement utilisée en magnétostatique.

Mais cette méthode a un inconvénient qui réside dans la difficulté de prendre en considération la saturation, et elle nécessite un espace mémoire considérable et un temps de calcul important, car le système algébrique issu de cette méthode est à matrice pleine.

II.3.4. Méthode des éléments finis :

II.3.4.1. Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode développée et appliquée en premier lieu, en génie civil et en mécanique, elle est introduite en Electrotechnique vers 1970, par P.P.Silvester et M.V. Chari.

Elle est basée sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites.

Cette méthode est utilisée pour le traitement des problèmes à géométries complexes, et les matériaux dont les propriétés physiques peuvent être non linéaires[15].

II.3.4.2. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques :

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur la substitution à la forme différentielle que représentent les équations aux dérivées partielles et aux conditions aux limites associées à une formulation intégrale du phénomène à étudier.

Cette formulation intégrale peut être de deux types :

- Formulation variationnelle.
- Formulation projective (résidus pondérés).

a) Formulation variationnelle :

Cette formulation nécessite la connaissance au préalable de la fonction d'énergie du système à étudier [15].

Cette fonction est déterminée à partir du principe de l'action hamiltonnienne qui stipule l'existence d'une fonction de type intégrale.

Elle est définie par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L.d\Omega \quad (II.24)$$

Avec :

Ω : Domaine d'étude.

L : Fonction de Lagrange déduite de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

Cas d'un problème électromagnétique

Dans ce cas la fonction L est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B \nu B dB - JA \quad (II.25)$$

Avec :

L : Fonction de Lagrange.

A : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

J : Densité de courant [A/m^2]

ν : Réductivité magnétique [H/m]⁻¹

B : Induction magnétique [T].

L'expression de la fonction d'énergie est donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu B dB - JA \right] d\Omega \quad (II.26)$$

La résolution du problème variationnelle défini par la fonction d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette fonction; la minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz.

Qui s'énonce comme suit :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad (II.27)$$

Et $i=1,2,3,\dots,n$

Ou :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (II.28)$$

Avec :

n : nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : est l'inconnu aux nœuds i du domaine.

Clicours.COM

b) formulation résidus pondérés :

La méthode des résidus pondérés, appelée aussi méthode projective consiste à choisir des fonctions de projections Φ_i de façon à minimiser l'intégrale du résidu dans l'équation suivante [16]:

$$\int_{\Omega} R \phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$R = L(A) - F \quad (\text{II.30})$$

Avec :

R : représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$: Opérateur différentiel.

F : : fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : L'inconnue du problème.

Φ_i : fonction de projection.

Les valeurs de A permettent d'annuler l'intégrale représentent la solution du système algébrique obtenu.

Le choix des fonctions de projection permet de définir plusieurs méthodes, parmi celle-ci, on cite les méthodes suivantes :

- Méthode de collocation par points.
- Méthode des moindres carrés.
- Méthode de GALERKINE.

La méthode de collocation par points utilise les fonctions de DIRAC comme fonction de pondération (projection).

La méthode des moindres carrés utilise la minimisation de la norme quadratique de l'erreur sur l'équation et les conditions aux limites.

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement à la méthode projection de Galerkin, qui y est la plus utilisée en Electrotechnique, puisque elle conduit à un système matriciel symétrique

II.3.4.3. Discrétisation du domaine d'étude :

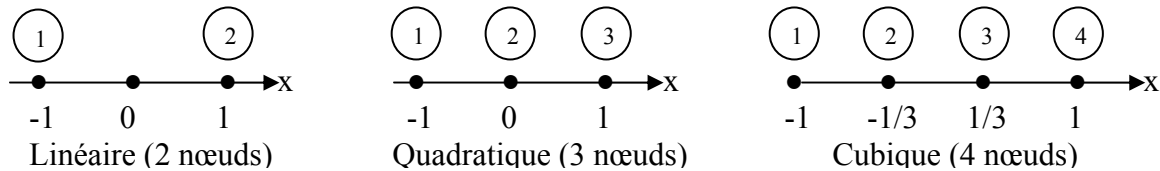
Quand l'équation aux dérivées partielles est transformée en une forme intégrale, on passe à l'étape de discrétisation, qui consiste en la subdivision du domaine en un nombre fini de sous domaines appelés «éléments », dont la géométrie est préalablement choisie.

L'approximation de l'inconnu se fait en chaque élément par des fonctions d'interpolation, qui se déterminent en fonction des valeurs de l'inconnu aux nœuds de cet élément. C'est ce qu'on définit par l'interpolation nodale, ce qui est très important dans l'analyse par éléments finis [16].

a) Eléments de référence :

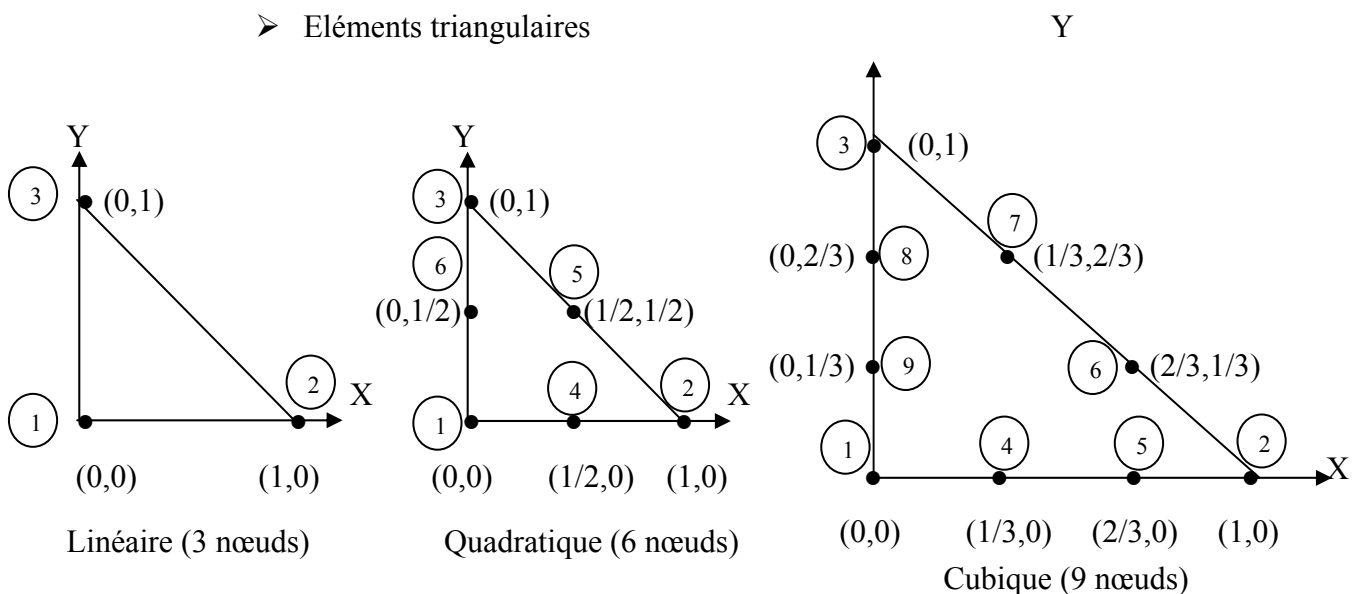
On utilise des éléments de références de manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, et les éléments les plus simple sont : le triangle, le rectangle, le tétraèdre et le parallélépipède, auxquels on associe un système de coordonnées normées.

- Élément à une dimension

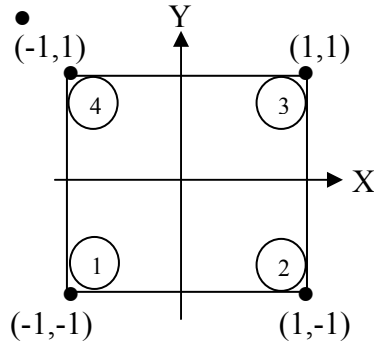


- Élément à deux dimensions

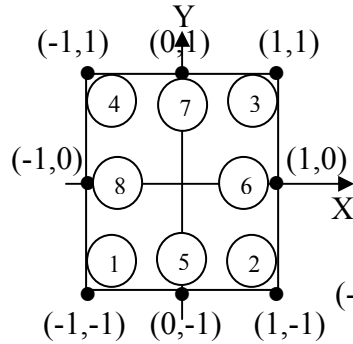
- Eléments triangulaires



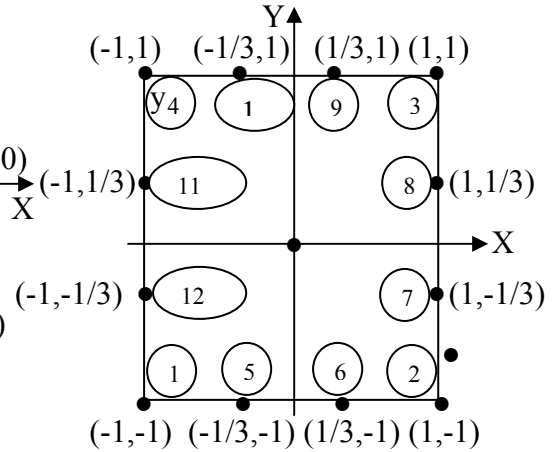
➤ Eléments carrés



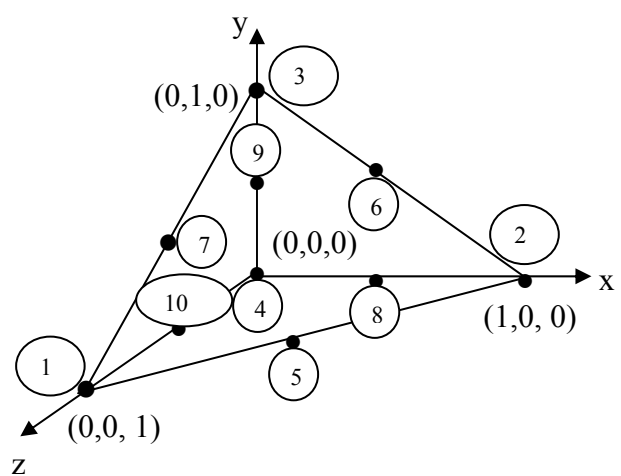
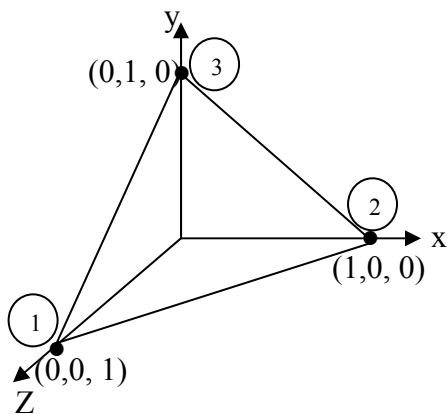
Linéaire (4 nœuds)



Quadratique (8 nœuds)



• Élément à trois dimensions



II.3.4.4. Fonctions d'interpolations :

Les fonctions d'interpolations sont obtenues à partir du triangle de PASCAL, donné ci-dessous :

1 ——— ordre 0

U V ——— ordre 1

U^2 UV V^2 ——— ordre 2

U^3 U^2V UV^2 V^3 ——— ordre 3

Triangle de PASCAL

La construction de ces fonctions doit vérifier les conditions suivantes :

a) Principe de l'état complet :

-La fonction doit contenir un terme constant.

-Le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.

b) Principe de compatibilité :

-La fonction doit être continue (c'est-à-dire la première dérivée existe).

On peut citer un exemple d'une fonction d'interpolation :

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \quad (\text{II.31})$$

La base polynomiale sera donc :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & U & V & UV & U^2 & V^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

II.3.4.5. Fonction d'approximation sur un élément :

La construction d'une fonction approchée $U^e(x)$, avec (e) comme indice relatif à l'élément étudié, différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Donc la fonction d'approximation aura la forme suivant :

$$U(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \Phi \cdot U \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$U(x)$: c'est la fonction d'approximation qui s'identifie à la fonction exacte.

$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$: les fonction de forme de l'élément.

$U_1, U_2, \dots, U_n$: les variables associées aux nœuds du domaine.

II.4. Equation électrostatique :

En régime statique on n'a pas de variation temporelle des grandeurs électromagnétiques.

Donc :
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (II.34)$$

Les équations nécessaires pour résoudre ce problème sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (II.35)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (II.36)$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (II.37)$$

L'équation (II.36) implique que $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V .

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists V / \vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (II.38)$$

Donc:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{\nabla} V = -\rho \quad (II.39)$$

Pour les matériaux homogènes, on obtient l'équation dite de Poisson :

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (II.40)$$

II.5. Conclusion :

Au cours de ce chapitre nous avons présenté les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques notamment les équations de Maxwell. Les méthodes de résolutions des équations électromagnétiques ont été aussi présentées. La méthode des éléments finis ayant été retenue pour notre travail ; nous l'avons rappelée dans le détail.

III.1. Introduction :

La modélisation est une étape importante dans toute simulation numérique. En Particulier elle permet, en définissant et en étudiant les caractéristiques géométriques et physiques du problème étudié, de proposer un modèle simplifié qui soit le plus proche de la réalité.

Dans ce chapitre on se propose de modéliser avec un logiciel de simulation PDETOOL le système d'électrodes pointe-plan isolé avec de l'air.

III.2. Présentation de PDETOOL :

Le PDETOOL sous MATLAB est un logiciel permettant le traitement des équations aux dérivées partielles en deux dimensions en utilisant la méthode des éléments finis.

Nous présentons quelques éléments simples permettant l'utilisation efficace de cette interface graphique.

PDETOOL contient plusieurs modes différents :

1. **En draw mode (mode dessin)** : Nous pouvons dessiner des objets solides. Il existe quatre types d'objet solide : Cercle, Polygone, Rectangle, Ellipse.

A chaque objet est attribué automatiquement un nom unique qui est affiché dans l'interface graphique sur l'objet lui-même.

2. **En boundary mode (mode frontière)** : Dans ce mode, l'origine des formes de la construction des objets solides constituent les frontières entre les sous domaines du modèle. Ces frontières ne peuvent être éliminées dans ce mode. Les limites extérieures sont codées par couleur pour indiquer le type de conditions aux limites. Le rouge correspond à la limite extérieure de Dirichlet, le bleu généralise les conditions de Newman et le vert, les conditions aux limites mixtes.

3. **En PDE mode** : Nous pouvons spécifier le type de problème EDP et les coefficients c , a , f et d . Nous pouvons également spécifier les coefficients pour chaque sous-domaines de façons indépendantes.

4. **En solve mode (mode de résolution)** : Nous pouvons spécifier les paramètres de résolution et résoudre les problèmes EDP. Pour les EDP hyperboliques et paraboliques, nous pouvons également spécifier les conditions initiales, et les moments où la production doit être générée.

5. **En mesh mode (mode maillage)** : Nous pouvons contrôler la génération de maillage automatique et de tracer le maillage. Un maillage initial peut être généré en cliquant sur le

bouton ou en sélectionnant le bouton "initialize mesh", puis sur "refine mesh" dans le menu "mesh".

6. En **plot mode** : Nous pouvons choisir une grande variété de méthodes telles que la visualisation de la surface, maillage, contour des parcelles.

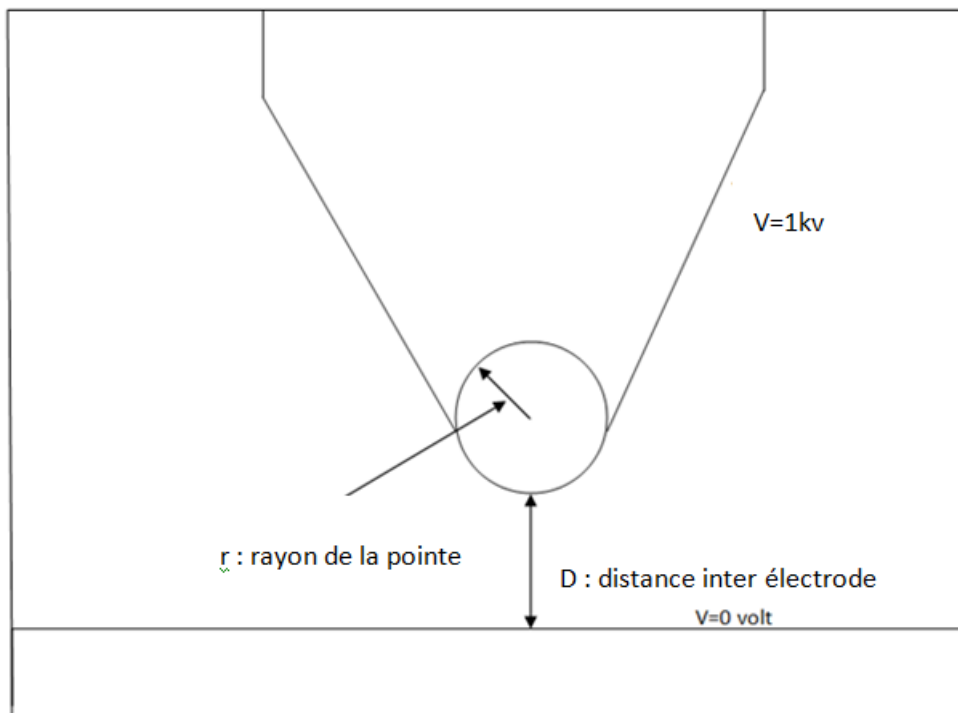
Pour la surface des parcelles nous pouvons choisir entre interpolation et plat des régimes de rendu. Le maillage peut être caché dans tous les types de parcelles. Pour les équations paraboliques et hyperboliques nous pouvons animer la solution qui change avec le temps.

Nous pouvons afficher la solution en 2D et 3D

III.3. Manipulation :

III.3.1. Structure pointe plan étudiée :

Nous allons étudier le système pointe plan qui est représenté sur la figure ci-dessous :



Notre système est un système pointe-plan, pour lequel on modélise le champ et le potentiel électrique. Cette configuration est à symétrie 2D-axisymétrique, c'est-à-dire que le champ électrique ne varie pas par rotation autour de l'axe de la pointe. De ce fait, le domaine d'étude du champ électrique se ramène au demi-plan méridional.

La frontière extérieure est une ellipse. Soit $\mathbf{n}$ le vecteur normal sur l'axe de symétrie de la géométrie ou sur la frontière extérieure de la géométrie. En positionnant la frontière extérieure le long d'une ligne de champ, nous pouvons poser la condition:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

Puisque le problème étudié est de type axisymétrique, donc l'étude sera faite sur un demi-plan qu'on représente sur la figure ci-après.

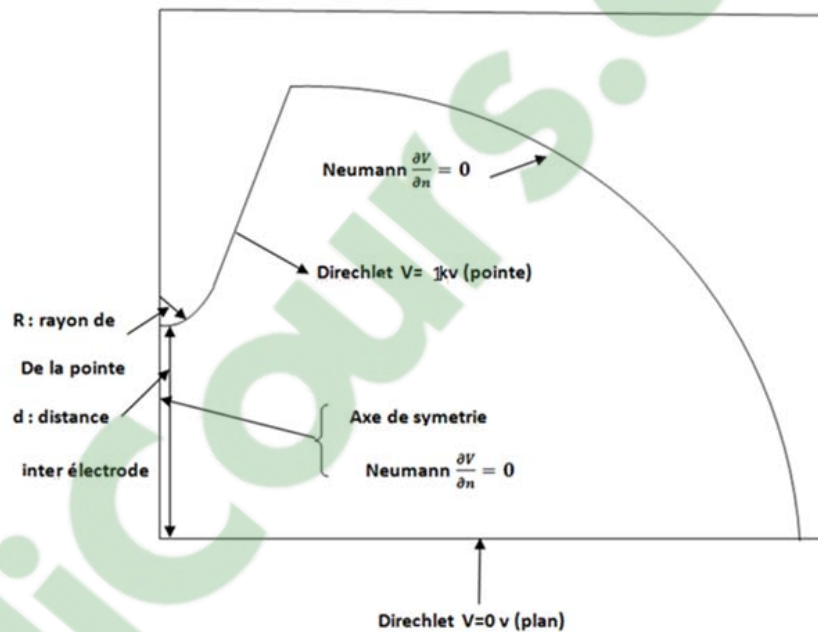


Figure.III.1 :le domaine d'intégration et les condition aux limites dans le cas pointe plan

III.3.2. Equations de MAXWELL :

Le comportement des phénomènes magnétiques est indépendant du temps ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), les équations de MAXWELL s'écrivent alors :

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

III.3.3. Equations du milieu:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

III.3.4. Loi d'Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

III.4. Méthode de calcul du champ électrique en configuration pointe-plan :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = -\epsilon \overrightarrow{\text{grad}V}$$

Nous avons aussi

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{D'où} \quad \text{div} \vec{D} = \text{div}(-\epsilon \overrightarrow{\text{grad}V}) = \rho$$

$$\rho = 0 \longrightarrow \text{div}(-\epsilon \overrightarrow{\text{grad}V}) = 0$$

Cette équation est de la forme :

$$-\text{div}(\overrightarrow{C \text{ grad}V}) + aV = f$$

Par analogie on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_r / 36\pi 10^9 \\ f = \rho \\ a = 0 \end{array} \right.$$

Le plan d'étude est à 2 dimensions [x, y]

Donc :

$$\text{div}(-\text{grad}\vec{V}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

L'équation aux dérivées partielles régissant le phénomène en termes de potentiel électrique V est :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Pour le champ électrique, nous avons :

$$\text{div} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{Alors}$$

$$\epsilon \text{div} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\text{On a : } \rho = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

Pour résoudre notre problème d'électrostatique sous le logiciel PDETOOL qui nous permet d'étudier et de résoudre les équations aux dérivées partielles en 2D, nous avons suivi les étapes suivantes sous le logiciel MATLAB :

III.5. Les différentes instructions permettant la manipulation du logiciel via clavier :

- Nous tapons la commande PDEtool sur la page de commande de MATLAB
- puis options, puis à l'option « axes limites ».
- puis draw, puis à l'option « rectangle/square ».
- puis Boundary, puis à l'option boundary Mode et par la suite la détermination des conditions aux limites du type :

$$\text{Dirichlet} \longrightarrow U = U_0$$

$$\text{Neumann} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (\text{plan de symétrie})$$

- Aller au pde, puis à l'option pde mode : introduction des constantes :

$$c = \varepsilon$$

$$a = 0$$

$$f = \rho$$

- Nous faisons ‘‘Mesh’’, puis à l'option ‘‘initialize Mesh’’ puis à ‘‘refine Mesh’’ (pour mailler le dispositif).

- Nous faisons ‘‘Solve’’ ; puis ‘‘Solve PDE’’.

- Nous faisons ‘‘plot’’, puis l'option ‘‘plote solution’’ et par la suite aux paramètres afin de déterminer les différents graphes suivants : u , $\text{abs}(\text{grad}(u))$.

U : tension appliquée.

$\text{Abs}(\text{grad}(u))$: champ électrique absolu.

III.5.1. Introduction des variables:

Les variables qui seront utilisées seront dans ce qui suit les dimensions de la géométrie pointe-plan que nous avons étudié, soit:

r : rayon de la pointe.

d : distance inter électrode.

En premier lieu nous fixons r , nous faisons varier d .

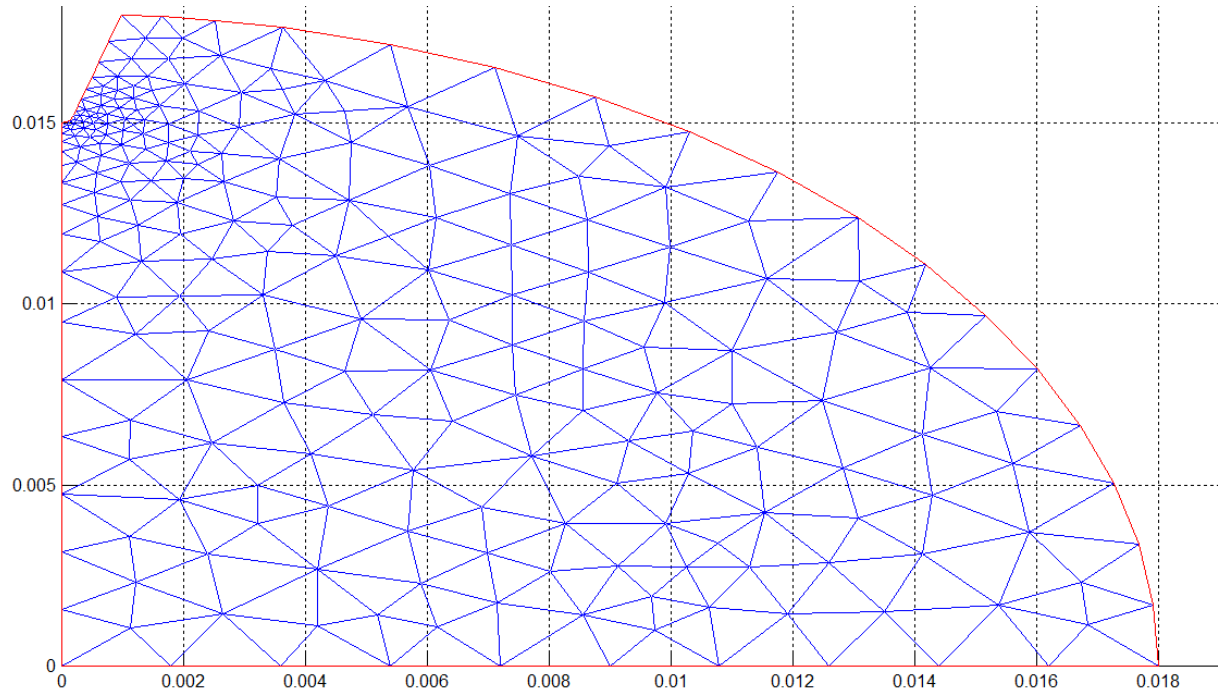
En second lieu nous fixons d , nous faisons varier r .

III.5.2.Introduction des constantes:

- $C = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_r / 36\pi 10^9$ dans le vide : $c = \epsilon_0 \epsilon_r = 1/36\pi 10^9$
- $a = 0$
- $f = \rho = 0$
- $U_{plan} = 0 \text{ V}$
- $U_{pointe} = 1 \text{ KV}$

Après avoir introduit les constantes nous avons obtenus les différents résultats avec le logiciel MATLAB PDETOOL. En premier lieu nous allons commencer par donner les cartographies du potentiel, et nous tirerons les observations avec les interprétations et la conclusion. En seconde lieu nous allons faire la même chose pour le champ électrique, puis nous finirons par une conclusion générale.

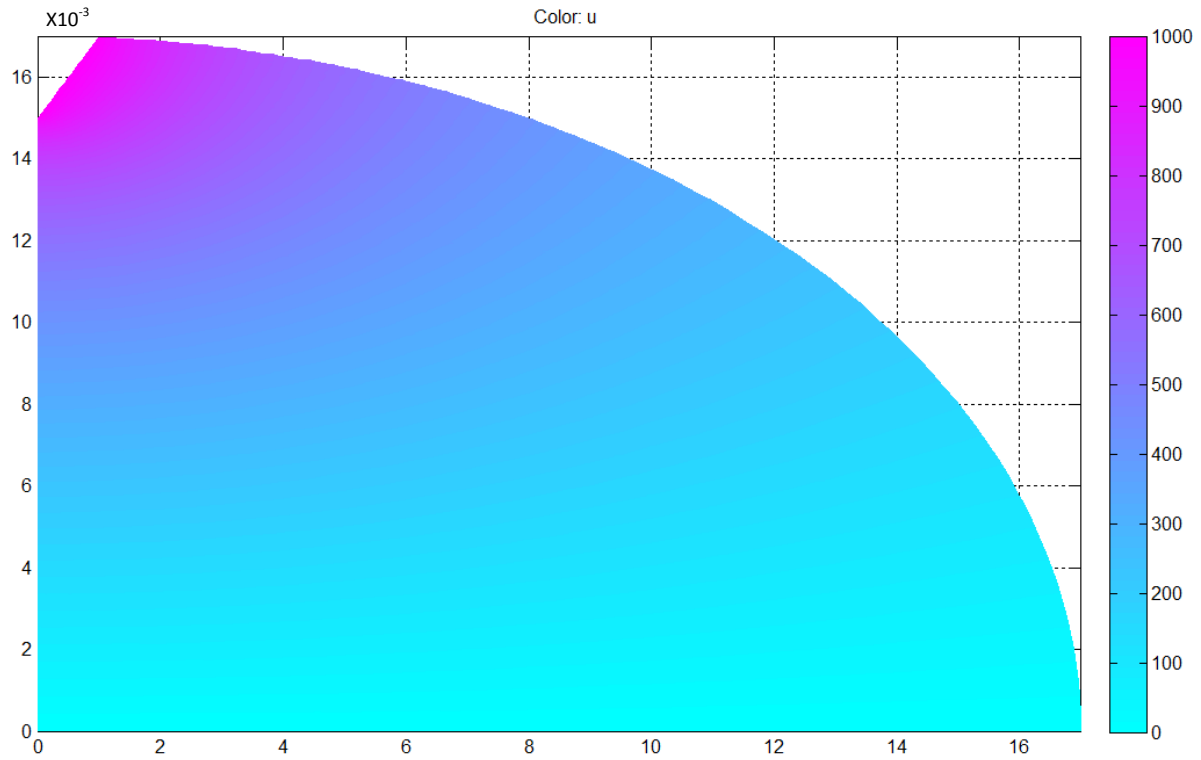
III.5.3. Maillage du domaine:



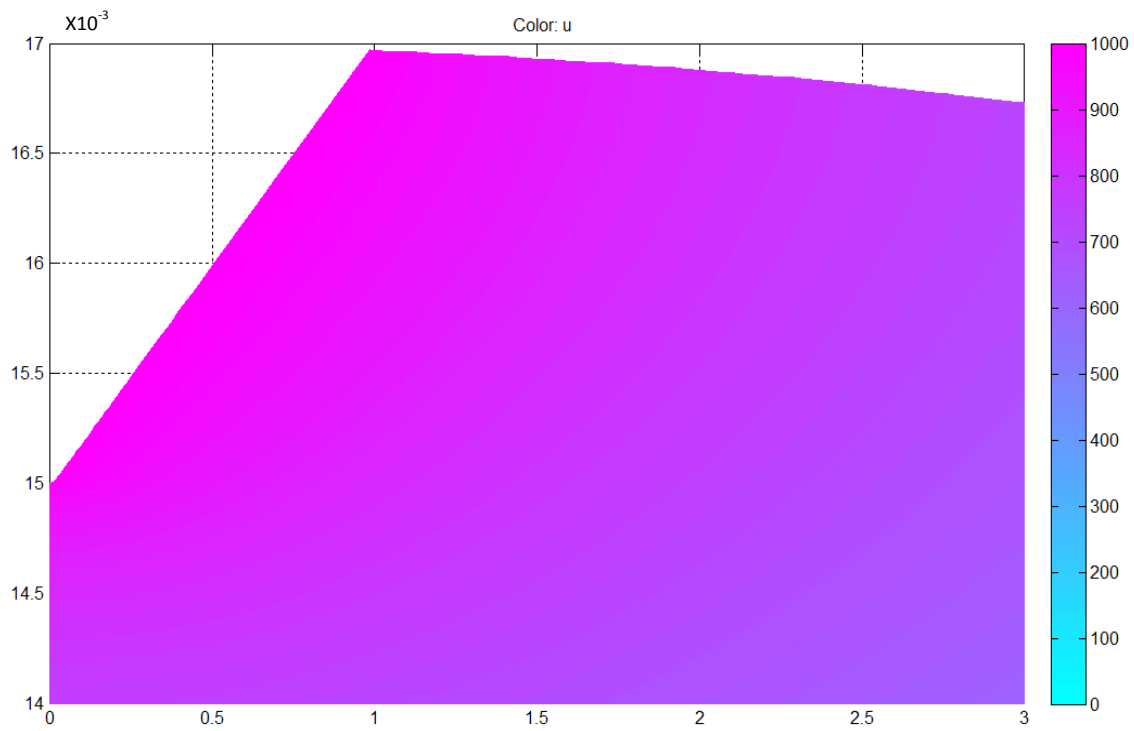
III.6. Résultats :

III.6.1. Cartographies du potentiel :

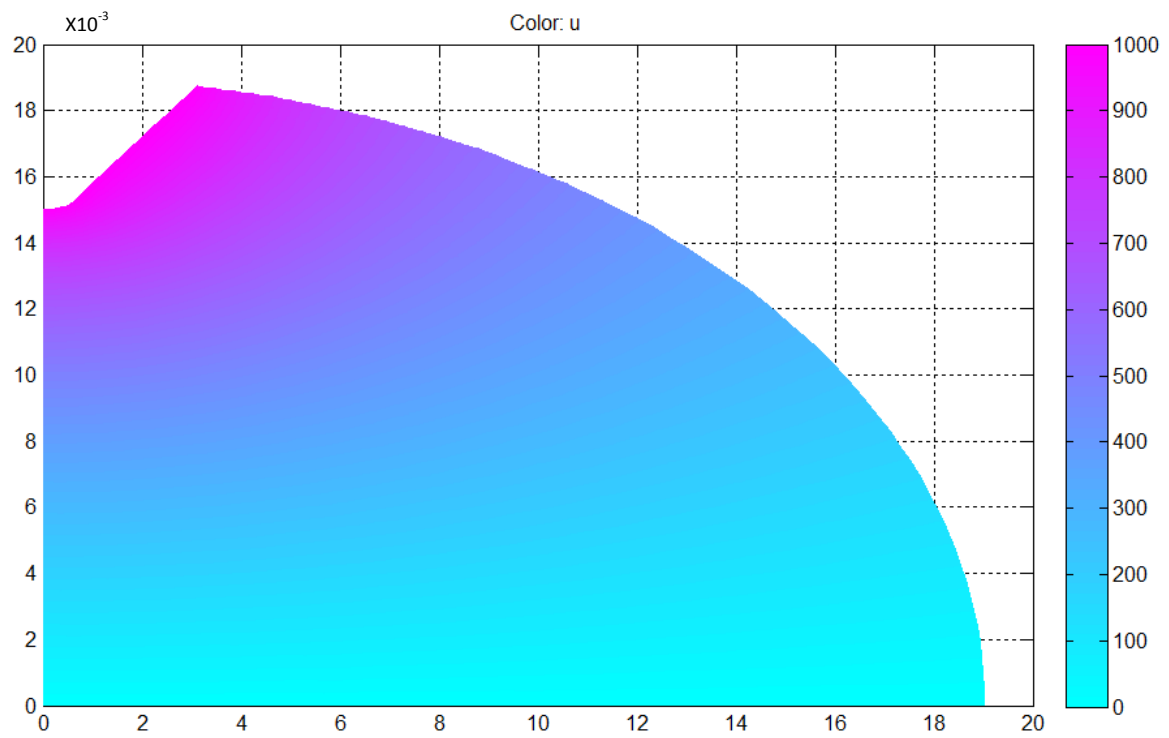
Pour $r = 0.02$ mm, $d = 15$ mm



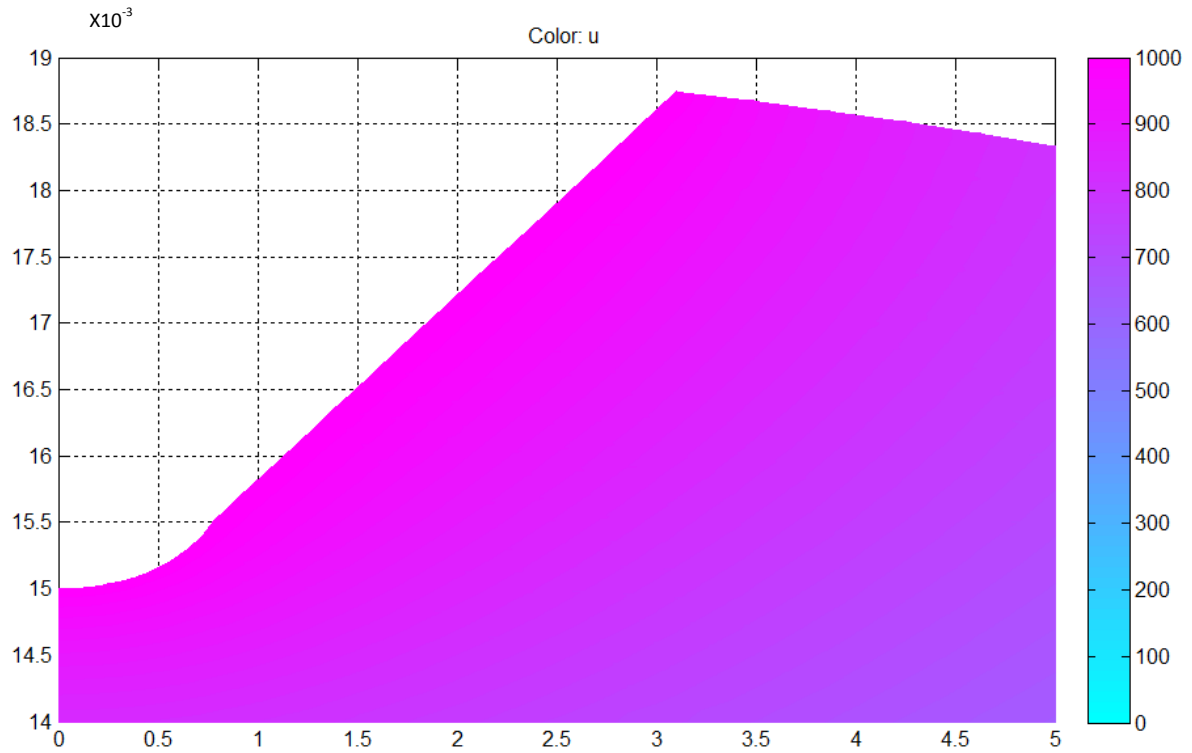
Effet loupe sur la pointe



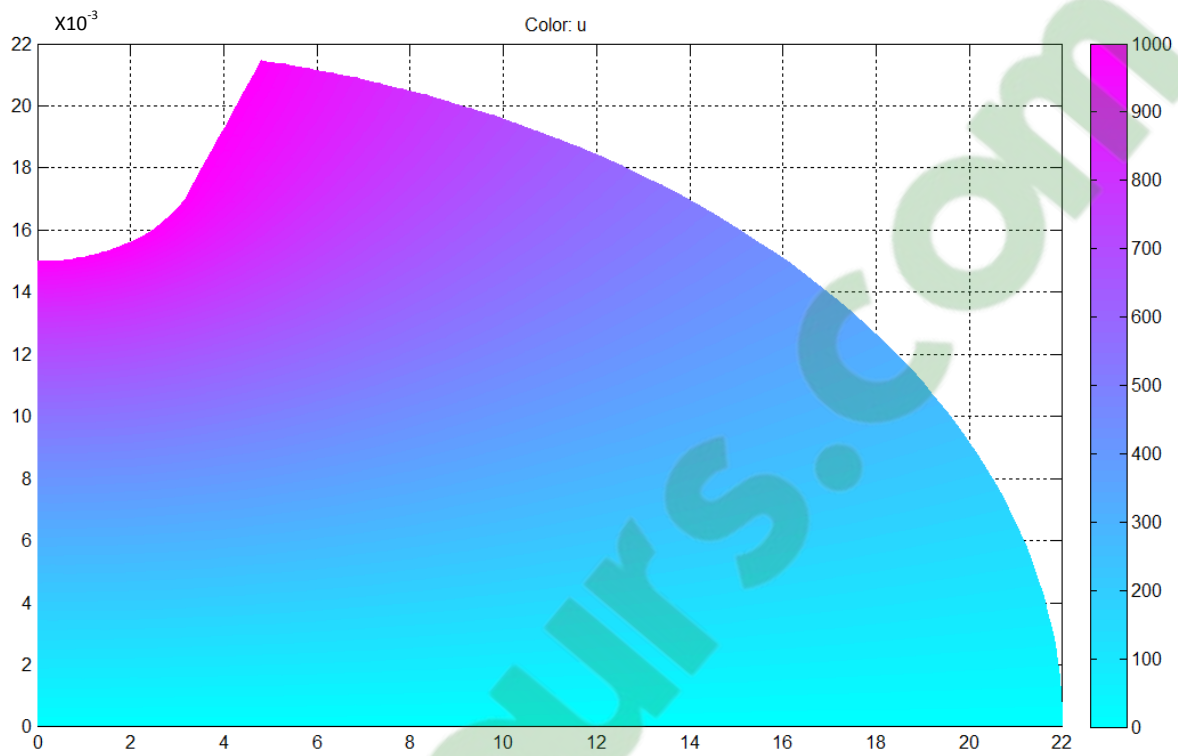
Pour $r = 0.85\text{mm}$, $d = 15\text{mm}$



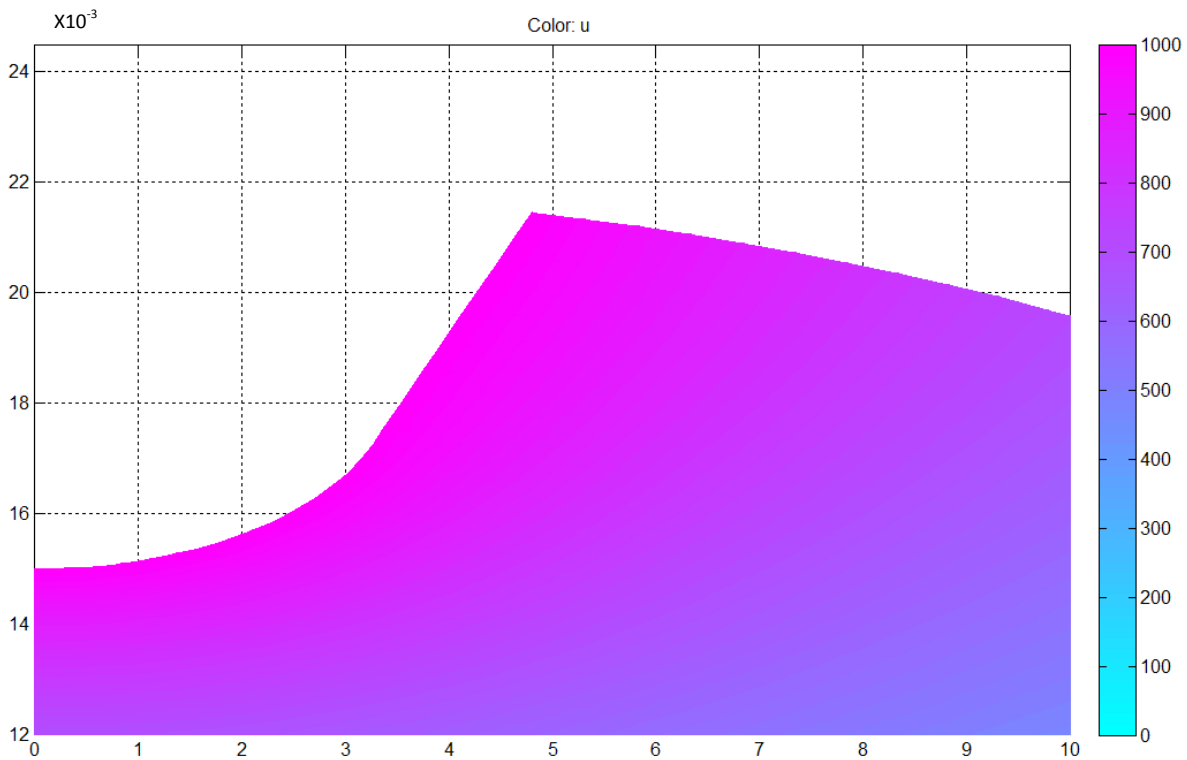
Effet loupe sur la pointe :



Pour $r = 3.5\text{mm}$, $d = 15\text{mm}$



Effet loupe sur la pointe :



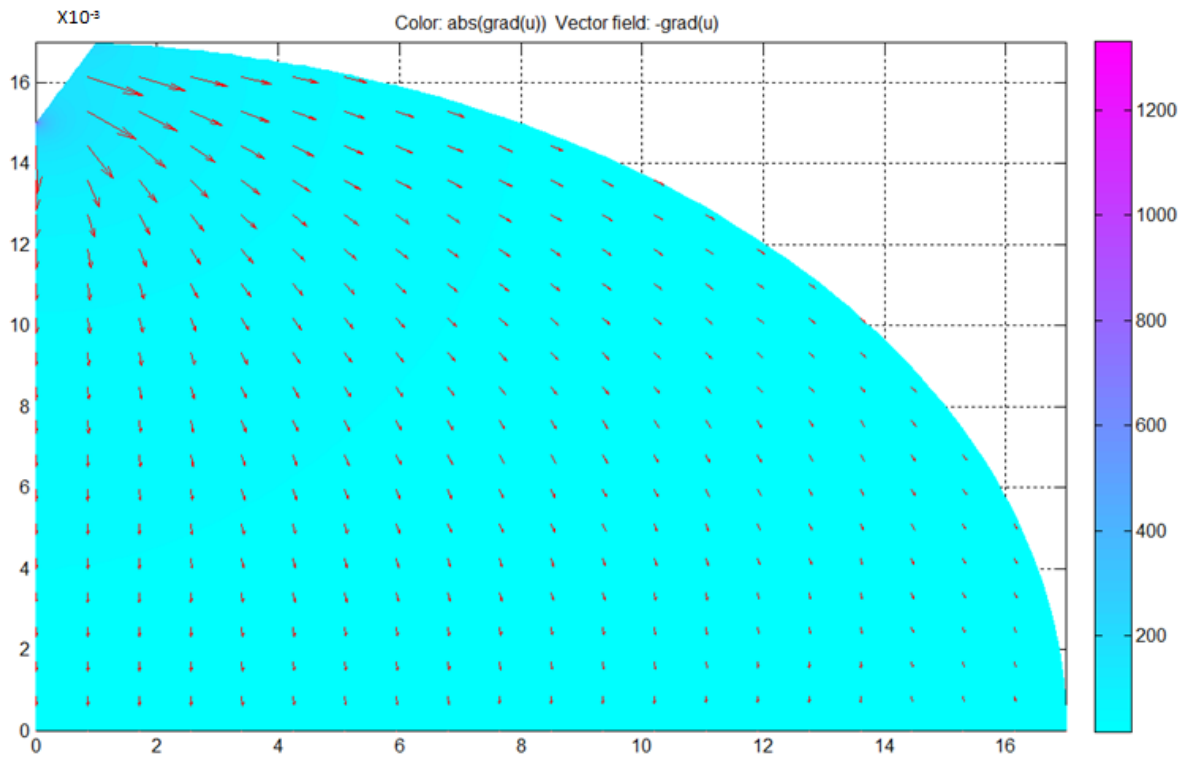
III.6.2. Commentaires sur les cartographies du potentiel :

D'après les cartographies du potentiel représentées ci-dessus, nous remarquons que la valeur du potentiel est la même sur toute la surface de toute l'électrode pointe, et c'est là qu'elle est la plus grande.

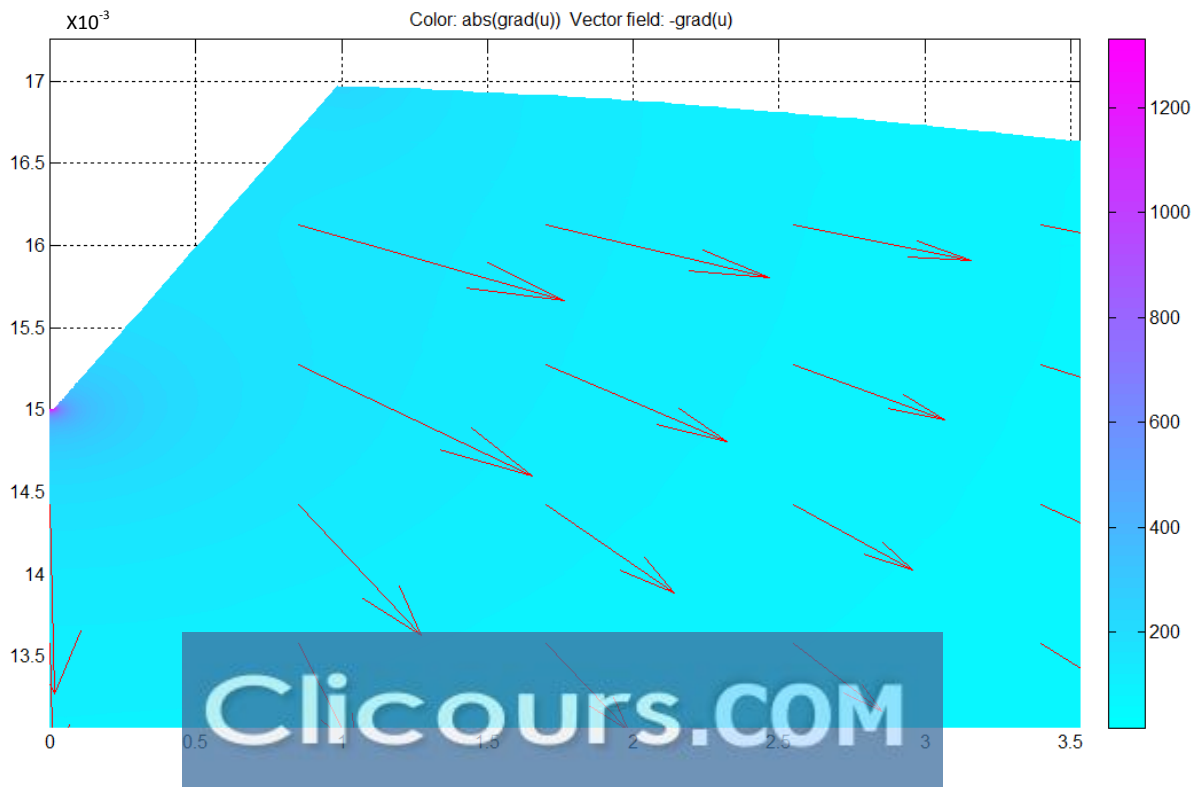
Cette valeur diminue progressivement au fur et à mesure que nous nous éloignons de l'électrode pointe jusqu'à atteindre une valeur 0 volts aux alentours de l'électrode plane.

III.6.3. Cartographie du champ électrique:

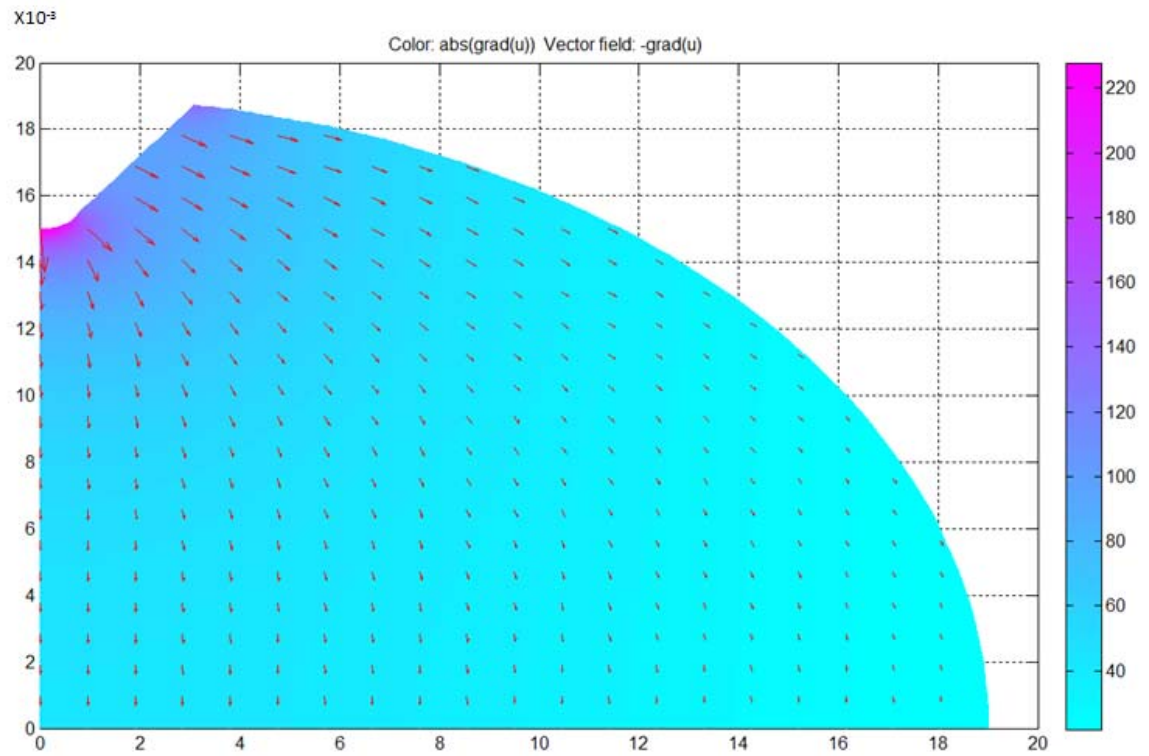
Pour $r = 0.02\text{mm}$, $d = 15\text{mm}$



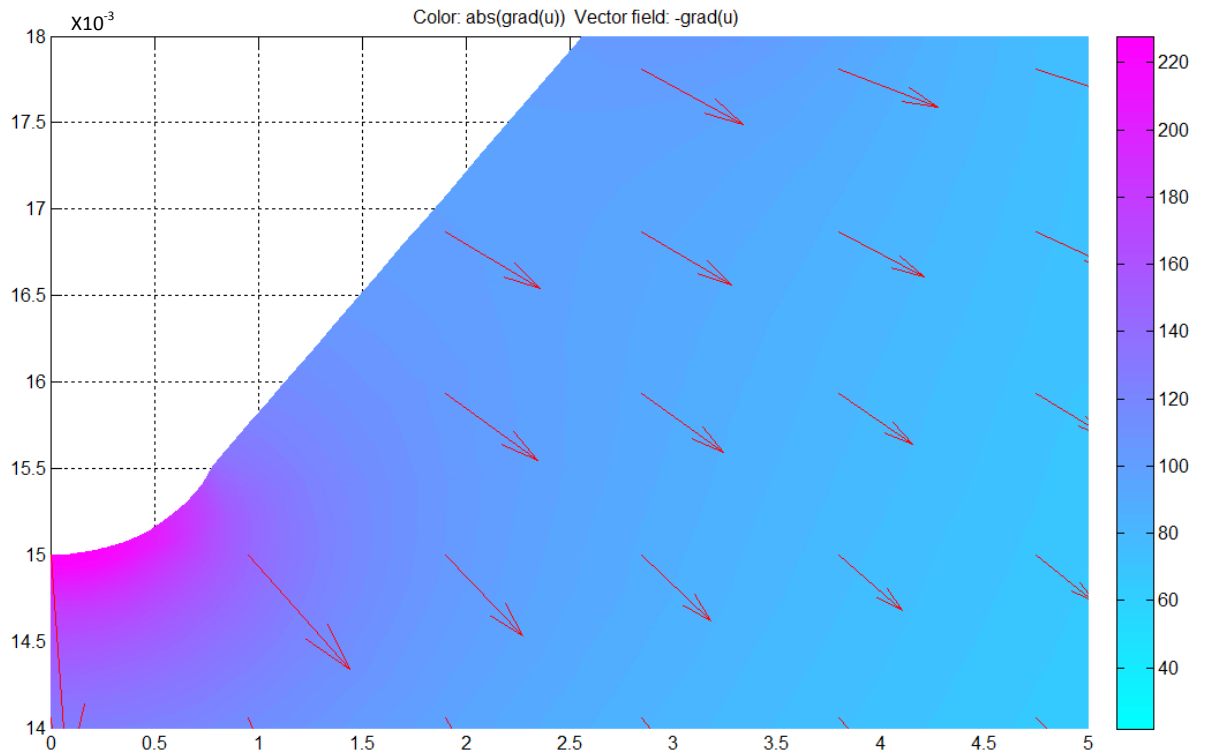
Effet loupe sur la pointe :



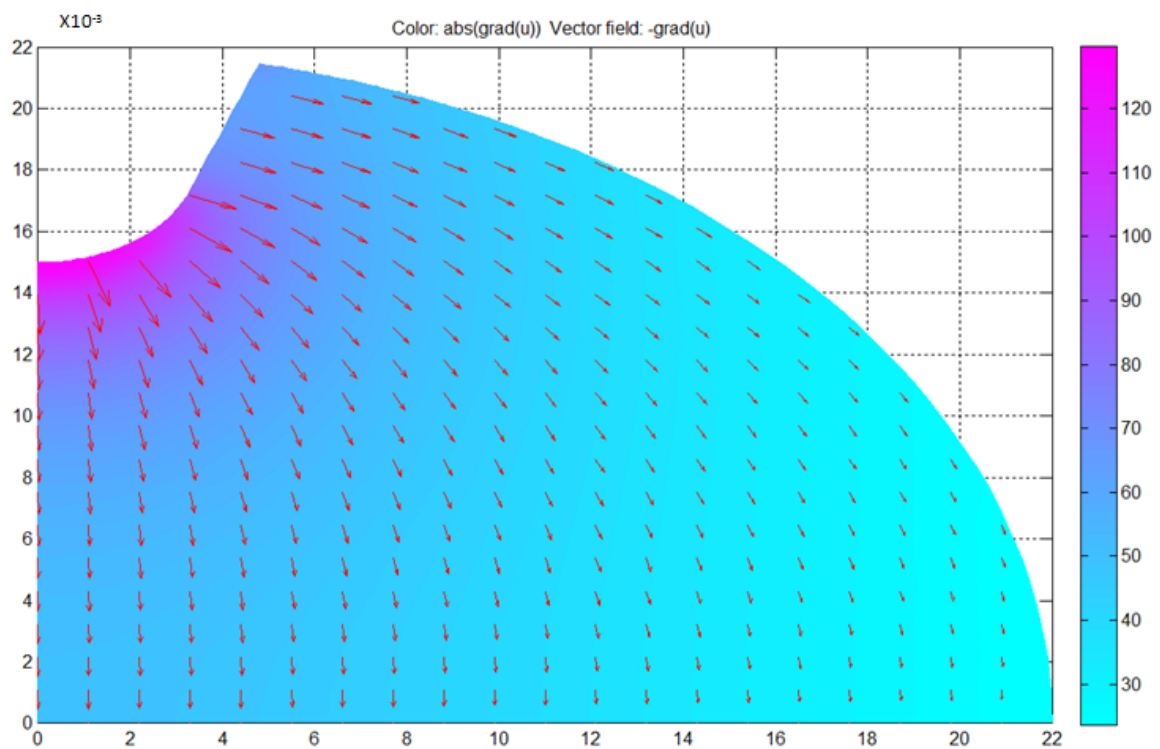
Pour $r = 0.85$, $d = 15\text{mm}$



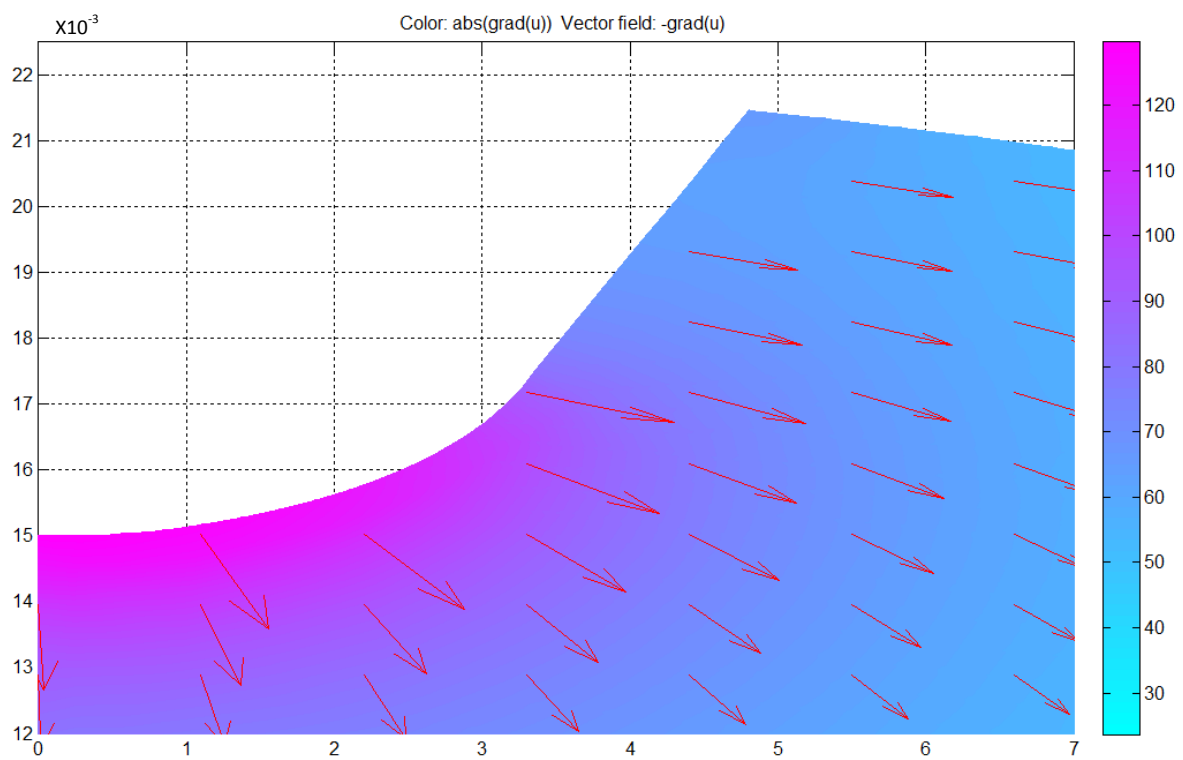
Effet loupe sur la pointe



Pour $r = 3.5\text{mm}$, $d = 15\text{mm}$



Effet loupe sur la pointe



III.6.4. Commentaires sur les cartographies du champ électrique:

D'après les cartographies du champ représentées ci-dessus, nous remarquons que le champ est plus au moins uniforme pour la plus grande valeur du rayon de courbure. Tandis que le champ n'est pas uniforme pour les petites valeurs de r .

Le champ dépend beaucoup du rayon de courbure de la pointe. La valeur du champ est inversement proportionnelle au rayon de courbure de la pointe.

III.7. Représentation des courbes:

Dans ce paragraphe nous allons convertir les résultats obtenus de la simulation sur PDETOOL, sous forme de courbes. Les premières courbes à représenter seront celles de la variation du champ en fonction du rayon de courbure de la pointe, en maintenant la distance inter-électrodes d fixe. Les secondes, seront celles de la variation du champ en fonction de la distance x qui est l'abscisse du point considéré par rapport à l'extrémité de la pointe prise comme origine, en maintenant le rayon de courbure r fixe.

- **Courbes $E=f(r)$ pour d fixe:**

Nous avons fixé la valeur de d à 15 mm, pour chaque valeur de x qui est l'abscisse du point considéré par rapport à l'extrémité de la pointe prise comme origine, nous avons varié le rayon de courbure r , nous exécutons le programme, les valeurs trouvées sont traduites sur les courbes suivantes :

Pour $x = 2.5$ mm on a :

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < r \leq 0.5$

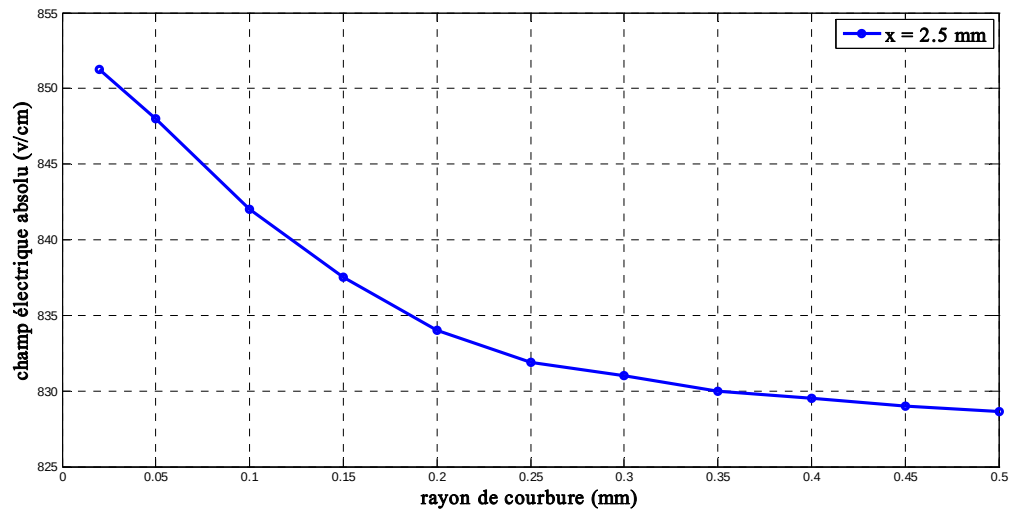


Figure.III.2. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Pour $x = 5 \text{ mm}$ on a:

-distance interélectrodes: $d = 15 \text{ mm}$.

-tension appliquée: $U = 1000 \text{ volts}$.

- $0 < r \leq 0.5$

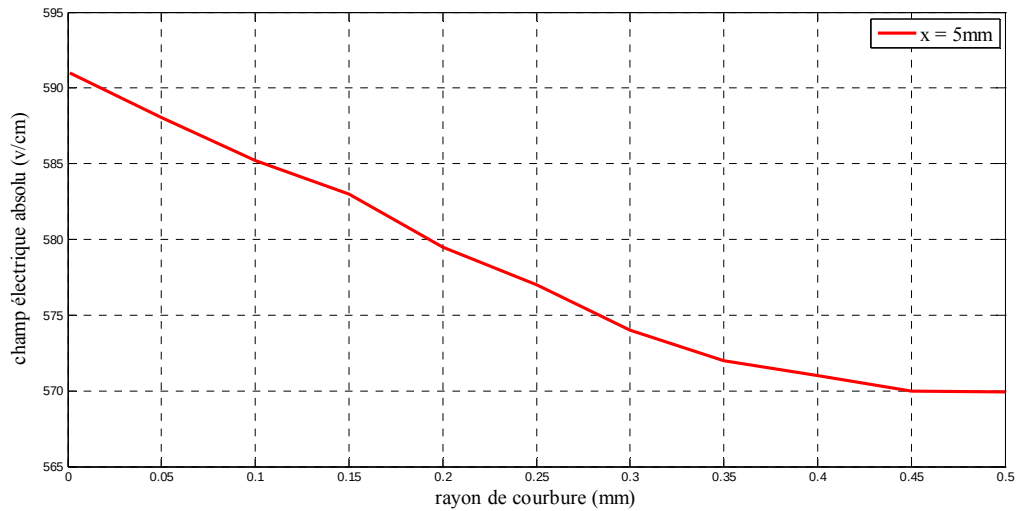


Figure.III.3. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Pour $x = 14 \text{ mm}$ on a:

-distance interélectrodes: $d = 15 \text{ mm}$.

-tension appliquée: $U = 1000 \text{ volt}$.

- $0 < r \leq 0.5$

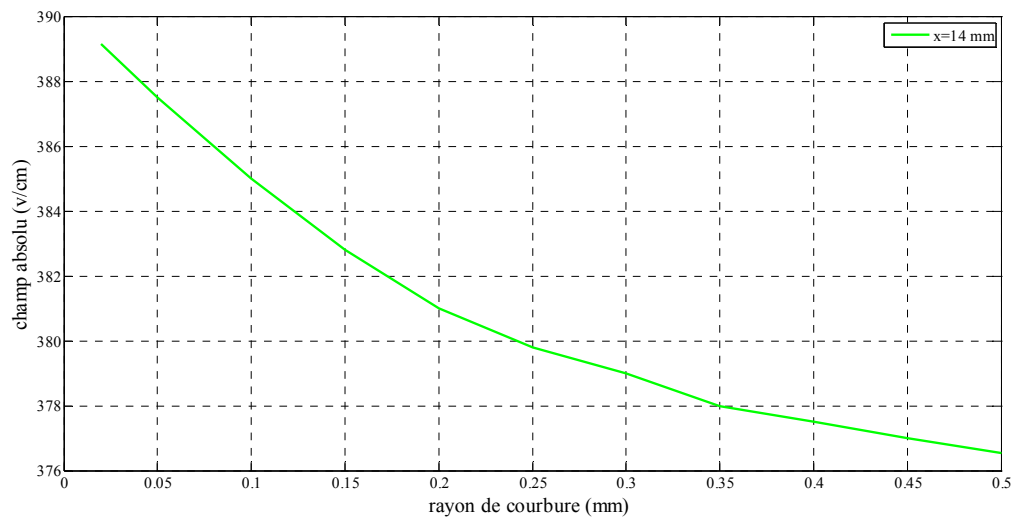


Figure.III.4. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

- **Courbes $E=f(d)$ pour r fixe:**

Nous allons fixer r à des valeurs différentes et nous ferons varier la distance x . Les résultats seront présentés sur les figures III.3, III.4, et III.5.

Pour $r = 0.02$ mm

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm

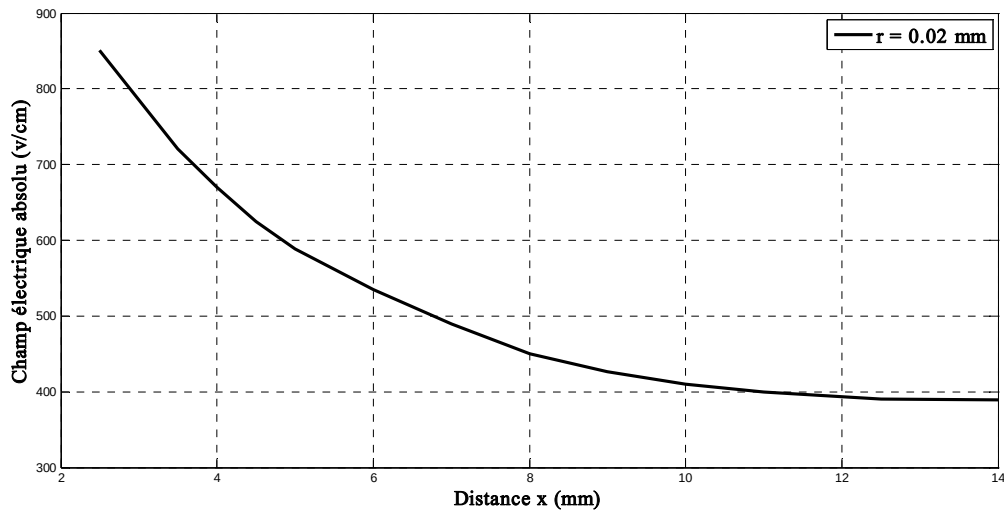


Figure.III.5: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Pour $r = 0.2 \text{ mm}$.

-distance interélectrodes: $d = 15 \text{ mm}$.

-tension appliquée: $U = 1000 \text{ volts}$.

- $0 < x \leq 14 \text{ mm}$

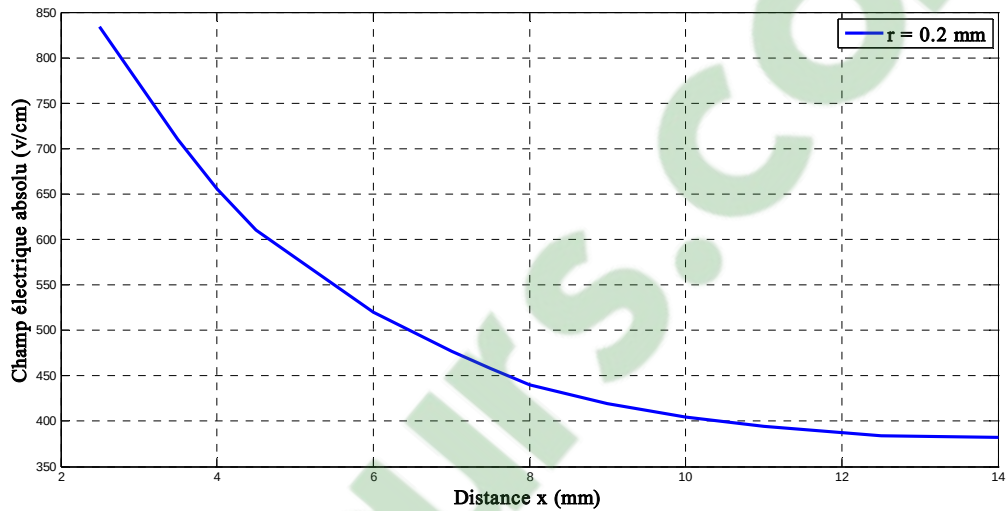


Figure.III.6: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Pour $r=0.5$ mm.

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm

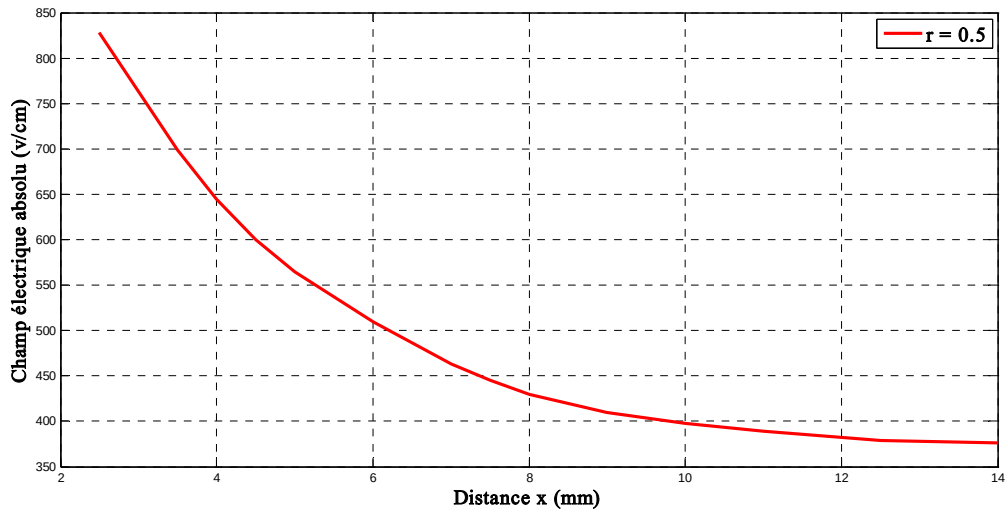


Figure.III.7: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Nous allons refaire la même manipulation que précédemment pour les trois autres valeurs de la distance inter-électrodes d . les résultats seront rassemblés sur la figure III.8

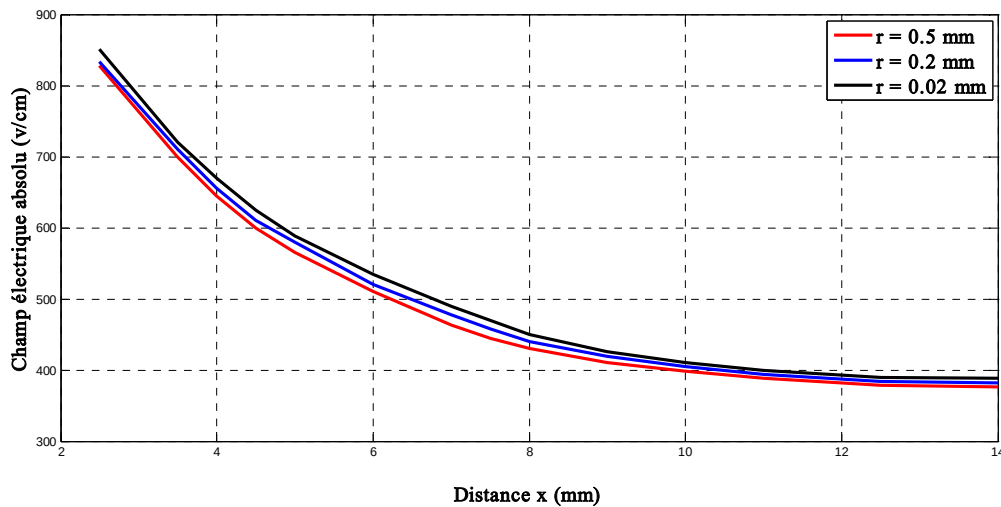


Figure.III.8: variation du champ électrique en fonction de la distance x pour les différentes valeurs de r .

III.7.1. Interprétation des résultats obtenus:

Pour la courbe $E=f(r)$:

D'après les courbes de la variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure, nous remarquons que pour les faibles valeurs du rayon r , le champ électrique prend des valeurs très importantes, il diminue progressivement avec l'augmentation du rayon de courbure r .

Plus le rayon de courbure est petit plus la densité de charge sur l'électrode augmente.

Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure. A priori, le résultat ci-dessus nous montre l'effet d'une pointe (accumulation de charges).

On peut conclure que le champ électrique est inversement proportionnel au rayon de courbure de la pointe.



Pour la courbe $E=f(d)$:

D'après les courbes de la variation du champ électrique en fonction de la distance x , nous remarquons que pour les petites distances de x , le champ électrique prend des valeurs plus grandes par rapport à des grandes distances de x .

Donc le champ électrique est inversement proportionnel à la distance x qui est l'abscisse du point considéré par rapport à l'extrémité de la pointe prise comme origine.

III.8 : Formule de Hartmann :

Hartmann [23] a établi une expression du champ électrique E en fonction du potentiel appliqué à la pointe le long de l'axe de symétrie x :

La formule de Hartmann nous permet de calculer le champ électrique sur n'importe quel point à une distance x de la pointe tel que :

$$E(x) = \frac{V}{\left(x + \frac{r}{2}\right) \ln\left(\frac{2d+r}{r}\right)}$$

Avec V le potentiel électrique, d la distance interélectrodes, r le rayon de courbure de la pointe et x l'abscisse du point considéré par rapport à l'extrémité de la pointe prise comme origine.

III.8.1 : représentation des courbes:

➤ $E = f(r)$

Pour $x = 2.5$ mm on a :

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < r \leq 0.5$ mm

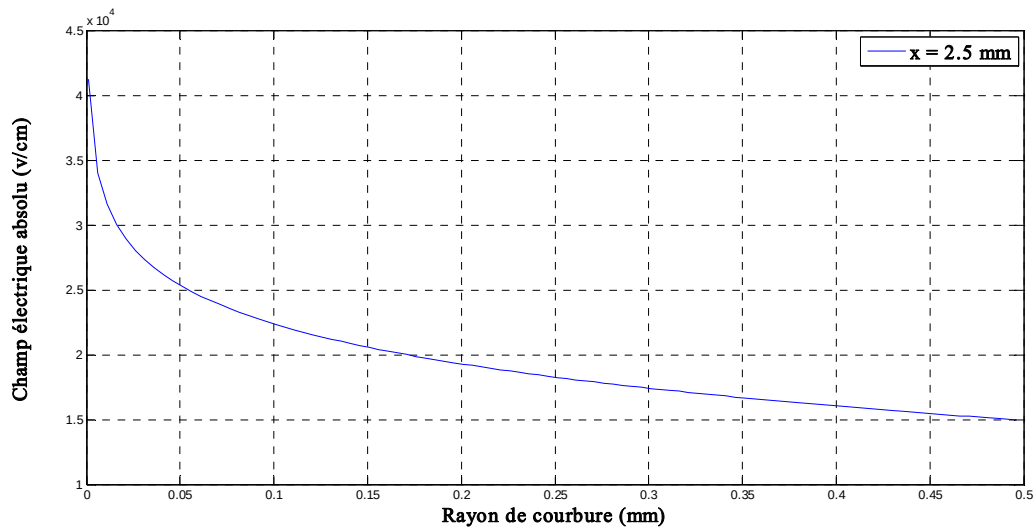


Figure.III.9. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Selon la formule de Hartmann

Pour $x = 5 \text{ mm}$ on a :

-distance interélectrodes: $d = 15 \text{ mm}$.

-tension appliquée: $U = 1000 \text{ volts}$.

- $0 < r \leq 0.5 \text{ mm}$

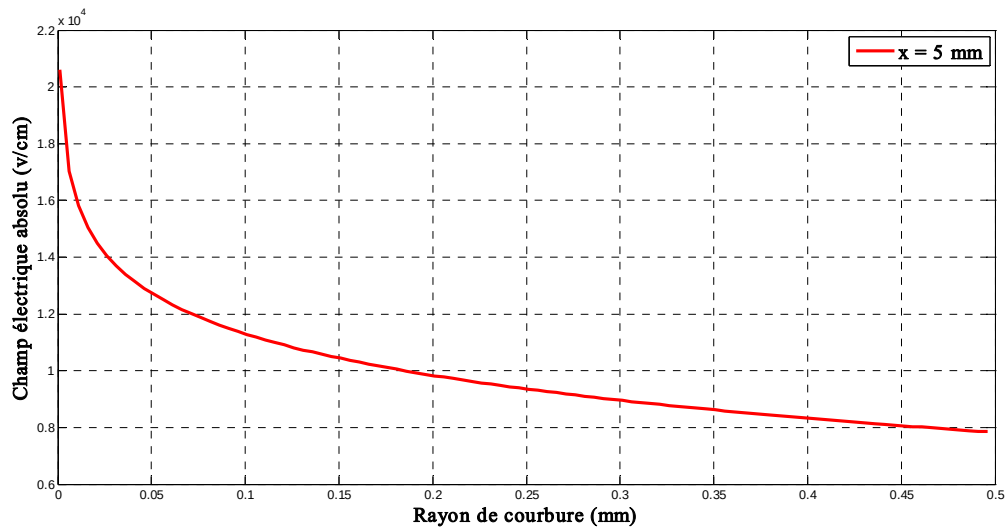


Figure.III.10. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Selon la formule de Hartmann

Pour $x = 14 \text{ mm}$ on a :

-distance interélectrodes: $d = 15 \text{ mm}$.

-tension appliquée: $U = 1000 \text{ volts}$.

- $0 < r \leq 0.5 \text{ mm}$

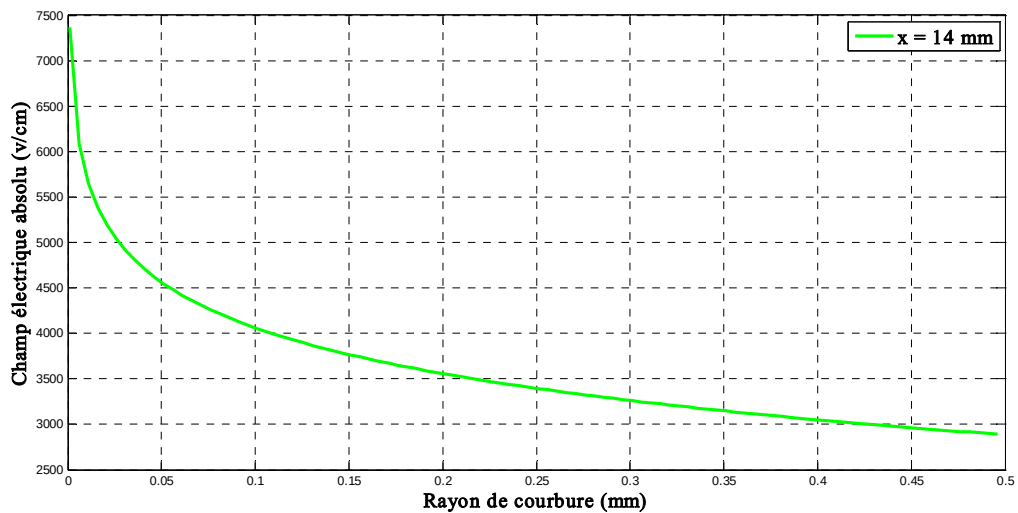


Figure.III.11. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Selon la formule de Hartmann

Nous allons refaire la même manipulation que précédemment pour les trois autres valeurs de la distance interélectrodes d . les résultats seront rassemblés sur la figure III.12

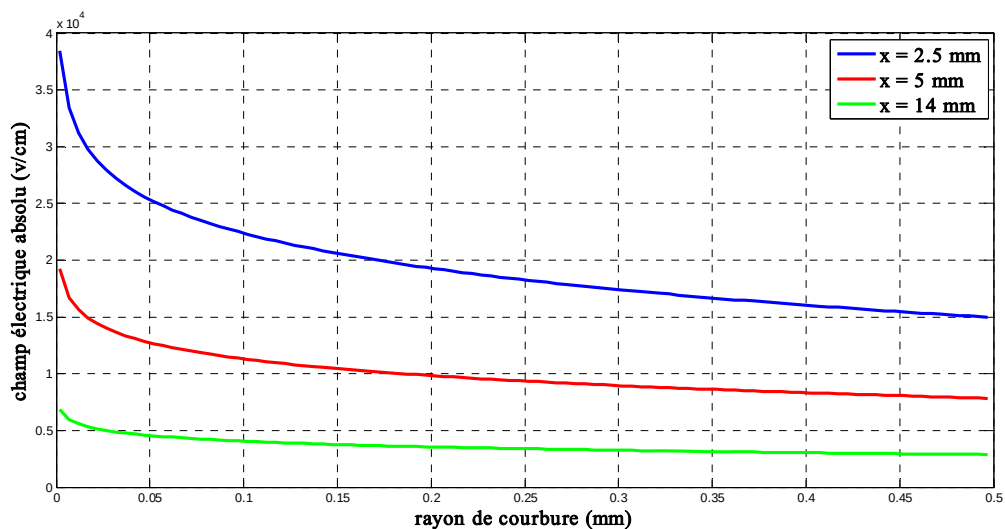


Figure.III.12. variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe

Selon la formule de Hartmann

III.8.2 : Interprétation des courbes $E = f(r)$:

D'après les courbes de la variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure, nous remarquons que pour les faibles valeurs du rayon r , le champ électrique prend des valeurs très grandes, il augmente progressivement avec diminution du rayon de courbure.

Le champ électrique est inversement proportionnel au rayon de courbure de la pointe.

➤ $E = f(x)$

Pour $r=0.02$ mm.

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm

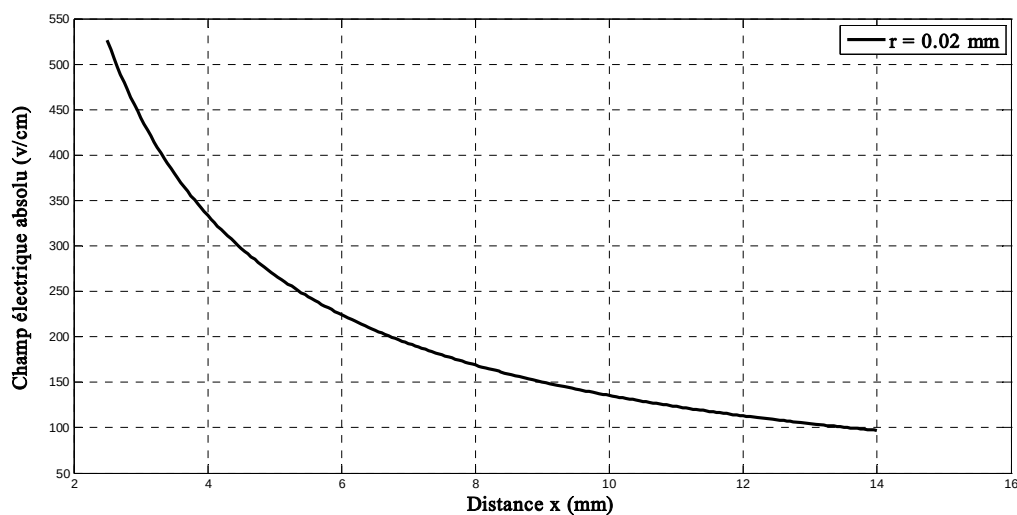


Figure.III.13: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Selon la formule de Hartmann

Pour $r=0.2$ mm.

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm

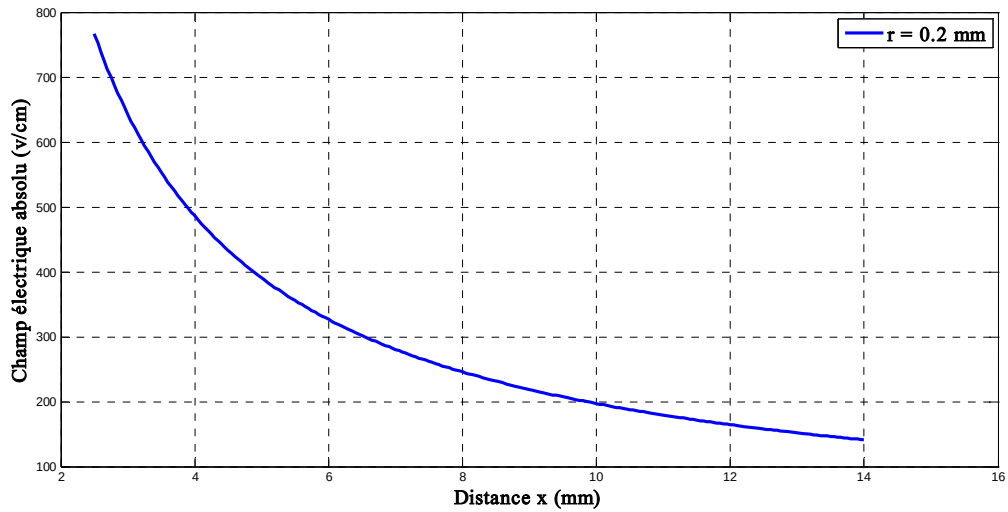


Figure.III.14: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Selon la formule de Hartmann

Pour $r=0.5$ mm.

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm

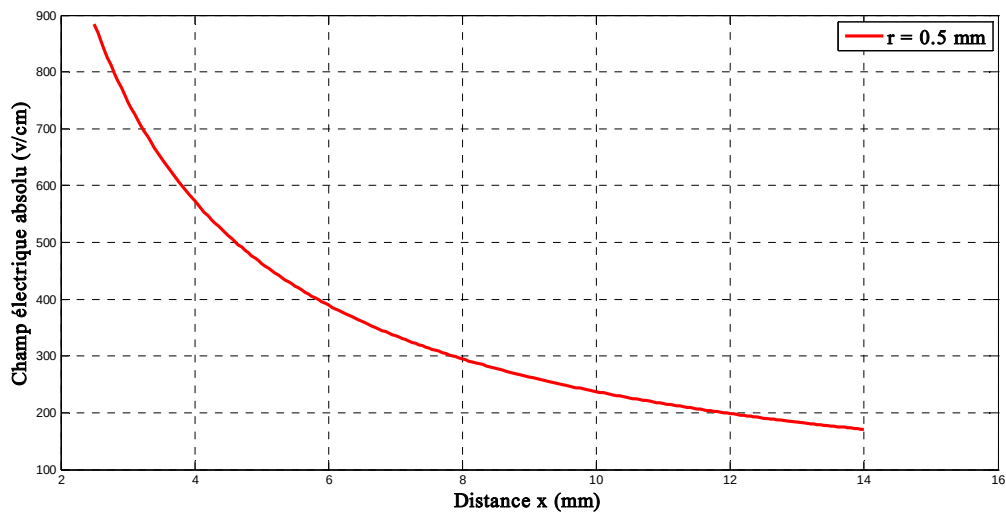


Figure.III.15: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Selon la formule de Hartmann

Nous allons refaire la même manipulation que précédemment pour les trois autres valeurs de rayon de courbure.les résultats seront rassemblés sur la figure III.16

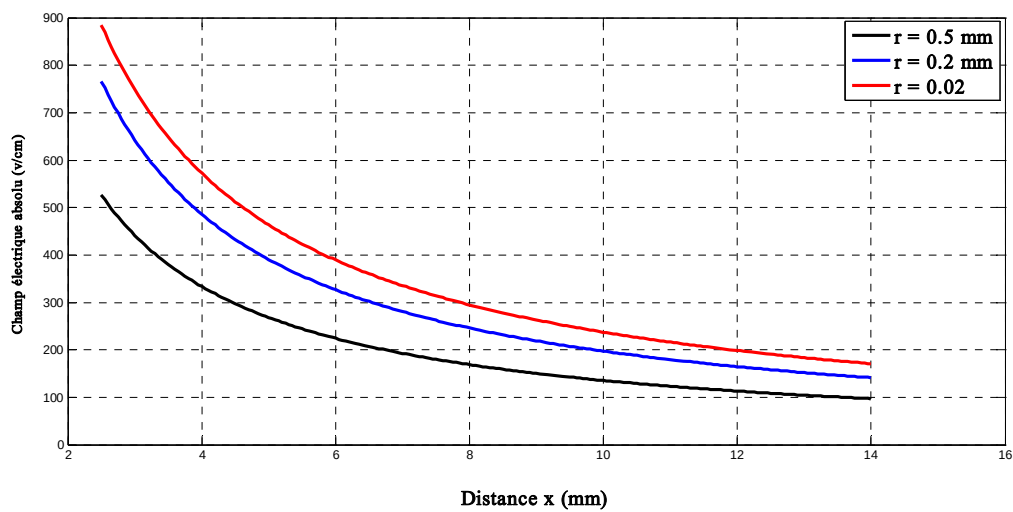


Figure.III.16: variation du champ électrique en fonction de la distance x

Selon la formule de Hartmann

III.8.3 : Interprétation des courbes $E = f(x)$:

D'après les courbes de la variation du champ électrique en fonction de la distance x , nous remarquons que pour les petites distances x , le champ électrique prend des valeurs plus grandes.

Donc le champ électrique est inversement proportionnel à la distance x .

III.9. comparaison des résultats :

Nous allons comparer entre les résultats obtenus avec la méthode numérique et ceux donnés par la formule de Hartmann, en représentant les courbes sur le même graphe.

La figure suivante représente la variation du champ électrique en fonction de la distance x .

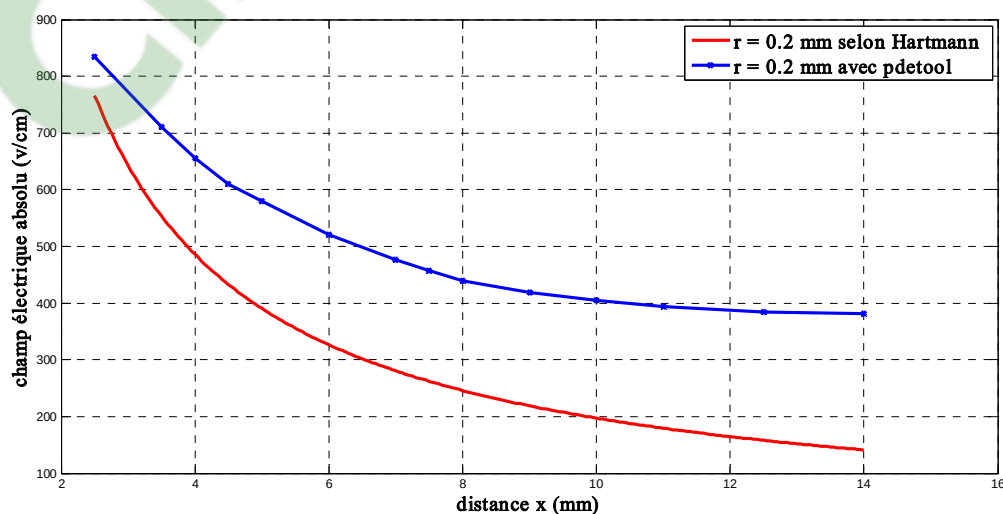
➤ $E = f(x)$

Pour $r=0.2$ mm.

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < x \leq 14$ mm



La figure suivante représente la variation du champ électrique en fonction du rayon de courbure de la pointe r .

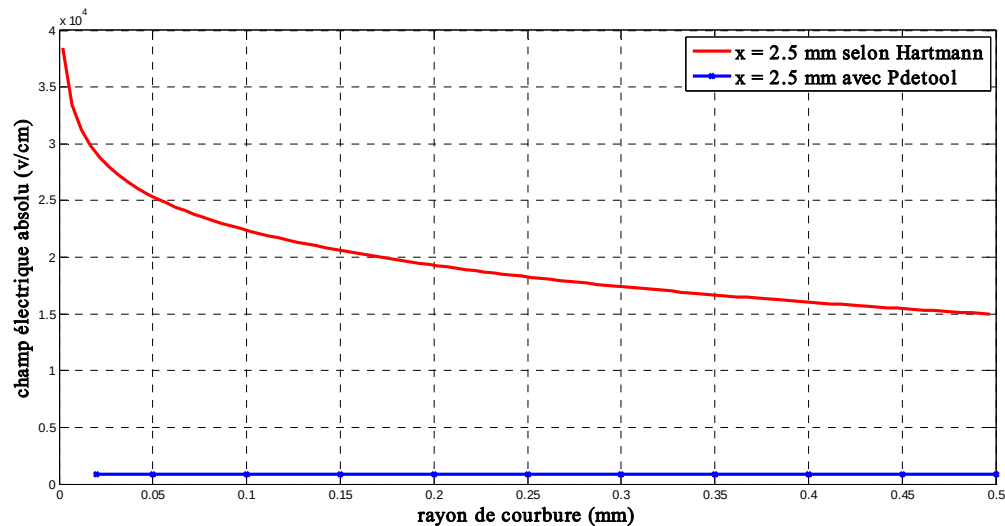
➤ $E = f(r)$

Pour $x = 2.5$ mm on a :

-distance interélectrodes: $d = 15$ mm.

-tension appliquée: $U = 1000$ volts.

- $0 < r \leq 0.5$ mm



En comparant entre les résultats obtenus avec la méthode numérique et ceux donnés par la formule de Hartmann, nous observons que les courbes ont les mêmes allures, sauf que les valeurs sont différentes.

Donc les résultats obtenus par les deux méthodes sont conformes qualitativement, et différents quantitativement.

III.10. Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons simulé le champ et le potentiel électrique dans un isolant gazeux (air) en configuration pointe-plan.

Nous avons remarqué que :

- Le champ électrique est inversement proportionnel à la distance x de la pointe, et le rayon de courbure de la pointe.

- les résultats obtenus par la simulation du champ et du potentiel avec le logiciel Pdetool, et Les résultats donnés par la formule de Hartmann sont conformes qualitativement, et différents quantitativement ce qui est dû à :

- la formule empirique de Hartmann est une formule approchée, elle ne donne pas les valeurs exactes du champ électrique.

- la simulation du champ et du potentiel électrique avec Pdetool donne aussi des valeurs approchées.

Conclusion générale :

Ce travail est réalisé dans le but de calculer le champ et le potentiel électriques dans un système pointe plan, en utilisant un logiciel éléments finis Pdetool. Ce logiciel nous a permis d'évaluer la variation du champ et du potentiel électrique dans une configuration pointe-plan, et le degré d'influence des paramètres de la structure sur ces deux grandeurs.

Le logiciel Pdetool nous a permis en premier lieu, d'évaluer l'influence plus importante du rayon de courbure d'électrode pointe sur le champ et le potentiel électrique. En fixant la distance x de la pointe, et en variant le rayon de courbure de la pointe. Les résultats recueillis de Pdetool nous ont bien montré l'influence du rayon de courbure sur les deux grandeurs étudiées.

En second lieu, nous avons essayé d'évaluer l'influence de la distance x de la pointe sur le champ et le potentiel électrique, en fixant le rayon de courbure de la pointe, et en variant la distance x de la pointe. Les résultats recueillis de Pdetool nous ont bien montré l'influence de cette distance sur les deux grandeurs étudiées.

Nous avons terminé le travail par une comparaison entre les courbes de variation du champ électrique obtenues avec la formule de Hartmann et les courbes obtenues avec Pdetool. Les résultats obtenus montrent que le champ électrique est conforme qualitativement, mais différents quantitativement.

Enfin comme perspective, il est souhaitable d'effectuer des essais expérimentaux pour pouvoir départager et valider les résultats obtenus avec le logiciel éléments finis Pdetool, et ceux obtenus avec la méthode empirique de Hartmann.

Bibliographie:

- [1] S. Vacquié, "L'arc Électrique", CNRS Éditions et Eyrolles, France, 2000.
- [2] M.L.Coulibaly « caractérisation des décharges se propageant aux interfaces solide/gaz- relation entre propriétés des matériaux et dimension fractale » thèse de doctorat en génie électrique de l'école doctorale en électronique, électronique, automatique de Lyon. France. 2009.
- [3] Z. Kerroui. N. Chemloul. K. Kecir : « contribution à l'étude de l'effet de décharges électriques sur la surface d'un isolant sous tension alternative 50 HZ ». Mémoire de fin d'études en électrotechnique d'U.M.M.T.O 2007/2008.
- [4] AITDLIONA.M.D JOHER.D.CHIKLI: « comportement électrique de deux isolants parallèles soumis à une tension alternative 50 HZ ». Mémoire de fin d'études en électrotechnique d'U.M.M.T.O. 2007/2008.
- [5] S. Y. Li, K. D. Srivastava and G. D. Theophilus, "Nanosecond StreakPhotography of Discharges on Spacer Surface in Gases", IEEE Transactions on ElectricalInsulations Magazine, Vol. 2,N°1, pp. 114- 120, 1995.
- [6] N. Felici, "Recent advances in the analysis of dc ionized electric fields ", Direct Current, Vol. 8, No 9 et 10(1963).
- [7] C.GARY, G.LEROY « les propriétés diélectriques de l'air et très haute tension », paris : EYROLLES ; 1984.collection de la direction des études et recherche d'électricité é de France.
- [8] Gas discharge physics, Y.P. Raizer, ed. Springer-Verlag, 1991.
- [9] M. SALANNE Jean-Philippe « Contrôle du point de fonctionnement des décharges électriques par l'intermédiaire de leur alimentation. » Thèse doctorat. École doctorale : GEET. TOULOUSE.2005.
- [10] « *Plasma arc centrifugal traitement* » Retech system llc.
<http://www.retechsystemsllc.com/PACT%20webpagesC/sld001.htm>
- [11] TRAN MINH DUC « *Analyse de surface par ESCA – Analyse élémentaire et applications* » Les techniques de l'ingénieur Dossier P2626 (09/1998).
- [12] GHERARDI N. « *Physico-chimie et régimes des décharges contrôlées par barrière diélectrique en mélange azote – Gaz oxydant – silane. Application à l'activation des surfaces polymères et aux déports.* » Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier (N° d'ordre 2538).

- [13] J.J. DAMELIN COURT et Georges.ZISSIS « *Source de lumière et lampes à décharge* » Journées électrotechnique 2001 Toulouse.
- [14] N. O. Matthew, P.D. Sadiku, «Numerical techniques in electromagnetics », Presse CRC, New York, 2001.
- [15] G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, «Une présentation de la méthode des éléments finis», Presses Université Laval, 1981.
- [16] J. Pedro, A. Bastos, N. Sadowski, « Electromagnetic modeling by finite element methods», édition Marcel Dekker, Basel, 2003.
- [17] E. Durand, «Magnétostatique », Université de Paris -VI, (1969).
- [18] P. Lorrain, D.P. Corson, F. Lorrain, «Electromagnetic fields and Waves», W.H. Freeman and Co. New York, 1988.
- [19] R. Petit, «Ondes électromagnétiques», Masson, Paris, 1989.
- [20] E. Amzallag, N. Picolli, «Electromagnétisme», Tome 3, édition Ediscience, Paris, 1996.
- [21] B. Thidé, «Electromagnetic field theory», edition Epsilon, Uppsala, 2001.
- [22] E.Boridy, « Electromagnétique théorie et application », Presses de l'Université du Québec, 1992.
- [23] Hartmann G., « Spectrographie de la décharge couronne : étude des mécanismes de collisions dans le dard », Thèse Univ. Paris XI.1977.
- [24] F.Slimani. « Etude de la configuration pointe plan en absence de charge d'espace avec FEMM », mémoire ingénieur. UMMTO. 2011.