

Table des matières.

Introduction.

CHAPITRE I : Eléments de la théorie de la fiabilité

1-1	Définition de la fiabilité	02
	1-1-1 La probabilité	02
	1-1-2 Accomplissement d'une fonction requise	02
	1-1-3 Conditions spécifiques	02
	1-1-4 Un temps déterminé	03
1-2	Expression mathématique de la fiabilité	03
1-3	Notions fondamentales pour l'analyse fiabiliste	07
	1-3-1 Durée de vie	07
	1-3-2 Densité de probabilité de défaillance	07
	1-3-3 Fonction cumulative de défaillance ou fonction de répartition $F(t)$	08
	1-3-4 Fonction de fiabilité	08
	1-3-5 Taux instantané de défaillance ou taux d'avarie $\lambda(t)$	09
	1-3-6 Temps moyen du bon fonctionnement (MTBF)	09
1-4	Place de la fiabilité dans la recherche opérationnelle	10
1-5	Différents types de fiabilité	12
	1-5-1 Fiabilité intrinsèque	12
	1-5-2 Fiabilité d'exploitation	12
	1-5-3 Fiabilité opérationnelle	12
	1-5-4 Fiabilité d'un composant	12
	1-5-5 Fiabilité d'un système	12
	1-5-6 Fiabilité implicite	13
	1-5-7 Fiabilité explicite	13
	1-5-8 Fiabilité prévisionnelle	13
1-6	Facteurs influents sur la fiabilité	14
	1-6-1 Dimension économique et fiabilité	14
	1-6-2 Performances et fiabilité	16
	1-6-3 Fiabilité et sécurité de fonctionnement	17
1-7	Qualité et fiabilité	17
1-8	Nombre de composants indispensables et fiabilité d'un système assemblé en série	18
1-9	Typologie d'assemblage des composants et évaluation de la fiabilité des systèmes	19
1-10	Détermination de la périodicité de la maintenance préventive économiquement optimale	21
	1-10-1 Tactique de changement préventif d'un composant à période fixe	22
	1-10-1-1 Equipement en phase de jeunesse	24
	1-10-1-2 Equipement dit de fatigue	24
	1-10-1-3 Equipement d'usure	25
	1-10-2 Relation entre le coût de la maintenance préventive et le coût de	31

défaillance	
1-10-3 Non correspondance entre l'optimum du coût total de la maintenance et le coût de la maintenance préventive	33
1-10-4 Commentaire	35
1-10-5 Exemple d'application	35

CHAPITRE II : Présentation des principaux modèles mathématiques de fiabilité

2-1 Principaux modèles mathématiques de fiabilité	37
2-1-1 Modèle de fiabilité exponentielle	37
2-1-2 Modèle de fiabilité de Weibull standard	37
2-1-3 Modèle normale de fiabilité	37
2-1-4 Modèle de fiabilité du type Gamma	37
2-2 Notions sur le modèle de fiabilité de Weibull standard	44
2-2-1 La fonction de répartition de la loi Weibull standard est donnée par	44
2-2-2 La densité de probabilité de survie est donnée par	45
2-2-3 Le taux d'avarie s'exprime comme suit	45
2-3 Moments du modèle Weibull standard	45
2-4 Signification et influences des paramètres du modèle Weibull standard	45
2-4-1 Paramètre d'échelle η	45
2-4-2 Paramètre d'origine γ	46
2-4-3 Paramètre de forme β	46
2-4-4 Modélisation du comportement du taux de défaillance ou courbe en baignoire	47
2-4-5 Evolution comparative de la fiabilité et du taux de défaillance pendant la durée de vie d'un équipement	50
2-5 Transformation doublement logarithmique du modèle Weibull standard	51
2-6 Méthode graphique d'estimation ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard	55
2-6-1 Exemple d'application relatif au cas $\gamma=0$	55
2-6-1-1 Détermination du paramètre d'origine γ	57
2-6-1-2 Détermination du paramètre de forme β	57
2-6-1-3 Détermination du paramètre d'échelle η	57
2-6-1-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F)	57
2-6-2 Exemple d'application relatif au cas $\gamma < 0$	58
2-6-2-1 Détermination du paramètre d'origine γ	59
2-6-2-2 Détermination du paramètre de forme β	59
2-6-2-3 Détermination du paramètre d'échelle η	60
2-6-2-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F)	60
2-6-3 Exemple d'application relatif au cas $\gamma > 0$	61
2-6-3-1 Détermination du paramètre d'origine γ	62
2-6-3-2 Détermination du paramètre de forme β	62
2-6-3-3 3Détermination du paramètre d'échelle η	62
2-6-2-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F)	62
2-6-4 Commentaire	62

2-6-5 Critique de la méthode graphique d'estimation ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard	63
2-6-6 Limite du modèle Weibull standard	64

CHAPITRE III : Fondement de la théorie de l'estimation

3-1	Position du problème d'estimation	65
3-2	Estimation ponctuelle	66
3-2-1	Définition	66
3-2-1-1	Estimateurs sans biais	66
3-2-1-2	Estimateur asymptotiquement sans biais ou efficace	67
3-2-1-3	Estimateur efficace	67
3-2-1-4	Estimateur convergent	68
3-3	Nécessité de l'estimateur par intervalle de confiance	69
3-3-1	Définition	69
3-3-2	Exemple d'application	69
3-4	Validité de l'hypothèse d'un modèle de défaillance	73
3-4-1	Test non paramétrique de Kolmogorov –Smirnov	73
3-4-1-1	Version graphique du test de Kolmogorov- Smirnov	74
3-4-1-2	Test binomial simplifié	74
3-4-1-2-1	Variante graphique du test binomial simplifié	75
3-5	Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance	76
3-5-1	Principe de la méthode du maximum de vraisemblance :	77
3-5-1-1	Illustration : Cas d'une distribution continue	79
3-5-2	Application de la méthode du maximum de vraisemblance au modèle Weibull standard	80
3-5-2-1	Contraintes calculatoires	83
3-5-3	Vers une approche alternative de segmentation du problème global d'estimation tridimensionnel	83

Chapitre IV: Elaboration d'un nouvel estimateur ponctuel du paramètre d'origine du modèle Weibull standard.

4-1	Genèse du coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson	87
4-1-1	Définition	93
4-1-2	Propriétés du coefficient de corrélation linéaire	93
4-1-2-1	Première propriété : Limites du coefficient de corrélation linéaire $-1 \leq r_{xy} \leq +1$	93
4-1-2-1-1	Théorème : Inégalité Cauchy-Schwarz.	93
4-1-2-1-1-1	Démonstration de l'inégalité Cauchy-Schwarz	93
4-1-2-2	Deuxièmes propriétés : Invariance par transformation linéaire.	96
4-1-2-3	Troisième propriété	97
4-1-3	Estimateur ponctuel du coefficient de corrélation linéaire :	99

4-1-3-1	Estimateur ponctuel de Bravais-Pearson du coefficient de corrélation linéaire	99
4-1-3-2	Estimateur ponctuel de Oklin et Pratt du coefficient de corrélation linéaire	99
4-1-3-3	Considérations générales sur l'estimation du coefficient de corrélation linéaire	100
4-1-4	Limite de l'estimateur ponctuel du coefficient de corrélation linéaire	100
4-1-5	Réduction du risque d'une estimation ponctuelle défailante	100
4-1-5-1	Importance du jugement graphique	100
4-1-5-2	Méthode d'élimination des données d'observation douteuses	102
4-1-5-2-1	Exemple illustratif	103
4-1-6	Estimateurs par intervalle de confiance du coefficient de corrélation linéaire	104
4-1-7	Estimations par intervalle de confiance de la variable Z-transformée de Fisher	104
4-1-8	Fonction tangente hyperbolique de Z-transformée de Fisher et estimations par intervalle de confiance du coefficient de corrélation linéaire	106
4-2	Optimisation non linéaire avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine du modèle Weibull	108
4-2-1	Test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine :	108
4-2-1-1	Cas de la valeur modale positive du paramètre d'origine : $\gamma_M > 0$	109
4-2-1-2	Cas de la valeur modale négatif du paramètre d'origine : $\gamma_M < 0$	109
4-2-2	Test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine	110
4-2-2-1	Cas où la valeur modale de γ est positive : $\gamma_M > 0$	112
4-2-2-2	Cas où la valeur modale de γ est négative : $\gamma_M < 0$:	113
4-2-3	Inverse du test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine	113
4-2-3-1	Cas où la valeur modale de γ est positive : $\gamma_M > 0$	114
4-2-3-2	Cas où la valeur modale de γ est négative : $\gamma_M < 0$	115
4-2-4	Méthode de résolution du problème d'optimisation posé	115

Chapitre V : Etude de cas général du système linéaire homogène compatible de n équations à p inconnues.

5-1	Priorité du traitement des systèmes linéaires non homogène	116
5-1-2	Théorème de Fontene- Rouché	116
5-1-2-1	Premier cas de figure	117
5-1-2-1-1	Première variante	117

5-1-2-1-1 Deuxième variante	118
5-1-2-2 Deuxième cas de figure	119
5-1-2-3 Positionnement relatif de deux droites de régression conjuguées comme cas particulier du théorème de Fontené-Rouché :	121
5-1-2-4 Résolution d'un système d'équations linéaires selon le théorème de Fontené-Rouché	125
5-1-2-5 Illustration géométrique des théorèmes de Fontené-Rouché et de Kronecker-Capelli	134

Chapitre VI : Optimisation non linéaire comme solution alternative aux systèmes linéaires incompatibles.

6-1	Définition d'un système linéaire non homogène du type incompatible	140
6-2	Recherche de la solution optimale d'un système linéaire incompatible	140
6-2-1	Détermination de la nature de la solution optimale	142
6-2-2	Résolution d'un système linéaire inconsistant	144
6-2-3	Etude du cas particulier où la matrice $A^T A$ est non régulière :	147
6-2-3-1	Interprétation géométrique :	150
6-3	Adaptation de la minimisation de la norme euclidienne au cas particulier de l'estimation des paramètres de forme β et d'échelle η du modèle Weibull standard	151
6-4	Conception de la fonction objectif du type pondéré	157
6-4-1	Perfectionnement des estimateurs ponctuels des paramètres de forme β et d'échelle η du modèle Weibull standard bi-logarithmiquement transformé par l'usage de la norme de Legendre	158
6-5	Organigramme de résolution optimale d'un système linéaire incompatible : $AX \neq B$	163
6-6	Optimisation non linéaire et modélisation de l'impact du nombre de composants indispensables sur la fiabilité d'un système monté en série	164
6-7	Recherches des estimateurs ponctuels pondérés des paramètres α_p et δ_p	171
6-8	Présentation des résultats du lissage exponentiel	173
6-9	Ajustement graphique comparé avec et sans pondération du modèle exponentiel du modèle exponentiel décroissant au nuage de points	175

Chapitre VII : Résultats du traitement statistique, numérique des données de fiabilité et leur interprétation.

7-1	Présentation des données de défaillance	178
7-2	Aperçu sur les principales catégories d'essais de fiabilité	179
7-2-1	Définition d'un essai de fiabilité	179
7-2-2	Typologie des essais en fiabilité	179
7-2-2-1	Essai de conformité	179
7-2-2-2	Essai de détermination	179
7-2-2-3	Essai simple tronqué	179
7-2-2-4	Essai simple censuré	179

7-2-2-5	Essai de fiabilité en exploitation	179
7-2-2-6	Essai accéléré	180
7-2-2-7	Essai sous contraintes échelonnées	180
7-2-2-8	Essai sous contraintes cycliques	180
7-2-2-9	Mode de traitement des données de défaillance d'exploitation	180
7-2-3	Détermination comparative de l'estimateur du paramètre de localisation γ du modèle Weibull standard	183
7-3	Exploitation des résultats d'estimation des paramètres γ , β , η pour déterminer la périodicité optimale de la maintenance préventive	202
7-3-1	Appréciation de la performance de la périodicité de la maintenance préventive selon la méthode graphique de Weibull	203

CONCLUSION

Introduction :

Il est important d'insister, dans un premier temps, sur le fait qu'une estimation défailante de la fiabilité opérationnelle d'un équipement qui se traduit, nécessairement, soit par une surévaluation ou bien par une sous évaluation de la survie d'un matériel, peut avoir des conséquences multidimensionnelles néfastes.

Si l'on suppose que l'on est devant le cas d'une surévaluation de la fiabilité opérationnelle d'un équipement, il semble, en toute logique, que le manager maintenancier va adopter une réaction spontanée qui consiste, tout simplement, à réduire substantiellement, le volume des moyens tant humains que matériels alloués à la fonction de maintenance.

Dans l'hypothèse où la vraie valeur de la fiabilité des équipements est, effectivement, faible le type de politique de maintenance antérieurement fixé, d'une manière aveugle, va faire encourir à l'entreprise un risque incontournable, celui de voir sa capacité à mener sa mission, hypothéquée, en raison de l'immobilisation imprévisible des équipements productifs due d'une part au seuil modeste de la survie du matériel et de la faible capacité de maintenance disponible, d'autre part.

Par contre si on est dans le cas d'une sous évaluation de la fiabilité opérationnelle d'un matériel on constate l'apparition d'un ensemble d'effets fâcheux multiples :

- i. Dans l'esprit du manager maintenancier, il s'agit de faire face, réellement, à un équipement ayant une fiabilité insuffisante ce qui va impliquer la mobilisation, en permanence, de moyens financiers, matériels et humains supplémentaires pour contrecarrer cette situation hypothétique.
- ii. Dans le cas où la capacité de maintenance est faible, l'entreprise est contrainte de subir des coûts dus à l'acquisition d'un nombre surabondant de matériels afin de pouvoir remplir les missions imposées avec une probabilité suffisante.
- iii. Par rapport aux composants potentiellement défailants, il ne faut pas tenir compte, uniquement, du coût des pièces de rechange mais aussi considérer le coût de magasinage, de transport, de même que l'intérêt des moyens financiers immobilisés pour la création et le maintien du stock.

Par conséquent dans les deux cas de figures évoqués, toute la stratégie de management de la maintenance peut être remise en cause, car étant fondée sur une information erronée

engendrée par une fausse estimation du niveau réel de la fiabilité. Cela implique l'établissement d'un diagnostic défaillant de l'état des équipements suivis en exploitation

- iv. En outre, les opérateurs auront l'impression d'être soumis à un environnement interne caractérisé par un seuil de sécurité faible d'où le manque d'engagement à l'acte productif.
- v. Quant aux utilisateurs, ils subiront des incidences psychologiques négatives qui vont influencer leurs attitudes d'achat futur du produit de même marque d'où le risque de réduction de la part du marché de l'entreprise.
- vi. Dans le cas où il s'agit d'un système complexe tel qu'une centrale nucléaire, on assiste obligatoirement à l'émergence de sentiments d'appréhension concernant les conséquences néfastes éventuelles sur l'environnement et qui peuvent induire le gel de toute l'activité économique.

Par conséquent, de part ces conséquences fatales sur le management de la maintenance, le problème d'estimation de la fiabilité, particulièrement celle du type opérationnel se pose sans doute avec acuité.

Les éléments mentionnés justifient la pertinence du choix de la question de l'estimation de la fiabilité opérationnelle que l'on se propose de traiter.

Parmi l'ensemble des problèmes qui se posent avec acuité en management industriel, la détermination économiquement optimale de la périodicité du mode préventif des opérations de maintenance des équipements, occupe une place centrale.

La maîtrise de cette question implique la connaissance rigoureuse de la fiabilité opérationnelle du matériel soumis à l'étude.

A l'instar des modèles mathématiques du type exponentiel, normal, Lognormal, Gamma, le modèle Weibull standard possède une grande importance dans le domaine des études de la fiabilité. Toutefois, le modèle Weibull standard d'usage universel est incontestablement le plus souple, en vertu de ses trois paramètres, respectivement de forme β , d'échelle η et d'origine γ , ce qui lui confère une capacité adaptative avec différentes catégories de défaillances concernant aussi bien les équipements mécaniques, électriques, électroniques qu'électrotechniques.

D'ailleurs, d'après le docteur Robert B Abernethy [50] environ 85% à 95% des données relatives aux différents cycles de vie d'un équipement sont décrites d'une manière adéquate par les graphes de probabilité de Weibull.

L'évaluation la plus précise de la fiabilité, en tant que composante fondamentale, à caractère dynamique, du vecteur qualité d'un produit, requiert nécessairement la meilleure estimation possible des trois paramètres qui caractérisent le comportement du modèle Weibull standard.

Dans leurs travaux consacrés à cette question, les deux auteurs Gumbel et Menon émettent l'hypothèse de la nullité systématique du paramètre d'origine γ et se bornent à proposer des estimateurs des paramètres de forme et d'échelle sans se soucier au préalable, comme la logique l'impose de l'estimateur du paramètre d'origine.

Quant à la formule, à proprement parler, d'estimation du paramètre d'origine dûe à Dubey(26), elle est fondée sur l'hypothèse non évidente de dépendance du paramètre d'origine par rapport aux deux autres.

De plus, la technique graphique du papier fonctionnel d'estimation du paramètre d'origine dans sa double variante de Weibull ou d'Allan Plait ne peut outrepasser son cloisonnement dans la zone de viabilité qui se distingue par sa démarcation parfois considérable du seuil d'optimalité car généralement elle dépend de la dextérité de l'opérateur maintenancier, ce qui induit des effets négatifs sur l'optimalité des estimateurs des paramètres de forme et d'échelle du modèle Weibull standard d'où la méconnaissance de la fiabilité.

La principale motivation derrière le présent travail dans le cadre de ce mémoire est de contribuer si modestement à la confection d'un estimateur du paramètre d'origine dont la qualité d'estimation influe sur les deux autres.

Pour atteindre cet objectif on s'est concentré sur l'élaboration d'un programme mathématique lié à l'optimisation non linéaire en se basant sur l'hypothèse d'indépendance totale du paramètre d'origine par rapport aux deux autres, car ce dernier, étant, tout simplement, une grandeur de translation.

Bien que cette hypothèse soit démontrable, analytiquement, on a préféré, pour des raisons de commodité, adopter la preuve fondée sur une méthode d'analyse statistique, numérique et géométrique qui présente l'avantage de visualiser d'une manière nette, l'évolution de la valeur du paramètre d'origine γ en fonction, seulement, des composantes de la série aléatoire des instants de défaillance.

La fonction objectif ainsi conçue permet d'assurer une estimation, certes non ensembliste mais répondant au critère d'optimalité.

Une telle approche vise à enrayer les incidences éventuelles de l'adoption systématique de l'hypothèse de nullité du paramètre d'origine sur l'estimation des deux autres paramètres.

Ainsi, on garantit une meilleure connaissance du niveau réel de fiabilité opérationnelle du matériel mis en exploitation et on fournit au manager des opérations de la maintenance industrielle l'information requise pour mettre au point une programmation des interventions préventives de façon à aboutir à une combinaison optimale entre les deux types de maintenance préventive et curative.

Actuellement, il est établi qu'en général l'entreprise nationale subit la maintenance au lieu de la diriger, comme cela est, malheureusement, consacré dans la pratique avec toutes les retombées du coût exorbitant d'exploitation des équipements industriels.

Il faut mentionner à ce niveau que le concept de fiabilité du système est essentiel pour l'établissement d'une politique pertinente de maintenance. Donc, il est fondamental de fournir au manager des opérations de la maintenance industrielle une information sur la fiabilité des équipements la plus rigoureuse possible pour qu'il puisse mettre au point une programmation des interventions préventives de manière à aboutir à une combinaison optimale entre les deux types de maintenance préventive et curative induisant, par conséquent, un coût global minimum. De plus la technique proposée concernant, en premier lieu, l'estimation du paramètre d'origine, en second lieu, l'estimation des deux autres paramètres, sera associée à un programme informatique qui pourrait consolider la maintenance assistée par ordinateur. Cela devrait motiver les entreprises à diriger la maintenance au lieu de la subir comme on le constate dans la pratique. En effet, en l'an 2003 une enquête menée (39) par l'office national des statistiques a montré que 81% du potentiel du secteur public et 24% du secteur privé ont connu des pannes d'équipement. De telles défaillances ont occasionné des arrêts de travail allant de 6 à 30 jours d'où un manque à gagner considérable.

A l'exception de quelques secteurs stratégiques (hydrocarbures, transport aéronautique, énergie électrique,...) nous sommes intimement convaincus qu'en règle générale, la condition de la maintenance au niveau national n'a pas pour autant, évolué positivement surtout avec le développement technologique rapide des équipements productifs.

D'ailleurs et d'une manière paradoxale on indique qu'en 2010 [57] que suite à des problèmes d'organisation du département de maintenance d'Air Algérie, cette compagnie a été tout bonnement épinglée par l'aviation civile européenne.

Ce qui confirme notre conviction surtout qu'il s'agit du secteur névralgique du transport aéronautique

En tout état de cause, la logique de la rentabilité aussi bien à l'échelle micro que macro économique impose la généralisation d'un management scientifique de la maintenance.

Enfin il semble édifiant de mentionner que pour la bonne conduite de notre travail de recherche, on a utilisé les techniques mathématiques et statistiques suivantes :

La statistique descriptive, la théorie des probabilités, la théorie d'intégration, la statistique mathématique, l'analyse numérique, l'algèbre linéaire, l'optimisation non linéaire avec paramétrage et enfin la théorie de la fiabilité.

Chapitre I
Eléments de la théorie
de la fiabilité

- **Préliminaire**

La théorie de la fiabilité demeurera toujours une question d'actualité brûlante, spécialement dans la sphère de la production industrielle. Les experts fiabilistes se forceront toujours, pour tenter d'atteindre le plus haut niveau de fiabilité alloué aux différents équipements. En menant constamment des recherches de plus en plus poussées. Cette discipline à caractère multidimensionnel, à vrai dire, se localise au carrefour de trois grandes branches scientifiques de premier ordre notamment les sciences physiques, la recherche opérationnelle et enfin les sciences économiques.

Les spécialistes de l'étude physique des défaillances s'intéressent, particulièrement, à l'analyse minutieuse et à la description rigoureuse des différents mécanismes engendrant le phénomène de l'avarie d'un équipement déterminé.

Les investigations de type chimique constituent un atout capital pour la bonne conduite de l'étude physique des pannes, dont la majorité est causée par des réactions physicochimiques.

Les chercheurs physiciens sont les pionniers dans le domaine de l'élaboration des modèles, aussi bien empirique que théorique concernant la genèse des défaillances. En guise d'illustrations il est possible d'évoquer les deux modèles empiriques, notamment le modèle d'Arrhénius et le modèle théorique d'Eyring.

D'ailleurs le modèle qui constitue le centre d'intérêt de notre travail de recherche a été mis au point par un physicien nommé Waloddi Weibull qui a publié un article dans ce sens en 1951.

Le but essentiel de ce modèle consiste à rendre compte, à l'origine le plus fidèlement possible d'un certain type de bris mécaniques. La dimension internationale du modèle Weibull standard et la richesse qu'il affiche, justifient pleinement le fait qu'il fait l'objet d'un ensemble d'études, actualisées, périodiquement [50].

Quant aux experts en recherche opérationnelle, ils ont pour objectif l'application de certaines techniques d'optimisation pour garantir une allocation optimale de la fiabilité aux différents composants d'un système, au stade de la conception d'un équipement industriel ; Ils peuvent, en collaboration, avec les chercheurs physiciens contribuer à la confection d'un certain nombre de modèles mathématiques relatifs au domaine de la fiabilité.

Malheureusement, malgré la portée économique évidente de la survie de matériel, les chercheurs économistes n'ont que, rarement, intégré dans leur champ d'investigation la question de la

fiabilité. Pour preuve, dans la littérature consacrée à la fiabilité, on ne constate absolument aucune contribution majeure réalisée par des économistes alors que la contrainte de minimisation du coût de fiabilité des équipements ainsi que l'obligation d'accéder à un niveau de qualité du matériel, toujours, plus élevé sont omniprésents, aussi bien dans la phase de conception que celle de réalisation de n'importe quel produit industriel.

Etant donné, cet état de fait, il semble tout à fait justifié dans la perspective d'intégrer la fiabilité dans l'espace des techniques quantitatives du management scientifique de s'appesantir sur les éléments qui constituent le fondement de la théorie de la fiabilité.

1-1 Définition de la fiabilité

La fiabilité constitue la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité qu'il accomplisse de façon correcte, la fonction pour laquelle il a été prévu, dans des conditions spécifiques d'exploitation pendant un temps déterminé.

A travers cette définition, on remarque que le concept de fiabilité a un caractère multidimensionnel car il se distingue par quatre caractéristiques :

1-1-1 La probabilité :

La probabilité se définit par le rapport entre le nombre de cas favorables à la réalisation d'un événement et le nombre de tous les cas possibles. Dans le cas de la fiabilité, l'accomplissement d'une fonction, la probabilité exprime les chances de succès.

1-1-2 Accomplissement d'une fonction requise :

La fonction doit être définie de façon précise. Il n'est pas possible d'évaluer la fiabilité d'un dispositif sans avoir exactement le rôle qu'il lui confie dans le système. Ce qui nous permet de connaître les contraintes que ce dispositif subira lors du fonctionnement du système. Le dispositif pourra être dans un état qu'il lui permet d'accomplir la fonction requise d'une manière satisfaisante. Pour connaître le type de rôle assigné à un dispositif on peut citer en guise d'illustration :

- La fonction d'amortissement des vibrations confiée au système de suspension.
- La fonction de transmission du mouvement confiée au dispositif de courroie.

Il est évident que l'accomplissement d'une fonction donnée doit être effectué avec un maximum de performance. Dans le cas contraire le dispositif sera considéré comme défectueux.

1-1-3 Conditions spécifiques :

Ces conditions consistent dans les contraintes du type physique subies par le dispositif engendrées par son environnement interne, notamment les actions provoquées par l'interface

avec les dispositifs voisins et par son environnement externe propre aux facteurs du milieu ambiant, profil de mission qui se base sur l'évolution de chaque catégorie de contraintes à laquelle est soumis le dispositif et cela en fonction du temps pour la mission prévue.

1-1-4 Un temps déterminé :

C'est le facteur temps entendu au sens large. Ce sera souvent une distance parcourue en kilométrage (véhicule), nombre d'heures de fonctionnement (groupe électrogène) nombre d'opérations (relais).

Fréquemment, le temps déterminé est remplacé par une « mission déterminée ». Par exemple, la probabilité qu'une soudeuse fonctionne pendant quatre mois sans arrêt. Ainsi la notion de temps déterminée, dans ce cas exprime la durée de la mission soit quatre mois.

1-2 Expression mathématique de la fiabilité

D'un point de vue mathématique, l'évaluation de la fiabilité fait appel au calcul de probabilité car une panne est un événement accidentel qui se produit d'une manière aléatoire. Par conséquent, il est impossible de le prévoir avec certitude, d'où la nécessité d'exprimer la fiabilité par une probabilité de fonctionnement par rapport au temps d'exploitation, du nombre de cycles de fonctionnement ou bien par un nombre de kilométrage parcouru ou par toute autre variable jugée significative.

Dans l'expression de cette fiabilité, un ou plusieurs paramètres doivent figurer dans le but de caractériser la dégradation de l'appareillage ou son taux de défaillance en fonction d'une variable choisie.

La loi retraçant l'évolution de ces paramètres caractéristiques n'est que rarement simple. Souvent l'estimation de la fiabilité exige en pratique des calculs de probabilité très ardues.

Commençons par rappeler la notion de probabilité :

La probabilité d'un événement A est définie comme le quotient du nombre de réalisations de cet événement A au nombre total d'épreuves effectuées à condition qu'à chaque épreuve, l'événement A ait la même chance de se produire.

Si (k) est le nombre de réalisations de l'événement favorable A et (P) le nombre de réalisations de l'événement défavorable B, alors on a :

$$P(A) = \frac{k}{k+P} \quad P(B) = \frac{P}{k+P} \quad (1.1)$$

Considérons maintenant le phénomène de panne :

Quand l'événement favorable A est la survie d'un composant et que B est sa défaillance, on peut définir la fiabilité d'un composant comme la fraction des composants qui survivent à un essai effectuée sur une famille de composants identiques.

Soit un nombre N_0 de composants soumis à un essai, il y aura au bout du temps t , (N_S) qui survivront et N_f qui auront « failli », c'est-à-dire qui auront subi une avarie.

$$N_0 = N_S + N_f \quad (1.2)$$

Donc la fiabilité ou encore la probabilité de survie à tout instant (t) pendant le test est :

$$R(t) = \frac{N_S}{N_0} = \frac{N_S}{N_S + N_f} \quad (1.3)$$

La fiabilité mesurée par cet essai est donc une fonction du temps d'utilisation.

Généralement les estimations de fiabilité sont menées à partir des résultats d'exploitation d'un échantillon de population concernée.

Evidemment la fiabilité décroît avec le temps. On peut supposer que la fiabilité d'un appareil d'un certain type est donnée par la courbe de la figure 1.1.

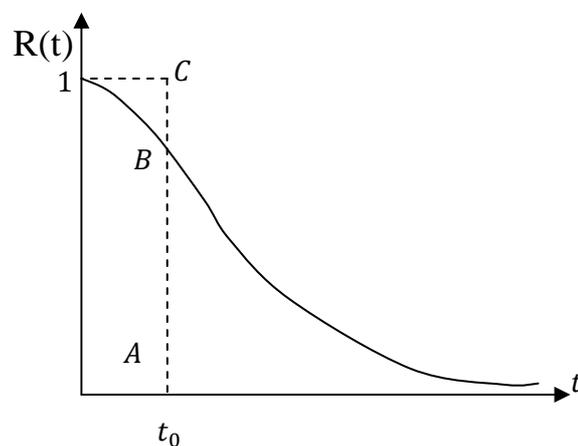


Figure 1.1 : Représentation graphique de la fonction de fiabilité.

Le segment AB indique le pourcentage de dispositif fonctionnant encore correctement à l'instant $t=t_0$.

Le segment BC montre le pourcentage d'appareils ayant subi une défaillance pendant l'intervalle de temps $t = 0$ et $t = t_0$.

De même que nous avons défini la fiabilité, nous pouvons définir parallèlement la probabilité de défaillance(D).

$$F(t) = \frac{N_f}{N_0} = \frac{N_f}{N_S+N_f} \quad (1.4)$$

Il est clair que pour tout t :

$$R(t) + F(t) = 100\% \quad (1.5)$$

$$R(t) + F(t) = 1$$

Car on a:

$$\frac{N_S}{N_S+N_f} + \frac{N_f}{N_S+N_f} = \frac{N_S+N_f}{N_S+N_f} = 1 \quad (1.6)$$

Remarquons que la fonction de la défaillance est croissante avec le temps et constitue une symétrie de la fonction de la fiabilité.

Survie et défaillance sont donc deux événements complémentaires car l'un ou l'autre se produit nécessairement. Ils s'excluent mutuellement car si un composant survit c'est qu'il ne tombe pas en panne et réciproquement.

Le nombre de composants qui survivent à un essai est $N_S = N_0 - N_f$ alors la fiabilité s'écrit :

$$R(t) = \frac{N_S}{N_S+N_f} = \frac{N_0-N_f}{N_0} = 1 - \frac{N_f}{N_0} \quad (1.7)$$

En calculant la dérivée du premier ordre il vient :

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{d\left(1 - \frac{N_f}{N_0}\right)}{dt} = \frac{-dN_f}{N_0 dt} \quad (1.8)$$

d'où :

$$\frac{dN_f}{N_0 dt} = \frac{-N_0 dR(t)}{dt} \quad (1.9)$$

C'est la vitesse instantanée avec laquelle les pannes se produisent.

Mais comme :

$$N_f = N_0 - N_S \text{ Et } \frac{dN_f}{dt} = \frac{d(N_0 - N_S)}{dt} = -\frac{dN_S}{dt} \quad (1.10)$$

Ce qui s'interprète comme la vitesse de variation du nombre de survivants.

Au temps t , nous avons encore N_S composants en vie parmi lesquels $\frac{dN_f}{dt}$ tomberont en panne avant l'instant $t + dt$. Divisons l'équation $\frac{dN_f}{dt} = -\frac{N_0 dR(t)}{dt}$ par N_S on obtient la probabilité instantanée de panne pour un composant ou tout simplement le taux de pannes qu'on va noter $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_S} \frac{dN_f}{dt} = -\frac{N_0}{N_S} \frac{dR(t)}{dt} \quad (1.11)$$

Mais comme :

$R(t) = \frac{N_S}{N_0}$ et $\frac{N_0}{N_S} = \frac{1}{R(t)}$ alors $\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$, qui est l'expression la plus générale du taux de défaillance.

En général $\lambda(t)$ est une fonction de la durée de fonctionnement t , car $R(t)$ et $\frac{dR(t)}{dt}$ dépendent du temps. Le seul cas où $\lambda(t)$ se réduit à une constante, c'est lorsque les pannes se produisent d'une manière exponentielle selon une distribution aléatoire dans le temps.

Reprenons l'équation $\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$ et intégrons les deux membres on parvient à :

$$\lambda(t)dt = -\frac{dR(t)}{R(t)} \text{ où } \ln R(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt \quad (1.12)$$

Puisque $R(t) = 1$ à l'instant $t = 0$ et en prenant l'exponentiel on obtient :

$$\exp \ln R(t) = \exp -\int_0^t \lambda(t)dt ; R(t) = \exp -\int_0^t \lambda(t)dt \quad (1.13)$$

Cette dernière équation donne une formulation mathématique très générale de la fiabilité $R(t)$ pour toutes les distributions de défaillance possibles, quand le taux de panne $\lambda(t)$ est quelconque.

Si on adopte l'hypothèse de constance du taux d'avarie $\lambda(t)$, alors :

$$\exp - \int_0^t \lambda dt = \exp - \lambda t \quad (1.14)$$

Ce qui nous conduit à l'expression de la fonction de fiabilité pour ce cas particulier soit :

$$R(t) = \exp - \lambda t \quad (1.15)$$

1-3 Notions fondamentales pour l'analyse fiabiliste

1-3-1 Durée de vie :

La notion de durée de vie d'un équipement est la période qui sépare sa mise en exploitation de l'apparition de sa défaillance.

La durée de vie d'un système ou d'un composant est une variable aléatoire T, représentant de temps écoulé de puis la mise en service jusqu'à l'instant de l'avènement de la panne.

1-3-2 Densité de probabilité de défaillance :

La densité de probabilité de défaillance $f(t)$ est définie par :

$$f(t) dt = P [t \leq T < t+dt] \quad (1.16)$$

qui s'interprète comme la probabilité de défaillance entre t et t+dt.

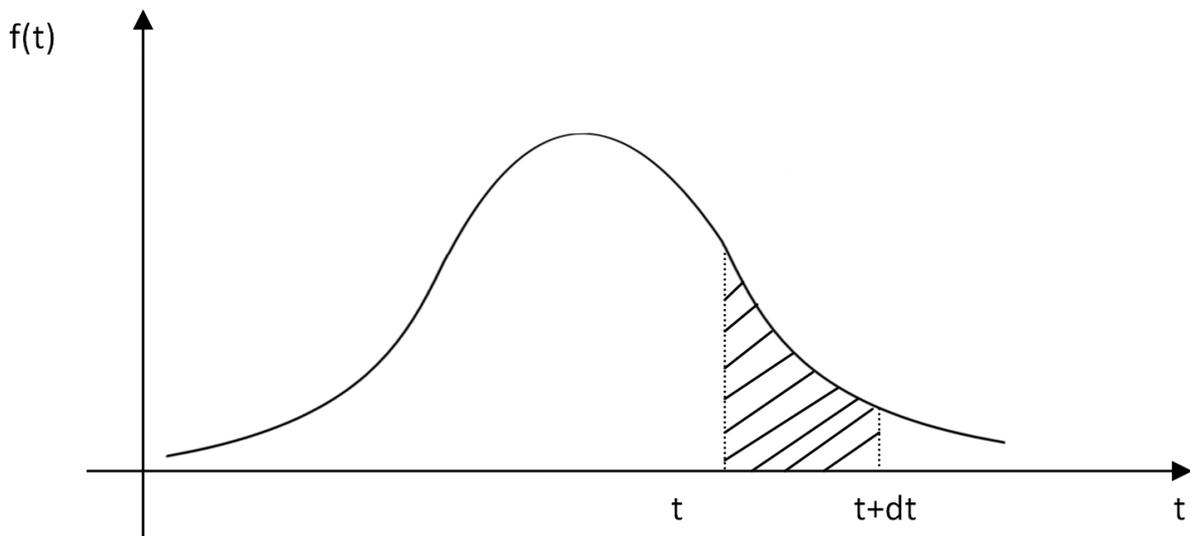


Figure 1.2 : Représentation graphique de la fonction de densité de probabilité de défaillance.



1-3-3 Fonction cumulative de défaillance ou fonction de répartition F(t) :

La fonction de répartition pour une densité de probabilité f(t) est définie par $F(t) = p(T < t)$. Elle représente la probabilité pour qu'il survienne au moins une panne jusqu'au temps t, et qu'on appelle aussi probabilité cumulative de défaillance et on note :

$$F(t) = 1 - R(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t < t_0 \\ = \int_{t_0}^t f(t) dt & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

L'allure de la fonction de répartition F(t) est donnée par la Figure 1.3.

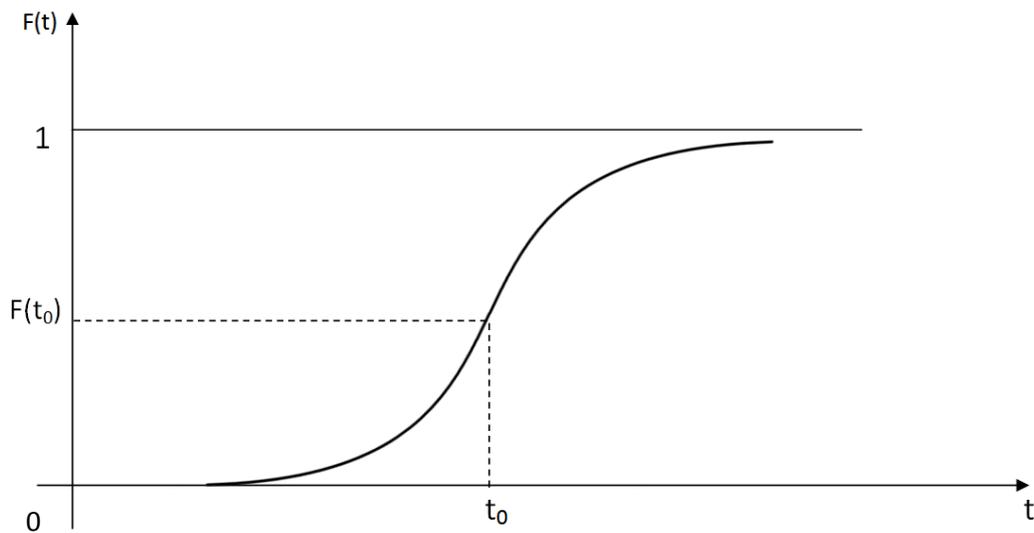


Figure 1.3 : Représentation graphique de la fonction de répartition.

1-3-4 Fonction de fiabilité :

La fonction de fiabilité désignée par R(t) est définie comme étant la probabilité de bon fonctionnement jusqu'à un âge t.

On pose : $R(t) = h(T \geq t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = 1 - F(t)$ (1.18)

Par ailleurs $\frac{dR(t)}{dt} = -d \int_0^t f(t) dt = -f(t)$ (1.19)

On note que R(t) est une fonction monotone décroissante avec $R(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$.

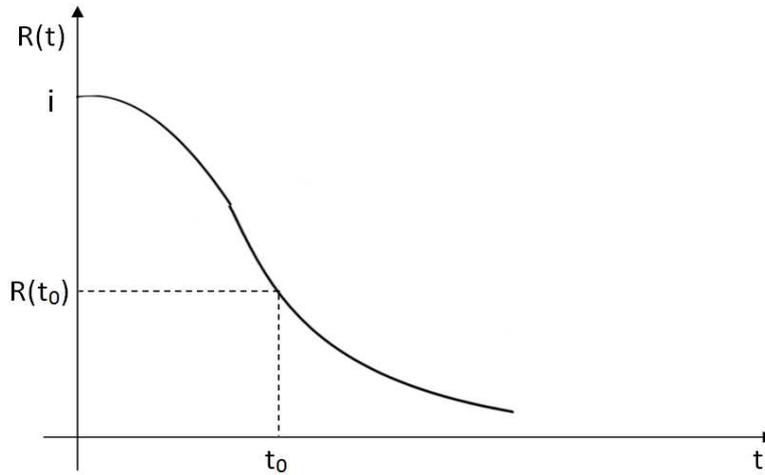


Figure 1.4 : Représentation graphique de la fonction de la fiabilité $R(t)$.

1-3-5 Taux instantané de défaillance ou taux d'avarie $\lambda(t)$:

Le taux d'avarie noté $\lambda(t)$ est défini par le rapport :

$$\lambda(t) = \frac{P_r(t \leq T < t+dt)}{P_r(T \geq t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} \tag{1.20}$$

d'où $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$ (1.21)

Le taux d'avarie est une caractéristique de fiabilité fréquemment employée.

Elle signifie la proportion des dispositifs, qui ayant survécu à un instant arbitraire t_h ne sont plus en vie à l'instant t_{h+1} .

1-3-6 Temps moyen du bon fonctionnement (MTBF) :

Pour un équipement réparable (moteur, pompe à injection,...etc.) le temps moyen du bon fonctionnement (MTBF) est défini par la relation suivante :

$$MTBF = E(t) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^t t \left(\frac{-dR(t)}{dt} \right) dt \tag{1.22}$$

L'intégration par parties donne

$$MTBF = [-t R(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} R(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt \tag{1.22}$$

Donc :

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t) dt \quad (1.23)$$

Mais pour un équipement non réparable (circuit intégré, diode, ...etc.), on utilise la notion de temps moyen avant défaillance (M.T.T.F).

1-4 Place de la fiabilité dans la recherche opérationnelle

Comme l'indiquent les deux professeurs R Faure et J L Louriere [50], la théorie de la fiabilité trouve une place bien justifiée dans le contexte de la recherche opérationnelle.

Plus précisément, la fiabilité en tant qu'événement non déterministe fait partie, essentiellement de la théorie de probabilité.

Au stade de conception d'un matériel neuf, on est confronté au problème d'affectation optimale d'un seuil de fiabilité associée à chaque composant d'un système d'où la nécessité de l'usage des techniques d'optimisation avec contraintes.

Pour les problèmes d'estimation de fiabilité, on fait appel à la statistique descriptive, à la statistique mathématique, à l'optimisation non linéaire.

Enfin, concernant la stratégie de remplacement d'un équipement qui est conditionnée par le niveau de fiabilité opérationnelle et par le coût total de maintenance, elle est liée à la fois à la théorie des graphes et aux processus stochastiques particulièrement, la chaîne de Markov de même qu'à la programmation dynamique (voir Figure 1.5).

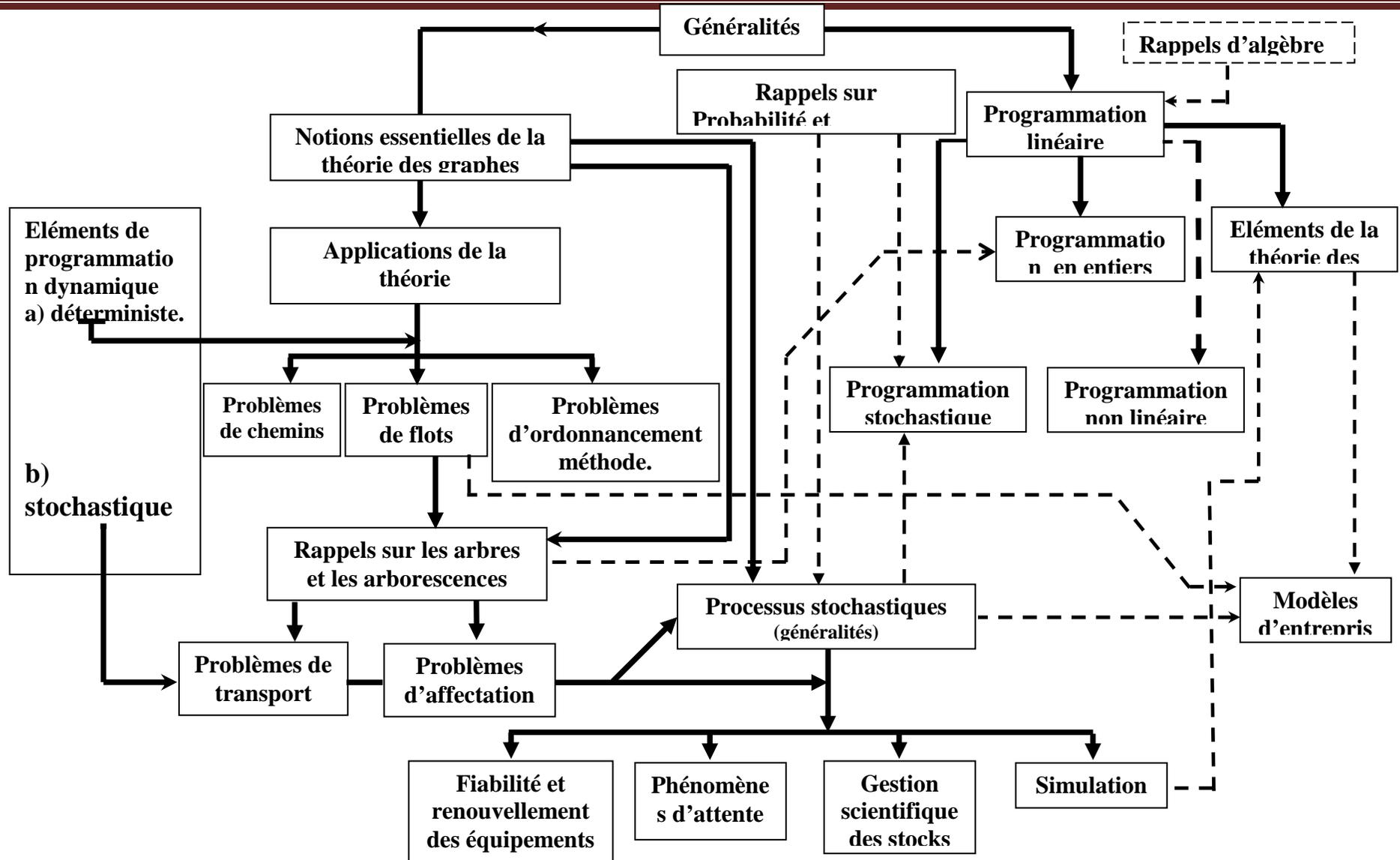


Figure 1.5 : Place de la fiabilité au sein de la recherche opérationnelle [50].

1-5 Différents types de fiabilité

1-5-1 Fiabilité intrinsèque :

Elle concerne les niveaux de fiabilité alloués aux différents composants, d'un matériel lors de la phase d'étude et de conception d'un produit industriel. Elle implique aussi le stade de la construction de l'équipement.

1-5-2 Fiabilité d'exploitation :

Elle est propre à l'utilisateur car elle concerne le niveau réel de la fiabilité constatée dans la phase d'exploitation du matériel. Bien entendu la pertinence technique et économique a un impact direct sur la fiabilité d'exploitation.

1-5-3 Fiabilité opérationnelle :

Elle consiste dans la combinaison de deux types de fiabilité respectivement la fiabilité intrinsèque et la fiabilité d'exploitation.

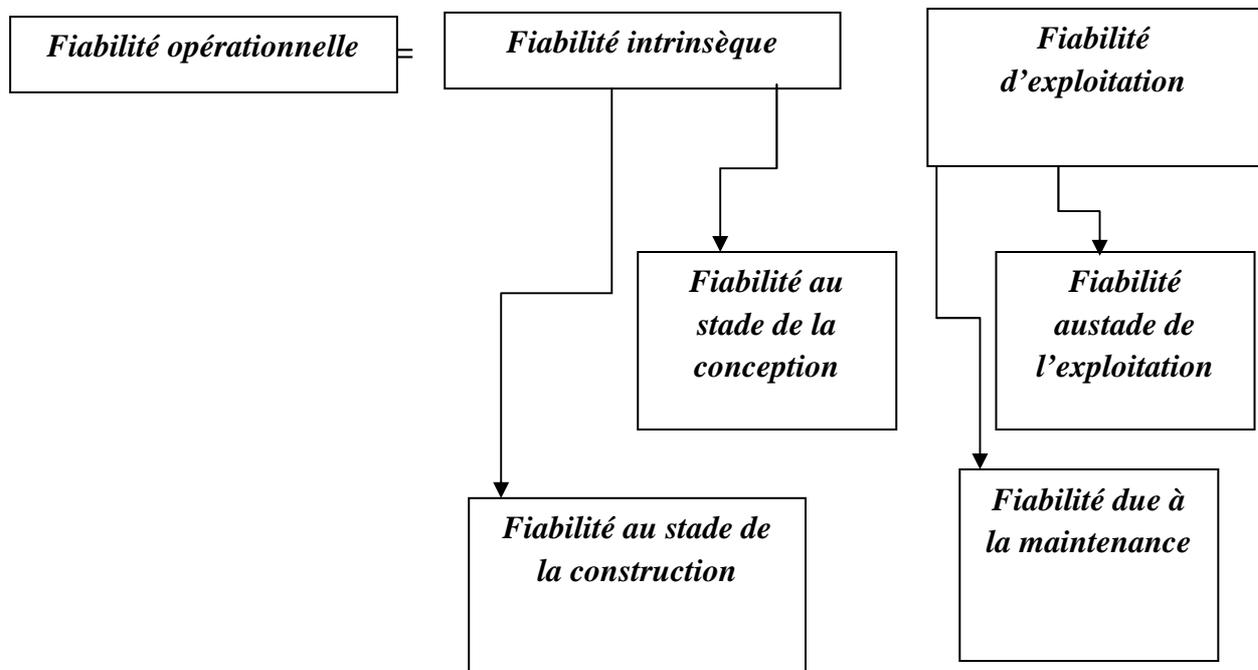


Figure 1.6 : Décomposition de la fiabilité opérationnelle.

1-5-4 Fiabilité d'un composant :

Elle est liée au niveau de fiabilité alloué par le constructeur à l'élément de base d'un système. 1-

5-5 Fiabilité d'un système :

Elle concerne le niveau global de fiabilité engendré par la combinaison des facteurs de fiabilité élémentaires du système.

1-5-6 Fiabilité implicite :

Elle est fondée sur l'expérience de l'équipe de maintenance, son but consiste à réduire la fréquence et la durée des arrêts des activités économiques. Evidemment il n'est pas possible de savoir le seuil de rentabilité d'un tel type de fiabilité. Le département de maintenance utilise l'information fournie par le biais de la fiabilité implicite pour effectuer les tâches suivantes :

- Estimer sans mesurer la garantie de fonctionnement attribuée à un matériel.
- Apprécier une durée de fonctionnement probable.
- Estimer approximativement le temps de bon fonctionnement vraisemblable.
- Juger la validité d'une politique de maintenance à adopter.

1-5-7 Fiabilité explicite :

Mathématiquement on montre que la fiabilité totale à 100% n'existe pas ; cependant la fiabilité dite explicite fondée sur des méthodes scientifiques assure une détermination rigoureuse du degré de confiance accordé au matériel. Elle permet d'évaluer numériquement les chances de survie d'un équipement donné, à un instant précis et dans des conditions d'utilisation définies.

La fiabilité explicite permet également de mener des études sur le taux de défaillances, de la disponibilité du matériel et la pertinence technico-économique du management des opérations de maintenance.

A l'aide des relevés statistiques réguliers pendant la vie d'un matériel, il est possible après le traitement approprié des données d'accomplir les fonctions suivantes :

- Mesurer rigoureusement le degré de confiance associé au fonctionnement d'un matériel.
- Estimer la durée de vie d'un équipement.
- Evaluer avec précision le temps moyen de bon fonctionnement du matériel (M.T.B.F).
- Connaître le risque pris quant à la marche d'un système.
- Déterminer les stratégies de maintenance pour une meilleure survie du matériel.

1-5-8 Fiabilité prévisionnelle :

La fiabilité prévisionnelle permet d'estimer la fiabilité à priori d'un composant, d'un équipement ou bien d'un système. Dans ce but, on modélise le comportement de chaque constituant élémentaire d'un système par des modèles aléatoires et de vieillissement physique. Ces modèles ont été conçus sur la base des résultats de retour des expériences et par la réalisation d'essais et vise à faciliter la modélisation de la fiabilité. Dans le domaine électronique, on trouve des modèles de prévision de composants élémentaires notamment les résistances, les condensateurs, les circuits intégrés et ainsi de suite....

1-5 Facteurs influents sur la fiabilité

1-6-1 Dimension économique et fiabilité :

Pour un fabricant de matériel, le prix de revient de la production varie proportionnellement avec le niveau de fiabilité alloué à l'équipement.

De toute évidence, l'accroissement de la fiabilité requiert une augmentation des investissements. Cependant, dans ce cas on peut constater la réduction des charges consacrées à la garantie (Figure 1.7).

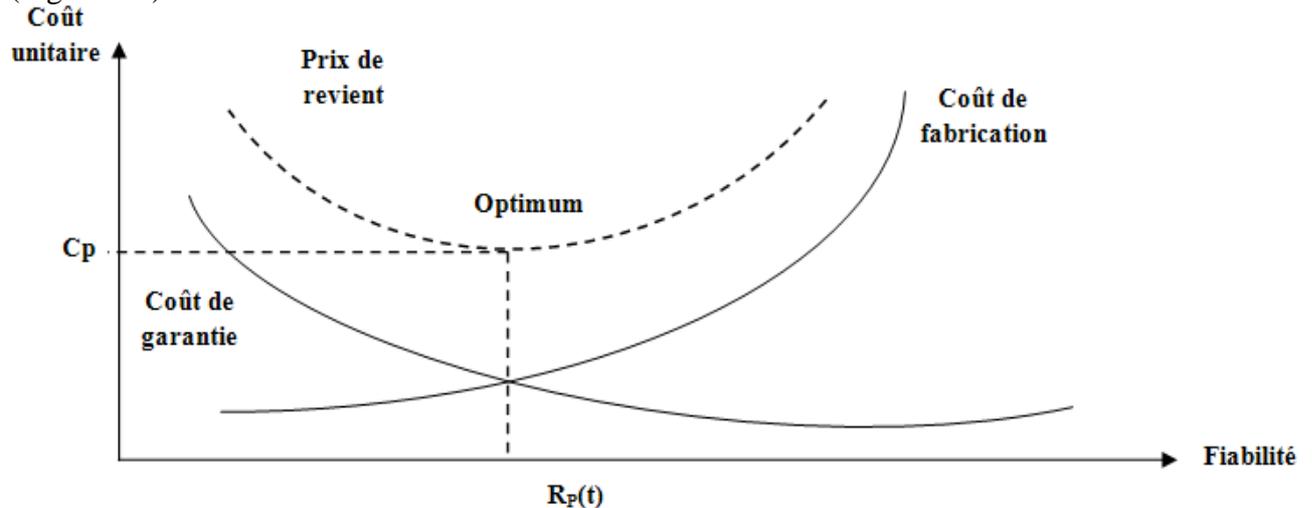


Figure 1.7 :Variation du prix de revient en fonction de la fiabilité.

Par conséquent, pour un constructeur l'allocation optimale de fiabilité à un produit coïncide avec le minimum du prix de revient.

De même si la fiabilité allouée à un produit est faible, le coût de maintenance pour un utilisateur est d'autant plus élevé. Par contre, si le niveau de fiabilité assigné à un équipement est grand, le coût de maintenance est réduit mais le prix d'acquisition est d'autant plus élevé.

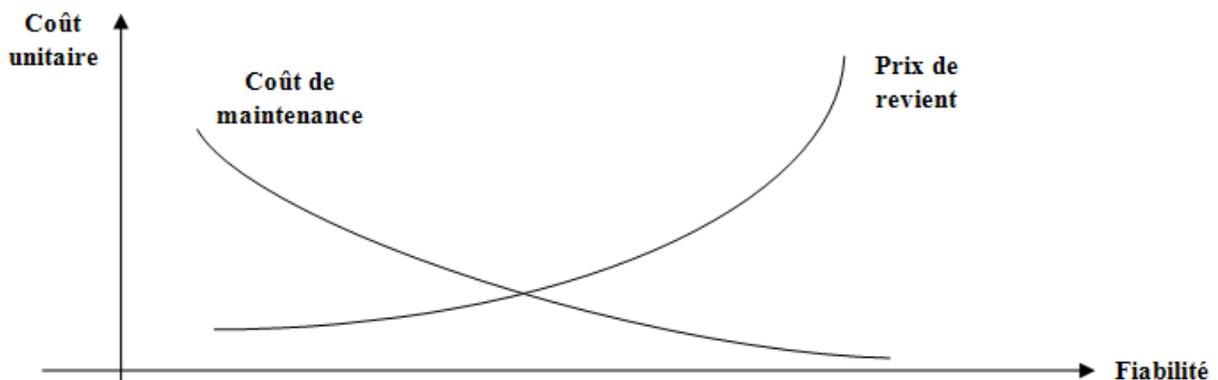


Figure 1.8 :Variation du coût de maintenance en fonction du prix de revient.

La pertinence économique pour un consommateur implique le choix d'un niveau de fiabilité qui concorde avec un coût de possession minimum (Figure 1.9).

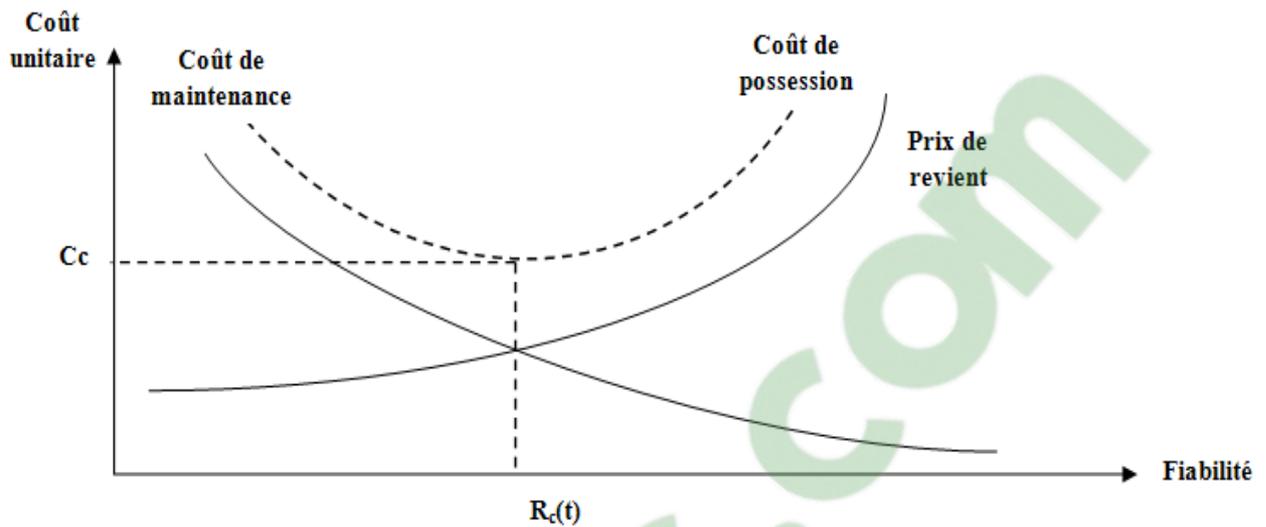


Figure 1.9 : Variation du coût de possession avec la fiabilité.

Selon toute évidence, l'optimum du producteur ne coïncide pas, nécessairement, avec celui du consommateur.

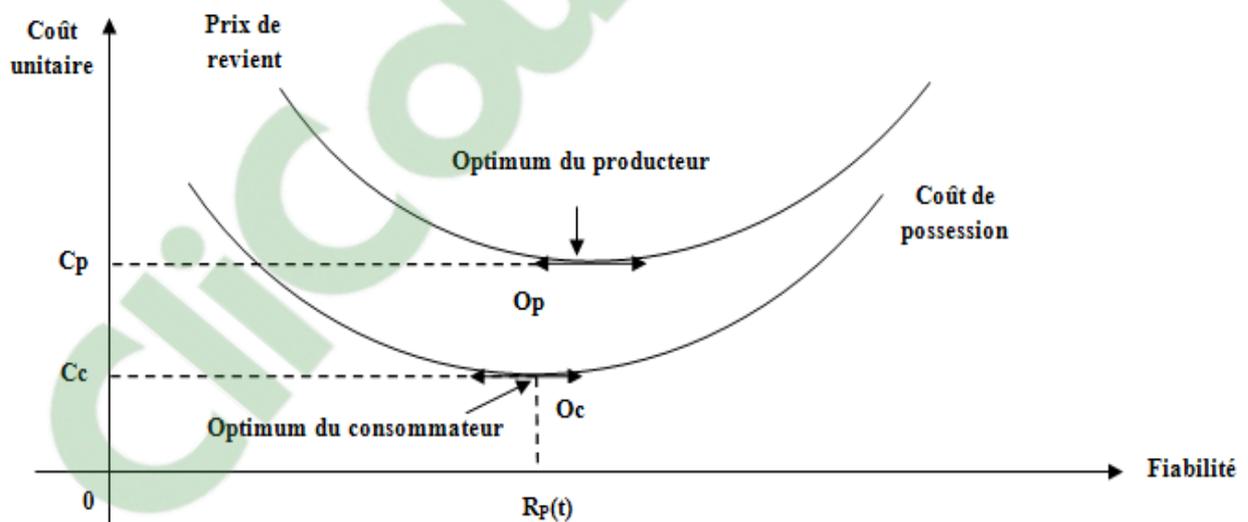


Figure 1.10 : Positionnement relatif des deux optima du producteur et du consommateur.

L'écart entre les deux optima ($O_p - O_c$) peut être réduit car l'évolution des techniques entraîne une amélioration de la fiabilité du matériel sans augmentation du coût de fabrication. Ainsi les positions relatives des optima du constructeur et de l'utilisateur doivent être rectifiées en conséquence.

A présent, précisons que pour le producteur, l'évolution de la marge bénéficiaire sur un produit varie effectivement avec le niveau de fiabilité alloué à l'équipement. Il y a cependant un seuil maximum de profit atteint pour une fiabilité donnée (Figure 1.11).

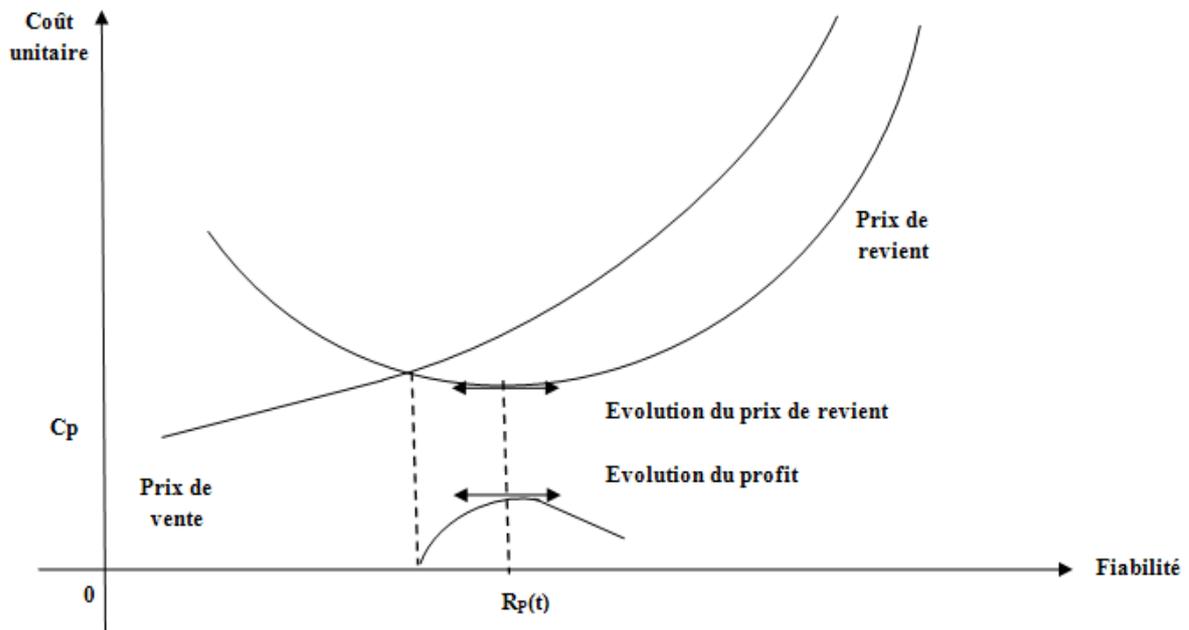


Figure 1.11 : Impact du niveau de fiabilité sur le profit réalisé.

1-6-2 Performances et fiabilité:

L'augmentation des performances d'un équipement, notamment l'accroissement de l'endurance et de la vitesse implique une diminution de la fiabilité car le processus de dégradation du matériel connaît dans ces conditions une recrudescence (Figure 1.12).

Ainsi par exemple, l'augmentation de la vitesse diminue la fiabilité d'un système.

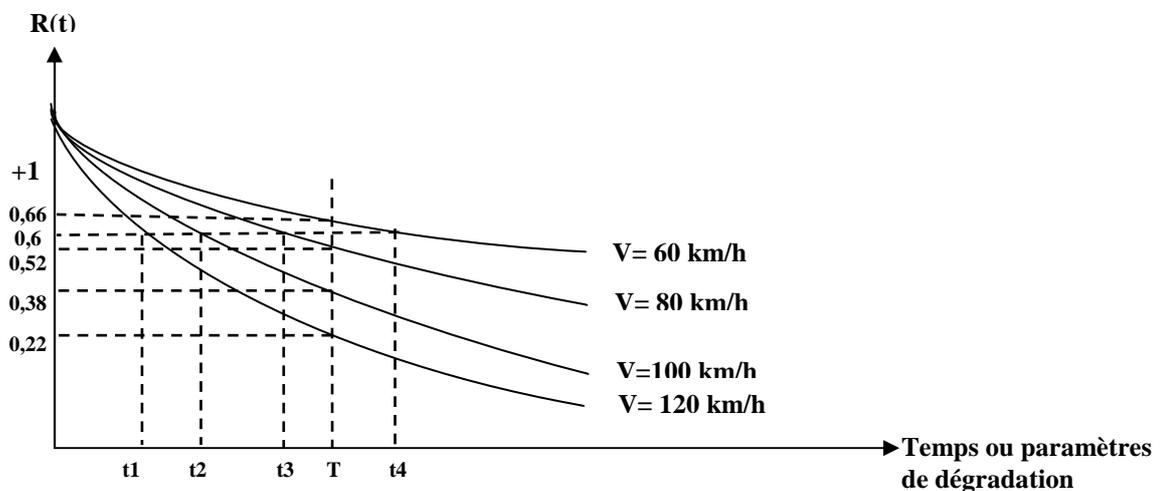


Figure 1.12 : Impact de l'accroissement de la vitesse sur la fiabilité d'un système.

1-6-3 Fiabilité et sécurité de fonctionnement :

Les préoccupations sécuritaires concernent la prévention des incidents générés par l'emploi d'un matériel et qui peuvent entraîner des pertes humaines, dommages corporels, bris important des équipements.

Il n'est pas possible d'imposer à un matériel de fonctionner constamment sans défaillance mais on veut seulement que les dysfonctionnements probables ne causent que des dommages modérés. Il est important de mentionner qu'un équipement fiable n'implique pas nécessairement qu'il possède un niveau de sécurité de fonctionnement élevé. En réalité les dispositions prises pour accroître la survie d'un matériel sont distinctes des mesures prises pour augmenter le seuil de sécurité fonctionnement d'un équipement.

En effet les dispositions prises pour accroître la sécurité de fonctionnement ont pour but de réduire au minimum la probabilité d'apparition des défaillances ayant des effets néfastes multidimensionnels alors que les mesures prises pour augmenter la fiabilité d'un équipement visent à diminuer la probabilité d'avènement d'une panne quelconque.

Finalement, la fiabilité se situe, en amont, de la de manifestation d'une défaillance alors que la sécurité de fonctionnement d'un système se localise, en aval, de la survenue d'une avarie.

1-7 Qualité et fiabilité

Il est évident qu'il existe plusieurs dispositifs pouvant accomplir le même type de fonction; néanmoins on constate que certains d'entre eux la réalisent d'une meilleure façon en procurant plus de satisfactions à leurs usagers.

Ainsi on intègre dans le domaine de la fiabilité la prévision du degré de satisfaction procuré par l'usage du matériel.

Il est à préciser que la fiabilité en tant que composante fondamentale du vecteur qualité d'un équipement industriel se distingue des autres composantes par le fait qu'elle ne s'observe pas immédiatement mais nécessairement après une certaine période d'usage.

1-8 Nombre de composants indispensables et fiabilité d'un système assemblé en série

En associant un ensemble de composants pour construire un système, le niveau global de fiabilité de ce système est évalué à partir de la combinaison des niveaux élémentaires des différents

constituants. Cela suppose que les composants aient un caractère indispensable, c'est-à-dire, que leur défaillance individuelle entraîne automatiquement la panne du système. En guise d'illustration considérons le cas des pneus d'un véhicule. La probabilité de défaillance de chacun d'eux est estimée à **2%**. Il est clair que les événements de défaillance des pneus sont indépendants entre eux et donc la fiabilité de l'ensemble est donnée par le produit des fiabilités élémentaires de chaque composant du système assemblé en série soit :

$$R_s = \prod_{i=1}^{n=4} R_s = \prod_{i=1}^{n=4} (98\%) = 92\% \quad (1.24)$$

Par conséquent, la fiabilité du système des quatre pneus d'automobiles est inférieure à celles de ses composants.

Dans ce qui suit, on représente trois séries de données de fiabilité de système en fonction du nombre de composants. Pour chaque cas de figure, on a fixé une probabilité spécifique de bon fonctionnement pour les composants, à savoir, respectivement, $P_1 = 95\%$; $P_2 = 97\%$; $P_3 = 98\%$.

Dans le cas d'un système monté en série constitué de cent composants indispensables ayant chacun un niveau de fiabilité élémentaire de **99%** alors la fiabilité globale du système assemblé en série atteindra seulement le seuil de **36,6%**.

Aussi paradoxal que cela puisse apparaître, la fiabilité globale d'un système monté en série comportant plus de **90** composants indispensables sera quasiment nulle même si la fiabilité élémentaire de chaque composant vaut **95%**.

En général, on remarque que la fiabilité d'un système groupé en série décroît exponentiellement quand le nombre de composants indispensables augmente (Figure 1.13).

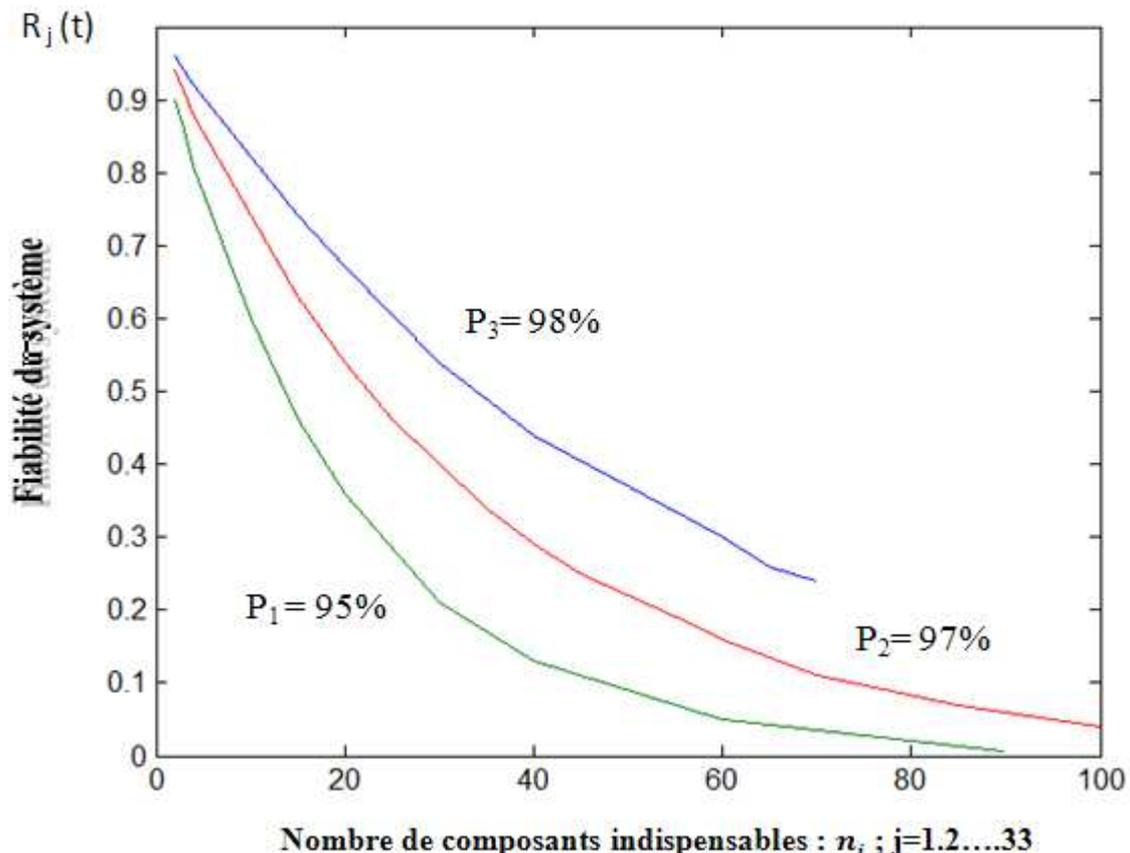


Figure 1.13 : Evolution de la fiabilité du système monté en série, en fonction du nombre de composants indispensables.

1-9 Typologie d'assemblage des composants et évaluation de la fiabilité globale des systèmes

L'analyse fiabiliste consiste à considérer un système quelconque par rapport à la mission pour laquelle il a été conçu. Un système donné quelque soit la nature de sa fonction depuis l'unité d'usinage à la centrale nucléaire est toujours décomposable en sous-systèmes ou composants.

Dans la pratique, il existe plusieurs formes d'assemblage des composants pour obtenir des systèmes fonctionnels. L'évaluation de la fiabilité globale d'un système donné dépend du type de schéma d'association de ses composants.

On distingue cinq catégories d'assemblage :

- Composants en série.
- Composants en parallèle.

- Ensemble série en parallèle.
- Ensemble parallèle en série.
- Ensemble quelconque.

Dans la suite de notre développement, on va effectuer une correspondance entre les différents types d'assemblage des composants et les formules relatives à l'estimation de la fiabilité globale des systèmes respectifs.(Tableau 1.1).

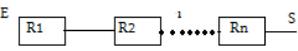
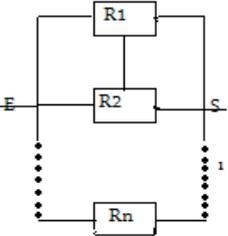
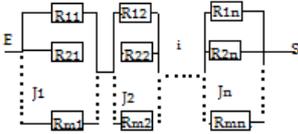
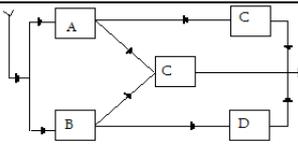
Fiabilité du système	Définition	Schéma d'assemblage	Formule d'évaluation de la fiabilité du système
Fiabilité des composants en série	Des éléments sont dits en série quand la défaillance d'un système implique la défaillance de tous les composants.		$R_S(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t)$
Fiabilité des éléments en parallèle	Des composants sont dits en parallèle lorsqu'il faut que tous les composants soient défaillants pour que le système soit défaillant.		$R_S(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - R_i(t)]$
Fiabilités des ensembles série en parallèle	Des composants sont dits ensembles série en parallèle lorsqu'il faut que toute les branches parallèles soient défaillantes pour que le système soit défaillant.		$R_S(t) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - \prod_{i=1}^m R_i(t)]$
Fiabilité des ensembles parallèles en série	Des composants sont dits ensembles parallèles en série si une des branches parallèles est défaillante entraîne la défaillance du système.		$R(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=1}^m [1 - R_j(t)] \right\}$
Fiabilité d'un ensemble quelconque	Des composants sont dits ensemble quelconques s'ils ne peuvent pas être décomposés en série parallèles		$R(t) = 1 - [1 - R_A R_B][1 - R_C R_D]$

Tableau 1.1 : Correspondance entre les différents types d'assemblage des composants et les formules de l'estimation de la fiabilité globale du système.

1-10 Détermination de la périodicité de la maintenance préventive économiquement optimale

Parmi les problèmes soulevés par la catégorie d'équipement soumis à l'usure, on distingue celui d'ordre technico-économique lié au changement optimal de composants défaillants.

Deux attitudes sont envisageables :

- Soit attendre passivement, l'avènement de l'avarie d'un composant ou d'un sous-système entier, en acceptant le risque de subir les coûts entraînés par l'arrêt intempestif total, ou partiel du fonctionnement de l'équipement.
- Ou bien opérer un entretien préventif de l'équipement, en procédant à un remplacement systématique du composant ou du sous-système avant l'occurrence effective de l'avarie.

Ce qui va induire la minimisation du risque de panne intempestive, de façon à réaliser un gain de production dans le cas d'un processus de production ou obtenir un gain d'exploitation pour le cas d'un système de transport ou éviter une catastrophe écologique pour le cas d'une centrale nucléaire.

Dans ces conditions, le coût à supporter est de nature aléatoire, la probabilité de survenance d'une panne est mesurée par le taux de défaillance soit $F(t) = 1 - R(t)$.

La question qui se pose, a trait à la détermination de l'instant économiquement optimal quant au changement des composants.

Pour la suite de notre développement, adoptons les hypothèses suivantes :

- i) Le remplacement devant être opéré est du genre simple, cela veut dire la non prise en compte des changements du type lié qui implique le renouvellement systématique des composants pilotés, à chaque fois qu'une pièce pilotée est remplacée.
- ii) Le coût de renouvellement préventif est désigné par C_p .
- iii) Le coût de changement d'un composant ayant subi une défectuosité, est désigné par C_d .

1-10-1 Tactique de changement préventif d'un composant à période fixe :

En réalité, il est question d'exercer un type d'entretien qualifié de préventif, en ce sens que l'on accepte de procéder à des actions préventives, dans le but de contourner la fréquence des avaries d'un sous-système ou d'un équipement entier.

Bien que cela puisse apparaître inadmissible à première vue, un composant quelconque à la limite, est renouvelé à l'instant t_p en raison d'une avarie alors qu'il vient juste d'être changé au temps $t_p - \xi$.

On suppose qu'une seule défaillance ait été constatée entre le début du fonctionnement du composant et le moment où le changement préventif fut pratiqué.

La variable du coût du maintenance de l'équipement se traduit par deux catégories de coûts :

- i) C_p : Cette catégorie englobe le prix du composant, le coût de l'intervention en plus des charges propres à la série d'essais avant remise en exploitation.
- ii) C_d : Cette seconde catégorie concerne les conséquences dues à l'avarie notamment :
 - a- Arrêt de la production ou de l'exploitation.
 - b- Perte éventuelle de matière première.
 - c- Pénalités financières dues au retard.
 - d- Adoption de solution compensatrice.

Du fait du caractère programmé de l'intervention préventive, le coût qui lui est associé C_p est évidemment d'ordre déterministe. Par contre, le coût de défaillance C_d est de nature aléatoire car il est engendré par l'événement non déterministe de l'avarie, exprimé par $F(t)$.

Ainsi, le coût moyen de maintenance par composant et par unité de temps d'un composant en admettant qu'à l'instant t_p un entretien préventif soit programmé, se calcule par le ratio :

$$q(t_p) = \frac{C_p + C_d F(t_d)}{t_p} = \frac{C_p + C_d [1 - R(t_d)]}{t_p} \tag{1.25}$$

Supposée en général possédant un comportement géométrique convexe, la valeur optimale de la fonction objectif relatif au coût $q(t_p)$ entraîne nécessairement que $\frac{dq(t_p)}{dt_p} = 0$, or nous savons

que :

$$\frac{dq(t_p)}{dt_p} = \frac{C_d f(t_d) t_p - \{C_p + C_d [1 - R(t_d)]\}}{t_p^2} \tag{1.26}$$

d'où

$$\frac{dq(t_p)}{dt_p} = 0 \text{ ce qui implique : } C_d f(t_d) t_p - \{C_p + C_d [1 - R(t_d)]\} = 0 \quad (1.27)$$

Après arrangement on aboutit à :

$$C_d f(t_d) t_p + C_d R(t_d) = C_p + C_d \quad (1.28)$$

Réduisons les deux membres de l'équation (1.28) par C_d il résulte :

$$[f(t_d) t_p + R(t_d)] = 1 + \frac{C_p}{C_d} \quad (1.29)$$

A ce stade de notre développement, précisons qu'un certain nombre de modèles sont admissibles tels que la distribution log normale, la distribution exponentielle, la distribution normale, le modèle Gamma, le modèle des valeurs extrêmes, le modèle Weibull standard.

Cependant compte tenu de son importance toute particulière, on traitera le cas du modèle Weibull standard.

La conduite de l'analyse mathématique ne sera pas circonscrite exclusivement au cas éventuel de l'hypothèse de nullité du paramètre de repérage γ . On va considérer le cas général où $\gamma \neq 0$. Ce qui engendre une variable dite déviée soit $(t_i - \gamma)$

d'où l'expression de la fonction de fiabilité

$$R(t - \gamma) = \exp - \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (1.30)$$

La dérivation de $R(t - \gamma)$ donne :

$$\frac{dR(t-\gamma)}{d(t-\gamma)} = f(t - \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp - \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (1.31)$$

En reprenant l'équation (1.31) et après substitution on obtient :

$$(t - \gamma) \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp - \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta + \exp - \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta = 1 + \frac{C_p}{C_d} \quad (1.32)$$

Afin d'alléger la notation posons :

$$w = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (1.33)$$

L'équation (1.33) devient:

$$g(w) = \beta w \exp(-w) + \exp(-w) - 1 = \frac{c_p}{c_d} \quad (1.34)$$

La structure analytique de l'équation (1.34) est non algébrique du type transcendant.

L'étude de ses solutions ne peut être effectuée par l'application brutale des méthodes classiques.

Calculons d'abord $\frac{dg(w)}{dw}$

$$\frac{dg(w)}{dw} = -\beta w \exp(-w) + \beta \exp(-w) - \exp(-w) \quad (1.35)$$

$$= (-\beta w + \beta - 1)\exp(-w) \quad (1.36)$$

Trois cas de figures sont à distinguer :

1-10-1-1 Equipement en phase de jeunesse : Ce cas de figure est lié à la condition : $\beta \in [0,1[$.

Compte tenu de cette hypothèse et $w \in R^+$ alors $(-\beta w + \beta - 1) < 0$, ce qui induit une stricte décroissance de $g(w)$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il s'en suit que: $g(w) - \frac{c_p}{c_d} = 0$ n'admet pas de solution dans l'espace des réels quand le paramètre $\beta \in [0,1[$, ce qui s'interprète économiquement, par la non consistance de la pratique de la maintenance préventive pour un équipement lors de la phase de jeunesse.

1-10-1-2 Equipement dit de fatigue : Ce cas de figure est subordonné à la condition : $\beta - 1 = 0$.

Comme conséquence immédiate, on a :

$$\frac{dg(w)}{dw} = (-\beta w + \beta - 1) \exp(-w) = -w \exp -w < 0, \quad \forall w > 0 \quad (1.37)$$

d'où : $g(w)$ est décroissante $\forall w \in R^+$. On observe une constance du signe de variation de la fonction $g(w)$ et donc il y'a absence de solution.

D'une manière analogique, au cas précédent la fonction transcendante : $g(w) - \frac{c_p}{c_d} = 0$, n'est pas résolvable dans \mathbb{R} quant $\beta = 1$ et il en résulte que la maintenance préventive n'est pas justifiable économiquement pour un équipement de fatigue.

1-10-1-3 Equipement d'usure :

Il est établi que le matériel d'usure se distingue par l'inéquation : $\beta - 1 > 0$

Dans ces conditions :

$$\frac{dg(w)}{dw} = (-\beta w + \beta - 1) \exp(-w) = 0 \text{ implique que } (-\beta w + \beta - 1) = 0.$$

Ce qui entraîne que $w = \frac{\beta-1}{\beta}$.

De plus on sait que $\frac{d^2g(w)}{dw^2} = -\beta \exp(-w)$.

Ce qui veut dire que $g(w)$ est concave et possède un maximum global.

On peut vérifier facilement que $\forall w \in]0, \frac{\beta-1}{\beta}[$ on a $\frac{dg(w)}{dw} > 0$.

Sachant que :

$$\forall w \in]\frac{\beta-1}{\beta}, +\infty[. \text{ On a } \frac{dg(w)}{dw} < 0 \tag{1.38}$$

On conclut que la fonction $g(w)$ est concave et le point

$$M\left\{\frac{\beta-1}{\beta}; -1 + \exp\left(-\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\right)\right\} \text{ est un maximum absolu.}$$

Si $w = 0$ alors $g(w) = -1 + \beta w \exp(-w) + \exp(-w) = 0$, C'est-à-dire que la fonction $g(w)$ passe par l'origine.

En outre, l'application de la règle de l'Hôpital conduit à :

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} g(w) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{\beta w}{\exp(w)} + \frac{1}{\exp(w)}\right) = \left[\frac{\lim_{w \rightarrow +\infty} \beta}{\lim_{w \rightarrow +\infty} \exp(w)} - 1\right] = -1 \tag{1.39}$$

La fonction $g(w)$ admet donc pour asymptote horizontale la droite passant par l'ordonnée $g(w) = -1$.

Résumons les informations obtenues dans le tableau de variation suivant :

w	0	$\frac{\beta-1}{\beta}$	$+\infty$
$g(w)'$	+	○	-
$g(w)''$	-		-
$g(w)$	0	$-1 + \beta \exp - \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right)$	-1

Tableau 1.2 : Variation de la fonction $g(w)$.

Graphiquement l'allure générale de la courbe représentative de $g(w)$ est donnée par :

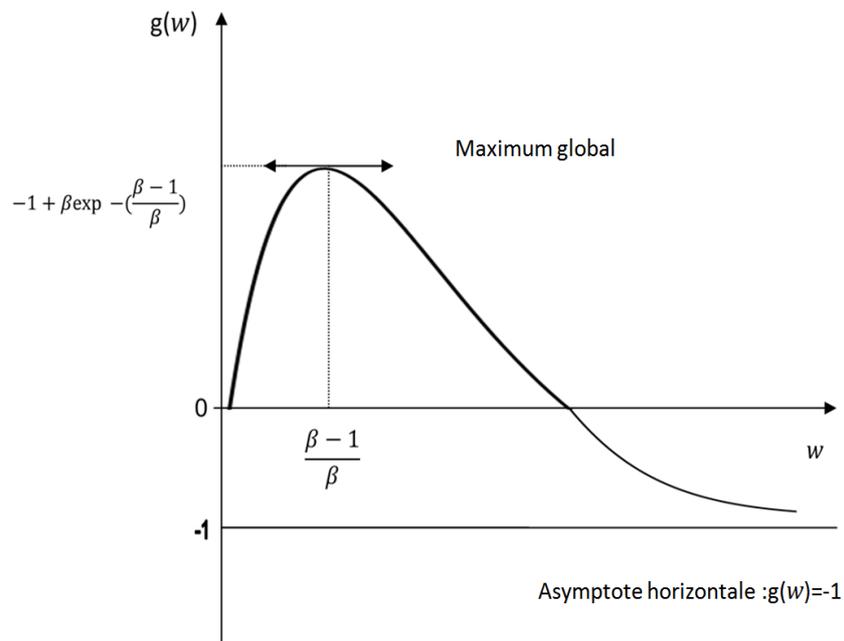


Figure 1.14 : Evolution graphique de la fonction $g(w)$.

La question demeurant en suspens consiste dans la détermination des deux racines de l'équation

$$\beta w \exp(-w) + \exp(-w) - 1 = \frac{c_p}{c_d} \tag{1.40}$$

Il est évident que :

$$\frac{c_p}{c_d} = \lambda > 0 \tag{1.41}$$

Soit une droite horizontale qui coupe, successivement la courbe de $g(w)$ en deux points distincts

en ce sens que :

$$0 < \frac{c_p}{c_d} < -1 + \beta \exp\left(-\frac{\beta-1}{\beta}\right) \tag{1.42}$$

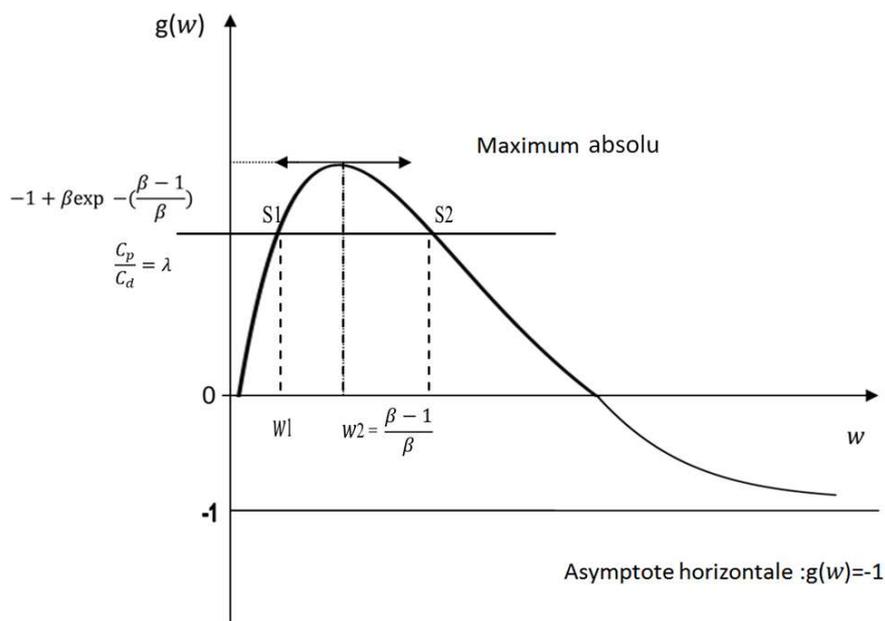


Figure 1.15 : Représentation graphique de $g(w)$ et $\frac{c_p}{c_d} = \lambda$.

Par conséquent la fonction $q(t)$ passe par deux extrémum respectivement t_1 et t_2 cherchons pour quelle valeur de t la fonction $q(t)$ atteint un minimum absolu.

On sait déjà que :

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{c_d f(t_d) t_p + c_d R(t_d) - c_d + c_p}{t_p^2} \tag{1.43}$$

En prenant c_d comme facteur commun on parvient à :

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{c_d \left[f(t_d) t_p + R(t_d) + 1 - \frac{c_p}{c_d} \right]}{t_p^2} \tag{1.43}$$

Or $f(t_d)t_p + R(t_d) + 1 = g(w)$ (1.44)

d'où

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{c_d \left[g(w) - \frac{c_p}{c_d} \right]}{t_p^2} \tag{1.45}$$

Afin de faciliter l'étude des signes de la dérivée $q(t)$, considérons le graphe de la fonction auxiliaire $g(w)$ et subdivisons son domaine de définition $I =]0, +\infty[$ en trois intervalles, chacun d'eux caractérisé par l'invariance du signe de la dérivée $g'(w)$:

- i) Si $w \in]0, w_1[$ alors $g(w) < \frac{c_p}{c_d}$, ce qui implique que $g'(w) < 0$ et donc $g(w)$ est décroissante.
- ii) Si $w \in]w_1, w_2[$, alors $g(w) > \frac{c_p}{c_d}$, ce qui entraîne $g'(w) > 0$ et d'où $g(w)$ est croissante
- iii) Si $w \in]w_2, +\infty[$ alors $g(w) < \frac{c_p}{c_d}$, ce qui implique que $g'(w) < 0$ et par conséquent $g(w)$ est décroissante.

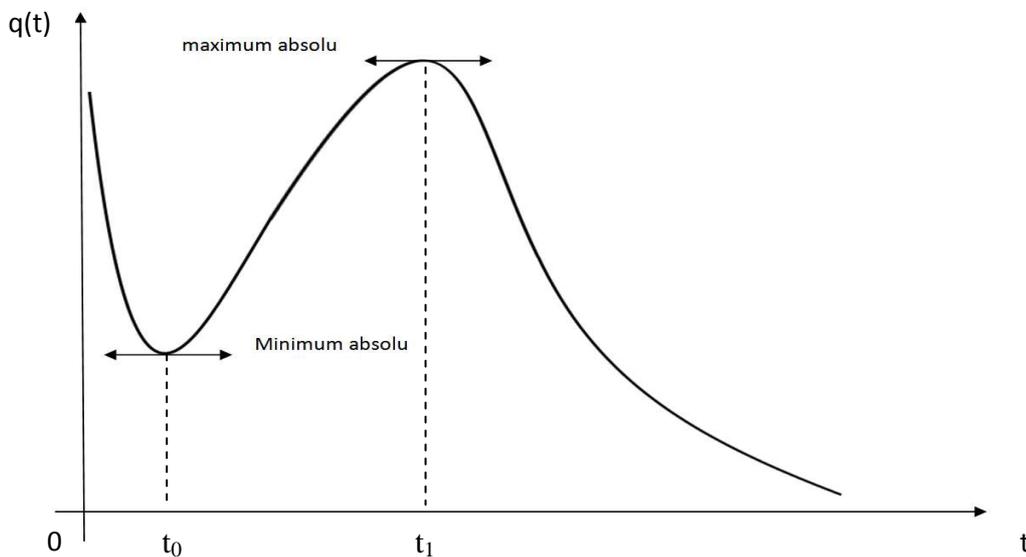


Figure 1.16 : Représentation de la fonction du coût moyen par composant et par unité de temps.

Il ressort de l'analyse du comportement géométrique de $q(t)$ qui passe par un minimum que ce mode de maintenance préventive possède un intérêt économique pour le cas d'un matériel d'usure.

Les points d'intersection de $g(w)_1$ et de $g(w)_2$ sont les deux solutions de l'équation transcendante :

$$(\beta w + 1) = \left(1 + \frac{c_p}{c_d}\right) \exp(-w) \tag{1.46}$$

Données par w_1 et w_2 (voir la Figure 1.17)

Evidemment on doit choisir la plus petite racine :

$$w_1 = \left(\frac{t_i - \gamma}{\eta}\right)^\beta, \text{ ce qui entraine } t_i = \gamma + \eta^\beta \sqrt[\beta]{w_1} \tag{1.47}$$

qui correspond au minimum de $q(t)$ et indique par conséquent la périodicité optimale des opérations de maintenance préventive.

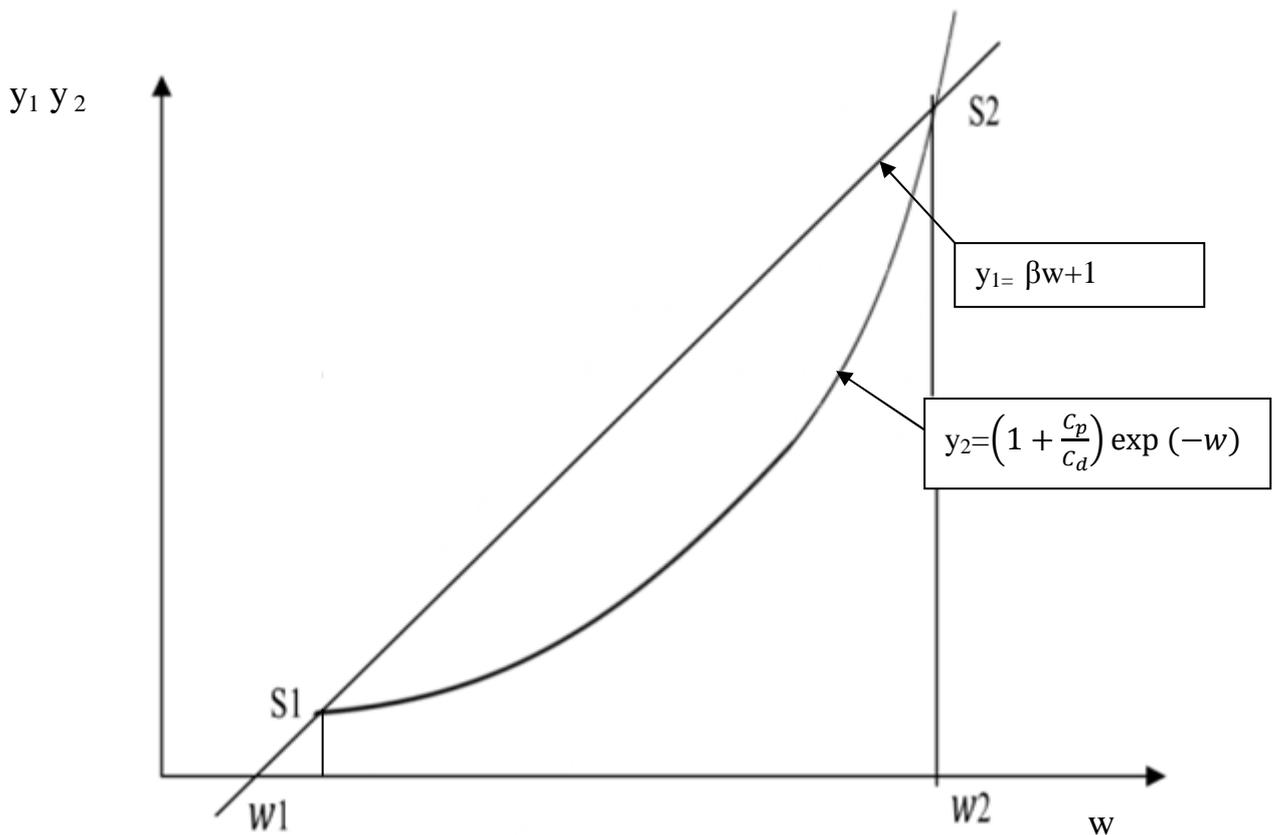
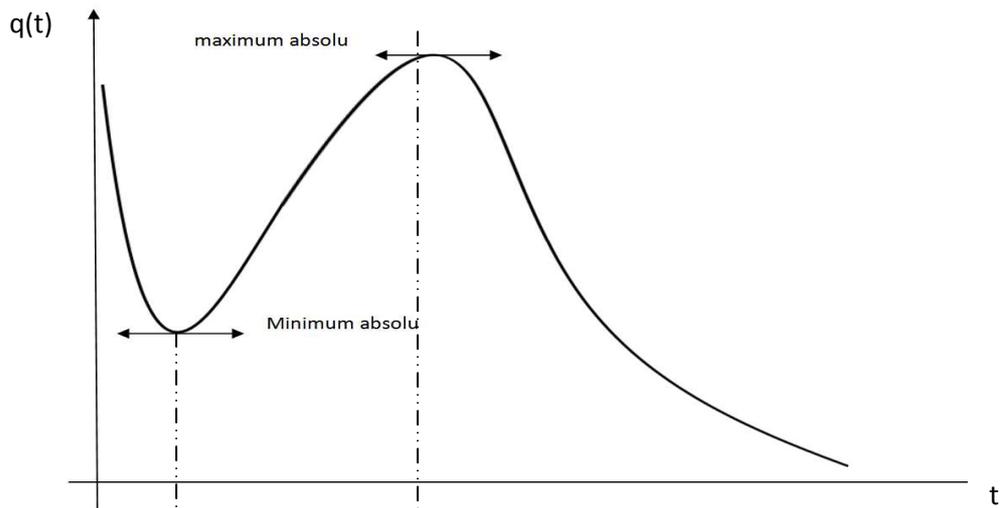
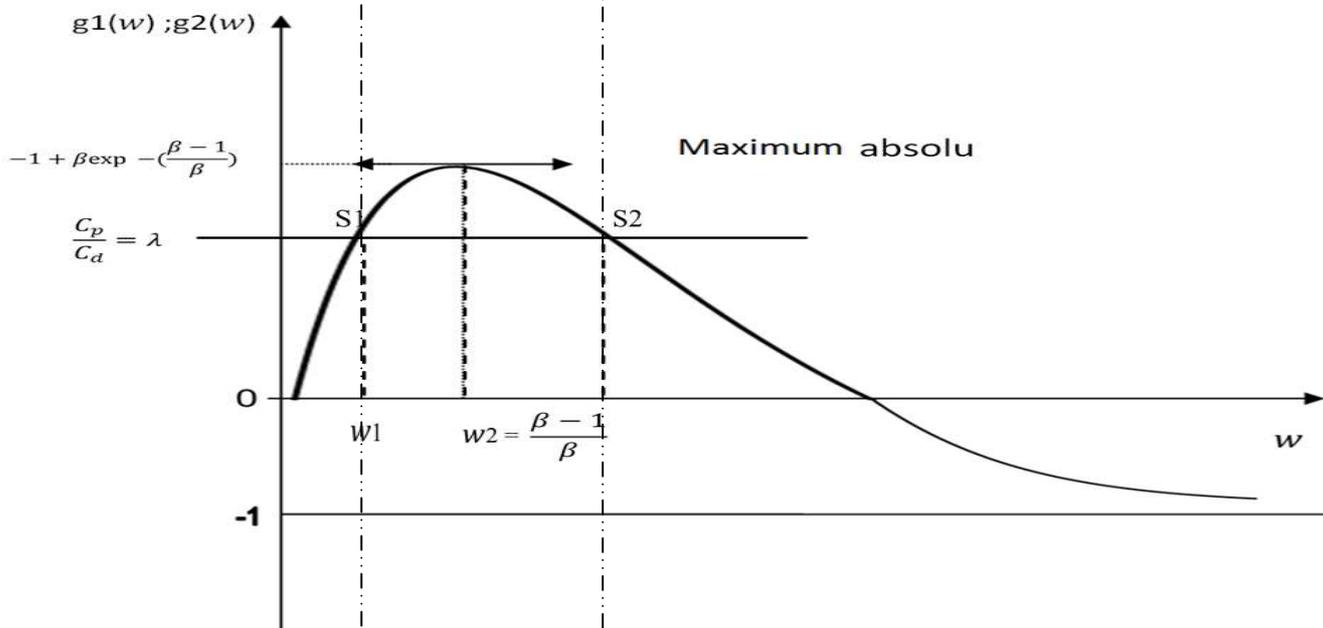


Figure 1.17 : Solution graphique de l'équation transcendante (1.46).

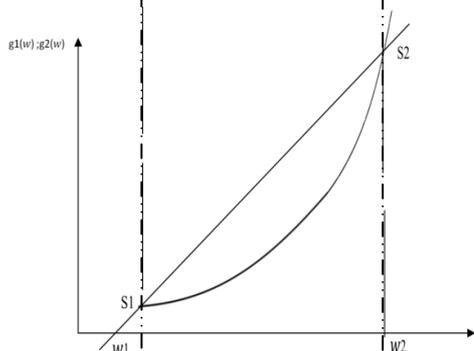
Une correspondance graphique entre les différentes fonctions auxiliaires est établie pour saisir la signification des solutions trouvées (figure 1.18).



a. Evolution du coût moyen de la maintenance par composant et par unité de temps.



b. Evolution du signe de $\frac{dq(t)}{dt}$



c. Solution graphique de l'équation transcendante.

Figure 1.18 : Détermination comparative de la solution graphique de la périodicité optimale de la maintenance préventive : t_0 .

Parallèlement à la solution graphique du problème de détermination de la périodicité optimale de la maintenance préventive, il est possible aussi de se rabattre sur les méthodes d'analyse numérique, en utilisant des programmes informatiques fiables fondés sur le logiciel MATLAB et cela pour trouver l'optimum de la fonction économique du coût moyen de la maintenance par composant et par unité de temps.

Tenant compte de la relation (1.25), l'indice de performance de la fonction du coût moyen de la maintenance par composant et par unité de temps vaut :

$$Minq(t_p) = Min \left\{ \frac{C_p + C_d F(t_d)}{t_p} \right\} \quad (1.48)$$

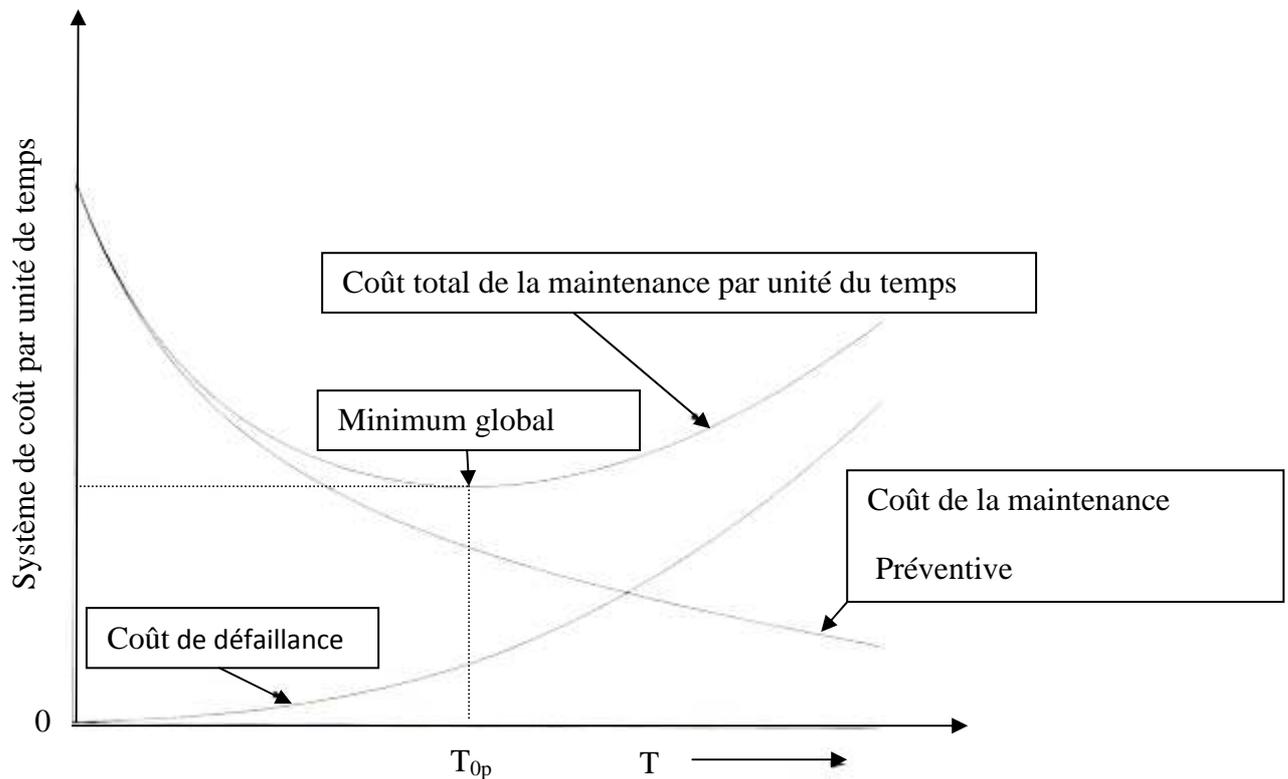
Par référence, au modèle de Weibull standard, la structure analytique de la fonction objectif(1.48), acquiert la forme suivante :

$$Minq(t_p) = Min \left\{ \frac{C_p + C_d \left[1 - \exp - \left(\frac{t_i - \gamma}{\eta} \right)^\beta \right]}{t_p} \right\} \quad (1.49)$$

1-10-2 Relation entre le coût de la maintenance préventive et le coût de défaillance :

Partant des observations empiriques cumulées, les spécialistes maintenanciers ont remarqué que la fonction du coût de défaillance par unité de temps, connaît une décroissance, lorsque la fréquence des actions de maintenance préventive est élevée, tandis que la fonction du coût de la maintenance préventive se trouve soumise, évidemment, à une augmentation et vice versa.

L'évolution concomitante du comportement géométrique des deux catégories de coût de la maintenance préventive et du coût de défaillance à savoir c_p et c_d est illustrée par la (Figure1.20).



Temps séparant les interventions de la maintenance préventive

Figure 1.19 : Périodicité optimale de la maintenance préventive : T_{op} .

Remarquons que la périodicité optimale entre les actions de la maintenance préventive est déterminée par la minimisation de la fonction du coût total de la maintenance par unité de temps C_T , soit :

$$C_T = \frac{C_p \int_0^{\infty} f(t) dt + C_d \int_0^T f(t) dt}{T \int_0^{\infty} f(t) dt + \int_0^T t f(t) dt} \tag{1.50}$$

où

- i- C_p est le coût de la maintenance préventive.
- ii- C_d est le coût de défaillance.
- iii- T est l'intervalle de temps entre les actions de la maintenance préventive
- iv- t est la variable aléatoire de l'avènement des défaillances.
- v- $f(t)$ est la fonction de densité de probabilité.

En supposant que le modèle Weibull standard soit valide, alors l'indice de performance (1.50) devient :

$$MinC_T = Min \left\{ \frac{C_p \int_T^\infty \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) dt + C_d \int_0^T \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) dt}{T \int_T^\infty \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) dt + \int_0^T t \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right) dt} \right\} \quad (1.51)$$

En considérant certaines hypothèses on montre que le temps optimum entre les interventions préventives est défini par l'égalité [27] :

$$T = R.\eta + \gamma \quad (1.52)$$

où R dépend du rapport entre le coût de défaillance C_d et le coût de la maintenance préventive C_p et de la valeur du paramètre de forme β .

Dans le but de faciliter les calculs requis, l'expert en maintenance Dodson Bryan a pu mettre au point, une solution tabulée pour la détermination de la périodicité optimale de la maintenance préventive (Annexe Tableau 1).

1-10-3 Non correspondance entre l'optimum du coût total de la maintenance et le minimum du coût moyen de la maintenance par composant et par unité de temps :

Il paraît que la meilleure façon de procéder pour montrer la non correspondance entre le minimum du coût moyen de la maintenance par composant et une unité de temps (Figure 1.16) et le minimum du coût total de la maintenance consiste dans la méthode graphique qui va nous permettre de corroborer le fait que les périodicités optimales pour les deux indices de performance (1.50), (1.51), sont distinctes l'une de l'autre Figure (1.20).

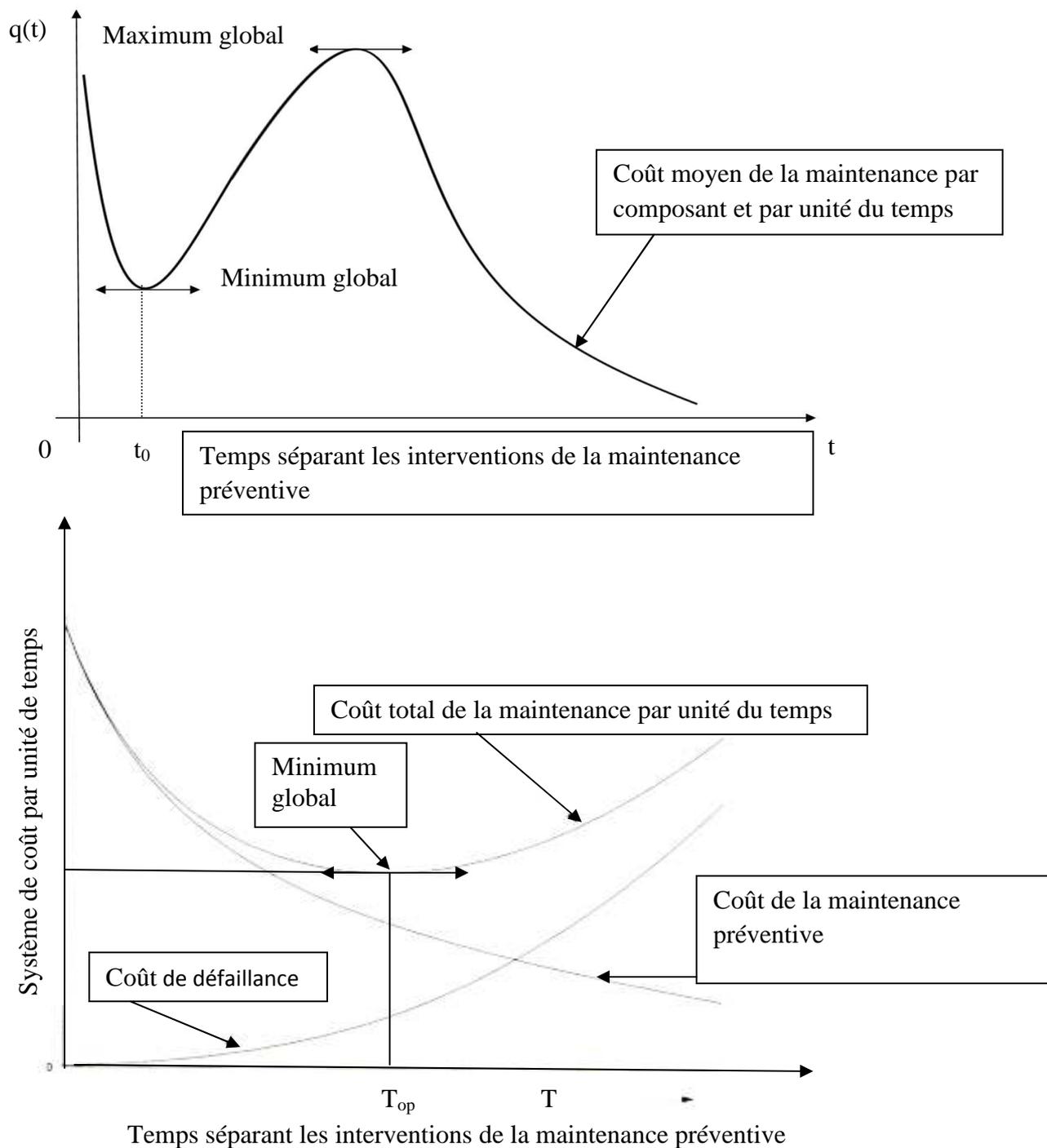


Figure 1.20 : Noncorrespondance entre la périodicité optimale t_0 du coût moyen par composant et par unité du temps $q(t)$ et la périodicité optimale T_{op} du cout total de la maintenance par unité du temps C_T .

Il est clair que les deux périodicités optimales correspondant au minimum du coût moyen par composant et par unité du temps $q(t)$ et au minimum du coût total de la maintenance par unité du temps C_T , respectivement, $t_0 = \gamma + \eta^\beta \sqrt{w_1}$ et $T_{op} = R\eta + \gamma$ ne coïncident évidemment pas. Cela s'explique par le fait que la périodicité optimale des opérations de maintenance préventive

dépend des hypothèses émises et de la structure analytique de l'indice de la performance adoptée pour le système du coût de la maintenance.

Ainsi dans le cas où l'on suppose que le changement d'un composant ou d'un dispositif à titre préventif à un âge fixe, alors le minimum de la fonction objectif du coût de la maintenance va nécessairement changer par conséquent l'abscisse respective la périodicité de la maintenance préventive subira également un changement.

En définitive la périodicité de l'exécution des interventions préventives n'est pas unique mais elle est fonction du type de la politique de maintenance préventive mis en œuvre.

1-10-4 Commentaire :

Il est important de préciser que l'ensemble des graphes présentés plus haut sont tracés sur la base de l'hypothèse de nullité du paramètre d'origine ie $\gamma = 0$. Ces mêmes graphes seront soumis à une translation vers la gauche ou vers la droite selon que $\gamma > 0$ ou $\gamma < 0$.

Par ailleurs, il est tout à fait paradoxal que dans la pratique du management de la maintenance, au sein du secteur industriel américain, comme le confirment trois spécialistes français, notamment, JC Ligeron, A Delage, M Neff ; co-auteurs de l'ouvrage intitulé : la fiabilité en exploitation (36), on utilise le modèle Weibull bi-paramétrique, en excluant catégoriquement le paramètre d'origine γ . Alors que la connaissance rigoureuse de cette grandeur paramétrique représente un préalable à l'estimation, à la fois du paramètre de forme β et d'échelle η , tout en faisant subir à la périodicité optimale T_{op} correspondant au minimum du coût total de la maintenance C_T par unité de temps une translation vers la droite ou vers la gauche selon que $\gamma < 0$ ou $\gamma > 0$.

1-9-5 Exemple d'application :

Dans le but de clarifier le mode opératoire de détermination de la périodicité optimale des actions de la maintenance préventive, on a jugé utile de traiter un exemple d'application, en utilisant, la méthode Dodson Bryan.

Supposons que le coût de défaillance d'un dispositif vaille $C_d = 11000$ DA et que le coût de maintenance préventive respectif soit égale à 220 DA. Admettons que les paramètres de distribution de Weibull standard à partir d'un temps déterminé, jusqu'à l'avènement de l'avarie soient égaux à : $\beta = 2$, $\eta = 226$ jours, $\gamma = 0$.

Il est demandé :

- 1- De calculer la périodicité optimale de la programmation des actions de la maintenance préventive.
- 2- Quel type de maintenance peut-on appliquer lorsque $0 < \beta < 1$, ou bien $\beta = 1$.

Solution :

On sait que le rapport entre le coût de défaillance et le coût de la maintenance préventive est égal à :

$$\frac{C_d}{C_p} = \frac{11000}{220} = 50 \quad (1.53)$$

Au niveau du (Tableau 1 Annexe), tenant compte du ratio $R=C_d/C_p = 50$ et de $\beta = 2.5$ la valeur correspondante est égale à 0.179.

En substituant dans la formule (1.53) on obtient : $T_0 = 0.179 * 226 + 0 = 40.45$ jours.

Maintenant abordons la seconde question qui consiste à trouver une solution pour le problème de la maintenance lorsque $\beta < 1$ ou bien $\beta = 1$.

Au fait les pannes précoces subies par le matériel doivent être prises en charge dans leur intégralité par le fabricant. En effet lorsque $\beta < 1$ le producteur doit appliquer la méthode du deverminage (Burn in) pour neutraliser toute les défaillances qui peuvent se produire pendant la période de jeunesse de l'équipement .

Lorsque $\beta = 1$ le matériel subit des pannes du type aléatoire. la maintenance préventive ne peut pas être appliquée car n'étant pas justifiée économiquement. Dans ces conditions , il est possible de prendre les dispositions suivantes :

- i- Soit mettre en œuvre un programme d'inspection périodique du matériel.
- ii- Ou bien appliquer la maintenance prédictive qui consiste à analyser les vibrations et en meme temps effectuer l'analyse des lubrifiants.

En procédant de cette manière, non seulement on empêche l'apparition intempéste des défaillances mais aussi on contribue à reduire le coût total de la maintenance.

Chapitre II

Présentation des principaux modèles mathématiques de fiabilité

2-1 Principaux modèles mathématiques de fiabilité

On se propose dans ce qui suit de traiter succinctement les modèles de fiabilité les plus utilisés dans la pratique, ce qui nous permettra de situer le modèle Weibull parmi l'ensemble des principales lois de survie et de faciliter la comparaison entre leurs caractéristiques distinctives.

2-1-1 Modèle de fiabilité exponentielle :

La loi de survie exponentielle $R(t) = \exp(-\lambda t)$ est fréquemment utilisée puisqu'elle rend compte du cas très général où le taux de défaillance est constant. C'est le seul cas où la moyenne des temps de fonctionnement sans défaillance ait une signification car elle ne dépend pas alors de l'intervalle de temps considéré.

Cette loi de survie exponentielle est marquée par sa simplicité qui rend possible certaines méthodes de calcul de fiabilité des ensembles en particulier le processus de Markov.

2-1-2 Modèle de fiabilité de Weibull standard :

La loi de Weibull standard est un modèle à variable déviée. Il présente l'avantage de dépendre du décalage à l'origine, β un paramètre de forme dont la valeur est strictement positive et η est un paramètre d'échelle.

En vertu de son taux de défaillance, cette loi permet de rendre compte de l'une ou l'autre des trois périodes de vie de la courbe en baignoire $\beta < 1$ pour les défaillances précoces où le taux d'avarie décroît $\lambda(t)$; $\beta > 1$ pour les défaillances d'usure où le taux d'avarie $\lambda(t)$ croit, $\beta = 1$ pour les défaillances de la vie utile qui se distinguent par un taux constant. La loi exponentielle est donc un cas particulier ($\beta = 1$) du modèle Weibull.

2-1-3 Modèle normale de fiabilité :

La loi normale peut rendre compte de la période d'usure d'un équipement. Elle coïncide avec le modèle Weibull standard lorsque le paramètre β est voisin de 3.

Il convient de limiter son usage au cas où la moyenne des durées de vie est grande devant l'écart type.

Le mécanisme de formation des variables aléatoires normales est lié à l'influence d'un grand nombre de facteurs aléatoires.

2-1-4 Modèle de fiabilité du type Gamma :

La loi gamma est une loi générale dotée de deux paramètres α et β . Dans des cas particuliers elle s'identifie à d'autres modèles :

- Pour $\alpha = 0$, on retrouve la loi exponentielle.
- Pour α entier, on retrouve la loi de Poisson.

La loi Gamma joue un rôle important en statistique mathématique et en théorie des processus aléatoires (files d'attente, mouvements de stocks,...etc.).

Les événements aléatoires dont la survenance obéit à cette loi sont variés.

En plus du processus aléatoire d'apparition des pannes dans un parc de machine, cette loi commande d'autres événements de probabilités notamment :

- Arrivées de véhicules à un point donné dans une route.
- Arrivées de navires dans un port.
- Arrivées de camions à un quai de chargement.
- Arrivées de clients à un guichet.
- Réception de commandes, portant sur un produit et ainsi de suite.

Tableau 2.1 : Caractéristiques mathématiques et statistiques des principaux modèles de fiabilité (a, b, d).

a).

Caractère Type de modèle	Fonction de densité de probabilité	Fonction de fiabilité	Fonction de répartition	Espérance mathématique	Ecart type	Taux de défaillance
	1	2	3	4	5	6
Modèle exponentiel	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	$R(t) = e^{-\lambda t}$	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$E(t) = \frac{1}{\lambda}$	$\delta = \frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$
Modèle de Weibull	$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$	$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$	$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$	$E(t) = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\delta = \eta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$	$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$
Modèle normal	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$	$R(t) = -\int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$	$E(t) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = m$	$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - m)^2}{n - 1}}$	$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}}{\int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt}$

b).

Caractères	Fonction de densité de probabilité	Fonction de fiabilité	Fonction de répartition
Type de Modèle	1	2	3
Modèle log-normale ou modèle Galton	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}}$	$R(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}} dt$	$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}} dt$
Modèle Gamma	<p>Ou</p> $f(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$	$R(t) = 1 - \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy$	<p>Si</p> $F(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy$ <p>$t > 0$</p>

c).

Caractères	Esperance mathématique	Ecart type	Taux de défaillance
Type de Modèle	4	5	6
Modèle log-normale ou modèle Galton	$E(t) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}$	$\delta = \sqrt{e^{2(m + \sigma^2)^2} (e^{\sigma^2} - 1)}$	$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ln t - m)^2}{2\sigma^2}}}{1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ln t - m)^2}{2\sigma^2}} dt}$
Modèle Gamma	$E(t) = \beta(\alpha + 1)$	$\delta = \beta\sqrt{\alpha + 1}$	$\lambda(t) = \frac{\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\frac{t}{\beta}}}{1 - \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy}$

Tableau 2.2 : (a. b): Comparaison des formes géométriques des principaux modèles de fiabilité.

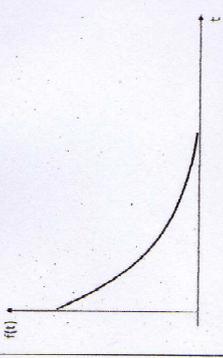
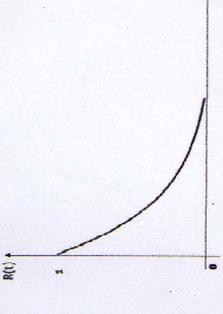
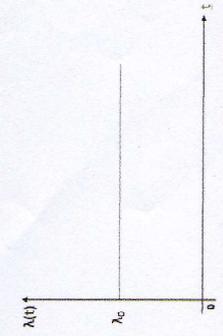
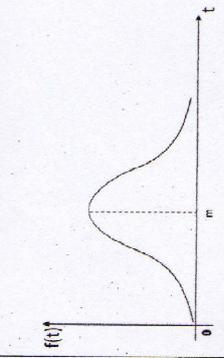
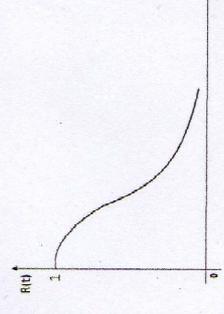
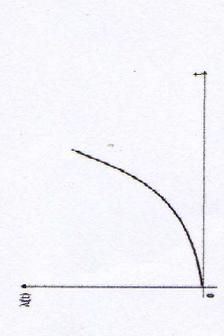
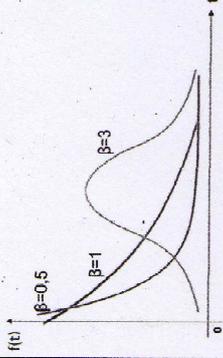
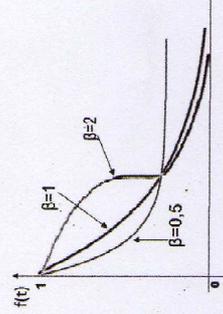
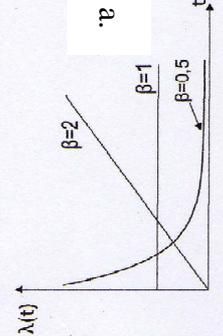
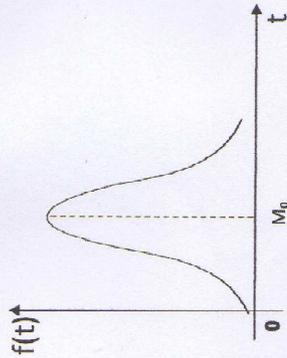
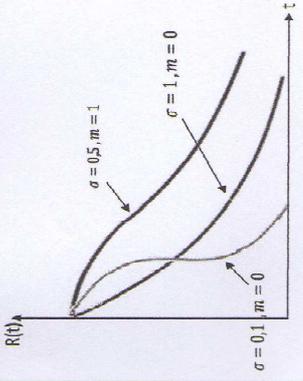
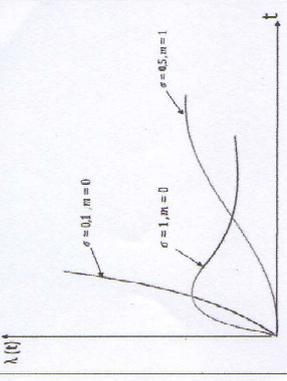
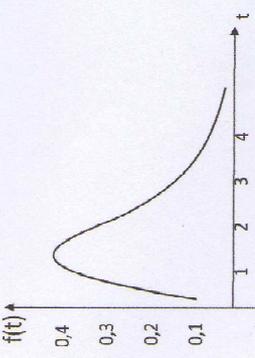
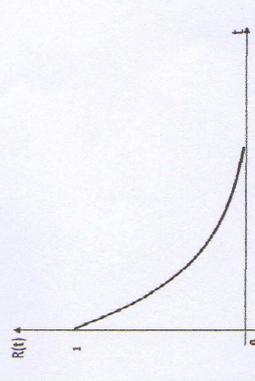
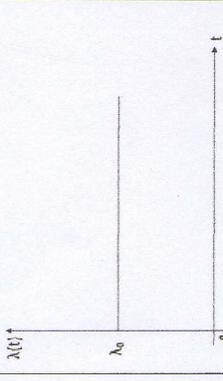
Type de graphes Modèle de fiabilité	Fonction de densité de probabilité	Fonction de fiabilité	Fonction du taux d'avarie
Modèle exponentielle			
Modèle normal			
Modèle weibull			

Tableau 2.3 : Comparaison des formes géométriques des principaux modèles de fiabilité.

Type de graphes Modèle de fiabilité	Fonction de densité de probabilité	Fonction de fiabilité	Fonction du taux de défaillance
Modèle log-normale	 <p>$f(t)$</p> <p>M_0</p> <p>t</p>	 <p>$R(t)$</p> <p>$\sigma = 0,1, m = 0$</p> <p>$\sigma = 1, m = 0$</p> <p>$\sigma = 0,5, m = 1$</p> <p>t</p>	 <p>$\lambda(t)$</p> <p>$\sigma = 0,1, m = 0$</p> <p>$\sigma = 1, m = 0$</p> <p>$\sigma = 0,5, m = 1$</p> <p>t</p>
Modèle Gamma	 <p>$f(t)$</p> <p>$0,4$</p> <p>$0,3$</p> <p>$0,2$</p> <p>$0,1$</p> <p>t</p> <p>1 2 3 4</p> <p>$\alpha = 2, \beta = 1$</p>	 <p>$R(t)$</p> <p>1</p> <p>0</p> <p>t</p> <p>$\alpha = 0$</p>	 <p>$\lambda(t)$</p> <p>λ_0</p> <p>0</p> <p>t</p> <p>$\alpha = 0$</p>

2-2 Notions sur le modèle de fiabilité de Weibull standard

Le modèle Weibull standard est très souple et peut s'adapter avec d'autres lois de fiabilité car étant doté de trois paramètres.

C'est pour cette raison qu'il est universellement utilisé dans les études de fiabilité des équipements ou des composants.

2-2-1 La fonction de répartition de la loi Weibull standard est donnée par :

$$\begin{cases} F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} & \text{Si } t > \gamma \\ F(t) = 0 & \text{Si } t \leq \gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

1. t : est le temps ou le kilométrage de survie de la défaillance.
2. β : est le paramètre de forme.
3. η : est le paramètre d'échelle.
4. γ : est le paramètre d'origine.

Remarquant que β et γ sont deux paramètres continus. l'étendue des valeurs possibles de ces paramètres est définie comme suit :

- $\beta \in]0, +\infty [$
- $\eta \in]0, +\infty [$
- $\gamma \in]-\infty, +\infty [$

L'existence du paramètre γ dans la structure analytique du modèle Weibull standard lui confère le caractère d'un modèle à variable déviée.

Puisque $F(t)$ est la probabilité cumulée de défaillance alors la fonction de fiabilité est définie par :

$$\text{d'où} \quad R(t) = 1 - F(t) \quad (2.2)$$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.3)$$

2-2-2 La densité de probabilité de survie est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \text{ pour } t > \gamma \\ f(t) = 0 \text{ pour } t \leq \gamma \end{cases} \quad (2.4)$$

a- Si $\gamma = 0$ et $\beta = 1$ alors $F(t) = \frac{1}{\eta} e^{-t}$ est la distribution exponentielle qui est un cas particulier de la distribution de Weibull standard.

b- Si $\beta \geq 3$; la distribution de Weibull standard se rapproche de la loi normale.

2-2-3 Le taux d'avarie s'exprime comme suit :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \text{ avec } t > \gamma \quad (2.5)$$

2-3 Moments du modèle Weibull standard

a- L'espérance mathématique ou la moyenne du temps de bon fonctionnement :

$$E(t) = MTBF = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.6)$$

où Γ est le symbole de la fonction Eulérien de seconde espèce nommée fonction Gamma.

Si $\gamma = 0$ on a :

$$E(t) = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (2.7)$$

b- Variance de la distribution Weibull standard :

$$\text{Var}(t) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right] \quad (2.8)$$

2-4 Signification et influences des paramètres du modèle Weibull standard**2-4-1 Paramètre d'échelle η :**

Afin de saisir la signification et l'influence du paramètre d'échelle η il faut effectuer un changement de variable soit $z = \frac{t-\gamma}{\eta}$ d'où $t = \eta z + \gamma$ ainsi la variable t des instants de défaillance varie selon la grandeur du paramètre η . Elle subit une extension lorsque η a une valeur importante. Par contre, lorsque la grandeur η a une valeur réduite, la variable t est soumise à une contraction ce qui justifie la dénomination de paramètre d'échelle η . L'impact du paramètre η sur la fonction de densité de probabilité $f(t)$ s'exprime par la détermination de l'étendue de son étalement sur l'axe horizontal.

2-4-2 Paramètre d'origine γ :

Il est établi que sa valeur est inférieure à la composante minimale des instants de défaillances soit $\min t_i > \gamma, i = 1, 2, \dots, n$.

- a- Si $\gamma < 0$, alors cela veut dire que dès la mise en exploitation, un sous ensemble des équipements était avarié.
- b- Si $\gamma = 0$, cela signifie que l'origine du temps par rapport aux instants de défaillances est bien connue et qu'elle coïncide avec les données de la fiabilité opérationnelle.
- c- Si $\gamma > 0$, alors l'ensemble des équipements étaient en survie complète dans l'intervalle $[0, \gamma]$. Cela signifie qu'aucun composant ou sous-système n'a subi une avarie pendant cet intervalle de temps.

En guise d'illustration de l'impact du paramètre d'origine, on constate que la courbe de la fonction de densité de probabilité $f(t)$ subit une translation vers la gauche lorsque la valeur de γ est positive et vers la droite quand la valeur de γ est négative.

2-4-3 Paramètre de forme β :

Ce paramètre possède une interprétation physique bien précise. La signification exacte attribuée au paramètre de forme β dépend de sa valeur.

1. Si $\beta < 1$ et t s'accroît alors le taux de défaillance décroît et le matériel est en période de jeunesse.
2. Si $\beta = 1$ le taux de défaillance est constant, on est en présence d'un matériel de fatigue.
3. Si $\beta > 1$ et t s'accroît alors le taux de défaillance croît d'une manière exponentielle, le matériel est en période d'usure.
4. Si $1 < \beta < 2$, le taux de défaillance est fortement croissant au début et plus faiblement ensuite.
5. Si $\beta = 2$, le taux de défaillance est linéairement croissant.
6. Si $\beta > 2$, le taux de défaillance est faiblement croissant au début puis fortement.

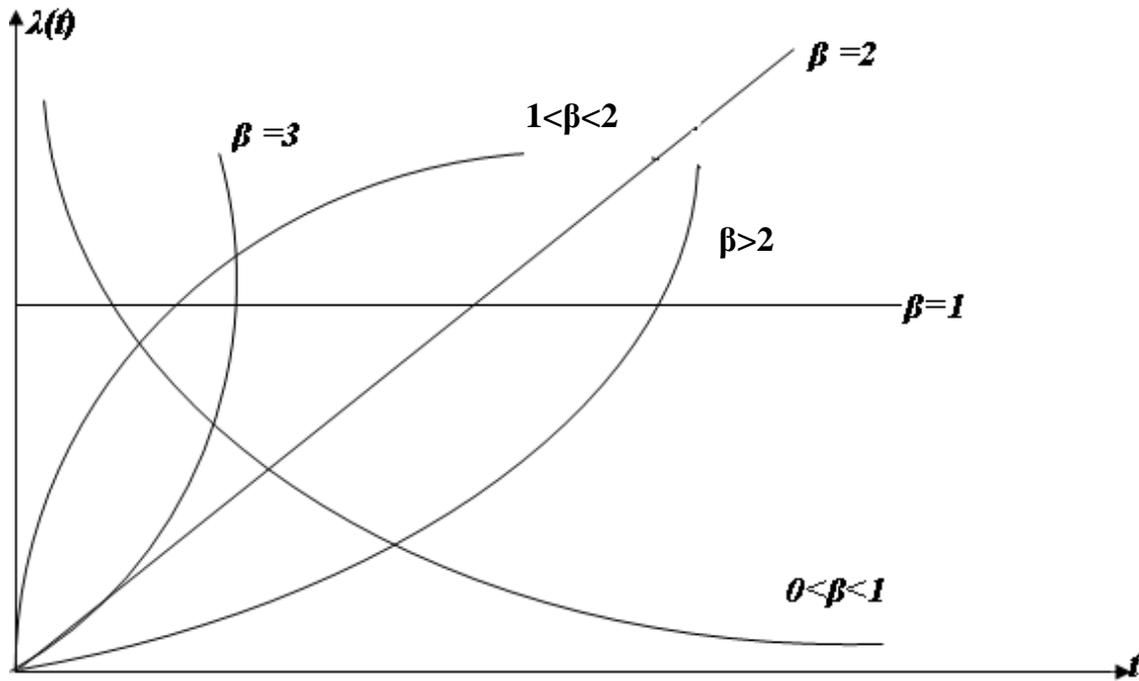


Figure 2.1 : Variation du taux de défaillance en fonction du paramètre β .

2-4-4 Modélisation du comportement du taux de défaillance ou courbe en baignoire :

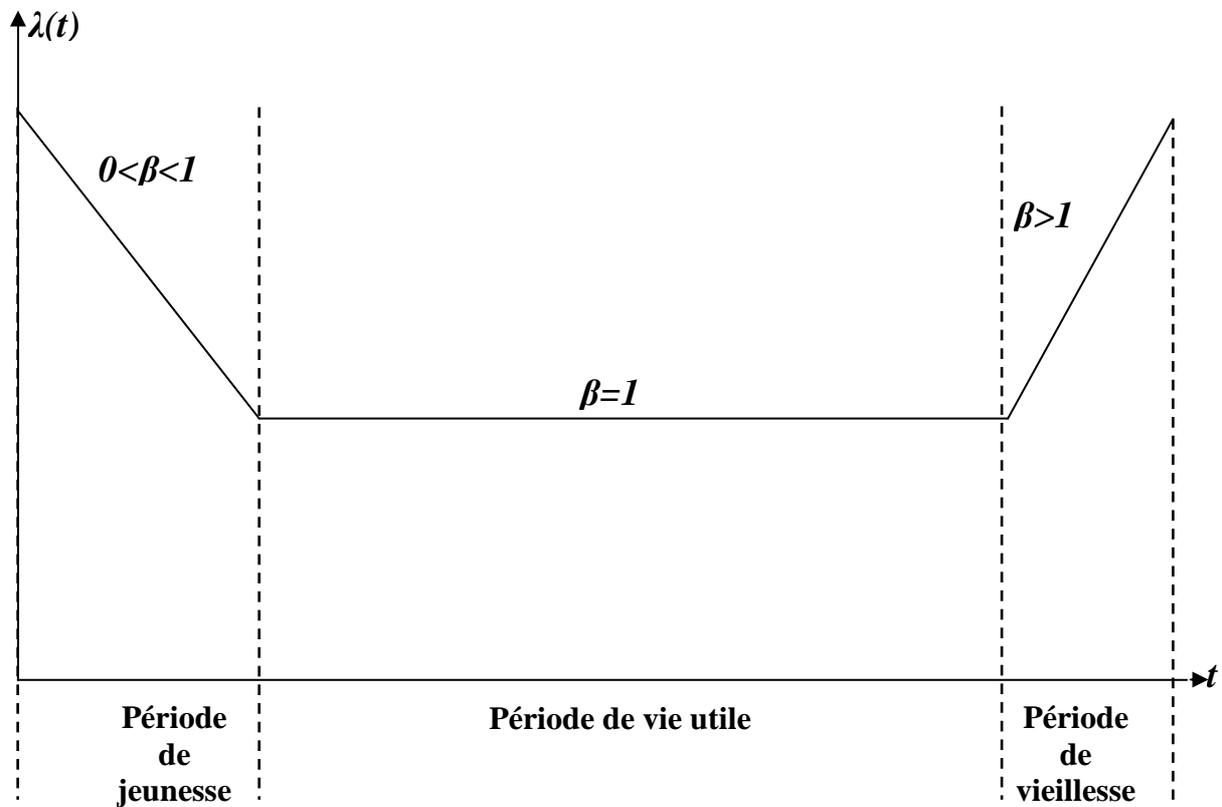


Figure 2.2 : Courbe en baignoire relative à la variation du taux d'avarie.

Etant donné que le taux de défaillance décroît pour $\beta < 1$, il devient constant pour $\beta = 1$ et croît lorsque $\beta > 1$. De là découle la forme générale de la courbe en baignoire (Figure 2.2) qui modélise le comportement général du taux de défaillance d'un matériel quelconque pendant toute la durée de son exploitation.

On distingue trois périodes dans la courbe du taux de défaillance en fonction de l'âge de l'équipement.

- Le premier correspondant à la jeunesse du produit. Les défaillances sont dues à des défauts de fabrication ou à des phénomènes à évolution rapide.
Le taux de défaillance décroît avec l'âge. Cette période a une durée de vie variable suivant le produit. Elle s'échelonne entre quelques heures et quelques centaines d'heures.
- La deuxième présente un taux de défaillance sensiblement constant. Elle correspond à l'apparition de défaillances provenant de causes très diverses. Cette période correspond à la vie utile. Sa durée s'étend de quelques milliers d'heures pour les pièces mécaniques à plusieurs centaines de milliers d'heures pour les composants électroniques.
- La dernière est caractérisée par un taux de défaillance croissant. Elle correspond à l'apparition des défaillances dues à l'usure ou à la fatigue.

L'information fournie par le paramètre de forme β joue un rôle capital dans l'orientation de la politique de maintenance d'où la nécessité absolue de procéder à son estimation de la manière la plus rigoureuse possible. Notons à ce niveau que l'optimalité de l'estimation d'un des trois paramètres du modèle Weibull standard est interdépendante avec celle des deux autres.

Quant à l'influence du paramètre de forme β , elle s'exerce sur l'ensemble des fonctions liées à la fiabilité, notamment celle de la fonction de densité de probabilité de Weibull et du taux de défaillance.

En outre, l'impact des paramètres de forme β s'exerce également sur l'allure de la fonction de fiabilité du modèle Weibull standard (Figure 2.3) ainsi que sur sa fonction de densité de probabilité (Figure 2.4).

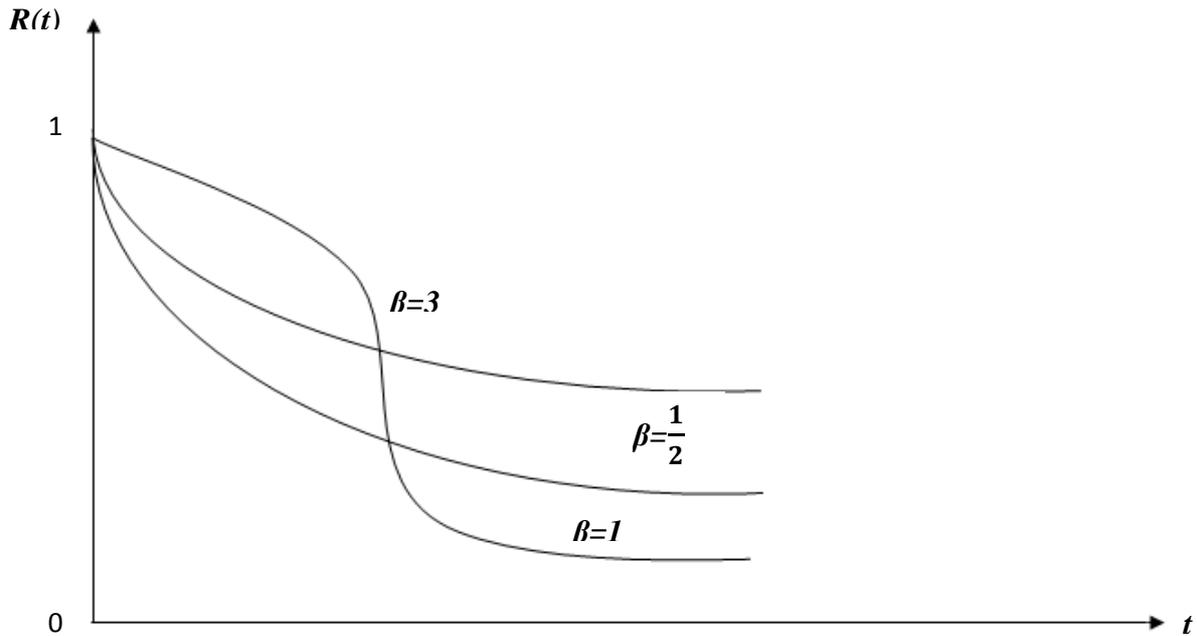


Figure 2.3 : Impact du paramètre de β sur l'allure de la fonction de fiabilité de Weibull.

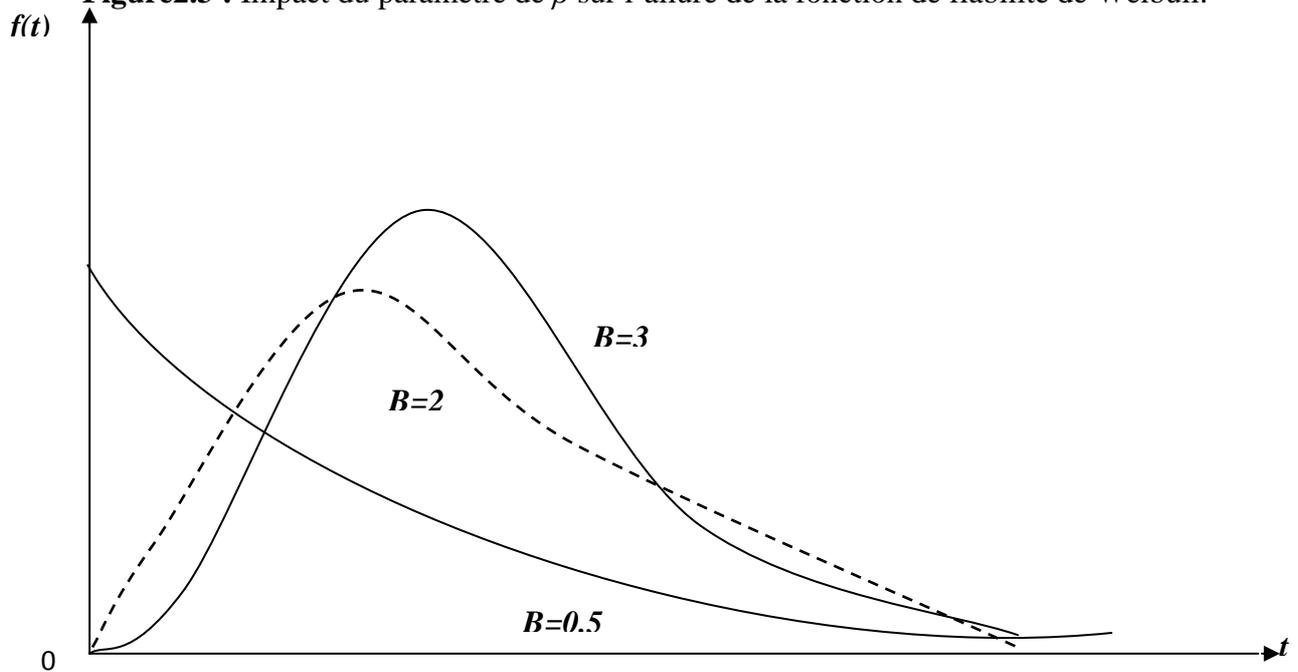


Figure 2.4 : Influence du paramètre β sur l'allure de la fonction de densité de probabilité de Weibull standard.

Il est à remarquer que ces différentes courbes ont été tracées pour $\gamma = 0$. Ces mêmes courbes subiront une translation vers la droite si $\gamma > 0$ et vers la gauche si $\gamma < 0$.

2-4-5 Evolution comparative de la fiabilité et du taux de défaillance pendant la durée de vie d'un équipement :

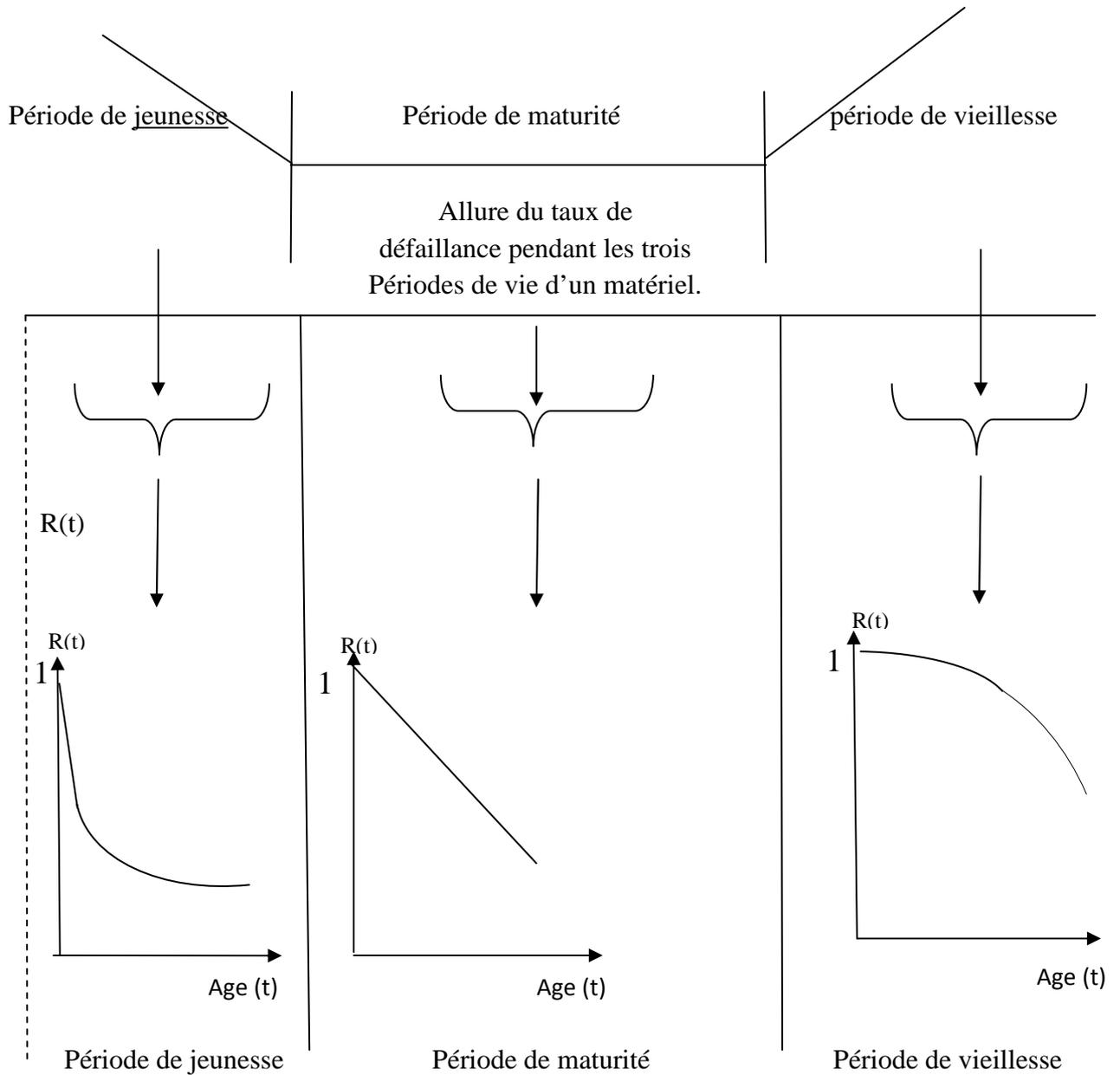


Figure 2.5 : Evolution comparative de la fiabilité et du taux de défaillance pendant les trois périodes de vie d'un matériel.

2-5 Transformation doublement logarithmique du modèle Weibull standard

Si la durée de vie t suit une loi de Weibull standard, on aura :

$$f(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.9)$$

$$\text{d'où } R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.10)$$

Introduisons l'opérateur logarithmique népérien il vient :

$$\ln[1 - F(t)] = -\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (2.11)$$

$$\text{où } -[\ln 1 - F(t)] = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (2.12)$$

ou bien encore :

$$\ln \frac{1}{1-F(t)} = \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (2.13)$$

Prenons une seconde fois l'opérateur logarithmique népérien on trouve :

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = \ln \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta \quad (2.14)$$

ce qui donne :

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = \beta \ln \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right) \quad (2.15)$$

ou bien :

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = \beta \ln(t - \gamma) - \beta \quad (2.16)$$

➤ Cas où $\gamma = 0$.

Dans ces conditions l'équation (2.16) devient :

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = \beta \ln t - \beta \ln \eta \quad (2.17)$$

Posons :

$$y = \beta \ln \ln \frac{1}{1-F(t)}, \quad x = \beta \ln t, \quad (2.18)$$

on obtient :

$$y = \beta x - \beta \ln t \quad (2.19)$$

Il existe un papier fonctionnel du type Weibull (Figure 2.6) ou d'Allan Plait (Figure 2.7) dont les ordonnées sont proportionnelles à y et graduées en $F(t)$ et les abscisses sont proportionnelles à x et graduées en t . Si l'on porte sur ce graphique des points $t_i, F(t_i)$, ces points s'aligneront sensiblement sur une droite, dans l'hypothèse où les durées de vie suivent une distribution de Weibull.

La pente de la droite sera proportionnelle à β et l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'ordonnée $y = 0$, soit $F(t) = 0,632$ correspondra au paramètre d'échelle η .

En effet si

$$y = \beta \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = 0, \quad (2.20)$$

on a

$$\left[\ln \frac{1}{1-F(t)} \right] = 1 \quad (2.21)$$

on bien

$$\ln[1-F(t)]^{-1} = 1 \quad (2.22)$$

d'où

$$\ln 1-F(t) = -1 \quad (2.23)$$

En prenant l'exponentiel des deux membres, on aboutit à :

$$1 - F(t) = e^{-1} \quad (2.24)$$

ce qui implique

$$F(t) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,368 = 0,632 \quad (2.25)$$

Ainsi pour $y = 0$, on a :

$$\beta \ln t - \beta \ln \eta = 0 \quad (2.26)$$

d'où :

$$\ln t = \ln \eta \quad (2.27)$$

et donc :

$$t = \eta \quad (2.28)$$

C'est-à-dire que l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'ordonnée $y = 0$ sera égale au paramètre d'échelle η . Pour faciliter l'utilisation, les graphiques courants portent les graduations suivantes :

- Echelles verticales : A gauche : graduée suivant $F(t)\%$.

A droite : graduée suivant $y = \ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$.

- Echelles horizontales : Inferieure : graduée suivant t .

Intermédiaire : graduée suivant $x = \ln(t)$.

De plus, ces graphiques comportent soit un axe vertical spécifique à l'évaluation de β ou bien un rapporteur d'angle permettant d'estimer le même paramètre.

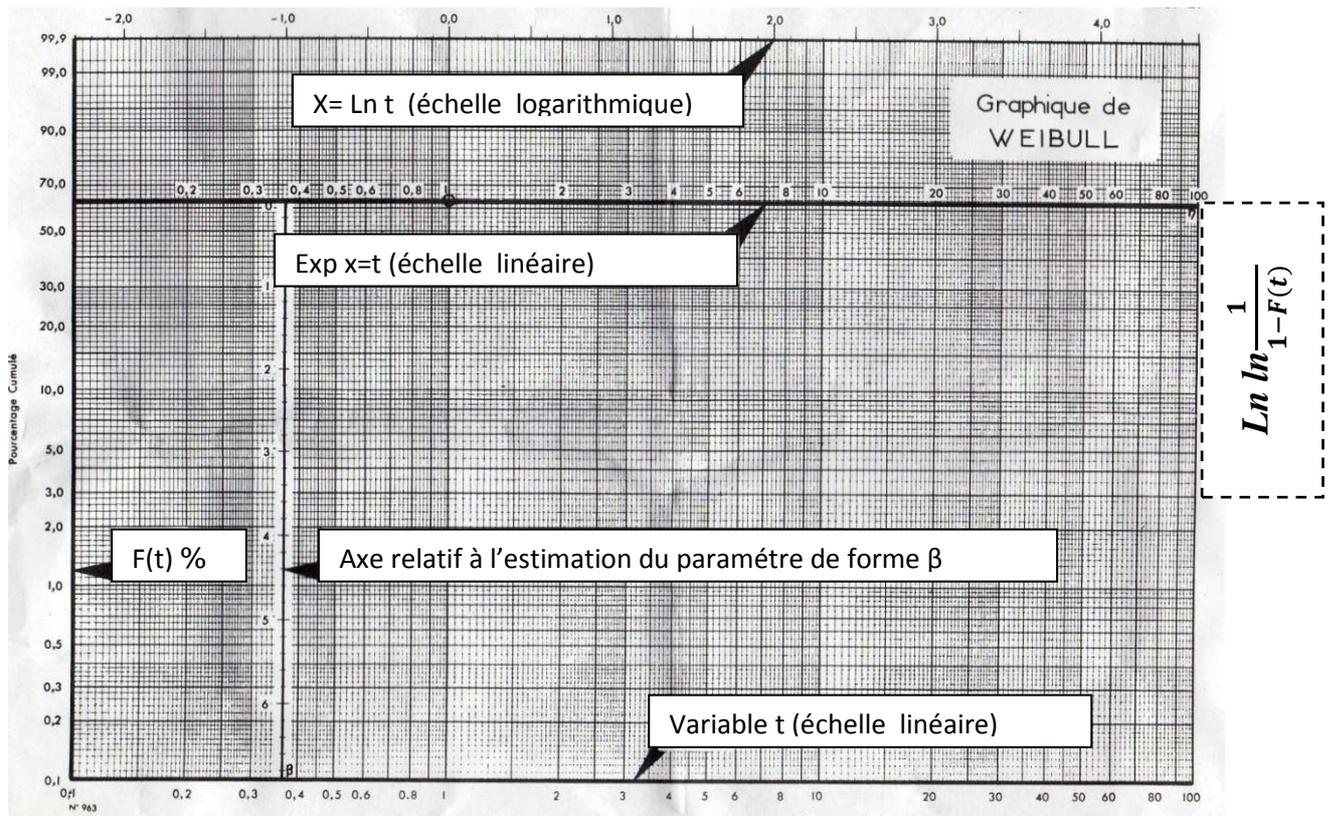


Figure 2.6: Modèle du graphique fonctionnel de Weibull.

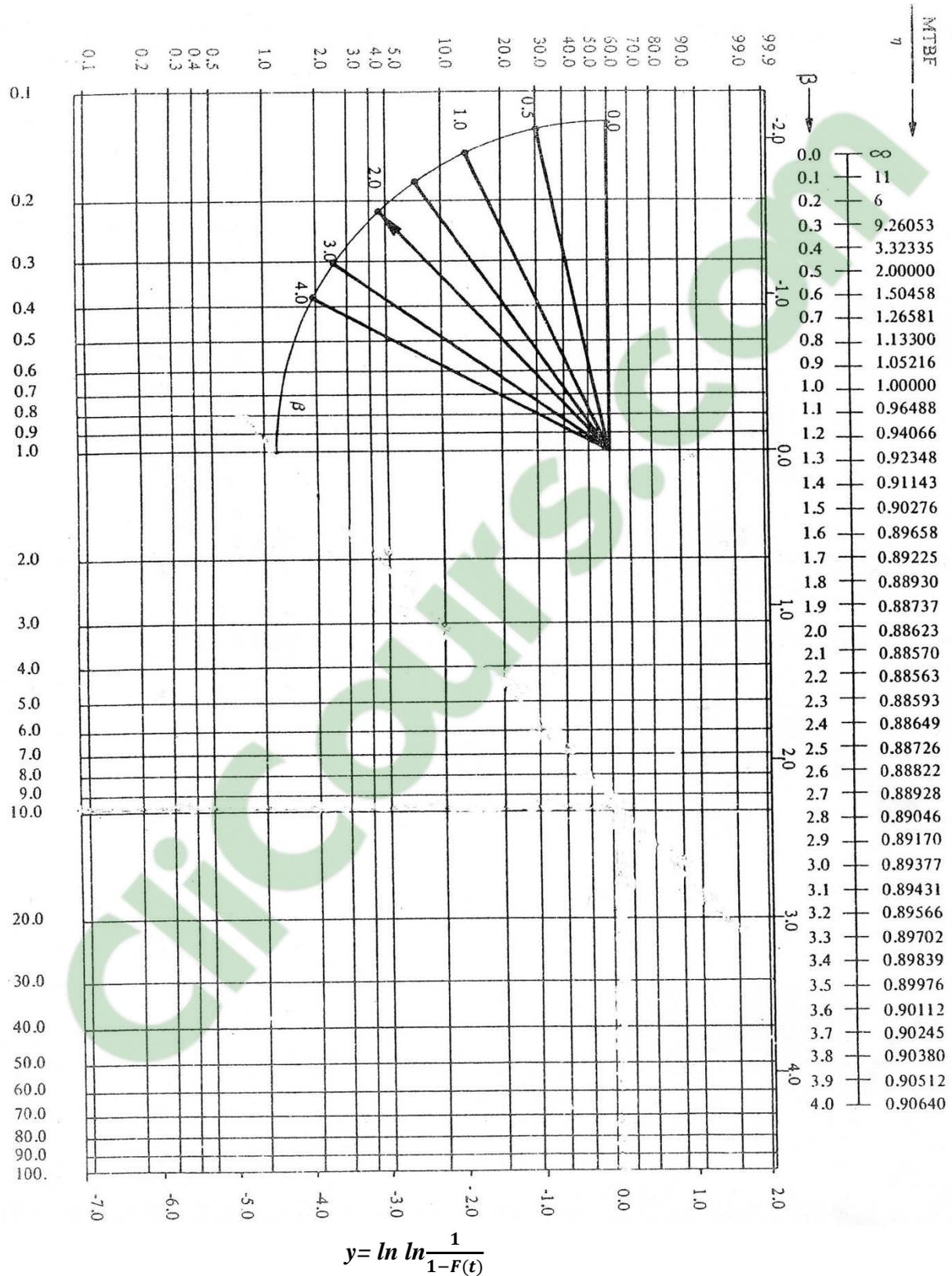


Figure 2.7 : Modèle du graphique fonctionnel d'Allan Plait.

2-6 Méthode graphique d'estimation ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard

2-6-1 Exemple d'application relatif au cas où $\gamma=0$:

- Type de dispositif : Relais 1
- Relevé historique des données de défaillance T_i en nombre d'opérations
- Taille de l'échantillon $n=20$
- Estimateur de la fonction de répartition : $F(t_i) = \frac{i}{n+1}$

Tableau 2.4 : Données de fiabilité du dispositif : Relais 1. [53].

I		II	
T_i	$F(t_i)$	T_i	$F(t_i)$
190000	0,048	850000	0,524
334000	0,095	900000	0,571
365000	0,143	960000	0,619
420000	0,190	1102000	0,667
472000	0,238	1195000	0,714
589000	0,286	1240000	0,762
610000	0,333	1303000	0,810
662000	0,381	1342000	0,857
792000	0,429	1807000	0,905
840000	0,476	2063000	0,952

NB :

Il faut préciser qu'on a considéré trois types de relais :

- Relais n°1 du type électromécanique dont les données d'avarie sont exprimées en nombre d'opérations effectuées et sont traitées graphiquement, en utilisant le papier fonctionnel de Weibull, selon la variante d'Allan Plait.
- Relais n°2 du type électromécanique dont les données d'avarie sont exprimées en nombre d'heures de fonctionnement et sont traitées statistiquement, numériquement au niveau du dernier chapitre consacré au traitement computationnel à vérifier des instants de défaillance.

- Relais n°3 du type électronique (Téléston) dont les données d'avarie sont exprimées en nombre de cycles de fonctionnement.

Remarquons que l'adoption de trois sortes différentes d'unités de mesure par rapport aux trois exemples précédents montre clairement que la notion de temps de fonctionnement d'un équipement doit être entendue au sens large du terme.

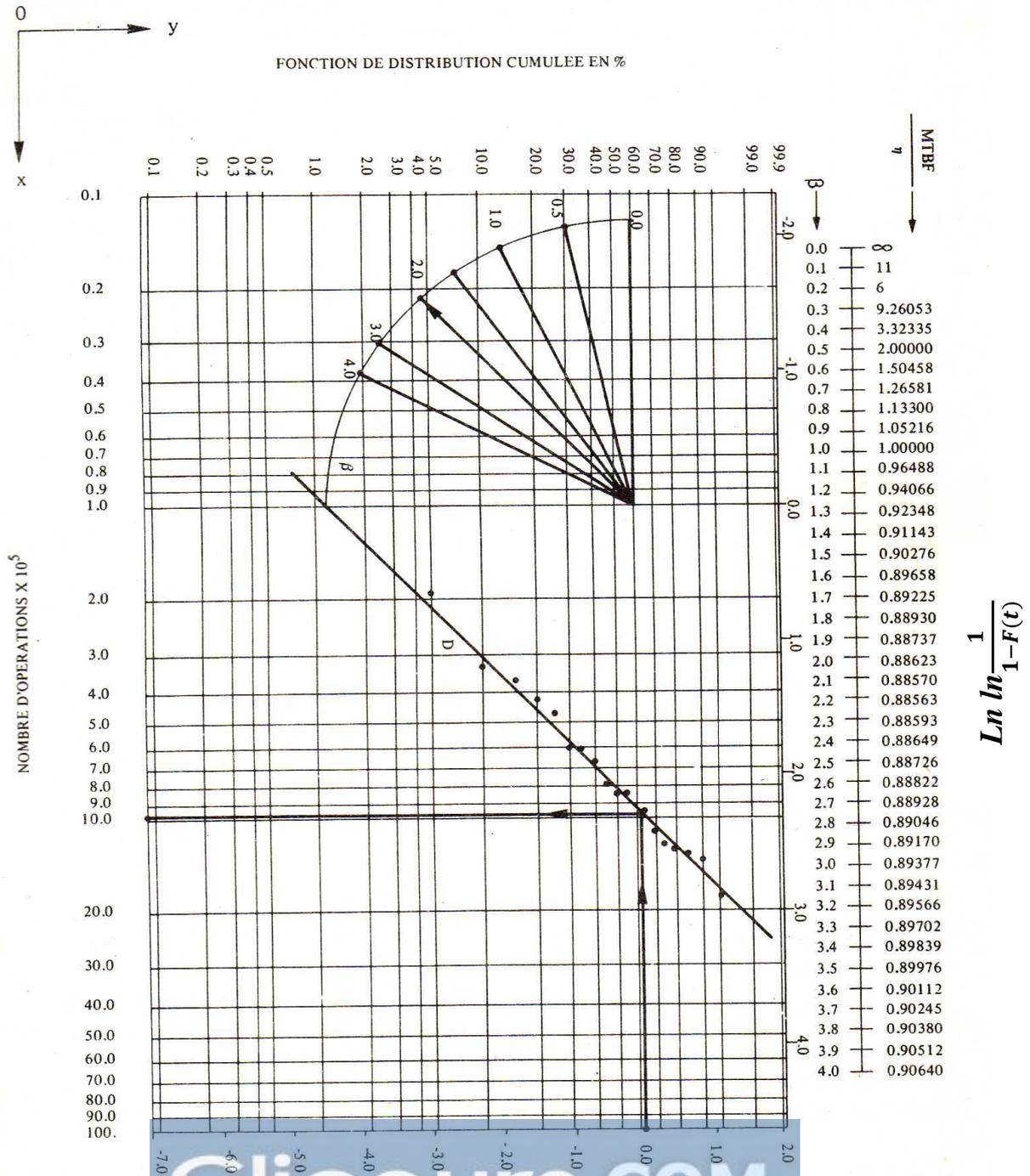


Figure 2.8 : Représentation sur graphique à échelle fonctionnelle de la distribution de Weibull (graphique d'Allan Plait) des données de fiabilité du dispositif : Relais 1.

2-6-1-1 Détermination du paramètre d'origine γ :

Après avoir représenté les points relatifs aux données de défaillance d'un échantillon composé de vingt relais¹ sur le graphique fonctionnel de Weibull, selon la variante d'Allan Plait (Figure 2.8), on remarque, clairement, qu'ils sont sensiblement rectilignes. Cela signifie que $\gamma = 0$ et que le modèle Weibull est entièrement valide.

2-6-1-2 Détermination du paramètre de forme β :

L'arc de cercle gradué sur la partie gauche du papier fonctionnel d'Allan Plait permet de d'estimer graphiquement le paramètre d'échelle β , en traçant le rayon parallèle à la droite expérimentale d'où $\beta = 2$.

2-6-1-3 Détermination du paramètre d'échelle η :

la valeur du paramètre d'échelle est lue, directement, sur le graphique fonctionnel, du type de Weibull ou d'Allan Plait. Elle est égale à l'abscisse, au niveau de l'axe horizontal du point de la droite empirique dont l'ordonnée est nulle. En suivant la procédure décrite plus haut on trouve $\eta = 950000$ opérations.

2-6-1-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F) :

Le papier fonctionnel du type d'Allan Plait est complété dans la partie supérieure par une échelle indépendante qui fournit la valeur du ratio : $M.T.B.F / \eta$.

Afin d'obtenir la valeur M.T.B.F, il suffit d'effectuer une multiplication de ce rapport par la valeur de η . Ainsi en lisant sur l'échelle supérieure la valeur du ratio $M.T.B.F / \eta$ correspondant à la grandeur paramétrique $\beta = 2$, on parvient à :

$$M.T.B.F / \eta = 0.88623. \quad (2.29)$$

d'où $M.T.B.F = 0.88623 * 950\,000$ ie $M.T.B.F = 840\,000$ opérations.

Quant à la probabilité de survie du relais¹ pour 10^6 opérations, elle est donnée par la formule :

$$R(t) = \exp(-(t/\eta)^\beta) \quad (2.30)$$

Finalement $R(10^6) = 0.313$. D'après, cette grandeur le niveau de la fiabilité du système relais¹ est faible.

Tableau 2.5 : Résultats de l'estimation graphique spécifique au dispositif : Relais 1.

Paramètre	Valeur de l'estimateur correspondant
γ	0
β	2
η	950 000 opérations
M.T.B.F	840 000 opérations
R(t)	0.313

2-6-2 Exemple d'application relatif au cas $\gamma < 0$:

- Type de dispositif suivi en fiabilité : Téléston
- Relevé historique des données de défaillance T_i en nombre de cycles de fonctionnement.
- Taille de l'échantillon $n=12$
- Estimateur de la fonction de répartition $F(t_i) = \frac{i}{n+1}$

Tableau 2.6 : Données de défaillance du système : Téléston.

I		II	
T_i	F (t_i)	T_i	F (t_i)
1	0.076	5	0.384
1.5	0.115	6	0.461
2	0.153	8	0.615
2.5	0.192	9	0.692
3	0.23	9.5	0.730
4	0.307	10	0.769

En reportant les points $[T_i ; F(t_i)] ; i=1,2,\dots,n$ sur le graphique fonctionnel du type Weibull, on remarque que l'on obtient une forme géométrique curvilinéaire dont la concavité est tournée vers le haut.

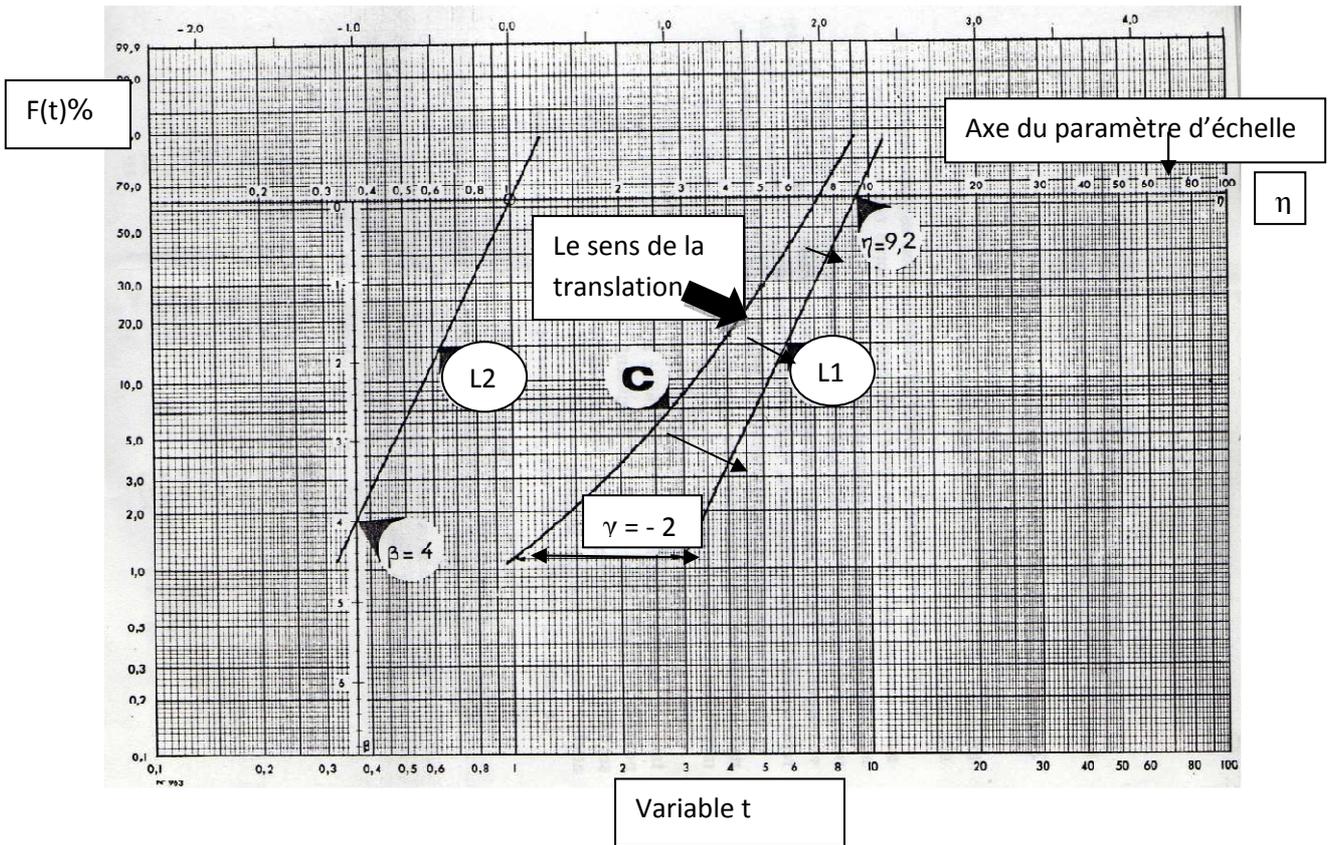


Figure 2.9: Détermination graphique ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard dans le cas où $\gamma < 0$.

2-6-2-1 Détermination du paramètre d'origine γ :

Dans le but d'obtenir une forme affine du diagramme de dispersion $N [T_i ; F(t_i)]$, il est requis d'effectuer une translation de chaque point de la série de $T_i ; i=1,2,\dots,n$. relative à la courbe C vers la droite, d'une grandeur constante, on voit que l'allure incurvée initiale se redresse pour se transformer en une forme linéarisée. La valeur pour la quelle on parvient à la droite (L1) est appelée le paramètre de repérage noté γ .

Après avoir effectué, un certain nombre de tentatives de translation adéquate, on est parvenu à la grandeur $\gamma = -2$ cycles. Cela veut dire que des la réception, une partie du lot des systèmes relais 1 était avariée.

2-6-2-2 Détermination du paramètre de forme β :

A présent pour déterminer β on commence par tracer la droite (L2) parallèle à (L1) et passant par le point $\eta = 1$. Ce dernier point appartient à l'axe horizontal intermédiaire. Ainsi déterminée, la droite (L2) coupe l'axe vertical relatif au paramètre d'échelle β et qui passe par le point d'abscisse $\exp(-1)$. Le point d'intersection de la droite (L1) avec l'axe vertical β , dont l'échelle est $-\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$ donne la valeur recherchée du paramètre de forme, soit $\beta = 4$.

2-6-2-3 Détermination du paramètre d'échelle η :

En ce qui concerne l'estimateur graphique du paramètre d'échelle η , sa valeur est obtenue au niveau de l'intersection de la droite (L1) avec l'axe horizontal intermédiaire. Dans ce cas, on parvient à $\eta = 9.2$ cycles.

2-6-2-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F) :

Sachant que la formule du M.T.B.F est donnée par l'équation :

$$\text{M.T.B.F} = \eta x + \gamma \quad (2.31)$$

Par référence au tableau de calcul du M.T.B.F se trouvant dans l'annexe 2, on trouve que la valeur de x correspondant à $\beta = 4$ est égale à 0.9064, ce qui nous amène après substitution à l'égalité :

$$\text{M.T.B.F} = 9.2 * 0.9064 - 2 = 6.338 \text{ cycles} \quad (2.32)$$

De même, on sait que la formule de la variance vaut :

$$\text{Var}(t) = \eta * y \quad (2.33)$$

Puisque la valeur de y correspondant à $\beta = 2$ donnée par le tableau de calcul du M.T.B.F se trouvant dans l'annexe 2 est égale à 0.254 alors :

$$\text{Var}(t) = 9.2 * 0.254 = 2.337 \text{ cycles} \quad (2.34)$$

Tableau 2.7 : Résultats de l'estimation graphique ponctuelle spécifique au dispositif : Téléston.

Paramètre	Valeur de l'estimateur correspondant
γ	-2
β	4
H	9.2 cycles
M.T.B.F	6.338 cycles
Var(t)	2.337 cycles

2-6-3 Exemple d'application relatif au cas $\gamma > 0$:

- a. Type de système suivi en fiabilité : Dispositif.
- b. Relevé historique des données de défaillance T_i en nombre d'heures de fonctionnement.
- c. Taille de l'échantillon $n= 10$.
- d. Estimateur de la fonction de répartition $F(t_i)=\frac{i}{n+1}$

Tableau 2.8 : Données de défaillance du dispositif : Dispositif. [6].

T_i	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
$F(t_i)$	0.091	0.181	0.272	0.363	0.454	0.545	0.636	0.727	0.818	0.909

En représentant le nuage de points $N[T_i, F(t_i)] ; i=1,2,\dots,n$ du tableau (2.8).sur le graphique fonctionnel du type Weibull standard, on observe une forme géométrique incurvée dont la concavité est tournée vers le bas .

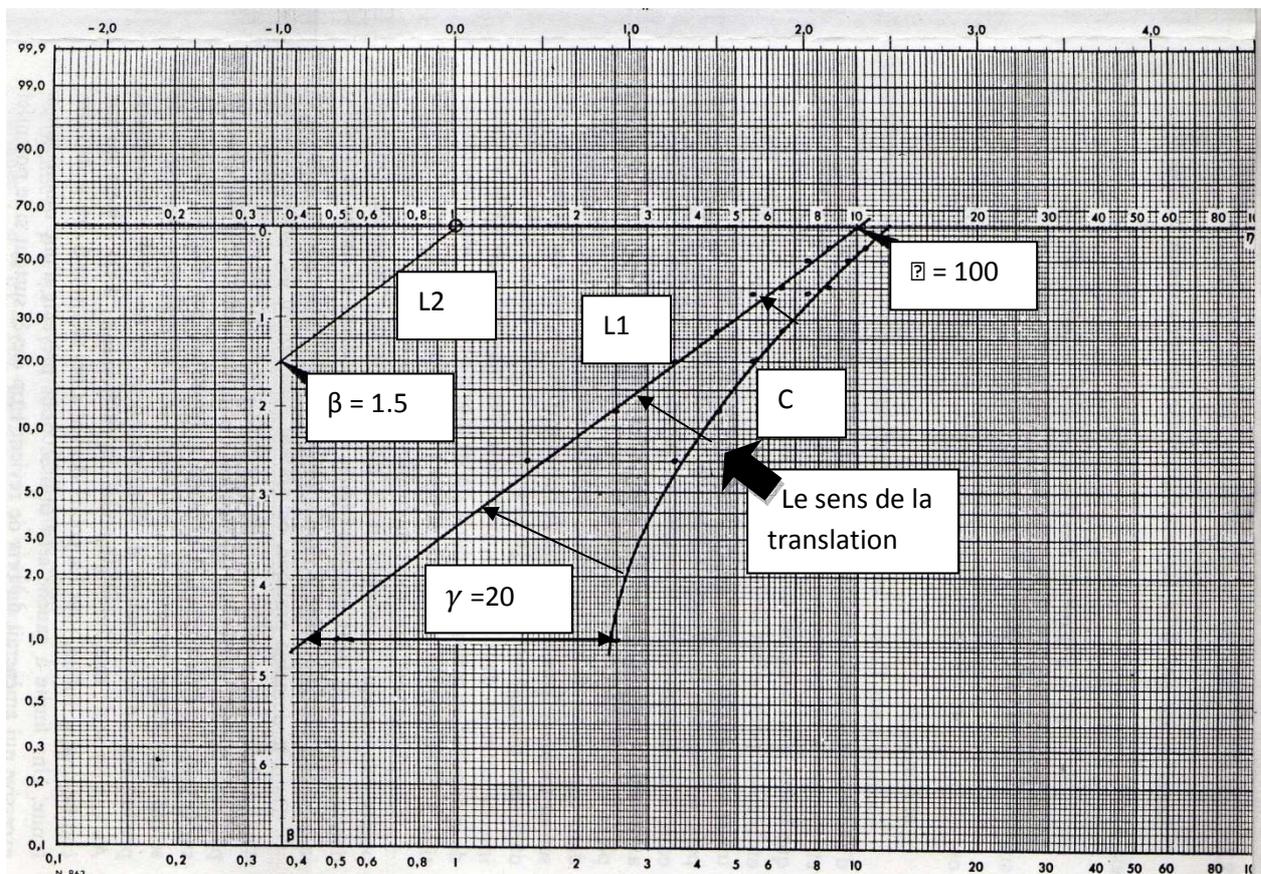


Figure 2.10: Détermination graphique ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard dans le cas où $\gamma > 0$.

2-6-3-1 Détermination du paramètre d'origine γ :

Afin de connaître la valeur du paramètre d'origine γ selon la méthode graphique, il faudrait soumettre la courbe C à un mouvement de translation vers la gauche, jusqu'à l'obtention d'une forme géométrique correspondant à une droite (L1).

Après un certain nombre d'essais de redressement de la courbe C d'une manière appropriée, la valeur du paramètre d'origine γ se fixe à 20 heures.

2-6-3-2 Détermination du paramètre de forme β :

En procédant de la même manière que dans le cas précédent, on constate que la droite (L2) coupe l'axe vertical du paramètre d'échelle, au point $\beta = 1.5$.

2-6-3-3 Détermination du paramètre d'échelle η :

Etant donné que le point d'intersection de la droite empirique (L1) avec l'axe horizontal intermédiaire coïncide avec la valeur 100, alors $\eta = 100$ heures.

2-6-3-4 Détermination du temps moyen de bon fonctionnement (M.T.B.F) :

Puisque $M.T.B.F = \frac{1}{\lambda} x + \gamma$ et sachant que la valeur de x correspondant à $\beta = 1.5$ vaut 0.9027, alors $M.T.B.F = 100 * 0.9027 + 20 = 110.27$ heures.

En outre, on sait que la variance de la variable aléatoire t est donnée par l'équation :

$$\text{Var}(t) = \eta * y \quad (2.35)$$

D'après le tableau relatif au calcul du M.T.B.F se trouvant en annexe 2, la valeur de la variable y associée à $\beta = 1.5$ vaut 0.613 alors : $\text{Var}(t) = 100 * 0.613 = 61.3$ heures.

Tableau 2.9 : Résultats de l'estimation graphique ponctuelle spécifique au dispositif : Dispositif.

Paramètre	Valeur de l'estimateur Correspondant
γ	20 heures
β	1.5
η	100 heures
M.T.B.F	110.27 heures
Var(t)	61.3 heures

2-6-4 Commentaire :

Puisque les estimateurs du paramètre d'échelle dans les trois exemples traités ont des valeurs strictement supérieures à l'unité alors les trois dispositifs considérés sont dans la phase de

vieillesse qui coïncide avec un taux de défaillance croissant, ce qui justifie la mise en œuvre d'une politique de maintenance préventive .

2-6-5 Critique de la méthode graphique d'estimation ponctuelle des paramètres du modèle Weibull standard :

Il est établi que la structure du papier fonctionnel de Weibull dans sa forme originale est basée sur une étude mathématique détaillée .Cela veut tout simplement dire, que toutes composantes à caractère géométrique du graphique de Weibull ont une explication mathématique précise. Malheureusement, la procédure appliquée pour transformer la forme curviligne du diagramme de dispersion $N[t_i , F (t_i)]$ dépend, intégralement, de l'habileté de l'opérateur maintenancier qui se trouve désormais dépourvu d'un critère du type numérique ou statistique lui permettant d'apprécier, exactement, le degré de linéarisation auquel le nuage de points initial, a été soumis.

Finalement, la forme affine obtenue après redressement du nuage de points considéré est admise sur la base d'un jugement visuel de l'allure rectiligne à laquelle on est parvenue, ce qui constitue un défaut majeur de l'estimation graphique du triplet paramétrique du modèle Weibull standard et spécialement la grandeur paramétrique de localisation γ .

Donc la question qui se pose, avec insistance, consiste à doter cette méthode graphique d'estimation ponctuelle d'un critère d'optimalité statistiquement ou numériquement, fondé capable d'indiquer le niveau maximum de l'intensité de la liaison linéaire entre les deux grandeurs variables, respectivement, $\ln(t_i - \gamma_j)$ et $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$. Cet important problème sera traité d'une manière détaillée, dans une étape ultérieure.

2-6-6 Limite du modèle Weibull standard :

On doit noter, qu'à l'exception de la période de jeunesse, le modèle Weibull standard n'est pas apte pour rendre compte de la fiabilité d'un logiciel quelconque car le comportement géométrique du taux de défaillance correspondant est distinct de celui observé pour les équipements du type matériel.

La différence la plus marquante est que la troisième phase de vie d'un logiciel se caractérise par un taux de défaillance non croissant car ce système immatériel est soumis à l'obsolescence et par conséquent toute politique de maintenance devient sans intérêt. Par contre la période de vie utile se distingue par des phases où le logiciel en question bénéficie de restauration.

A l'instar d'un équipement physique, la période de jeunesse d'un logiciel est également marquée par la pratique d'un déverminage, c'est-à-dire procéder à un test permettant de ramener le composant dans la période de maturité ou de vie utile.

D'une manière analogue, par rapport aux spécialistes développeurs de logiciels, le déverminage est axé sur la détection et l'élimination de toute sorte d'erreurs et de bugs dues à la défaillance au stade de la conception.

L'évolution générale du taux de défaillance d'un système logiciel pendant les trois périodes qui caractérisent sa durée de vie est représentée par la Figure (2.11).

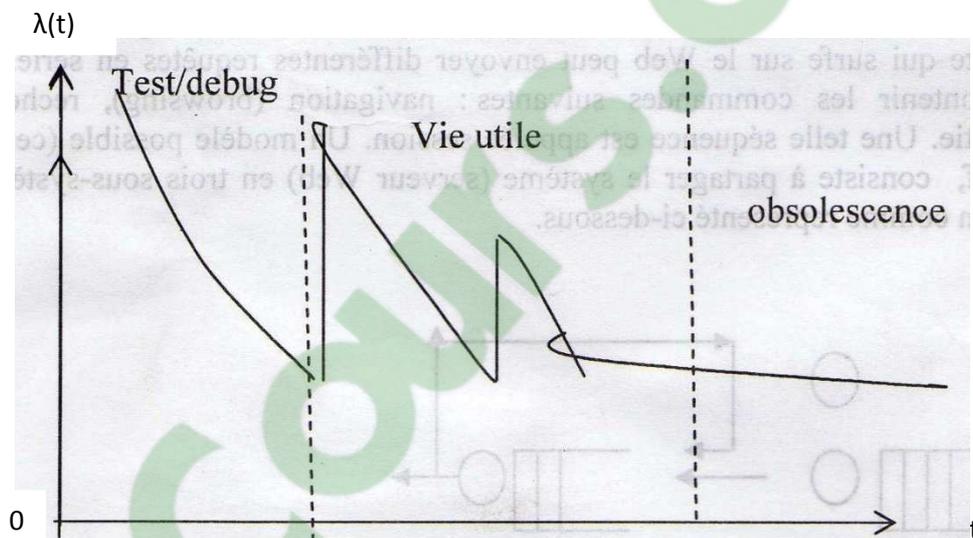


Figure 2.11 : Illustration graphique du comportement du taux de défaillance d'un logiciel pendant toute sa durée de vie.

Chapitre III

Fondement de la théorie de l'estimation

3-1 Position du problème d'estimation

La loi de distribution d'une variable aléatoire, un modèle de corrélation régression en tant qu'illustration de deux types de schémas stochastiques sont caractérisés par un certain nombre de paramètres numériques, dont on ignore les valeurs exactes; on doit juger leur valeur par référence aux résultats d'observation.

Ainsi, si on observe les valeurs aléatoires d'un système aléatoire bi-varié, les résultats obtenus ou plus, précisément, les données d'échantillonnage, peuvent être représentés sous la forme :

$$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$$

Une fonction quelconque de ces résultats d'observation soit :

$$Q^{(n)} = Q\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\} \quad (3.1)$$

est dénommée statistique :

Les statistiques sont systématiquement employées pour confectionner des estimateurs des paramètres inconnus.

En guise d'exemple une probabilité relative à un événement quelconque est estimée par la fréquence relative des cas favorables sur le nombre total des cas possibles.

L'inférence statistique est une technique utilisée pour obtenir à partir d'un échantillon tiré d'une population mère des estimateurs fiables de certains paramètres de cette population.

Comme l'échantillon ne fournit qu'une information partielle, ils évaluent que de tels estimateurs, soient entachés, désormais, d'une certaine marge d'erreurs.

Il est possible dans une certaine mesure, de contrôler cette marge d'erreur.

Ces estimateurs peuvent s'exprimer soit d'une manière ponctuelle ou encore mieux par intervalle de confiance.

3-2 Estimation ponctuelle

3-2-1 Définition :

Soit X une variable aléatoire du modèle $M(X; \theta) = 0$, où θ est un paramètre certain mais de valeur inconnue. Nous voulons approcher ce paramètre inconnu θ .

Pour réaliser cela, on tire un échantillon de taille n , c'est-à-dire (x_1, x_2, \dots, x_n) de X .

Il y a lieu, alors, de déterminer une statistique permettant d'estimer le mieux possible la valeur inconnue du paramètre.

Le procédé calculatoire s'appelle désormais estimation statistique ou plus précisément estimateur pour bien en indiquer la fonction.

Les valeurs concrètes des estimateurs calculés sur des échantillons distincts seront dispersées aléatoirement autour de la vraie valeur du paramètre recherché.

Un estimateur est donc une variable aléatoire réelle que nous pouvons noter $\hat{\theta}$.

La question qui se pose maintenant est de définir les propriétés que doivent satisfaire ces estimateurs pour être sûrs dans sens donné.

Précisons que lorsqu'un paramètre θ d'une population est estimé par un seul nombre, déduit des résultats d'observation de l'échantillon, ce nombre est appelé un estimateur ponctuel du paramètre inconnu.

3-2-1-1 Estimateurs sans biais :

Un estimateur $\hat{\theta}$ non biaisé est défini tel que :

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (3.2)$$

C'est-à-dire quel que soit le nombre d'observations, son espérance mathématique $E(\hat{\theta})$ est identique à la valeur théorique du paramètre inconnu de la population.

L'écart $\Delta = E(\hat{\theta}) - \theta$ donne une mesure du biais de l'estimateur $\hat{\theta}$ au cas où celui-ci est incorrect.

3-2-1-2 Estimateur asymptotiquement sans biais ou efficace :

C'est un estimateur $\hat{\theta}$ tel que le biais s'annule quand la taille de l'échantillon n augmente indéfiniment.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta \quad (3.3)$$

Il va de soit que tout estimateur sans biais l'est nécessairement asymptotiquement.

3-2-1-3 Estimateur efficace :

Pour expliciter la notion d'efficacité d'un estimateur scalaire, considérons un échantillon x_1, x_2, \dots, x_n extrait d'une population parente normale :

$$f(x, m, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.4)$$

de variance $\sigma_x^2 = \text{var}(X)$ connue et dont la moyenne m est supposée inconnue. On se fixe comme objectif la détermination d'un estimateur du paramètre inconnue sur la base des réalisations x_1, x_2, \dots, x_n .

Deux estimateurs concurrents sont proposés notamment la moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.5)$$

et de la demi somme des valeurs extrêmes de l'échantillon :

$$u = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \quad (3.6)$$

On montre que ces deux estimateurs sont à la fois consistants et sans biais. Ce qui rend problématique le choix entre ces deux estimateurs. Il semble logique d'adopter le critère selon lequel l'estimateur le plus sûr est celui dont la mesure de la dispersion aléatoire par rapport à la valeur théorique du paramètre inconnu θ lorsqu'on passe d'un échantillon de taille n à un autre est la plus petite. Mais afin de calculer l'intensité de la fluctuation d'une variable, aléatoire on emploie habituellement la variance. Or on démontre que la dispersion de l'estimateur initial de la moyenne m est donnée :

$$\text{var}(m) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (3.7)$$

qui est manifestement inférieure à celle du second estimateur soit :

$$\text{var}(\hat{u}) = \frac{\pi^2 \sigma^2}{24 \ln(n)} \quad (3.8)$$

Il est donc plausible d'adopter le premier estimateur car il possède le minimum de fluctuations autour de la véritable valeur du paramètre à estimer, c'est-à-dire :

$$\text{var}(\hat{m}) < \text{var}(\hat{u}) \text{ et } E(\hat{m}) = E(\hat{u}) = m \quad (3.9)$$

Finalement, un estimateur efficace se distingue par un minimum de variance comparativement aux autres.

Notons que pour être en mesure d'établir qu'un estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais, consistant et efficace il est impératif de connaître la loi de la distribution parente. Dans ce contexte, si nous supposons que la variable aléatoire étudiée X ne suit pas une loi de distribution normale mais une loi de densité uniforme, on aurait abouti à un résultat opposé. Cela est dû au fait que la variance dans le cadre de cette hypothèse du premier estimateur de la moyenne soit :

$$\text{Var}(m) = \frac{(X_{\max} - X_{\min})^2}{12n} \quad (3.10)$$

est bien supérieure à celle du deuxième donnée par :

$$\text{Var}(u) = \frac{(X_{\max} - X_{\min})^2}{2(n-1)(n+2)} \quad (3.11)$$

3-2-1-4 Estimateur convergent :

Un estimateur $\hat{\theta}$ est dit convergent du paramètre θ s'il converge en probabilité vers θ lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Deux conditions sont suffisantes pour qu'une suite d'estimateurs $\hat{\theta}$ converge en probabilité vers la vraie valeur du paramètre θ :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) \rightarrow \theta$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}) \rightarrow 0$.

Par conséquent, l'estimateur convergent $\hat{\theta}$ est asymptotiquement sans biais.

Si de plus l'estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais alors $\hat{\theta}$ est dit absolument correct.

3-3 Nécessité de l'estimateur ensembliste ou par intervalle de confiance

Il est établi qu'un estimateur ponctuel ne donne aucune information sur le degré de précision de l'estimation effectuée. Cela s'explique par le fait que l'erreur possible dans l'estimateur engendrée par les fluctuations d'échantillonnage n'est pas connue.

Afin de savoir le degré de confiance qu'on peut accorder à un estimateur ponctuel unique, il est nécessaire de lui associer un intervalle contenant éventuellement la vraie valeur de paramètre inconnu avec une certaine fiabilité.

3-3-1 Définition :

Partant d'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre inconnu θ , l'estimation par intervalle de confiance consiste à déterminer un intervalle dans lequel il est probable que la valeur du paramètre s'y trouve.

Deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure constituent les extrémités de l'intervalle de confiance. A ces limites est associée une certaine probabilité $(1 - \alpha)$ de contenir la vraie valeur du paramètre inconnu. Symboliquement cela s'écrit de la manière suivante :

$$P[L_{inf} \leq \theta \leq L_{sup}] = 1 - \alpha \quad (3.12)$$

où α est le seuil de risque attribué à l'intervalle de confiance de ne pas englober la vraie valeur du paramètre θ .

A remarquer que la construction d'un intervalle de confiance nécessite la connaissance préalable de la distribution d'échantillonnage de l'estimateur correspondant.

3-3-2 Exemple d'application :

Une étude de fiabilité portant sur un échantillon de 25 dispositifs mécaniques a montré que la série des durées de fonctionnement entre défaillances consécutives, dans des conditions de contrainte déterminées, est distribuée suivant une loi gaussienne de moyenne $\bar{t} = 240$ h et d'écart-type $\delta_t = 55,2$ h.

On demande d'estimer par intervalle de confiance le temps moyen de bon fonctionnement (MTBF) au niveau de confiance de 95%.

Le problème posé consiste donc à évaluer à partir de la moyenne des instants de survenances de pannes $t_i; i = 1, 2, \dots, n$ soit $\bar{t} = \text{MTBF}$, un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la vraie valeur de la moyenne m s'y trouve.

Cet intervalle est obtenu en déterminant deux limites auxquelles est attribuée une certaine probabilité de contenir la vraie valeur de m .

Par définition cet intervalle est défini par l'équation suivante :

$$P(\bar{T} - \lambda \leq m \leq \bar{T} + \lambda) = 1 - \alpha \quad (3.13)$$

qui s'interprète comme étant la probabilité que $m \in [\bar{T} - \lambda; \bar{T} + \lambda]$ vaut $1 - \alpha$ où α est le seuil de risque fixé à priori.

Après avoir prélevé l'échantillon et trouvé l'estimateur ponctuel \bar{t} , les extrémités de l'intervalle de confiance prendront la forme.

$$\bar{t} - \lambda \leq m \leq \bar{t} + \lambda \quad (3.14)$$

Remarquons que \bar{t} est une réalisation de \bar{T} et que la constante λ calculée à l'aide de l'écart-type de la distribution d'échantillonnage \bar{T} et au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ choisi au préalable.

On montre que si on prélève un échantillon aléatoire de taille n d'une population mère normale de variance connue alors la distribution de \bar{T} suit une loi normale de moyenne $E(\bar{T})$ de variance

$$\text{Var}(\bar{T}) = \frac{\delta_t^2}{n} \quad (3.15)$$

D'après le théorème central limite, au cas où la distribution \bar{T} est inconnue ou bien si la variance de la population est inconnue, un échantillon de taille $n \geq 30$, nous permet de considérer que \bar{T} suit approximativement une loi de Gauss.

Par voie de conséquence si on adopte une variable $u = \frac{\bar{T} - m}{\delta_t / \sqrt{n}}$ alors la grandeur variable u suit

une loi normale centrée réduite.

Ainsi pour déduire un intervalle aléatoire auquel est associée une probabilité $(1 - \alpha)$ de contenir la vraie valeur de m ; on détermine λ de façon à avoir :

$$P(\bar{T} - \lambda \leq m \leq \bar{T} + \lambda) = 1 - \alpha \quad (3.16)$$

En utilisant la variable centrée réduite u l'équation précédente devient :

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{T} - m}{\delta_t / \sqrt{n}} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.17)$$

Ceci s'explique graphiquement comme suit :

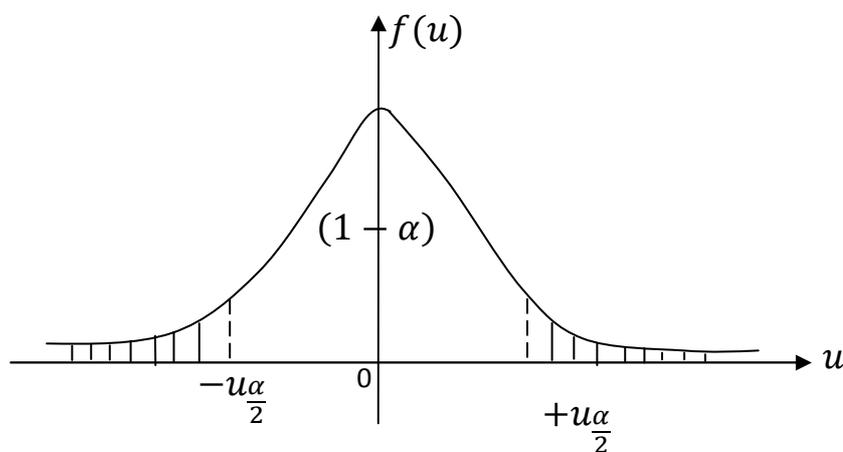


Figure 3.1 : Test bilatéral d'admission de la valeur du paramètre de la moyenne m avec un seuil de risque : $\alpha / 2$.

En multipliant les deux extrémités de la double inéquation par δ_t / \sqrt{n} on obtient :

$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \leq \bar{T} - m \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.18)$$

La soustraction du terme \bar{T} de chaque membre donne :

$$P\left(-\bar{T} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{T} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.19)$$

Le changement de signe des différents termes de cette équation implique, nécessairement, le changement du sens des inégalités d'où

$$P\left(\bar{T} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \geq m \geq \bar{T} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.20)$$

autrement dit : $P\left(\bar{T} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{T} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.21)$

qui correspond à la forme : $P(\bar{T} - \lambda \leq m \leq \bar{T} + \lambda) = 1 - \alpha \quad (3.22)$

ce qui entraîne que :

$$\lambda = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \quad (3.23)$$

Par conséquent l'intervalle de confiance ayant un niveau de confiance $(1 - \alpha)$ d'encadrer la vraie valeur de m s'écrit :

$$\bar{t} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{t} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta_t}{\sqrt{n}} \quad (3.24)$$

avec : $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0,025} = 1,96$ (Annexe Tableau 2) de la loi normale centrée réduite)

En substituant chaque terme de cette inégalité par sa valeur on obtient :

i- Limite inférieure :

$$L_{inf} = 240 - \frac{(1,96)(55,2)}{\sqrt{25}} = 240 - 21,6384 = 218,3616 \simeq 218 \text{ h} \quad (3.25)$$

ii- Limite supérieure :

$$L_{sup} = 240 + \frac{(1,96)(55,2)}{\sqrt{25}} = 240 + 21,6384 = 261,3616 \simeq 262 \text{ h} \quad (3.26)$$

On associe à cet intervalle un niveau de confiance de $(1 - \alpha) = 95\%$ de contenir la vraie valeur de la moyenne m du temps de bon fonctionnement de ce type de dispositif mécanique avec une probabilité de 95%.

On pense que la grandeur m se situe dans une position quelconque de cet intervalle :

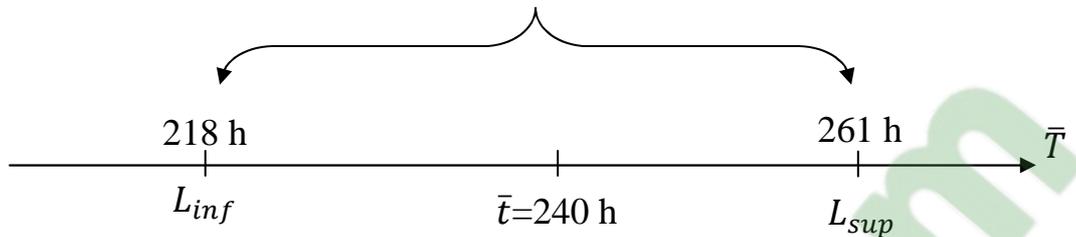


Figure 3.2 : Positionnement graphique des deux limites respectivement inférieure et supérieure de l'intervalle de confiance pour la moyenne \bar{t} .

3-4 Validité de l'hypothèse d'un modèle de défaillance

Le traitement des données de fiabilité issues d'un ensemble d'essais en laboratoire ou provenant des résultats d'exploitation nécessite l'émission au préalable d'une hypothèse à propos du modèle de défaillance à adopter éventuellement. Dans quelle mesure l'hypothèse émise est-elle valable ?

En fait, on ne peut être formel que par rapport aux hypothèses rejetées. Cela est d'autant plus vrai que le nombre d'observations est faible. Dans ces conditions, la zone de confiance est très large et le rejet de l'hypothèse avancée est très rare. Autrement dit si le test n'est pas significatif, alors d'autres hypothèses meilleures que celle proposée peuvent exister.

Afin de réduire le risque d'affirmer des choses erronées on devrait formuler un certain nombre d'hypothèses et rejeter celles pour lesquelles le test n'est pas significatif.

La statistique mathématique nous fourrent deux types de tests :

- I) Les tests paramétriques qui ne sont valables que pour un modèle de répartition précis.
- II) Les tests non paramétriques qui sont applicables pour tous les modèles de répartition.

3-4-1 Test non paramétrique de Kolmogorov –Smirnov :

Soit $Q(t)$ la fonction de répartition empirique correspondant à un ordre croissant de n observations classées selon un ordre croissant et soit $F(t)$ la fonction de répartition théorique.

On démontre que $D_n = \text{Max}|Q(t_i) - F(t_i)|$ suit une loi de probabilité ne dépendant que de la taille de l'échantillon n et cela quelque soit la fonction de répartition théorique $F(t)$.

On peut donc écrire :

$$Prob[Max|Q(t_i) - F(t_i)| < D_{n\alpha}] = 1 - \alpha \tag{3.27}$$

La valeur $D_{n\alpha}$ est donnée par la Table 3 de Kolmogorov- Smirnov qui se trouve en annexe.

De cette façon on a $D_n > D_{n,\alpha}$ (3.28)

Ce qui nous ramène à refuser l'hypothèse du modèle théorique.

3-4-1-1 Version graphique du test de Kolmogorov- Smirnov :

Graphiquement le test de Kolmogorov –Smirnov consiste à tracer une zone d'acceptation autour de $F(t)$ qui doit contenir les valeurs réelles de $Q(t)$ pour que le modèle théorique soit admis.

La variation graphique du test de Kolmogorov –Smirnov est fondée sur la double inégalité :

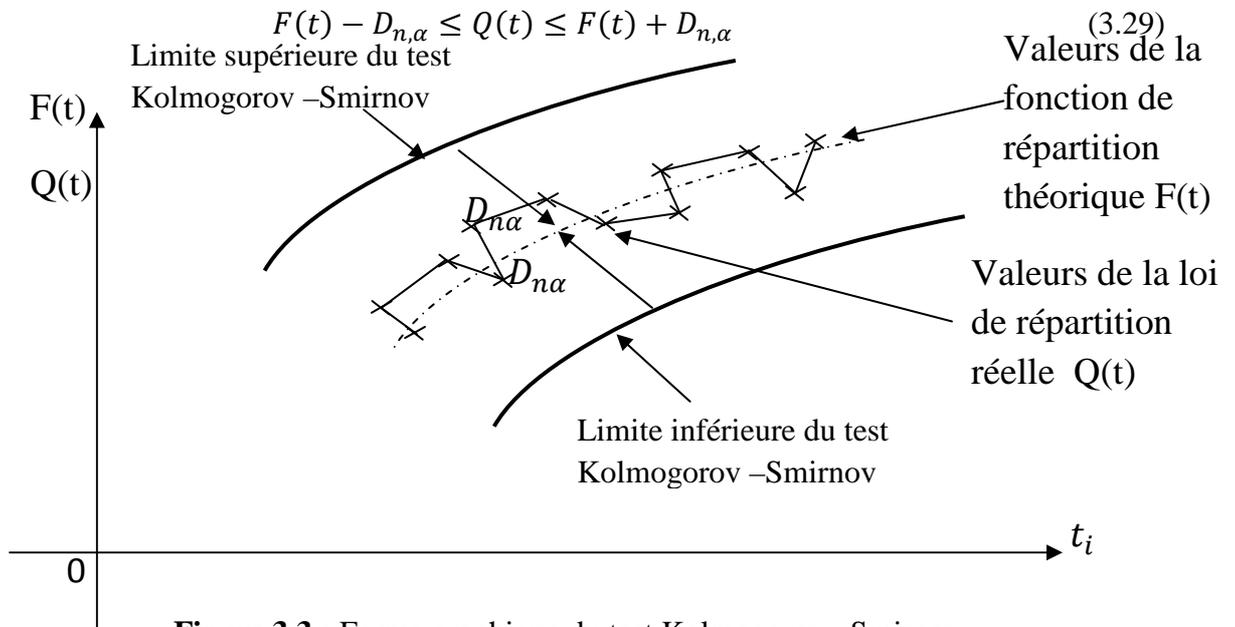


Figure 3.3 : Forme graphique du test Kolmogorov –Smirnov.

NB :

Les divers points correspondant aux valeurs de la loi de répartition réelle $Q(t)$ sont reliés par des segments de droite de façon à obtenir un diagramme en escalier.

3-4-1-2 Test binomial simplifié :

Le champ d'application du test binomial simplifié s'étend à toutes les lois de répartition car c'est un test non paramétrique. Étant donné que la version originale du test binomial est basée sur une procédure longue, on préfère utiliser une variante approchée qui présente l'avantage d'aboutir à des limites plus resserrées que celles données par le test de Kolmogorov- Smirnov. En effet en faisant usage, à la place du terme D_n du test de Kolmogorov – Smirnov, la valeur de

la densité de probabilité de la loi binomiale correspondant à la valeur référentielle de la fonction de répartition, c'est-à-dire $F(t)=0,5$ pour une taille n quelconque de l'échantillon soit $\beta(n, 0,5)$ on obtient un test plus sensible que le précédent.

Le Tableau 4 se trouvant en annexe présente en fonction de n et pour un seuil de signification donné α les valeurs de $\beta(n, 0,5, \alpha)$ qui s'interprètent dans notre cas comme l'écart théorique entre la loi de répartition proposée $F(t)$ et la loi de répartition réelle $Q(t)$.

D'une manière similaire au test de Kolmogorov – Smirnov, on montre que l'écart maximal.

$$\beta(n) = \text{Max}|Q(t) - F(t)| \quad (3.30)$$

suit une loi ne dépendant que du seuil de risque et du nombre n d'observations.

Ainsi on peut écrire, avec niveau de confiance $(1 - \alpha)\%$ que :

$$\text{Prob}[\text{Max}|Q(t) - F(t)|] < \beta(n, 0,5, \alpha) = 1 - \alpha \quad (3.31)$$

Il s'en suit que le critère de décision est donc le suivant.

Si on a $\beta(n) < \beta(n, 0,5, \alpha)$ au seuil de risque α alors rien ne s'oppose à admettre le modèle théorique $F(t)$ proposé :

3-4-1-2-1 Variante graphique du test binomial simplifié : A l'instar du test de Kolmogorov – Smirnov le test binomial simplifié a une interprétation graphique.

Elle consiste également à tracer une zone dite d'acceptation du modèle théorique $F(t)$ en se basant sur la double inégalité.

$$F(t) - \beta(n, 0,5, \alpha) < \varphi(t) < F(t) + \beta(n, 0,5, \alpha) \quad (3.32)$$

qui indique que les deux limites respectivement inférieure $F_{inf}(t)$ et supérieure $F_{sup}(t)$ de l'intervalle de confiance avec un seuil de signification α et qui est sensé contenir l'ensemble des points de la fonction de répartition réelle $Q(t)$ afin que le modèle théorique $F(t)$ soit accepté.

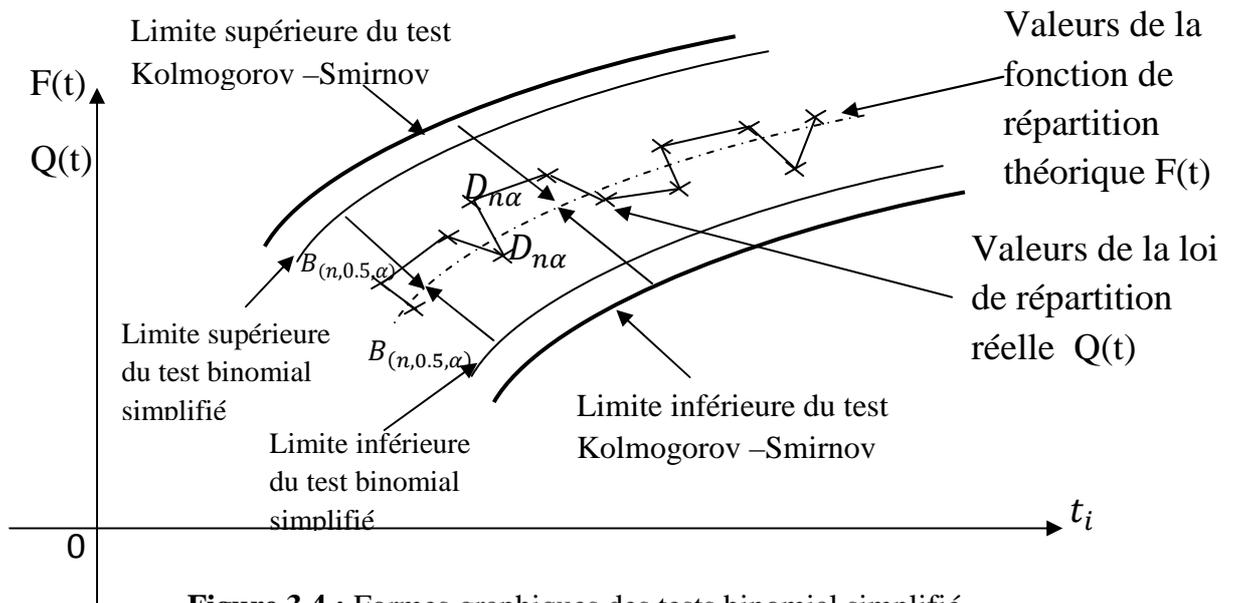


Figure 3.4 : Formes graphiques des tests binomial simplifié et Kolmogorov –Smirnov.

On a préféré représenter, simultanément, dans la même Figure 3.4 les deux formes graphiques, respectivement, les limites extrêmes du test binomial simplifié et de Kolmogorov – Smirnov pour montrer, visuellement, que le premier test est plus sensible que le second.

3-5 Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance

Comparativement à la méthode d'estimation des moindres carrés et à celles des moments, la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance conduit à des estimateurs plus sûrs. En particulier elle aboutit, certes, à des estimateurs comportant un certain biais, mais systématiquement consistents surtout si la taille de l'échantillon est grande. De plus si on impose des conditions de régularité à la fonction de densité de probabilité $f(x, \theta)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance θ_{MV} sont convergents, asymptotiquement sans biais, asymptotiquement normaux et asymptotiquement efficaces. Cependant si la taille de l'échantillon étudié est réduite les estimateurs donnés par la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance perdent partiellement leurs bonnes propriétés initiales. Dans ces conditions d'autres méthodes d'estimation, notamment, la méthode des moments, la méthode des moindres carrés peuvent être employées.

De plus, la mise en œuvre de la méthode du maximum de vraisemblance nécessite la connaissance exacte de la densité de probabilité ou de la loi de probabilité objet d'investigation. Ce qui est souvent impossible à réaliser. Afin de contourner cette difficulté on se contente d'estimer la densité de probabilité $f(x, \theta)$ ou la loi de probabilité $P(x, \theta)$ de sorte qu'elle ne s'écarte pas trop des modèles réels respectifs dans le but de réduire l'influence négative sur les bonnes propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance. Au cas où on observe une démarcation entre le modèle aléatoire réel et le modèle aléatoire estimé on obtient des estimateurs possédant des propriétés de moindre qualité mais considérés comme stables.

Sur un autre plan, lorsque le nombre k des paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ inconnus est grand, les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance risquent de perdre leur propriété de convergence, ce qui peut être contourné par l'augmentation significative de la taille n de l'échantillon.

Finalement, la méthode du maximum de vraisemblance est plus désirable lors de la construction des estimateurs du point de vue du degré de confiance qu'on doit leur accorder. En pratique, il faut reconnaître que cette méthode nous conduit à résoudre des systèmes d'équations très complexes.

3-5-1 Principe de la méthode du maximum de vraisemblance :

Selon la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, tout estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ du paramètre inconnu θ compte tenu des observations x_1, x_2, \dots, x_n d'une variable aléatoire ξ (suivant une loi de probabilité de densité $f_\xi(x, \theta)$ ou de probabilité $P(\xi = x)$ se définit à partir de la condition.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_{MV}) = \text{Max } L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \quad (3.33)$$

Où L est la fonction de vraisemblance définie comme étant la densité conjointe des résultats des observations indépendantes de la variable étudiée ξ c'est-à-dire du vecteur (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Formellement on a :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_{MV}) = f(x_1, \theta); f(x_2, \theta); \dots; f(x_n, \theta). \quad (3.34)$$

Les valeurs de la fonction de vraisemblance $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$ sont directement proportionnelles à la probabilité d'obtenir le système de résultats d'observations (x_1, x_2, \dots, x_n) . Il est donc logique de choisir en qualité d'estimateur du paramètre inconnu θ la valeur $\hat{\theta}_{MV}$ qui rend cette fonction de vraisemblance $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_{MV})$ maximale pour les valeurs d'échantillonnage (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Dans le cas où les conditions de régularité sont satisfaites, l'estimateur du maximum de vraisemblance est la solution de l'équation.

$$\frac{d(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}_{MV})}{d\theta} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Si la fonction de vraisemblance contient k paramètres, c'est-à-dire si :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k). \quad (3.36)$$

alors les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ doivent satisfaire les équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_1} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial L(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_2} &= \mathbf{0} \\ &\vdots \\ \frac{\partial L(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Au cas où la fonction $f(x, \theta)$ satisfait certaines conditions de régularité et si l'optimum est atteint en un point intérieur du domaine des valeurs possibles de θ , alors les dérivées partielles de la fonction $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_k)$ doivent s'annuler au point $\hat{\theta}_{MV}$ et par suite, celles du logarithme de la fonction de vraisemblance.

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_k) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (3.38)$$

et cela en raison de la monotonie de la relation liant

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_k) \text{ à } \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_k). \quad (3.39)$$

A noter que cette dernière fonction est évidemment plus commode dans la conduite des calculs.

3-5-1-1 Illustration : Cas d'une distribution continue :

Considérons une variable aléatoire x de densité de probabilité normale soit :

$$Q(x, m, \delta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} \quad (3.40)$$

De moyenne $E(x) = m$ et de variance

$$\text{Var}(x) = \delta^2 \quad (3.41)$$

On demande de calculer les estimateurs ponctuels du maximum de vraisemblance correspondant à m et à δ^2 .

Supposons que l'on ait l'échantillon x_1, x_2, \dots, x_n extrait d'une population parente normale à une dimension dont les deux paramètres m et δ^2 sont inconnus.

On sait que la fonction de vraisemblance dans ce cas est de la forme :

$$\begin{aligned} L(X, \theta) = L(x_1, \dots, x_n; m, \delta^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x_1-m)^2}{2\delta^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x_2-m)^2}{2\delta^2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(x_n-m)^2}{2\delta^2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\delta^2}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ce qui peut s'écrire autrement :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; m, \delta^2) = (2\pi\delta^2)^{-n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\delta^2}} \quad (3.43)$$

Le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance donne :

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; m, \delta^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \delta^2 - \frac{1}{2\delta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad (3.44)$$

Dérivons $\ln L(x_i, m, \delta^2)$ par rapport à m et δ^2 et annulant les dérivées partielles obtenues, on parvient au système de deux équations.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(x, x, \dots, x; m; \delta^2)}{\partial m} = \frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^n (x - m) = 0 \\ \frac{\partial L(x, x, \dots, x; m; \delta^2)}{\partial \delta^2} = \frac{\eta}{2\delta^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x - m)}{2(\delta^2)^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Déterminons la solution du système (3.45).

La première équation :

$$\frac{1}{\delta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m) = 0 \quad \text{implique que} \quad \sum_{i=1}^n x_i - n m = 0 \quad (3.46)$$

d'où l'estimateur ponctuel du maximum de vraisemblance de la moyenne m soit :

$$m_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.47)$$

La deuxième équation implique que :

$$\frac{-n}{2\delta^2} + \frac{1}{2\delta^4} \sum_{i=1}^n (x - m)^2 = \frac{-n\delta^2 + \sum_{i=1}^n (x - m)^2}{2\delta^4} = 0 \quad (3.48)$$

$$\text{Ce qui donne } -n\delta^2 + \sum_{i=1}^n (x - m)^2 = 0 \quad (3.49)$$

d'où l'estimateur ponctuel du maximum de vraisemblance de la variance δ^2 soit :

$$\delta_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad (3.50)$$

3-5-2 Application de la méthode du maximum de vraisemblance au modèle Weibull standard :

Partant d'une série d'observations (t_1, t_2, \dots, t_n) d'une variable aléatoire T relative au temps de défaillance d'un certain équipement et issue de la densité de probabilité du modèle Weibull.

On suppose que les équipements sont observés dans leur contexte réel d'exploitation et que le caractère différentiel des conditions de l'environnement soit négligeable.

Soit $f(t, \theta)$ la densité de probabilité du modèle Weibull.

$$f(t, \theta) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left[\frac{t-\gamma}{\eta} \right]^{\beta-1} \exp^{-\left[\frac{t-\gamma}{\eta} \right]} & \text{si } \gamma < t < +\infty \\ 0 & \text{si } -\infty < t < \gamma \end{cases} \quad (3.51)$$

Les paramètres γ , η , β sont les composantes du vecteur inconnu θ .

$$\text{Puisque } f(t, \theta) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \frac{1}{\eta^{\beta-1}} (t-\gamma)^{\beta-1} e^{\frac{-1}{\eta}(t-\gamma)} = \frac{\beta}{\eta^\beta} (t-\gamma)^{\beta-1} e^{\frac{-1}{\eta}(t-\gamma)} \quad (3.52)$$

alors en posant $\lambda = \frac{-1}{\eta}$

on peut écrire :

$$f(t, \theta) = \lambda \beta (t-\gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad (3.53)$$

La série temporelle de survenance des défaillances (t_1, t_2, \dots, t_n) est évidemment assimilable à des événements aléatoires indépendants et donc la fonction de vraisemblance s'établit comme suit :

$$L(t_i, \gamma, \beta, \eta) = \lambda \beta (t_1 - \gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda(t_1 - \gamma)} \cdot \lambda \beta (t_2 - \gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda(t_2 - \gamma)} \dots \lambda \beta (t_n - \gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda(t_n - \gamma)} \quad (3.54)$$

Introduisons les deux opérateurs, respectivement, de produit et de sommation :

$$L(t_i, \gamma, \beta, \eta) = \prod_{i=1}^n \lambda \beta (t_i - \gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)} \quad (3.55)$$

L'usage de l'opérateur logarithmique népérien conduit certes à une équation transcendante distincte de la précédente mais n'affecte pas la substance du problème d'optimisation en suspens.

$$\ln L(t_i, \gamma, \beta, \eta) = n \ln \lambda \beta + (\beta - 1) \ln \prod_{i=1}^n (t_i - \gamma) - \lambda \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma) \quad (3.56)$$

ou encore

$$\ln L(t_i, \gamma, \beta, \eta) = n \ln \lambda + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma) - \lambda \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma) \quad (3.57)$$

La question qui se pose, maintenant, consiste à déterminer des estimateurs pour les grandeurs paramétriques γ, β, η telle que la fonction de vraisemblance dans sa double version originale initiale ou bien logarithmiquement transformée atteigne son maximum absolu, tenant compte des contraintes imposées au triplet paramétrique.

Nous avons donc deux programmes mathématiques non linéaires, logiquement équivalents :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \prod_{i=1}^{\eta} \lambda \beta (t_i - \gamma)^{\beta-1} e^{-\lambda(t_i - \gamma)\beta} \\ \text{Sous les contraintes actives} \\ \beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow P$$

$$P = \text{Max} \left[n \ln \lambda + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma) - \lambda \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^{\beta} \right] \quad (3.58)$$

Sous les contraintes actives

$$\beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma$$

ou bien en faisant apparaître explicitement le paramètre d'échelle η on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max } \prod_{i=1}^{\eta} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i - \gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t_i - \gamma}{\eta}\right)\beta} \\ \text{Assujetti aux contraintes actives} \\ \beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma \end{array} \right\} \Leftrightarrow P$$

$$P = \text{Max} \left[n \ln \frac{1}{\eta^{\beta}} + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma) - \frac{1}{\eta^{\beta}} \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^{\beta} \right] \quad (3.59)$$

Sous les contraintes actives

$$\beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma$$

D'après la structure analytique de la fonction objectif $\text{Max } \ln L(t, \theta)$ les conditions de régularité sont satisfaites pour autant que les contraintes d'inégalité stricte imposées soient respectées.

Entamons, à présent, la recherche de l'ensemble des points candidats en annulant le gradient de $\ln L(t, \theta)$ soit :

$$\Delta L(t, \theta) = 0 \quad (3.60)$$

En détaillant les calculs on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ln L(t, \theta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma) - \lambda \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^\beta \ln(t_i - \gamma) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(t, \theta)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^\beta = 0 \\ \frac{\partial \ln L(t, \theta)}{\partial \gamma} = \lambda \beta \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^\beta - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^{\beta-1} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\lambda \beta}{\sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^{1-\beta}} - \frac{\beta - 1}{\sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)} = 0 \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Il ressort clairement que les estimations ponctuelles des paramètres β , η , γ sont les solutions du système de trois équations transcendantes.

3-5-2-1 Contraintes calculatoires :

La résolution du système de trois équations normales (3.61) est une tâche fastidieuse. En effet Les deux auteurs M. Schwab et Guy Peyrache reconnaissent que les calculs sont extrêmement pénibles pour le cas du modèle Weibull à deux paramètres. Par conséquent les calculs seront d'autant plus complexes lorsque le paramètre γ , contrairement à l'hypothèse de Cohen, est non nul.

Etant donné que le système (3.61) n'admet pas évidemment de solutions analytiques, il est nécessaire d'appliquer des méthodes appropriées d'analyse numérique. Mais, cela exige au préalable la conception d'un algorithme assez complexe car les formes analytiques des équations normales du système (3.61) sont du type transcendant.

On outre, le paramètre de repérage γ ne peut être exprimé que d'une manière implicite, ce qui va nous conduire à une interprétation géométrique élémentaire de l'impact de cette grandeur paramétrique sur la série des données de défaillance.

Afin de contourner le caractère fortement laborieux du processus calculatoire requis pour la résolution du système d'équations (3.59), on a jugé utile de mettre en place une autre approche du problème global d'estimation posé.

3-5-3 Vers une approche alternative de segmentation du problème global d'estimation tridimensionnel :

La modélisation empirique menée à la fin de notre recherche, du processus de linéarisation de l'allure curvilinéaire du modèle Weibull standard soumis à une transformation bi-logarithmique a offert l'opportunité de montrer numériquement et géométriquement que la variation du

paramètre de localisation est totalement, indépendante aussi bien du paramètre de forme β que du paramètre d'échelle η .

L'exploitation par anticipation, de ce résultat déterminant de notre travail de recherche est la clé de la décomposition du problème complexe d'estimation tridimensionnelle. La raison est toute simple en ce sens qu'il devient possible d'évaluer d'une manière isolée, la grandeur paramétrique centrale γ indépendamment des deux autres paramètres : La recherche du niveau maximum de l'intensité de linéarisation du nuage de points

$$N \left\{ \text{Ln}(t_i - \gamma_j) ; \text{LnLn} \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}; \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.62)$$

devait impliquer, en toute logique, l'usage de l'outil statistique, largement utilisé, à savoir le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson.

Toute fois l'emploi fiable de cet instrument statique est soumis à certaines conditions qui ne sont pas, aisément, satisfaites dans le contexte pratique des études de corrélation.

Le grand savant statisticien le nommé R. A. Fisher a opéré un changement de variable adéquat qui a permis de lever les contraintes imposées.

En tout état de cause, le coefficient de corrélation linéaire demeure la pierre angulaire dans la structure analytique des deux tests de linéarité de Fisher aussi bien unilatéral que bilatéral. C'est la raison pour laquelle on a jugé utile de s'appesantir sur les aspects tant théoriques que pratiques de cet instrument statistique, avant de passer, par voie réciproque à l'emploi de la tangente hyperbolique dans le but d'obtenir une meilleure estimation du coefficient de corrélation linéaire simple, pour ensuite adapter les catégories de tests précédents au cas du modèle Weibull standard soumis à une transformation bilogarithmique en utilisant la notion de paramétrage.

De cette façon, les tests de linéarité de Z-transformée de Fisher ne seront plus ponctuels mais évoluant comme une fonction de la valeur du paramètre d'origine γ . Dans ces conditions, on pourra élaborer quelques variantes d'un programme mathématique non linéaire avec paramétrage dont les valeurs modales du paramètre d'origine correspondant à leur maxima permettront d'aboutir à une estimation ponctuelle optimale du paramètre de localisation γ .

Une fois résolue, d'une manière isolée la question clé de détermination de l'estimateur ponctuel du paramètre d'origine γ , on pourra passer à une phase ultérieure qui consiste à chercher les estimateurs ponctuels des paramètres respectivement d'échelle η et de forme β et cela sur la base de la série corrigée des données de défaillance t_i , $i=1, 2, \dots, n$, en soustrayant de chaque composante des instants de défaillance la valeur modale γ_M soit $T_i = t_i - \gamma_M$, $i=1, 2, \dots, n$.

Par ailleurs, il est possible de montrer que le système d'équations linéaires non homogènes obtenues en combinant les observations t_i avec la forme bilogarithmiquement transformée du modèle Weibull standard est incompatible. Ainsi, il devient nécessaire d'appliquer les techniques d'optimisation non linéaire afin de trouver les estimateurs optimaux ponctuels de β et η .

Plus précisément, en considérant la nouvelle série T_i , soit de se contenter de minimiser la norme euclidienne afin d'aboutir à des estimateurs non pondérés de β et η , ou bien, et dans le but de perfectionner la qualité des deux estimateurs précédents de minimiser la norme de Legendre. Dans les deux cas, on est confronté, seulement, à un système de deux équations correspondant au cas particulier du théorème de Fontené-Rouché à savoir le modèle de Cramer. De cette façon, on évitera la tâche fastidieuse de résoudre, simultanément, un système de trois équations normales du type transcendant dans le but de trouver l'extremum de la fonction du maximum de vraisemblance.

Sur la base de ce qui précède, on peut, par anticipation sur les résultats de développements ultérieurs établir les deux relations d'équivalence logique entre trois sortes de programmes mathématiques, selon plusieurs variantes possibles.

Pour des raisons de commodité on se bornera à présenter une importante illustration :

$$\text{Max} \left[n \ln \frac{1}{\eta^\beta} + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma) - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^\beta \right] \Leftrightarrow \text{P1}$$

$$\beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma ; i=1,2,\dots,n ; j=1,2,\dots,m$$

$$\text{P1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{où} \quad \text{Max} \sqrt{n-3} |\text{Artanh} R_{x,y}(\gamma_j)| \geq 1,645 \quad ; i=1,2,\dots,n, j = 1,2 \dots m \\ \\ R_{xy}(\gamma_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_j)]^2 - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2}} \\ \\ \text{Min} \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - [\beta \ln(t_i - \gamma_j) + \beta \ln \eta] \right\}^2 \end{array} \right. \quad (3.61)$$



A présent, en introduisant l'opérateur logarithmique népérien, on obtient une nouvelle équivalence logique à (3.62)

$$\left. \begin{aligned} & \text{Max} \left[n \ln \frac{1}{\eta^\beta} + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) - \frac{1}{\eta^\beta} \sum_{i=1}^n (t_i - \gamma)^\beta \right] \\ & \beta > 0, \eta > 0, \min t_i > \gamma ; i=1,2,\dots,n ; j=1,2,\dots,m \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \text{P1}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{Max} \sqrt{n-3} |\text{Artanh} R_{x,y}(\gamma_j)| \geq 1,645 ; i=1,2,\dots,n, j = 1,2 \dots m \\ & \text{où } R_{xy}(\gamma_j) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_j)]^2 - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2}} \\ & \left\{ \text{Min} \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - [\beta \ln(t_i - \gamma_j) + \beta \ln \eta] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Finalement on est parvenu à segmenter le programme mathématique global d'estimation tridimensionnel fondé sur la fonction du maximum de vraisemblance en deux fonctions objectif partielles, la première concernant un problème de maximisation de l'intensité de la linéarisation du nuage de points :

$$\text{N} \left\{ \ln(t_i - \gamma_j) ; \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\} \quad (3.63)$$

Tandis que la seconde, elle se rapporte à un problème de minimisation de l'écart quadratique.

Il est important de noter que le comportement géométrique de l'ensemble de ces trois indices de performance (V1), dépend de la variation du paramètre d'origine γ . C'est la raison pour la quelle on les appelle, désormais, des fonctions économiques avec paramétrage.

L'adoption de cette nouvelle approche va donner au problème d'estimation initial dans sa variante segmentée une interprétation intéressante du point de vue de la géométrie analytique.

Chapitre IV

Elaboration d'un nouvel estimateur ponctuel
du paramètre d'origine du modèle
Weibull

4-1 Genèse du coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson

Soit $f(x,y)$ est la densité de répartition conjointe de deux variables aléatoires normales $i e$:

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\delta_x}\right)^2 - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\delta_x\delta_y} + \left(\frac{y-m_y}{\delta_y}\right)^2\right]} \quad (4.1)$$

Où : **i)** m_x est la moyenne arithmétique de la variable aléatoire x .

ii) m_y est la moyenne arithmétique de la variable aléatoire y .

iii) δ_x est l'écart type de la variable aléatoire de x .

IV) δ_y est l'écart type de la variable aléatoire de y .

V) r_{xy} est le cinquième paramètre dont dépend la loi normale bivariée.

La formule donnant la valeur du paramètre r_{xy} sera démontrée par la suite ce qui permettra d'en dégager la signification correspondante. Pour cela, calculons la covariance du système aléatoire bivarié bidimensionnel (x,y) .

$$\text{Cov}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y)f(x,y) dx dy \quad (4.2)$$

En remplaçant $f(x,y)$ par son expression il vient :

$$I = \frac{1}{2\pi\delta_x\delta_y\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\delta_x}\right)^2 - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\delta_x\delta_y} + \left(\frac{y-m_y}{\delta_y}\right)^2\right]} \quad (4.3)$$

Le calcul de l'intégrale I requiert un changement de variables.

$$\text{En posant : } U = \frac{x-m_x}{\sqrt{2}\delta_x}, \text{ on a } x-m_x = \sqrt{2}\delta_x U, \text{ et } x = \sqrt{2}\delta_x U + m_x \quad (4.4)$$

Posons également :

$$V = \frac{y-m_y}{\delta_y\sqrt{2(1-r^2)}} - \frac{r(x-m_x)}{\delta_x\sqrt{2(1-r^2)}} = \frac{y-m_y}{\delta_y\sqrt{2(1-r^2)}} - \frac{r(x-m_x)}{\delta_x\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}} \quad (4.5)$$

En combinant les deux relations (4.4) et (4.5) on obtient :

$$V = \frac{y-m_y}{\delta_y\sqrt{2}\sqrt{1-r^2}} - \frac{rU}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{y-m_y - r\sqrt{2}\delta_y U}{\delta_y\sqrt{2(1-r^2)}} \quad (4.6)$$

$$\text{ou bien : } \sqrt{2}\delta_y\sqrt{1-r^2}V = y - m_y - r\sqrt{2}\delta_y U \quad (4.7)$$

Ce qui conduit à :

$$y = \sqrt{2} \delta y \sqrt{1 - r^2} V + m_y + r \sqrt{2} \delta y U \quad (4.8)$$

$$y - m_y = \sqrt{2} \delta y \sqrt{1 - r^2} V + r \sqrt{2} \delta y U \quad (4.9)$$

Divisions les deux membres de l'égalité (4.8) par δy

$$\frac{y - m_y}{\delta y} = \frac{\delta y (\sqrt{2} \sqrt{1 - r^2} V + \sqrt{2} r U)}{\delta y} = \sqrt{2} \sqrt{1 - r^2} V + \sqrt{2} r U \quad (4.10)$$

Ensuite

$$\left(\frac{y - m_y}{\delta y} \right)^2 = (\sqrt{2} \sqrt{1 - r^2} V + \sqrt{2} r U)^2 = 2(1 - r^2) V^2 + 4r \sqrt{1 - r^2} UV + 2r^2 U^2 \quad (4.11)$$

En remplaçant (4.4), (4.9), et (4.10) dans l'exposant de l'exponentiel de (4.3) on obtient :

$$\frac{-1}{2(1 - r^2)} \left[2U^2 - 2r \sqrt{2} U (\sqrt{2} \sqrt{1 - r^2} V + \sqrt{2} r U) + 2(1 - r^2) V^2 + 4r \sqrt{1 - r^2} UV + 2r^2 U^2 \right] \quad (4.12)$$

En développant il devient :

$$\frac{-1}{2(1 - r^2)} \left[2U^2 - 4r \sqrt{1 - r^2} UV - 4r^2 U^2 + 2(1 - r^2) V^2 + 4r \sqrt{1 - r^2} UV + 2r^2 U^2 \right] \quad (4.13)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{-1}{2(1 - r^2)} \left[2U^2 - 2r^2 U^2 + 2(1 - r^2) V^2 \right] \quad (4.14)$$

En prenant U^2 comme facteur commun on a finalement :

$$\frac{-1}{2(1 - r^2)} \left[2(1 - r^2) U^2 - 2(1 - r^2) V^2 \right] \text{ ce qui donne :} \quad (4.15)$$

$$\frac{-2(1 - r^2)}{2(1 - r^2)} (U^2 + V^2) = -(U^2 + V^2) \quad (4.16)$$

Tenant compte de (5), (11), et (18) l'intégrale (3) devient :

$$I = \frac{1}{2\pi \delta x \delta y \sqrt{1 - r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \delta x U (\sqrt{2} \delta y \sqrt{1 - r^2} V + r \sqrt{2} \delta y U) e^{-(U^2 + V^2)} d_U d_V \quad (4.17)$$

Il est parfois utile dans le calcul d'une intégrale double qui s'étend sur un domaine D d'utiliser d'autres coordonnées (U, V) à la place des coordonnées cartésiennes (x, y) .

En fait si les variables (x,y) sont reliées à des coordonnées arbitraires (U,V) par des fonctions continues et différentiables de sorte que :

$$X = f(U,V) ; y = g(U,V) \quad (4.18)$$

Alors on obtient la formule de M. Ostrogradsky :

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y) dx dy = \iint_{D_{uv}} G(U,V) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} \right| dU dV \quad (4.19)$$

$$\text{Où } G(u,v) = F \left(f(u,v) ; g(u,v) \right) \quad (4.20)$$

$$\text{et } \frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ étant la Jacobienne des transformations.}$$

Puisque d'après (6) et (10) on a respectivement $x = \sqrt{2} \delta x U + m_x$ et

$y = \sqrt{2} \delta y \sqrt{1-r^2} V + m_y + r\sqrt{2} \delta y U$ alors la Jacobienne du double changement de variables est par conséquent:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \delta x & 0 \\ \sqrt{2} r \delta y & \sqrt{2} \delta y \sqrt{1-r^2} \end{vmatrix} = 2 \delta x \delta y \sqrt{1-r^2} \quad (4.21)$$

Maintenant appliquons la formule (4.19)

ainsi l'intégrale (19) peut s'écrire :

$$I = \frac{1}{2\pi \delta x \delta y \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \delta x U (\sqrt{2} \delta y \sqrt{1-r^2} V + r\sqrt{2} \delta y U) e^{-(U+V)^2} 2 \delta x \delta y \sqrt{1-r^2} dU dV \quad (4.22)$$

ou bien :

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \delta x U (\sqrt{2} \delta y \sqrt{1-r^2} V + r\sqrt{2} \delta y U) e^{-(U^2+V^2)} dU dV \quad (4.23)$$

Ce qui conduit à :

$$I = \frac{2\delta x \delta y \sqrt{1-r^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-U^2} dU \int_{-\infty}^{+\infty} V e^{-V^2} dV + \frac{2r\delta x \delta y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 e^{-U^2} dU \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-V^2} dV \quad (4.24)$$

$$\text{Calculons l'intégrale } I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-U^2} dU \quad (4.25)$$

$$\text{On pose } z = -u^2 \implies dz = -2u du \implies du = \frac{dz}{-2u}$$

En substituant dans l'intégrale I_1 il vient :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U e^z dz}{-2u} = \frac{-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^z dz = \frac{-1}{2} \left[e^z \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{-1}{2} \left[e^u \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$I_1 = \frac{-1}{2} \left[e^u \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{-1}{2} \left[\exp^{-\infty} - \exp^{-\infty} \right] = \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{e^{+\infty}} - \frac{1}{e^{+\infty}} \right] = \frac{-1}{2} \left[0 - 0 \right] = 0 \quad (4.26)$$

Cela implique que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U e^{-U^2} dU = \int_{-\infty}^{+\infty} V e^{-V^2} dV = 0 \quad (4.27)$$

Donc l'intégrale I se réduit à :

$$I = \frac{2r\delta x\delta y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 e^{-U^2} dU \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-V^2} dV \quad (4.28)$$

$$A \text{ présent calculons l'intégrale } I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 e^{-u^2} du \quad (4.29)$$

Appliquons la technique d'intégration par parties.

$$On \text{ pose : } U' = U \quad \text{d'où} \quad dU' = Du \quad (4.30)$$

$$dV = u \exp -u^2 du \quad \text{d'où} \quad V = \int u \exp -u^2 du \quad (4.31)$$

Sachant que :

$$V = \int u \exp -u^2 du = \frac{-1}{2} \exp -u^2 \quad (4.32)$$

alors :

$$I_2 = \left[\frac{-1}{2} u \exp -u^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du \quad (4.33)$$

Le premier terme étant nul, il reste à calculer le second terme

$$Soit \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du \quad (4.34)$$

$$Posons \quad I_3 = \frac{1}{2} I_4 \text{ d'où} \quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du \quad (4.35)$$

Vu la caractéristique de symétrie de l'intégrale, on peut subdiviser l'intégrale indéfinie I_3 en deux termes identiques.

Soit :

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du = \int_{-\infty}^0 \exp -u^2 du + \int_0^{+\infty} \exp -u^2 du \quad (4.36)$$

ou bien :

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - u^2 du = 2 \int_0^{+\infty} \exp - u^2 du$$

$$\text{Calculons l'intégrale : } I_5 = \int_0^{+\infty} \exp - u^2 du \quad (4.37)$$

Indiquons que cette intégral ne peut pas être évaluée par des méthodes élémentaires. Toutefois il est possible de procéder de la manière suivante :

$$(I_5)^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \int_0^{+\infty} e^{-w^2} du \quad (4.38)$$

en vertu du théorème de Fubini, il découle :

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{-w^2} dw = \iint_{D_{uw}} e^{-(u^2+w^2)} du dw \quad (4.39)$$

où le domaine d'intégration D_{uw} est tout le quadrant positif du plan $u w$.

Transformons l'intégrale double(4.39) en coordonnées polaires. Pour cela on pose :

$$u = r \cos \theta ; w = r \sin \theta \quad (4.40)$$

d'où :

$$u^2 + w^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \quad (4.41)$$

ce qui entraîne la Jacobienne des transformations :

$$\frac{d(u,w)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{dr \cos \theta}{dr} & \frac{dr \cos \theta}{d\theta} \\ \frac{dr \sin \theta}{dr} & \frac{dr \sin \theta}{d\theta} \end{vmatrix} \quad (4.42)$$

d'où :

$$\frac{d(u,w)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad (4.43)$$

Tenant compte de la formule de transformation des coordonnées (4.19) il vient :

$$(I_5)^2 = \iint_{D_{uw}} e^{-(u^2+w)} du dw = \iint_{D_{uw}} e^{-r^2} d\theta dr \quad (4.44)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2} dr \quad (4.45)$$

$$\text{Or : } \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = [\theta]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad (4.46)$$

Afin de calculer $\int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r} dr$ on effectue un changement de variable.

Soit : $t = r^2$ d'où $dt = 2r dr$ ce qui donne $dr = \frac{dt}{2r}$

En substituant (4.43) et (4.44) dans $\int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r} r^2 dr$ on parvient à :

$$\int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r} r^2 dr = \int_{t=0}^{t=+\infty} r e^{-t} \frac{dt}{2r} = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t} dt \quad (4.47)$$

$$\text{Puisque : } \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \quad (4.48)$$

$$\text{alors : } = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=+\infty} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} [e^{-t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} [0 - 1] = \frac{1}{2} \quad (4.49)$$

$$\text{d'où : } (I_5)^2 = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2} r dr = \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (4.50)$$

Prenons la racine carrée de (4.50) on obtient :

$$I_5 = \sqrt{\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-r^2} r dr} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.51)$$

De (4.37) on sait que $I_4 = 2 I_5$

$$\text{alors : } I_4 = \sqrt{\pi} \quad (4.52)$$

De plus de (4.33) on a $I_3 = \frac{1}{2} I_4$ d'où

$$I_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.52)$$

Finalement : $I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (4.53)

Si on revient à (4.22) on remarque qu'il reste à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv$.

L'évaluation de cette intégrale peut être effectuée de la même manière que celle employée pour le calcul de $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -u^2 du$, et on peut prouver que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$ (4.54)

En substituant chaque terme par sa valeur dans (4.22) il vient :

$$I = \frac{2r\delta x\delta y \sqrt{\pi}}{\pi} \sqrt{\pi} = \frac{2r\delta x\delta y \pi}{2\pi} = r\delta x\delta y \quad (4.55)$$

Or d'après (27) I est égal à la covariance de x, y ie :

$$Cov(x,y) = r\delta x\delta y \quad (4.56)$$

et en fin de compte on aboutit à : $r = \frac{cov(x,y)}{\delta x \delta y}$ qui représente évidemment la formule donnant le coefficient de corrélation linéaire de Bravais Pearson.

4-1-1 Définition :

Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson est donc un simple ratio sans unité, mesurant l'intensité de la relation linéaire d'un système de deux variables aléatoires x, y . Au numérateur on a la covariance entre x et y , alors qu'au dénominateur on a le produit des deux écarts types de x et y .

4-1-2 Propriétés du coefficient de corrélation linéaire :

4-1-2-1 Premières propriétés : Limites du coefficient de corrélation linéaire $-1 \leq r_{xy} \leq +1$

Avant d'entamer la démonstration de cette première propriété, indiquons que le coefficient de corrélation linéaire est un corollaire du théorème de Cauchy- Schwarz.

On va commencer par donner la preuve de l'inégalité de Cauchy- Schwarz.

4-1-2-1-1 Théorème : Inégalité Cauchy-Schwarz.

Supposons que deux variable aléatoires x, y possèdent des moments finis de second ordre, alors : $[E(x, y)]^2 \leq E(x^2) E(y^2)$

Le cas d'égalité est réalisé seulement si : $P [y = \lambda x] = 1$ pour une certaine constante réelle λ ; $\lambda \in \mathbb{R}$. $P [y = \lambda x]$ s'interprète comme la probabilité d'occurrence de l'événement $y = \lambda x$

4-1-2-1-1-1 Démonstration :

Puisque par hypothèse les deux moments finis de second ordre $E(x^2)$ et $E(y^2)$ existent alors, nécessairement, l'existence des deux moments finis de premier ordre $E(x), E(y)$ est assurée.

Tout d'abord définissons une quantité positive auxiliaire :

$$0 \leq h(\lambda) = E[\lambda x - y]^2 \text{ ou } \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (4.57)$$

Après développement on obtient :

$$h(\lambda) = E(\lambda^2 x^2 - 2\lambda xy + y^2) \quad (4.58)$$

Distribuons l'opérateur linéaire de l'espérance mathématique

$$h(\lambda) = \lambda^2 E(x^2) - 2\lambda E(xy) + E(y^2) \quad (4.59)$$

Cette expression analytique peut être perçue comme un simple polynôme de second degré en λ ou bien comme un cas particulier d'une forme quadratique.

a-Traitement de $h(\lambda)$ comme un trinôme de second degré :

a-1 Inégalité stricte de Cauchy-Schwarz :

Afin que $h(\lambda) > 0$, il faut et suffit que le discriminant réduit soit strictement négatif :

$$\Delta' < 0 \text{ ou } [E(x, y)]^2 \cdot E(x^2) E(y^2) < 0, \text{ autrement dit } [E(x, y)]^2 < E(x^2) E(y^2)$$

Dans ces conditions, le signe de $h(\lambda)$ est identique à celui du coefficient du premier terme soit λ^2 qui est strictement positif.

a-2 Egalité de Cauchy-Schwarz :

Afin que $h(\lambda) = 0$, pour une certaine valeur de λ soit λ_0 le discriminant réduit

$$\Delta' = [E(x, y)]^2 - E(x^2) E(y^2) = 0 \quad (4.60)$$

Cela implique l'existence d'une racine double pour $h(\lambda)$ donné par :

$$\lambda_0 = \frac{E(x, y)}{E(x)} \quad (4.61)$$

En substituant dans $E(\lambda_0 x - y)^2 = 0$ il vient $E\left[\frac{E(x, y)}{E(x)} x - y\right] = 0$

$$\text{d'où } \frac{E(x, y)}{E(x)} x - y = 0 \quad (4.62)$$

Ainsi l'égalité de Cauchy-Schwarz signifie l'existence d'une relation linéaire entre les deux variables aléatoires x, y . Plus précisément les variables x, y sont proportionnelles :

$$[E(x, y)] - E(x^2) E(y^2) = 0 \Rightarrow y = \frac{E(x, y)}{E(x^2)} x \quad (4.63)$$

Réciproquement, considérons une relation fonctionnelle linéaire entre x, y

$$\text{soit } y = \lambda x \quad (4.64)$$

Maintenant, multiplions, successivement les deux membres de (4.63) par x ensuite par y .

$$\text{i) } yx = \lambda x^2 \quad (4.65)$$

$$\text{ii) } y^2 = \lambda xy \quad (4.66)$$

Introduisons l'opérateur de l'espérance mathématique.

$$\text{iii) } xy = \lambda x \Rightarrow E(xy) = \lambda E(x^2) \quad (4.67)$$

$$\text{iv) } y^2 = \lambda xy \Rightarrow E(y^2) = \lambda E(xy) \quad (4.68)$$

$$\text{d'où } E(xy) = \frac{1}{\lambda} E(y^2) \quad (4.69)$$

Multiplions le membre gauche de la première équation par le membre correspondant de la deuxième équation. On procède de la même façon avec le membre de droite des deux équations.

$$[E(x, y)]^2 = \lambda E(x^2) \frac{1}{\lambda} E(y^2) \quad (4.70)$$

$$\text{d'où } [E(x, y)]^2 = E(x^2) E(y^2)$$

Finalement on peut écrire que :

$$y = \frac{E(x, y)}{E(x)} x \Rightarrow [E(x, y)]^2 - E(x^2) E(y^2) = 0 \quad (4.71)$$

En conséquence:

$$[E(x, y)]^2 = E(x^2) E(y^2) \Leftrightarrow y = \lambda x \quad (4.72)$$

Précisons que $P\{\lambda x = y\} = 1$ signifie que l'existence d'une relation linéaire entre x et y est un événement non pas vraisemblable mais certain.

a-3 Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Remplaçons x par $[x - E(x)]$ et y par $[y - E(y)]$ dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz $[E(x, y)] \leq E(x^2) E(y^2)$ ce qui entraîne :

$$\{E[x - E(x)][y - E(y)]\}^2 \leq E[x - E(x)]^2 [y - E(y)]^2 \quad (4.73)$$

Tenant compte de la définition de la covariance de x, y on peut écrire :

$$Cov^2(x, y) \leq Var(x).Var(y) \quad (4.74)$$

Prenons la racine carré des deux membres de (4.74) il vient

$$\sqrt{Cov(x, y)} = |Cov(x, y)| \leq \delta_x \delta_y \quad (4.75)$$

En divisant (4.75) par $\delta_x \delta_y$ on obtient :

$$\left| \frac{Cov(x, y)}{\delta_x \delta_y} \right| \leq 1 \text{ on } |r_{xy}| \leq 1 \quad \text{ou bien } -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

b-Traitement de la quantité $h(\lambda)$ comme cas spécifique d'une forme quadratique :

Afin d'aboutir directement au résultat escompté au lieu de $h(\lambda)$ on considère une expression analytique équivalente :

$$\text{Soit : } [\lambda(x - E(x)) - (y - E(y))]^2$$

$$\text{Posons : } Q(\lambda) = [\lambda(x - E(x)) - (y - E(y))]^2 \geq 0 \quad (4.76)$$

En développant on obtient :

$$Q(\lambda) = [\lambda^2(x - E(x)) - 2\lambda(x - E(x))(y - E(y)) + (y - E(y))]^2 \geq 0 \quad (4.77)$$

Appliquons l'espérance mathématique :

$$E Q(\lambda) = E[\lambda^2(x - E(x)) - 2\lambda(x - E(x))(y - E(y)) + (y - E(y))]^2 \geq 0 \quad (4.78)$$

En se basant sur la signification statistique de chaque terme de $EQ(\lambda)$ il s'en suit que :

$$EQ(\lambda) = \lambda^2 var(x) - 2\lambda Cov(x, y) + var(y) \quad (4.79)$$

Malgré l'existence d'une inconnue unique λ , seulement, il est possible de traiter $EQ(\lambda)$ comme un cas spécial d'une forme quadratique. En effet on peut noter :

$$EQ(\lambda) = U^T V U = [-\lambda \quad 1] \begin{bmatrix} Var(x) & Cov(x, y) \\ Cov(x, y) & Var(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.80)$$

Ou U est le vecteur inconnu et V la matrice des variances covariances.

En vertu des conditions de Sylvester pour que $EQ(\lambda) \geq 0$ il faut que :

$$\text{i) } Var(x) > 0 \quad (4.81)$$

$$\text{ii) } \begin{vmatrix} Var(x) & Cov(x, y) \\ Cov(x, y) & Var(y) \end{vmatrix} \geq 0 \quad (4.82)$$

En développant le déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Var}(x).\text{Var}(y) - \text{Cov}^2(x,y) &\geq 0 \quad \text{d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz :} \\ \text{Cov}^2(x,y) &\leq \text{Var}(x).\text{Var}(y) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Prenons la racine carrée des deux membres de l'inégalité (4.83) il résulte :

$$\sqrt{\text{Cov}^2(x,y)} \leq \sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)} \quad (4.84)$$

Puisque par définition $\text{Var}(x) > 0$, $\text{Var}(y) > 0$ alors :

$$|r_{xy}| = \frac{|\text{Cov}(x,y)|}{\sqrt{\text{Var}(x)}\sqrt{\text{Var}(y)}} \leq 1 \quad \text{ou bien} \quad -1 \leq r_{xy} \leq 1$$

Remarquons que le signe du coefficient de corrélation linéaire de deux variables x, y est celui de la covariance respective.

4-1-2-2 Deuxièmes propriétés : Invariance par transformation linéaire

Si les variables aléatoires x, y sont liées par une relation fonctionnelle linéaire. Soit $y = ax + b$ alors la valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire correspondante est égale à l'unité.

Démonstration de l'implication : $y=ax+b \iff |r_{xy}|=1$

On pose : $y = ax+b$ on a, alors, par définition la covariance de deux variables aléatoires x, y :

$$\text{Cov}(x,y) = E [x - E(x)][y - E(y)]$$

En substituant y par sa valeur il vient :

$$\text{Cov}(x,y) = E [x - E(x)][(ax + b) - E(ax + b)] \quad (4.85)$$

$$= E [x - E(x)][ax + b - aE(x) - b] \quad (4.86)$$

$$= E [x - E(x)][ax - aE(x)] \quad (4.87)$$

En prenant a comme facteur commun on a :

$$\text{Cov}(x,y) = aE[x - E(x)][x - E(x)] = aE[x - E(x)]^2 \quad \text{d'où}$$

$$\text{Cov}(x,y) = a\text{Var}(x)$$

Par ailleurs le produit des deux écarts types est égal à :

$$\delta_x\delta_y = \sqrt{E[x - E(x)]^2} \sqrt{E[y - E(y)]^2} \quad \text{ce qui entraîne}$$

$$\delta_x\delta_y = \sqrt{E[x - E(x)]^2} \sqrt{E[(ax + b) - E(ax + b)]^2}$$

$$\text{Or } \delta_x\delta_y = \sqrt{E[x - E(x)]^2} \sqrt{E[ax + b - aE(x) - b]^2} \quad (4.88)$$

$$\text{ou bien } \delta_x\delta_y = \sqrt{E[x - E(x)]^2} \sqrt{a^2 E[x - E(x)]^2} = \sqrt{a^2 E[x - E(x)]^2}^2$$

$$\text{d'où : } \delta_x\delta_y = |a|E[x - E(x)]^2 \quad \text{autrement dit } \delta_x\delta_y = |a|\text{Var}(x)$$

De (4.60) et (4.65), le rapport du coefficient de corrélation linéaire s'écrit :

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x,y)}{\delta_x\delta_y} = \frac{a\text{Var}(x)}{|a|\text{Var}(x)} = \pm 1 \quad \text{ou bien } |r_{xy}| = 1$$

Réciproquement si la valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire est égale à 1 alors les deux variables aléatoires x, y sont liés par une relation fonctionnelle linéaire.

Démonstration de l'implication réciproque : $|r_{xy}| = 1 \implies y = ax + b$

Au départ, en employant des variables centrées réduites on construit l'expression analytique suivante :

$$\text{Soit } \frac{(x-E(x))}{\delta x} - \frac{\varepsilon(y-E(y))}{\delta y} \text{ où } \varepsilon = \pm 1 \tag{4.89}$$

En élevant au carré l'expression (4.89) devient :

$$\left\{ \frac{[x-E(x)]}{\delta x} - \frac{\varepsilon[y-E(y)]}{\delta y} \right\}^2 = \alpha \tag{4.90}$$

Appliquons l'opérateur linéaire de l'espérance mathématique E .

$$E(x) = E \left\{ \frac{[x-E(x)]^2}{\delta x^2} - \frac{2\varepsilon[x-E(x)][y-E(y)]}{\delta x \delta y} + \frac{\varepsilon^2[y-E(y)]^2}{\delta y^2} \right\} \tag{4.91}$$

En se basant sur la signification statistique de chaque terme on note:

$$E(x) = \frac{Var(x)}{Var(x)} - 2\varepsilon \frac{cov(x,y)}{\delta x \delta y} + \frac{\varepsilon^2 Var(y)}{Var(y)} \text{ ou } E(x) = \frac{Var(x)}{Var(x)} - 2\varepsilon r_{xy} + \varepsilon^2 \frac{Var(y)}{Var(y)} \tag{4.92}$$

Puisque $r_{xy} = \pm 1$ alors $E(x) = 1 - 2\varepsilon^2 + 1 = 1 + 1 - 2 = 0$ autrement dit :

$$E(x) = E \left\{ \frac{[x-E(x)]}{\delta x} - \frac{\varepsilon[y-E(y)]}{\delta y} \right\}^2 = 0 \tag{4.93}$$

$$\text{d'où } \frac{[x-E(x)]}{\delta x} - \frac{\varepsilon[y-E(y)]}{\delta y} = 0 \text{ ou bien encore } \frac{x-E(x)}{\delta x} = \frac{\varepsilon[y-E(y)]}{\delta y} \tag{4.94}$$

Par conséquent il existe une relation linéaire entre x et y .

4-1-2-3 Troisième propriété :

Si les variables aléatoires x, y sont indépendantes alors la valeur du coefficient de corrélation linéaire r_{xy} est nulle, l'inverse n'est pas vrai, sauf dans l'hypothèse où le système aléatoire (x,y) obéit à un modèle gaussien. Dans ce cas, la non corrélation des deux variables aléatoires normales entraîne également leur indépendance linéaire.

Démonstration :

Afin de pouvoir prouver le bien-fondé de la première implication et étant donné que :

$$R_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\delta x \delta y} = 0 \implies Cov(x,y) = 0 \text{ alors on se limite à montrer que } Cov(x,y) = 0 \text{ dans}$$

l'hypothèse où les deux variables aléatoires x, y sont linéairement indépendantes.

Théorème :

Si x et y sont deux variables aléatoires indépendantes et $g(x), h(y)$ sont deux fonctions univariées alors :

$$E[g(x).h(y)] = E[g(x)] E[h(y)] \tag{4.95}$$

Preuve :

Par définition, on a :

$$E[g(x).h(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).h(y)f(x,y)dx dy \tag{4.96}$$

Puisque x, y sont indépendantes alors $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (4.97)

d'où $E[g(x) \cdot h(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot h(y) f_1(x) f_2(y) dx dy$ (4.98)

ou encore $E[g(x) \cdot h(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_2(y) dy$ (4.99)

or $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_1(x) dx = E[g(x)]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_2(y) dy = E[h(y)]$ (4.100)

Ainsi on aboutit à :

$E[g(x) \cdot h(y)] = E[g(x)] \cdot E[h(y)]$ (4.101)

Corollaire : Si x, y sont deux variables aléatoires indépendantes alors $Cov(x, y) = 0$

Preuve :

On pose : $g(x) = x - E(x)$, $h(y) = y - E(y)$ (4.102)

$E[g(x) \cdot h(y)] = E\{[x - E(x)][y - E(y)]\} = Cov(x, y)$ (4.103)

Par référence au théorème (4.95)

$E[g(x) \cdot h(y)] = E[g(x)]E[h(y)]$ (4.104)

En remplaçant $g(x)$ et $h(y)$ par leur valeur respective il vient :

$Cov(x, y) = E[x - E(x)]E[y - E(y)]$ (4.105)

Puisque l'opérateur de l'espérance mathématique est linéaire donc :

$Cov(x, y) = \{E(x) - E[E(x)]\}\{E(y) - E[E(y)]\}$ (4.106)

Sachant que les espérances mathématiques $E(x)$, $E(y)$ sont des constantes, il s'en suit que :

$Cov(x, y) = [E(x) - E(x)][E(y) - E(y)] = 0$

Par conséquent il résulte que : $R_{xy} = \frac{0}{\delta x \delta y} = 0$ (4.108)

Réciproquement si les deux variables aléatoires x, y sont distribuées suivant une loi normale bidimensionnelle et au cas où le coefficient de corrélation linéaire est nul, alors les variables x, y sont statistiquement indépendantes si l'on suppose l'existence d'une loi normale bivariée à laquelle obéissent les deux variables aléatoires x, y et puisque on a supposé que $r_{xy} = 0$ donc l'équation de la fonction de la densité de probabilité bidimensionnelle devient égale à :

$Q(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta x \delta y} \exp \frac{-1}{2} \left[\frac{(x-mx)^2}{\delta x^2} + \frac{(y-my)^2}{\delta y^2} \right]$ (4.109)

ou bien : $Q(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta x \delta y} \exp \frac{-1}{2} \frac{(x-mx)^2}{\delta x^2} \exp \frac{-1}{2} \frac{(y-my)^2}{\delta y^2}$ (4.110)

Il est maintenant clair que les variables normales (x, y) de densité (4.109) sont non seulement non corrélées mais également indépendantes.

En effet on peut écrire :

$Q(x, y) = \frac{1}{\delta x \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-mx)}{2\delta x^2} \frac{1}{\delta y \sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(y-my)}{2\delta y^2} = Q(x) g(y)$ (4.111)

C'est-à-dire que la densité de probabilité du système aléatoire (x, y) est égale au produit des densités marginales, ce qui prouve l'indépendance des variables aléatoires (x, y) .

Ainsi, dans le cas d'un système de variables aléatoires normales (x, y) il est vérifié que leur non corrélation entraîne également leur indépendance.

Dans le cas où l'hypothèse de la non normalité de la distribution des variables aléatoires (x, y) leur non corrélation n'entraîne pas leur indépendance.

Il peut être question d'une relation fonctionnelle du type parabolique ou une autre forme non linéaire entre x et y , ce qui témoigne en faveur de leur dépendance, malgré la nullité du coefficient de corrélation linéaire respectif.

4-1-3 Estimateur ponctuel du coefficient de corrélation linéaire :

4-1-3-1 Estimateur ponctuel de Bravais-Pearson du coefficient de corrélation linéaire :

Le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} calculé à partir d'un échantillon de taille n , donne une estimation ponctuelle du vrai coefficient de corrélation de la population mère noté P_{xy} .

On sait que P_{xy} est défini par le rapport :

$$P_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{E\{[x-E(x)][y-E(y)]\}}{\sqrt{E[x-E(x)]^2} \sqrt{E[y-E(y)]^2}} \quad (4.112)$$

$$= \frac{E[xy - xE(y) - yE(x) + E(x)E(y)]}{\sqrt{E[x^2 - 2xE(x) + E^2(x)]} \sqrt{E[y^2 - 2yE(y) + E^2(y)]}} \quad (4.113)$$

$$= \frac{E(xy) - E(x)E(y) - E(y)E(x) + E(x)E(y)}{\sqrt{E(x^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x)} \sqrt{E(y^2) - 2E(y)E(y) + E^2(y)}}$$

d'où :

$$P_{xy} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sqrt{E(x^2) - E^2(x)} \sqrt{E(y^2) - E^2(y)}} \quad (4.114)$$

Finalement l'estimateur ponctuel r_{xy} (Bravais - Pearson) de P_{xy} est donné par la formule:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} \quad (4.115)$$

4-1-3-2 Estimateur ponctuel de Oklin et Pratt du coefficient de corrélation linéaire :

D'autre part les deux auteurs Oklin et Pratt ont proposé en 1958 une formule permettant une estimation ponctuelle plus rigoureuse du coefficient de corrélation linéaire r_{xy} soit :

$$r_{xy} = \check{r}_{xy} \left[1 + \frac{1 - \check{r}_{xy}^2}{2(n-3)} \right] \quad (4.116)$$

4-1-3-3 Considérations générales sur l'estimation du coefficient de corrélation linéaire :

A présent la question qui se pose avec insistance est de savoir de quelle manière on doit juger si la valeur empirique du coefficient de corrélation linéaire r_{xy} est assez grande pour établir qu'il existe une corrélation linéaire effective entre les deux variables aléatoires (x, y) , c'est-à-dire que sa grandeur s'écarte d'une façon significative de zéro.

Précisons que le coefficient de corrélation linéaire r_{xy} calculé à partir d'un échantillon de taille n fournit seulement une estimation ponctuelle du coefficient linéaire de la population parente P_{xy} .

Il est logique de considérer le paramètre P_{xy} comme la valeur moyenne de la série des coefficients de corrélation r_{xy} obtenus à partir de l'ensemble des échantillons de même taille, tous prélevés dans une même population mère soit :

$$E(r_{xy}) = P_{xy} \text{ avec : } E(r_{xy}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_j = P_{xy}$$

où m étant le nombre d'échantillons prélevés.

Comme la valeur empirique du coefficient de corrélation linéaire r_{xy} change d'un échantillon à l'autre alors l'estimateur \check{r}_{xy} devient ainsi une variable aléatoire autour de la vraie valeur du paramètre P_{xy} . En fait, nous sommes devant ce qu'on appelle une distribution d'échantillonnage de r_{xy} .

4-1-4 Limite de l'estimateur ponctuel du coefficient de corrélation linéaire :

Lorsque la distribution du système aléatoire x, y n'obéit pas à une loi normale bivariée, la valeur du coefficient de corrélation linéaire r_{xy} est d'autant moins sûre que la taille de l'échantillon considéré est réduite. Ainsi la valeur empirique du coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson peut ne pas s'écarter de zéro d'une manière significative.

4-1-5 Réduction du risque d'une estimation ponctuelle défailante

Dans le but d'éviter au maximum possible d'aboutir à une estimation ponctuelle erronée du coefficient de corrélation linéaire, on peut appliquer deux méthodes statistiques complémentaires.

4-1-5-1 Importance du jugement graphique

L'usage du coefficient de corrélation requiert une certaine prudence car s'il n'y a pas toujours de correspondance entre la tendance du nuage de points et la tendance linéaire du modèle adopté, on risque d'aboutir à des résultats erronés. Afin de saisir le bien fondé de ce problème reprenons l'essentiel de l'étude statistique graphique menée par F.J Anscombe(35), tout en

donnant des commentaires adoptés. Dans cet article, on voit que le traitement statistique de quatre jeux de données conduit à des résultats tout à fait identiques. On n'a pas abouti, seulement à une même qualité d'ajustement linéaire exprimée par un coefficient de corrélation simple soit : $r_{xy} = 0,82$ et un même écart résiduel soit $\delta_r = 1,94$, mais également à une équation de régression linéaire similaire représentant paradoxalement les quatre cas de figures distinctes à savoir : $y = 0.5x + 3$

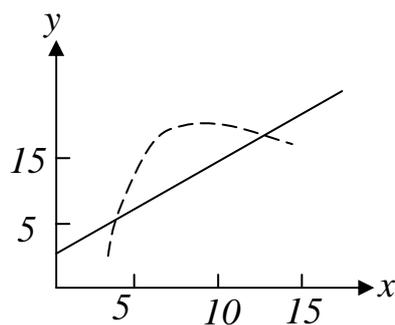


Figure :4.1

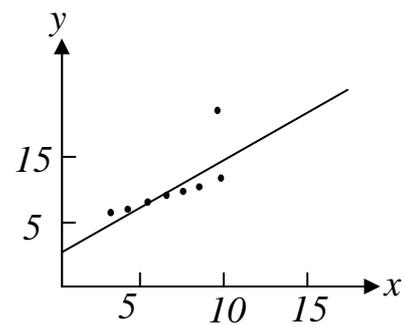


Figure : 4.2

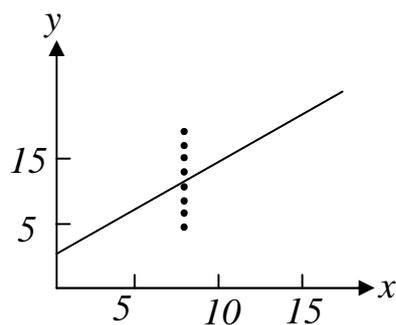


Figure : 4.3

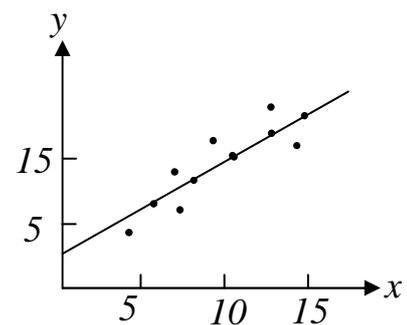


Figure : 4.4

A la vue de ces graphes, on constate que Figure 4.1 illustre une erreur manifeste de spécification de modèle qui est de nature parabolique et non pas linéaire.

Quant à la Figure 4.3, on constate que la droite de régression n'est absolument pas justifiée car elle passe par un seul point du diagramme de dispersion.

Si on considère la Figure 4.4, on remarque un cas de figure où la droite de régression est effectivement justifiée car la tendance générale du nuage de points coïncide avec une forme rectilinéaire.

Maintenant si on revient à la Figure 4.2, on constate qu'elle montre le cas d'une relation linéaire entre x et y traduite d'une manière non rigoureuse par l'équation de régression en raison de l'existence d'un point qui selon toute vraisemblance est aberrant.

A cet égard, rappelons l'essentiel d'une étude de corrélation menée aux Etats-Unis d'Amérique à propos de la relation entre le nombre d'habitants et le nombre correspondant de postes de télévision dans neuf villes américaines :

Denver, Saint Antonio, Kansas City, Seattle, Cincinnati, Buffalo, Nouvelle Orleans, Malvoni, Holston étude qui a abouti à un coefficient de corrélation linéaire égal paradoxalement seulement à 0,43.

L'introduction des données relatives une dixième ville a conduit à un coefficient de corrélation dont la valeur a atteint un seuil 0,995. Cela veut dire que l'augmentation de la taille n de l'échantillon étudié d'une unité a induit un accroissement du coefficient de corrélation de 56,5%. Dans l'hypothèse d'une distribution normale de x et y , ce nouveau coefficient de corrélation devait coïncider avec une dépendance presque linéaire entre les variables objet d'investigation. Il est clair que dans le cas où le système x, y s'écarte d'une loi normale, une semblable interprétation du coefficient de corrélation linéaire serait loin d'être justifiée.

Cela s'explique par la présence d'une donnée anormale qui s'éloigne considérablement des autres de sorte qu'il est impossible d'estimer l'ensemble des observations comme un échantillon homogène issu d'une même population. Devant une telle situation, de quelle manière peut-on procéder.

En fait, les techniques statistiques nous fournissent, heureusement, une méthode d'élimination d'un point d'observation à caractère douteux.

4-1-5-2 Méthode d'élimination des données d'observation douteuses :

Avant d'entamer le calcul du coefficient de corrélation linéaire, on devrait analyser le diagramme de dispersion pour s'assurer du non existence de points aberrants. Si tel est le cas, on peut justifier leur existence, seulement, à l'aide des fluctuations aléatoires d'échantillonnage ou bien il ya une anomalie dans les conditions de collecte des données statistiques.

En réalité, il est en général, difficile de vérifier si les conditions de recueil des données ont subi un changement considérable.

C'est la raison pour laquelle on fait quasi-systématiquement appel à la méthode statistique destinée à résoudre un tel problème.

En se fixant un seuil de signification α et en cherchant la valeur maximale théoriquement permise V_n dans (l'annexe tableau 4) soit $V_{max}(n, Q)$ correspondant aux paramètres n , taille de

l'échantillon et $Q = 200\alpha = x\%$ on vérifie si l'inégalité $V_n < V_{max}(n, Q)$ est satisfaite ou non.

Au cas où l'inégalité précédente n'est remplie, il s'en suit que l'observation anormale x_{min} ou x_{max} doit être éliminée de tout traitement statistique ultérieur.

Précisons que l'interprétation de la grandeur α en tant que probabilité d'éliminer à tort la donnée douteuse n'est rigoureuse que si l'échantillon des observations est issu d'une population gaussienne.

4-1-5-2-1 Exemple illustratif :

Considérons un échantillon de données de défaillance d'un bloc mécanique de locomotive électrique :

$$t_1 = 3000 \text{ km}, t_2 = 7000 \text{ km}, t_3 = 9000 \text{ km}$$

$$t_4 = 4000 \text{ km}, t_5 = 11000 \text{ km}, t_6 = 9000 \text{ km}$$

$$t_7 = 6000 \text{ km}, t_8 = 10000 \text{ km}, t_9 = 5000 \text{ km}$$

$$t_{10} = 17000 \text{ km}, t_{11} = 7000 \text{ km}, t_{12} = 8000 \text{ km}$$

Il s'agit, au fait des essais de vieillissement dans des conditions de laboratoire se rapprochant le plus possible du régime d'exploitation. A la vu de ces résultats d'observation, on se pose la question de savoir si la plus grande valeur soit $t_{10} = 17000 \text{ km}$ n'est elle pas une conséquence d'adoucissement considérable des conditions des essais. En effet, si nous admettons, à tort, cette grandeur, dans l'échantillon nous augmenterons anormalement les caractéristiques de fiabilité du système. Ainsi si on se donne un seuil de signification $\alpha = 0,05$ alors $Q = 200\alpha = 10\%$.

D'après (l'annexe tableau4) on trouve : $V_{max}(n, Q) = V_{max}(12,10) = 2,387$ alors que

$$V_n = \frac{t_{(12)} - \bar{t}}{\delta_t} = \frac{17000 - 8000}{3710} = 2,426$$

Où \bar{t} est la moyenne de $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ et δ_t est l'écart type de t .

Puisque $V_n > V_{max}(12,10)$ il convient d'éliminer la valeur aberrante $t_{(12)} = 17000 \text{ km}$. Car la condition de non rejet de la valeur douteuse soit $V_n < V_{max}(n, Q)$ n'est pas vérifiée.

En conclusion l'analyse du diagramme de dispersion devient un préalable à toute étude de corrélation.

4-1-6 Estimateurs par intervalle de confiance du coefficient de corrélation

linéaire :

Dans l'hypothèse où la distribution conjointe des variables x, y est normale et que la taille de l'échantillon n est suffisamment grande, il est possible d'admettre que la distribution de \check{r}_{xy} est approximativement normale de moyenne égale à la valeur théorique $E(r_{xy})$ et de variance $Var(r_{xy}) = \frac{(1-r)^2}{n-1}$. Cependant si la taille de l'échantillon n est petite, l'assimilation de la distribution de r_{xy} à une loi de Gauss s'avère très grossière et cela est d'autant plus vrai que $|r_{xy}|$ tend vers 1.

Tenant compte de ces considérations, on peut déterminer les limites de l'intervalle de confiance $[r_{inf}, r_{sup}]$ en recourant à la formule :

$$r_{inf,sup} \approx \check{r} + \frac{\check{r}(1-\check{r}^2)}{2n} \pm \frac{u_{\alpha}}{2} \frac{(1-r)}{\sqrt{n-1}} \quad (4.118)$$

où $\frac{u}{2}$ est la valeur de la variable centrée réduite normale $N(0,1)$ de sorte que la vraie valeur du coefficient de corrélation r_{xy} appartient à l'intervalle $[r_{inf}, r_{sup}]$ avec un niveau de confiance $(1-\alpha)$.

4-1-7 Limite de l'estimateur de coefficient de corrélation linéaire par intervalle de confiance

L'estimateur ensembliste du coefficient de corrélation linéaire est donné par la formule (4.118). Toutefois son usage est assujéti à deux restrictions :

- i) La vraie valeur de r_{xy} ne doit pas être proche de ± 1
- ii) La taille n de l'échantillon doit être suffisamment grande.

4-1-7 Estimations par intervalle de confiance de la variable Z-transformée de

Fisher :

Afin de lever cette double restriction et améliorer par la même la normalité de la fonction de densité de probabilité du coefficient de corrélation empirique r_{xy} exprimée par la relation :

$$F(r_{xy}) = \frac{1}{\pi \Gamma(n-2)} (1-p^2)^{\frac{n-1}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{4}} \frac{d^{n-2}}{d(pr)^{n-2}} \frac{\arcsin pr}{(1-p^2 r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.119)$$

RA. Fisher a démontré que le changement de variable soit :

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}} \right) \quad (4.120)$$

Appelé Z transformée de Fisher permet de transformer la distribution (4.119) en une distribution normale.

Il a montré parallèlement que la distribution d'échantillonnage de cette nouvelle variable Z est avec une très bonne approximation distribuée normalement avec un écart type ne dépendant pas de p :

$$\delta Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (4.121)$$

$$\text{et de moyenne : } E(Z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+p}{1-p} \right) + \frac{p}{2(n-1)} \quad (4.122)$$

Le terme correctif de droite en (4.122) est toujours petit par rapport à l'écart type et donc on peut le négliger. Il ne joue un rôle que si on a calculé un grand nombre de coefficients de corrélation linéaire et que l'on veuille tirer la valeur moyenne de Z .

Maintenant, on dispose de tous les éléments qui permettent de construire, au seuil de signification α , l'intervalle de confiance $[Z_{inf}, Z_{sup}]$ autour de $E(Z)$.

$$\text{On a en effet : } Z_{inf} < E(Z) < Z_{sup} \quad (4.123)$$

En détaillant, on parvient à :

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) + \frac{r}{2(n-1)} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} < E(Z) < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) + \frac{r}{2(n-1)} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (4.124)$$

où la variable aléatoire $u = \frac{Z-E(Z)}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$ suit une loi gaussienne centrée réduite et $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est la valeur de

la variable centrée réduite telle que la probabilité que u soit comprise entre $-u_{\frac{\alpha}{2}}$ et $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est égale à $(1-\alpha)$.

Indiquons que la variable aléatoire $Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ est tout simplement l'expression logarithmique de la fonction argument tangente hyperbolique de r_{xy} , c'est-à-dire

$$Z = \text{argth } r \quad \text{ou bien } Z = \text{artanh } r \quad (4.125)$$

Par conséquent, il est possible de transcrire les limites de l'intervalle de confiance pour $E(Z)$ de la manière suivante :

$$\text{Argth } r + \frac{r}{2(n-1)} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} < E(Z) < \text{Argth } r + \frac{r}{2(n-1)} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (4.126)$$

4-1-8 Fonction tangente hyperbolique de Z -transformée de Fisher et Estimation par intervalle de confiance du coefficient de corrélation linéaire:

Remarquons que R.A Fisher a produit des tables qui facilitent le passage de r_{xy} vers Z et réciproquement. De plus, puisque la correspondance de la transformation de Fisher est univoque, autrement dit, à une valeur de r_{xy} correspond une seule valeur de Z et inversement. Parallèlement les signes de la fonction $Z = \text{arth } r_{xy}$ et de son argument r_{xy} coïncident, ce qui conduit à $|Z| = \text{arth}(r_{xy})$

Si l'on détermine un intervalle de confiance pour p à partir d'un coefficient de corrélation positif, la limite supérieure de l'intervalle sera plus proche de la valeur observée de r_{xy} que la limite inférieure. Par contre, si la valeur de r_{xy} est négative, c'est la limite inférieure de l'intervalle de confiance qui sera plus proche de r_{xy} que la limite supérieure. Toutefois au fur et à mesure que la taille de l'échantillon s'accroît, l'asymétrie de la distribution de r_{xy} diminue.

A présent dans le but de fixer les extrémités de l'intervalle de confiance autour du coefficient de corrélation de la population p_{xy} on doit procéder dans le sens opposé, en allant de Z transformé de Fisher vers le coefficient de corrélation empirique r_{xy} .

Il est possible de tirer à partir de Z transformée de Fisher la valeur de r_{xy} par la résolution de l'équation $Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ (4.127)

Prenons l'exponentiel des deux membres de (4.127) on obtient $e^{2Z} = \frac{1+r}{1-r}$ (4.128)

Ce qui implique que $e^{2Z} - r e^{2Z} = 1+r$ ou bien $e^{2Z} - 1 = r e^{2Z} + r$ (4.129)

d'où $r = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1}$. Cette formule rend possible la détermination des limites de l'intervalle de confiance autour de p_{xy} soit $\frac{e^{2Z_{inf}} - 1}{e^{2Z_{inf}} + 1} < P_{XY} < \frac{e^{2Z_{sup}} - 1}{e^{2Z_{sup}} + 1}$ (4.130)

Sachant que $\text{Th } Z = \frac{e^Z - e^{-Z}}{e^Z + e^{-Z}} = \frac{e^{2Z} - 1}{e^{2Z} + 1}$ où $\text{Th } Z$ est la fonction tangente hyperbolique de Z , on peut déterminer l'intervalle de confiance autour de la vraie valeur de P_{xy} ,

soit : $\text{Th } Z_{inf} < P_{xy} < \text{Th } Z_{sup}$ (4.131)

Exemple : Un échantillon de quarante bus à été suivi en exploitation pour connaître l'impact du coût de maintenance préventive sur le niveau de fiabilité opérationnelle.

On a enregistré pour chaque bus le montant alloué à la maintenance préventive pour **20** mois de fonctionnement, en même temps, que le niveau de fiabilité opérationnelle observée.

L'estimation ponctuelle de la corrélation entre ces deux variables a donné : $\check{r}_{xy} = 0,76$.

On demande d'estimer par intervalle de confiance, le coefficient de corrélation linéaire p_{xy} entre ces deux grandeurs variables avec un niveau de confiance de $1 - \alpha = 95\%$.

La limite inférieure de l'intervalle de confiance pour $E(Z)$ est donnée par :

$$Z_{inf} = \text{Argth } Z + \frac{r}{2(n-1)} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (4.132)$$

d'où : $Z_{inf} = 0,996 + 0,0095 - 1,96 \cdot 0,16442 = 1,0055 - 0,322 = 0,6934$

Tandis que la limite supérieure pour $E(Z)$ est donnée par :

$$Z_{sup} = \text{Argth } Z + \frac{r}{2(n-1)} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad (4.133)$$

d'où : $Z_{sup} = 1,0055 + 0,322 = 1,3275$

Finalement l'intervalle de confiance autour de $E(Z)$ est :

$$0,6934 < E(Z) < 1,3275$$

Maintenant déduisons l'intervalle de confiance pour P_{xy}

La limite inférieure pour P_{xy} vaut:

$$r_{inf} = \frac{e^{2(0,6994)} - 1}{e^{2(0,6994)} + 1} = \frac{e^{1,3988} - 1}{e^{1,3988} + 1} = \frac{3,0553}{5,0553} = 0,604$$

La limite supérieure pour P_{xy} est égale:

$$r_{sup} = \frac{e^{2(1,3275)} - 1}{e^{2(1,3275)} + 1} = \frac{e^{2,655} - 1}{e^{2,655} + 1} = \frac{13,1540}{15,1540} = 0,869$$

En fin de compte l'intervalle de confiance pour P_{xy} est : $0,604 < P_{xy} < 0,869$

auquel correspond une probabilité $1 - \alpha = 95\%$ de contenir la vraie valeur de P_{xy} .

Ainsi au seuil de signification de $\alpha = 5\%$ on peut affirmer qu'il existe une corrélation linéaire significative entre la variable du coût de maintenance préventive et celle du niveau de fiabilité opérationnelle.

4-2 Optimisation non linéaire avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine du modèle Weibull

La question qui se pose, maintenant, est de savoir comment à partir des deux tests de linéarité de Z- transformée de Fisher, respectivement, unilatérale et bilatérale de confectionner des fonctions objectif appropriées dont les valeurs modales coïncident avec l'estimateur ponctuel optimal du paramètre de repérage γ .

En réalité, la méthode à suivre consiste, après avoir appliqué les deux tests de linéarité de Z- transformée de Fisher au modèle Weibull standard soumis à une double transformation logarithmique, à les faire changer de leur forme ponctuelle en une forme carrément fonctionnelle, car leur variation respective va dépendre de la variation du paramètre d'origine γ .

Ainsi, on aboutira à deux sortes de fonctions économiques chacune d'elles, géométriquement parlant est caractérisée par une allure concave et par conséquent ayant un optimum unique qui représente, précisément le maximum global.

4-2-1 Test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine:

Fisher a démontré que lorsque la liaison linéaire entre deux variables (x, y) est vraisemblable alors, avec un niveau de confiance de $(1-\alpha)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sqrt{n-3} |\text{Artanh}R_{x,y}| \geq U_\alpha \quad (4.134)$$

où $\text{Artanh}R_{x,y}$ est la fonction arc tangente hyperbolique du coefficient de corrélation simple soit :

$$Z = \text{Artanh}R_{x,y} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+R_{x,y}}{1-R_{x,y}} \right) \quad (4.135)$$

et U_α est la valeur de la variable :

$$U = \frac{Z-E(Z)}{\delta_z} \quad (4.136)$$

distribuée suivant la loi normale centrée réduite telle que la probabilité que U soit supérieure ou égale à la grandeur $\sqrt{n-3} |\text{Artanh}R_{x,y}|$ vaut $(1-\alpha)$.

Dans ces conditions, on suppose vraie l'existence d'une liaison linéaire entre x, y. Par exemple si on choisit un niveau de confiance de 95%, Ce qui veut dire qu'on s'est fixé un

seuil de risque $\alpha=5\%$, d'où $U_\alpha = 1,645$ (voir l'annexetableau2 de la loi de Gauss centrée réduite).

Pour ce cas de figure, on peut formuler le test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher comme suit : $\sqrt{n-3}|ArtanhR_{x,y}| \geq 1,645$ (4.137)

Si on applique ce test au modèle Weibull standard soumis à une double transformation logarithmique et voulant, en même temps, aboutir au maximum de redressement linéaire du nuage de points : $N\left\{\ln(t_i - \gamma_j); \ln \frac{1}{1-F(t_i)}\right\}$, on se trouve désormais confronté à un problème d'optimisation avec paramétrage d'où la fonction objectif :

$$Max \sqrt{n-3}|ArtanhR_{x,y}(\gamma_j)| \geq 1,645 \quad ; j = 1,2 \dots m \quad (4.138)$$

$$où R_{xy}(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j) \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_j)]^2 - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_j)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2}} \quad (4.139)$$

est le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson avec paramétrage .

La fonction économique (4.138) n'est autre que l'expression du test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque de $\alpha=5\%$.

Remarquons que d'un point de vue géométrique cela se traduit par des figures distinctes, la première relative au cas où le mode du paramètre d'origine est positif alors que la seconde se rapporte au cas où le mode de ce même paramètre est négatif

4-2-1-Cas de la valeur modale positive du paramètre d'origine : $\gamma_M > 0$

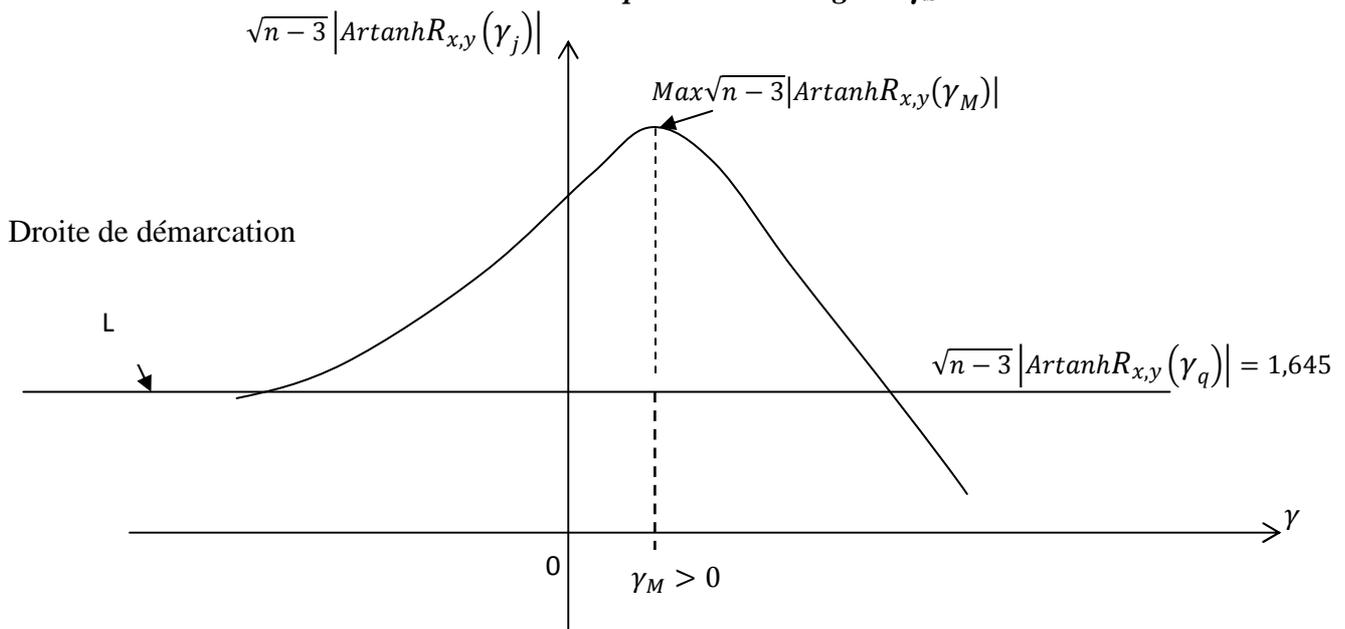


Figure 4.5 : Test de linéarité Z-transformée de Fisher avec paramétrage $\alpha = 5\%$: $\gamma_M > 0$.

4-2-1-2 Cas de la valeur modale négative du paramètre d'origine : $\gamma_M < 0$

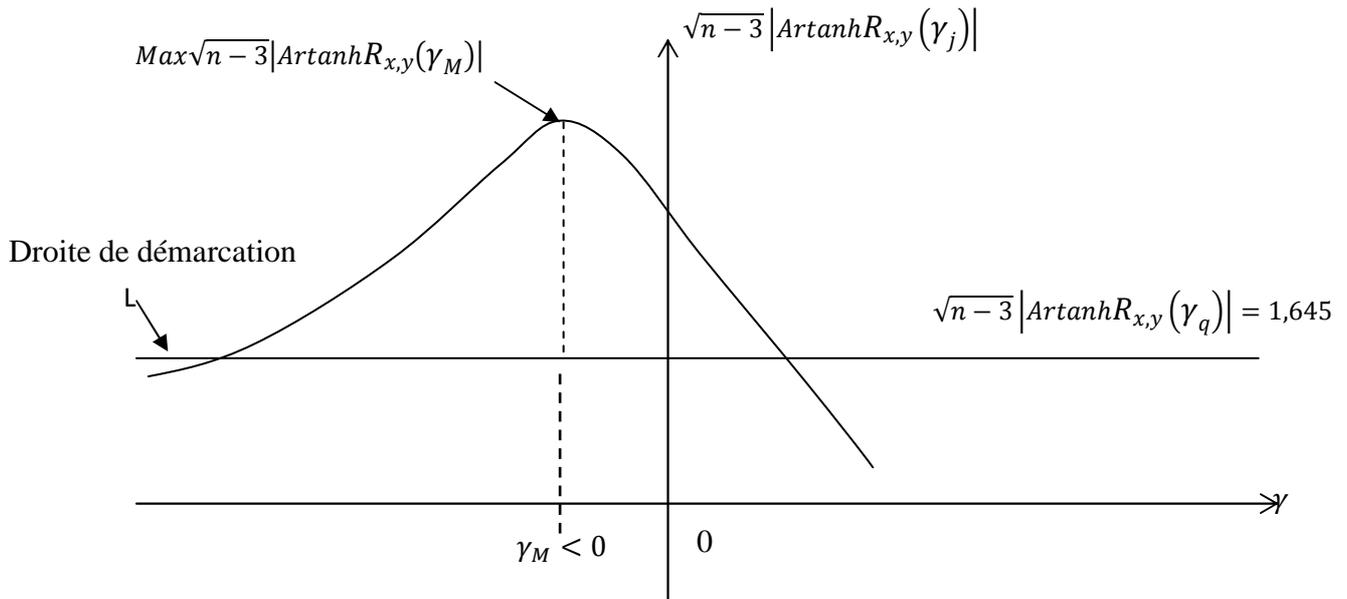


Figure 4.6 : Evolution du test unilatéral de Z-transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque $\alpha = 5\%$ pour $\gamma_M < 0$.

Notons que la droite (L) représentée par l'équation $\sqrt{n-3} |\text{Artanh} R_{x,y}(\gamma_q)| = 1,645$ indique un seuil limite au dessus duquel l'hypothèse de linéarité entre les deux grandeurs variables $\ln(t_i - \gamma_j)$, $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$ est acceptée et au dessous duquel la même l'hypothèse est rejetée.

Finalement la valeur modale γ_M est l'estimateur ponctuel optimal du paramètre d'origine du modèle Weibull standard.

4-2-2 Test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine :

Excepté le cas où le paramètre d'origine γ est nul, la forme du modèle Weibull logarithmiquement transformé soit :

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = \beta \ln(t - \gamma) - \beta \ln \eta \tag{4.140}$$

représente une allure curvilinéaire. Le diagramme de dispersion de la série double des données opérationnelles :

$$\left\{ \ln(t_i, \gamma_j); \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \right\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \tag{4.141}$$

doit, dans ces conditions, subir une translation horizontale dans le sens requis en faisant varier la grandeur du paramètre d'origine $\gamma_j ; j = 1, 2, \dots, m$.

Le critère d'arrêt de ce processus de translation coïncide avec l'aboutissement à un maximum de linéarité de la forme géométrique du diagramme de dispersion. Ainsi se pose la question de mesure non pas statique mais évolutive de l'intensité de la liaison linéaire entre $\ln(t_i, \gamma_j)$ et $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$

$$(4.142)$$

Dans ces conditions, il est préférable de faire usage de la Z transformée de Fisher qui offre la possibilité de détermination de la tendance linéaire évolutive du nuage de points avec intervalle de confiance.

A chaque nouvelle valeur du paramètre d'origine γ correspond donc un niveau plus grand d'intensité de la relation linéaire entre les deux grandeurs variables $\ln(t_i, \gamma_j)$ et $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$.

Chaque nouveau seuil d'intensité de la liaison linéaire entre les variables $\ln(t_i, \gamma_j)$ et $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$ coïncide avec une valeur précise de la Z- transformée de Fisher. Ainsi la variation du paramètre d'origine γ implique la variation de la Z-transformée de Fisher de sorte qu' l'on puisse identifier la relation fonctionnelle notée:

$$Z(\gamma_j) = \text{Artanh}R_{x,y}(\gamma_j); j = 1, 2, \dots, m \quad (4.143)$$

De la on définit $\text{Artanh}R(\gamma_j); j = 1, 2, \dots, m$ comme la Z-transformée de Fisher avec paramétrage. La fonction $\text{Artanh}R(\gamma_j); j = 1, 2, \dots, m$ atteindra son maximum global une fois réalisé le maximum de linéarité du nuage de points :

$$\mathcal{N} \left\{ \ln(t_i, \gamma_j); \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \right\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

A ce stade de notre raisonnement et après avoir établi la position du problème, il s'agit, à présent, de passer à une phase ultérieure. En effet, il reste à concevoir une fonction objectif tenant compte du test bilatéral de linéarité de Z- transformée de Fisher qui ne sera plus constant mais deviendra, également, variable en fonction de la grandeur du paramètre d'origine γ . En atteignant son maximum, cette fonction économique va nous conduire à un autre estimateur ponctuel du paramètre de localisation. Finalement le programme

mathématique, en suspens, peut être formulé de la manière suivante :

$$\text{Max} \left[\text{Argtanh} \left(R_{x,y}(\gamma_j) \right) \pm \frac{R_{x,y}(\gamma_j)}{2(n-1)} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right] ; j = 1, 2, \dots, m \quad (4.144)$$

Dans le cas particulier où le seuil de risque est fixé à $\alpha = 5\%$, la fonction objectif exprimée en termes du test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher est donnée par :

$$\text{Max } Z_{\text{inf,sup}}(\gamma_j) = \text{Max} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+R_{x,y}(\gamma_j)}{1-R_{x,y}(\gamma_j)} \right] \pm \frac{R_{x,y}(\gamma_j)}{2(n-2)} \pm \frac{1,96}{\sqrt{n-1}} \right\}, j = 1, 2, \dots, m \quad (4.145)$$

Les estimateurs du paramètre d'origine sont donc les valeurs modales de γ correspondant aux optima : $\text{Max} Z_{\text{inf}}(\gamma_j), \text{Max} Z_{\text{moy}}(\gamma_j), \text{Max} Z_{\text{sup}}(\gamma_j)$.

En anticipant sur les résultats du traitement numérique des données de fiabilité, on distingue les variantes géométriques suivantes :

4-2-2-1 Cas où la valeur modale de γ est positive : $\gamma_M > 0$

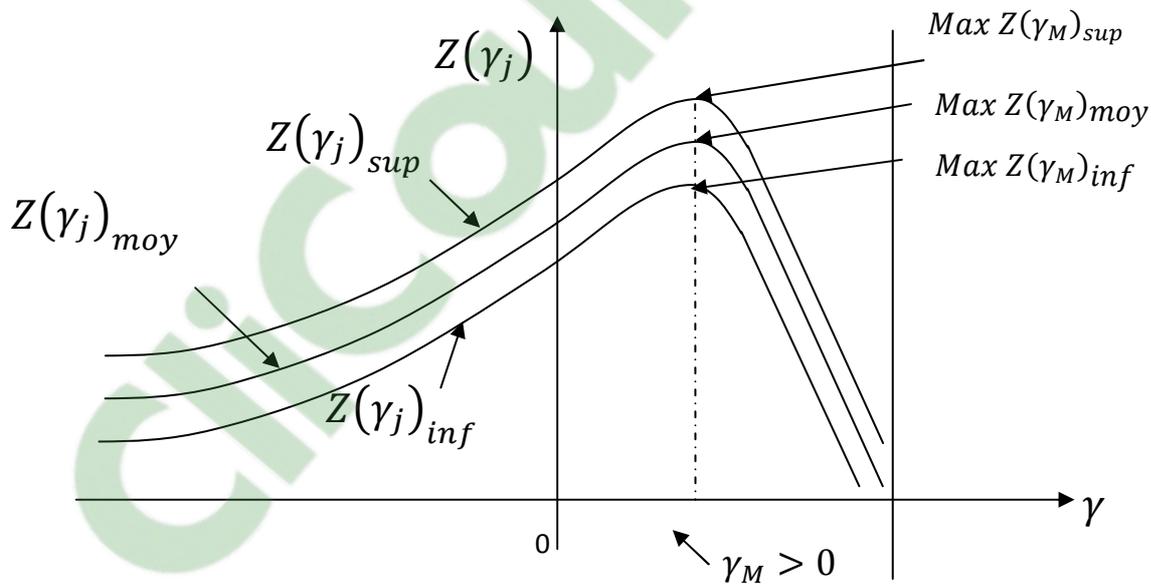


Figure 4.7 : Représentation graphique de $Z(\gamma_j)_{\text{inf}}, Z(\gamma_j)_{\text{moy}}, Z(\gamma_j)_{\text{sup}}$ en fonction de γ_j

4-2-2-2 Cas où la valeur modale de γ est négative : $\gamma_M < 0$:

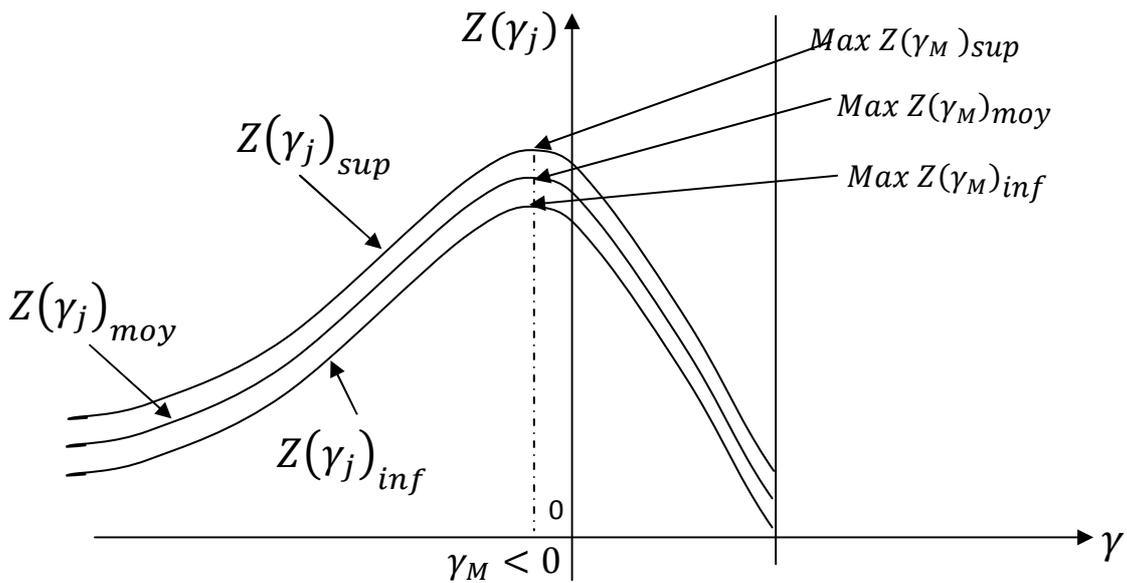


Figure 4.8 : Représentation graphique de $Z(\gamma_j)_{inf}$, $Z(\gamma_j)_{moy}$, $Z(\gamma_j)_{sup}$ en fonction de γ_j

A remarquer que les valeurs modales de γ relatives aux fonctions objectif $MaxZ(\gamma_j)_{inf}$, $Max Z(\gamma_j)_{moy}$, $Max Z(\gamma_j)_{sup}$ sont identiques. Par conséquent l'estimateur ponctuel du paramètre d'origine est γ_M .

Il permet un redressement optimal du nuage de points : $\mathcal{N} \left\{ \ln(t_i, \gamma_j); \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \right\}$ afin que la forme géométrique du diagramme de dispersion correspondant tende le plus possible vers une allure rectilinéaire.

4-2-3 Inverse du test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage et estimation ponctuelle du paramètre d'origine :

Étant donné que l'on cherche, toujours, à ce que la forme géométrique du nuage de points

$\mathcal{N} \left\{ \ln(t_i, \gamma_j); \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \right\}$ se rapproche le plus possible d'une allure rectilinéaire après

translation.les fonctions objectif correspondantes formulées sur la base de l'inverse du test

bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage, s'expriment comme suit :

i. $Max \text{ Tanh}Z_{sup}(\gamma_j) = Max R_{x,y, sup}(\gamma_j)$

ii. $Max \text{ Tanh}Z_{moy}(\gamma_j) = Max R_{x,y, moy}(\gamma_j)$

iii. $\text{Max Tanh}Z_{\text{inf}}(\gamma_j) = \text{Max } R_{x,y,\text{inf}}(\gamma_j)$

D'après l'analyse statistique et numérique ultérieure et d'un point de vue géométrique l'inverse du test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage donne les deux figures respectivement (4.9) et (4.10). A préciser que la fonction tangente hyperbolique avec paramétrage notée $\text{Tanh } Z(\gamma_j)$ s'identifie au coefficient de corrélation simple avec paramétrage désigné par $R_{x,y}(\gamma_j)$.

De plus, on doit indiquer qu'il existe une relation biunivoque entre la fonction $\text{Artanh}R_{x,y}(\gamma_j); j = 1, 2, \dots, m$ et la fonction réciproque respective $\text{Tanh}(\gamma_j)$. Il apparaît clairement que les trois valeurs modales correspondant aux maxima des trois courbes relatives aux fonctions $\text{Tanh } Z_{\text{sup}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{moy}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{inf}}(\gamma_j)$ sont identiques dans le cas où le mode γ_M est positif ou bien négatif comme le montre les deux figures (4.9), (4.10). Par conséquent, l'estimateur ponctuel optimal du paramètre d'origine est égale à $\gamma_M > 0$ pour le cas où la valeur modale de γ est positive et vaut $\gamma_M < 0$ pour le cas où la valeur modale de γ_M est négative.

4-2-3-1 Cas où la valeur modale de γ est positive : $\gamma_M > 0$

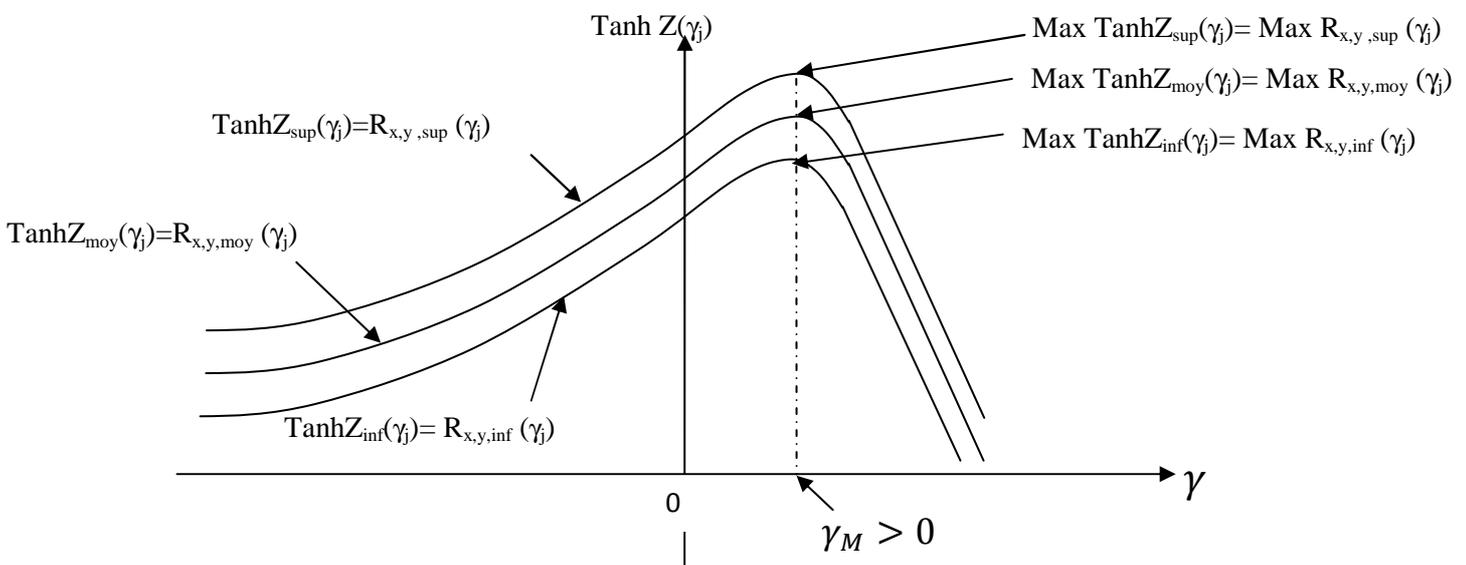


Figure 4.9 : Représentation graphique de $\text{Tanh } Z_{\text{sup}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{moy}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{inf}}(\gamma_j)$ en fonction de γ_j



4-2-3-2 Cas où la valeur modale de γ est négative : $\gamma_M < 0$:

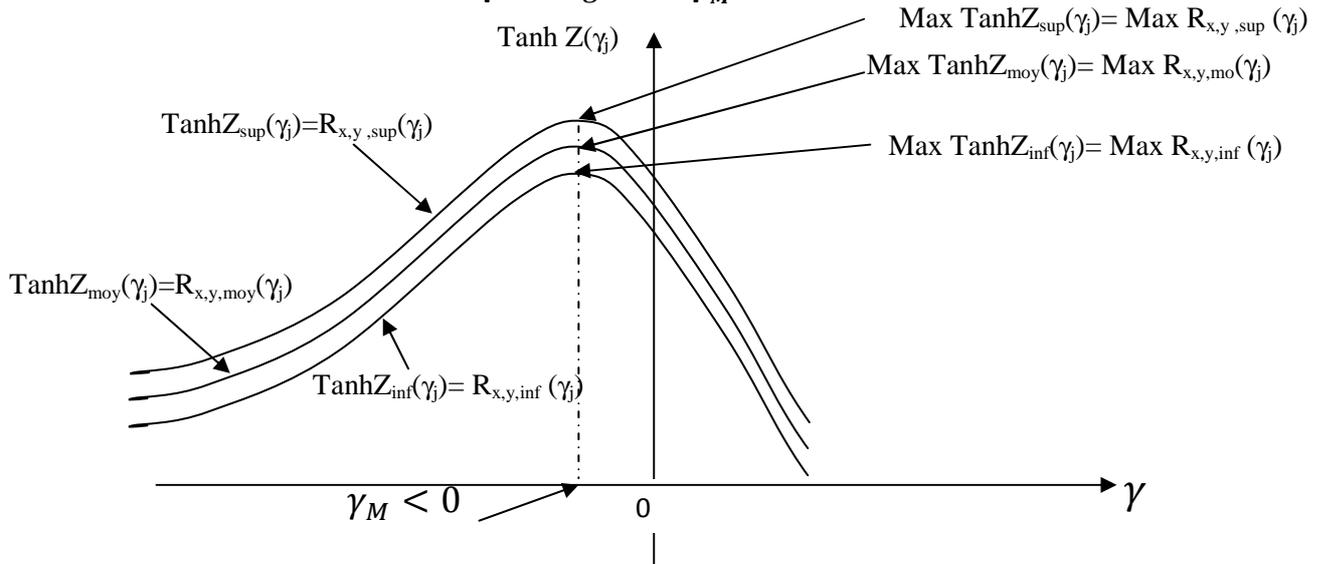


Figure 4.10 : Représentation graphique de $\text{Tanh } Z_{\text{sup}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{moy}}(\gamma_j)$, $\text{Tanh } Z_{\text{inf}}(\gamma_j)$ en fonction de γ_j

4-2-4 Méthode de résolution du problème d'optimisation posé :

De part la structure analytique des fonctions objectif précédentes notamment :

$\text{Max } R_{x,y}(\gamma_j)$ et $\text{Max } Z_{\text{inf,sup}}(\gamma_j)$ $j=1,2,3,\dots,m$, la méthode d'approximation successive paraît la plus adaptée pour déterminer les points optimaux.

Toutefois, un problème demeure en suspens et il est relatif à la grandeur du pas d'incrémentation qu'on doit adopter pour la conduite des calculs. Il est évident qu'il doit être choisi de manière à ce que la valeur modale trouvée coïncide, effectivement, avec le maximum de la fonction objectif et non pas en deçà ou au delà de l'optimum requis.

En l'absence d'un critère théorique général pour sélectionner le pas d'itération de γ , on a effectué une analyse numérique qui nous a permis de constater que la zone de stabilité des optima concernant les indices de performance en question correspond à $\Delta\gamma = 1$.

Chapitre V

Résolution du cas général d'un
système linéaire compatible non homogène

5-1-2-1 Premier cas de figure :

Le nombre d'équations est égal au rang du système d'où, Rang (A) = n alors $p \geq n$

5-1-2-1-1 Première variante :

$$\text{Rang}(A) = n = p. \tag{5.4}$$

g est alors une application linéaire à la fois.

$$(i) \quad \text{surjective : } \text{Im}(g) = \text{Dim}(F) = p = \text{rang}(A) \tag{5.5}$$

$$(ii) \quad \text{surjective : } \text{Det}(A) \neq 0 \implies \text{Range}(A) = p \tag{5.6}$$

$$\text{or } \text{Det}(A) \neq 0 \iff \text{ker}(g) = 0 \tag{5.7}$$

Donc g est de plus bijective et donc la matrice A possède un inverse A^{-1} .

•Elaboration de la règle de Cramer :

Supposons que le déterminant $\text{Det}(A)$ de la matrice A ne soit pas nul : $\text{Det}(A) \neq 0$.

Multiplions à gauche les deux membres de l'égalité $AX = B$ par la matrice inverse A^{-1} de A, on

$$\text{obtient : } A^{-1}AX = A^{-1}B \tag{5.8}$$

or : $A^{-1}A = I$.où I étant la matrice unité, et $IX = X$.

$$\text{de sorte qu'il découle de (5.8) que : } X = A^{-1}B \tag{5.9}$$

$$\text{Sachant que la matrice inverse de A est donnée par la formule : } A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\text{Det}(A)} \tag{5.10}$$

$$\text{alors : } X = \frac{\text{Adj}(A)}{\text{Det}(A)} B \tag{5.11}$$

Etant donné que $\text{Adj}(A)$ est la transposée de la matrice des cofacteurs, on peut écrire dans le cas d'une matrice A d'ordre $n = 3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{I}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}_{11} & \text{cof}_{21} & \text{cof}_{31} \\ \text{cof}_{12} & \text{cof}_{22} & \text{cof}_{32} \\ \text{cof}_{13} & \text{cof}_{23} & \text{cof}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Effectuons la multiplication des matrices dans le second membre :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{I}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} b_1 \text{cof}_{11} & b_2 \text{cof}_{21} & b_3 \text{cof}_{31} \\ b_1 \text{cof}_{12} & b_2 \text{cof}_{22} & b_3 \text{cof}_{32} \\ b_1 \text{cof}_{13} & b_2 \text{cof}_{23} & b_3 \text{cof}_{33} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Egalons les éléments respectifs des matrices colonnes à gauche et à droite, on obtient :

$$x_1 = \frac{b_1 \text{cof}_{11} + b_2 \text{cof}_{21} + b_3 \text{cof}_{31}}{\text{Det}(A)} \tag{5.14}$$

$$x_2 = \frac{b_1 \text{cof}_{12} + b_2 \text{cof}_{22} + b_3 \text{cof}_{32}}{\text{Det}(A)} \tag{5.15}$$

$$x_3 = \frac{b_1 \text{cof}_{13} + b_2 \text{cof}_{23} + b_3 \text{cof}_{33}}{\text{Det}(A)} \tag{5.16}$$

On remarque facilement que la première égalité peut s'écrire :

$$x_1 = \frac{1}{\text{Det}(A)} \sum_{j=1}^n \text{cof}_{j1} b_j \quad (5.17)$$

cof_{ij} étant dans $\text{Det}(A)$ le cofacteur de a_{ij} .

Si on rapproche cette relation (5.17) de $\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^n \text{cof}_{j1} a_{j1}$ (5.18)

Qui tout simplement le développement de $\text{Det}(A)$ suivant sa première colonne. On voit immédiatement que $\sum_{j=1}^n \text{cof}_{ji} b_j$ n'est autre que le déterminant d'ordre n en remplaçant dans

$\text{Det}(A)$ la première colonne par la matrice colonne B_j .

On le désignera par $\text{Det}(A)_1$. Par conséquent la valeur de la première inconnue est égale à :

$$x_1 = \frac{\text{Det}(A)_1}{\text{Det}(A)} \quad (5.19)$$

avec $\text{Det}(A)_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (5.20)

En général on a :

$$x_i = \frac{1}{\text{Det}(A)} \sum_{j=1}^n \text{cof}_{ji} b_j \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (5.21)$$

Donc la valeur d'une inconnue quelconque vaut: $x_i = \frac{\text{Det}(A)_i}{\text{Det}(A)} \quad i = 1, 2, \dots, n$ (5.22)

En désignant par $\text{Det}(A)_i$ le déterminant déduit de $\text{Det}(A)$ par remplacement des coefficients de la colonne i par les termes constants de la colonne b_j .

Les formules $x_i = \frac{\text{Det}(A)_i}{\text{Det}(A)} \quad i = 1, 2, \dots, n$ s'appellent formules de Cramer. Elles résolvent dans le cas général un système de Cramer.

Remarquons que les formules de Cramer ont dans le cas général un intérêt plus théorique que pratique, elles exigent le calcul de $n+1$ déterminants et permettent quand le $\text{Det}(A)$ n'est pas nul de calculer une inconnue du système indépendamment des autres.

5-1-2-1-1 Deuxième variante :

$$\text{Rang}(A) = n < p \quad (5.23)$$

Compte tenu de cette hypothèse on a :

$$\text{Rang}(A) = \text{Dim Im}(g) = \text{Dim } F = n, \text{ autrement dit : } \text{Im}(g) = F \quad (5.24)$$

En conséquence, g est surjective et ainsi quel que soit le vecteur \vec{B} le système (S_I) à des solutions.

De plus, on sait que : $\text{Dim ker}(g) + \text{Dim Im}(g) = \text{Dim } F = p$ (5.25)

et que : $Rang(A) = Dim Im(g)$ (5.26)

Donc : $Dim ker(g) = p - Rang(A)$ (5.27)

Il résulte qu'on a un système de Cramer par rapport aux inconnues principales x_1, x_2, \dots, x_r .

$$S_1 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1p}x_p = k_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rp}x_p = k_r \end{cases}$$

ce qu'il signifie que nous sommes devant un système indéterminé à $(p-r)$ paramètres.

5-1-2-2 Deuxième cas de figure :

Le nombre d'équations est supérieur au rang du système.

$$Rang(A) > n \tag{5.28}$$

Pour mener le raisonnement, adoptons l'interprétation vectorielle du système (S). Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n sur le corps K et $M = (e_1, e_2, \dots, e_p)$, $N = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ deux bases respectives de E et de F

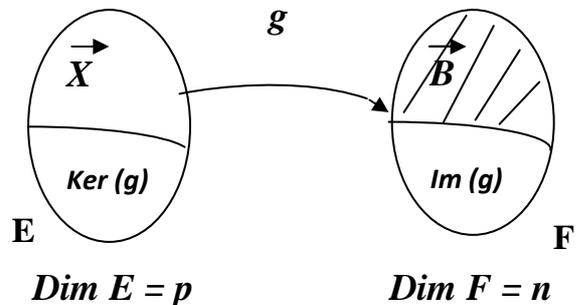
Soit l'application g de E dans F qui a pour matrice A . Si l'on désigne par \vec{X} le vecteur de E qui a pour coordonnées dans M les inconnues x_1, x_2, \dots, x_p et par \vec{B} le vecteur de F qui a pour coordonnées dans N les seconds membres b_1, b_2, \dots , le système (S) équivaut alors à la forme vectorielle $g(\vec{X}) = \vec{B}$ (5.29)

Tenant compte de l'hypothèse $Rang(A) < n$, l'application linéaire g n'est plus surjective puisque :

$$Rang(A) = Dim Im(g) < Dim F = n$$

De plus g n'est pas injective car : $ker(g) \neq 0$

Donc $g \begin{cases} \text{Non injective : } ker(g) \neq 0 \\ \text{Non surjective : } Im(g) \neq F \end{cases}$



L'équation vectorielle $g(\vec{X}) = \vec{B}$ a des solutions ou non selon que $\vec{B} \in Im(g)$ ou $\vec{B} \notin Im(g)$.

Il faut examiner à quelle condition le vecteur \vec{B} appartient au sous espace image de g :

$\vec{B} \in Im(g) \neq F$ des r vecteurs colonnes de la matrice A .

Soit le système suivant S_2 formé des r équations principales et d'une équation auxiliaire.

$$S_2 \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{rp}x_p = b_r \\ \boxed{a_{a1}x_1 + \dots + a_{ar}x_r + \dots + a_{ap}x_p = b_a} \end{cases}$$

L'équation d'ordre q est supplémentaire avec, $r+1 \leq q \leq n$.

Le système (S_2) sera compatible si et seulement si, le vecteur $\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_q)$ appartient à l'espace des r vecteurs colonnes : $A_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{q1})^T \dots A_r = (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{qr})^T$.

Cela est dû au fait que $Im(g)$ est engendrée par les vecteurs de base $\{\vec{g}(e_1), \vec{g}(e_2), \dots, \vec{g}(e_r)\}$ qui sont tout simplement les r premiers vecteurs colonnes de la matrice des coefficients A . Mais pour que $\vec{B} \in Im(g)$ il faut et il suffit que les $(r+1)$ vecteurs $\{\vec{g}(e_1), \vec{g}(e_2), \dots, \vec{g}(e_r), \vec{B}\}$ soient liés linéairement dans l'espace F . La question qui se pose maintenant est de savoir à quelle condition ces $(r+1)$ vecteurs constituent une famille liée. Afin de répondre à cette question, on énonce le théorème suivant :

Théorème fondamental :

Pour que n vecteurs d'un espace H de dimension m forment un système linéairement dépendant, il faut et il suffit que leur déterminant dans une base H .

$$\text{En vertu de ce théorème, on a alors : } \text{Det}\{\vec{g}(e_1), \vec{g}(e_2), \dots, \vec{g}(e_r), \vec{B}\} = 0. \quad (5.30)$$

Cela implique que la matrice de ces $(n+1)$ vecteurs colonnes $(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_r, \vec{B})$ soit de rang strictement inférieur à $n+1$ ou bien $\text{Rang}(C) < r+1$ (5.31)

Par ailleurs, on sait que :

$$C = \begin{pmatrix} R & & b_1 \\ & & b_r \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nr} & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots b_{1r} & b_1 \\ a_{r1} \dots a_{rr} & b_r \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nr} & b_n \end{pmatrix}$$

Et que par hypothèse $\text{Det}(R)$ est non nul, il s'ensuit que la matrice C est de rang égal ou supérieur à r .

$$\text{Autrement dit, } \text{Rang}(C) \geq r. \quad (5.32)$$

La comparaison des deux inégalités précédentes (5.10) et (5.11) montre qu'elles ne peuvent être compatibles que si et seulement si le rang de la matrice C est strictement égal à r .

La satisfaction de cette condition suppose évidemment la nullité des $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n+1)$ nommés déterminants caractéristiques dont la forme générale correspond à :

$$\text{Det}(C_k) = \begin{vmatrix} R & & b_1 \\ & & b_r \\ \dots & & \dots \\ b_{k1} \dots b_{kr} & & b_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots b_{1r} & b_1 \\ a_{r1} \dots a_{rr} & b_r \\ \dots & \dots \\ b_{k1} \dots b_{kr} & b_r \end{vmatrix}, \quad r+1 \leq k \leq n$$

Réciproquement, si l'ensemble des déterminants caractéristiques sont nuls, les p vecteurs colonnes de A appartiennent au sous-espace engendré par les r premiers vecteurs colonnes et par conséquent $\text{Rang}(C) = r$ (5.33)

Finalement, la condition nécessaire et suffisante pour que le système (S) soit consistant est que tous les déterminants caractéristique soient nuls :

$$Det(C_{k+1}) = Det(C_{k+2}) = \dots Det(C_{n-1}) = Det(C_n) = 0 \quad (5.34)$$

Afin de conclure cette étude, il convient d'énoncer le théorème suivant :

Théorème de Fontené- Rouché :

Soit un système (S) de n équations linéaires à p inconnues, de rang r .

- a. Si $Rang(A) = n = p$. (S) est un système de Cramer, il possède donc une solution unique.
- b. Si $Rang(A) = n < p$. le système (S) est indéterminé à $(p-r)$ paramètres. Le système (S) a des solutions obtenues en attribuant des valeurs aux $(p-r)$ inconnues auxiliaires, les r inconnues principales sont alors données par la règle de Cramer.
- c. Si $Rang(A) < n$ et les $(n-r)$ déterminants caractéristiques de (S) sont nuls, alors le système (S) se réduit aux r équations principales et on le résout comme dans le second cas.
- d. Si $Rang(A) < n$ et si l'un des déterminants caractéristiques est différent de zéro, le système (S) n'a pas de solution.

5-1-2-3 Positionnement relatif de deux droites de régression conjuguées comme cas particulier du théorème de Fontené-Rouché :

Le cas spécifique du théorème de Fontené- Rouché, à savoir le système de Cramer trouve une application intéressante en permettant de montrer que les droites de régression conjuguées des variables aléatoires (x, y) se recoupent effectivement au centre de gravité du nuage de points de la série double des observations $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$.

La forme analytique de la droite de régression de y par rapport à x est fournie par :

$$Y(x) = r \frac{\delta y}{\delta x} (x - m_x) + m_y \quad (5.35)$$

Quant à la droite de régression conjuguée, elle a comme expression analytique l'équation suivante :

$$X(y) = r \frac{\delta x}{\delta y} (y - m_y) + m_x. \quad (5.36)$$

où :

- r est le coefficient de corrélation linéaire.
- δx est l'écart type de la variable aléatoire x .
- δy est l'écart type de la variable aléatoire y .

- m_x est la moyenne arithmétique de x .
- m_y est la moyenne arithmétique de y .

Les paramètres r , δx , δy , m_x, m_y sont respectivement le coefficient de corrélation linéaire de (x, y) ; l'écart type de x , l'écart type de y ; la moyenne arithmétique de x et enfin la moyenne arithmétique de y .

Maintenant procédons aux transformations requises pour parvenir à un système algébrique linéaire non homogène.

Concernant la première équation de régression $y(x)$ on a :

$$\delta_x y = r \delta_y (x - m_x) + \delta_x m_y. \quad (5.37)$$

$$\delta_x y = r \delta_y x - r \delta_y m_x + \delta_x m_y. \quad (5.38)$$

d'où :

$$-r \delta_y x + \delta_x y = \delta_x m_y - r \delta_y m_x. \quad (5.39)$$

De même, pour la seconde équation $x(y)$ on a :

$$\delta_y x = r \delta_x y - r \delta_x m_y + \delta_y m_x. \quad (5.40)$$

$$\delta_y x - r \delta_x y = \delta_y m_x - r \delta_x m_y. \quad (5.41)$$

Ainsi on obtient le système (S) qui suit :

$$S \begin{cases} -r \delta_y x + \delta_x y = \delta_x m_y - r \delta_y m_x \\ \delta_y x - r \delta_x y = \delta_y m_x - r \delta_x m_y \end{cases}$$

Matriciellement transcrit le système (S) devient :

$$\begin{pmatrix} -r \delta_y & \delta_x \\ \delta_y & -r \delta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_x m_y - r \delta_y m_x \\ \delta_y m_x - r \delta_x m_y \end{pmatrix}$$

Calculons tout d'abord le déterminant du système (S) pour voir s'il est compatible ou non :

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} -r \delta_y & \delta_x \\ \delta_y & -r \delta_x \end{vmatrix} = r^2 \delta_x \delta_y - \delta_x \delta_y \quad (5.42)$$

Prenons $\delta_x \delta_y$ comme facteur commun il vient :

$$\Delta = \det(A) = \delta_x \delta_y (r^2 - 1) \quad (5.43)$$

En adoptant l'hypothèse selon laquelle $r_{xy}^2 \neq 1$ et sachant par définition que $\delta_x > 0$, $\delta_y > 0$ donc on parvient à :

$$\Delta = \det(A) = \delta_x \delta_y (r^2 - 1) \neq 0 \quad (5.44)$$

Il s'ensuit immédiatement que les deux rangs respectivement de la matrice fondamentale A et la matrice élargie $[AB]$ sont nécessairement identiques d'où :

$$\text{Rang}(A) = \text{rang}[AB] = 2 \quad (5.45)$$

Le système (S) est donc compatible et il coïncide avec le cas particulier du théorème de Fontené- Rouché caractérisé par la triple égalité :

$$\mathbf{Rang A} = n = p \quad (5.46)$$

Par conséquent il admet une solution unique fournie par la règle de Cramer soit :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} (\delta x m y - r \delta y m x) & \delta x \\ (\delta y m x - r \delta x m y) & -r \delta x \end{vmatrix}}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} \quad (5.47)$$

En développant il découle :

$$x = \frac{-r \delta x (\delta x m y - r \delta y m x) - \delta x (\delta y m x - r \delta x m y)}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} \quad (5.48)$$

$$x = \frac{-r \delta x^2 m y + r^2 \delta x \delta y m x - \delta x \delta y m x + r \delta x^2 m y}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} \quad (5.49)$$

d'où la valeur de la première inconnue aléatoire x :

$$x = \frac{\delta x \delta y m x (r^2 - 1)}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} = mx \quad (5.50)$$

Pour l'argument aléatoire y on a :

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -r \delta y & (\delta x m y - r \delta y m x) \\ \delta y & (\delta y m x - r \delta x m y) \end{vmatrix}}{\delta x \delta y (r^2 - 1)}$$

Après développement on obtient :

$$y = \frac{-r \delta y (\delta y m x - r \delta x m y) - \delta y (\delta x m y - r \delta y m x)}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} \quad (5.51)$$

$$y = \frac{-r \delta y^2 m x + r^2 \delta x \delta y m y - \delta x \delta y m y + r \delta x^2 m y}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} \quad (5.52)$$

d'où la valeur de la seconde variable aléatoire y :

$$x = \frac{\delta x \delta y m y (r^2 - 1)}{\delta x \delta y (r^2 - 1)} = my \quad (5.53)$$

Le vecteur solution est donc :

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Cela signifie tout simplement que les droites de régression passent ensemble par le point moyen $G'(m_x, m_y)$ du nuage de points de la série double (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, m$. comme l'indique la Figure 5.1.



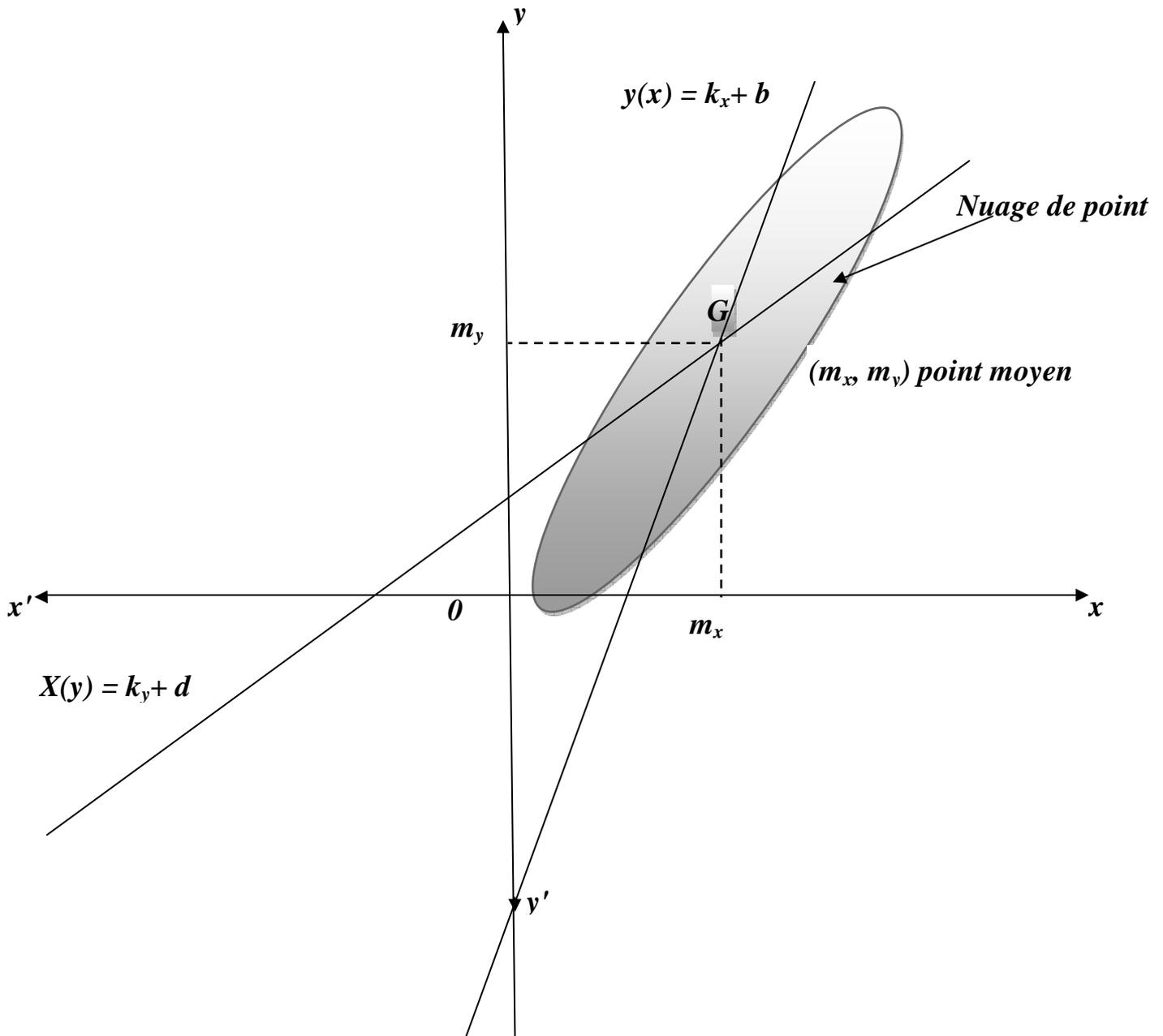


Figure 5.1 :Représentation des deux droites de régression conjuguées

N'étant pas symétriques par rapport à la première bissectrice, les deux équations de régression $y(x)$, $x(y)$ ne sont pas réciproques l'une de l'autre mais elles sont conjuguées.

5-1-2-4 Résolution d'un système d'équations linéaires selon le théorème de Fontené-Rouché :

Soit à résoudre, selon le théorème de Fontené-Rouché le système (S) de quatre équations à trois inconnues.

$$S \begin{cases} u + v + 2w = -2 \\ u + 2v + 3w = \beta \\ 3u + 5v + 8w = 2 \\ 5u + 9v + 14w = \mu \end{cases}$$

β, μ étant deux paramètres strictement positifs.

La démarche, de la solution du système (S) peut être entamée par sa transcription matricielle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \beta \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

D'une manière condensée, on a : $A X=B$

où A est la matrice des coefficients a_{ij} ; $i= 1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3$,

X étant le vecteur des inconnues soit $X^t=(u \ v \ w)^t$ et B le vecteur colonne des constantes soit

$$B^t = (-2 \ \beta \ 2 \ \mu)^t \quad (5.56)$$

La solution du système (S), conformément au théorème de Fontené-Rouché requiert, au préalable la connaissance du rang de la matrice A.

$$\text{d'où} \quad A= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Etant donné que la matrice A est rectangulaire, il est impossible de calculer, directement, le déterminant respectif.

Afin de faciliter le calcul nécessaire, il est avantageux d'utiliser la méthode de Kuroch (7).

Tout d'abord, commençons par sélectionner un mineur non nul du second ordre.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad (5.58)$$

Il s'en suit que le rang de la matrice A est au moins égal à 2 ie $\text{rang}(A) \geq 2$. Voyons s'il peut atteindre son niveau maximum coïncidant avec le nombre de variables à savoir $\text{rang}(A) = P=3$.

La suite des opérations selon la méthode de Kuroch demande l'encadrement successivement par les colonnes et les lignes qui suivent D2.

$$D'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}, D'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & 9 & 14 \end{vmatrix} \quad (5.59)$$

On établit, immédiatement que $D_3 = D'_3 = 0$ car dans les deux cas la troisième colonne est une combinaison linéaire des deux premières.

Puisque les déterminants D_3 et D'_3 sont nuls, on déduit que le rang de la matrice A est nécessairement inférieur à 3. Ainsi le rang de A est identiquement égal à 2.

Sachant que le nombre d'équations est plus grand que le rang de A alors le nombre de déterminants caractéristiques pouvant être identifiés ne peut dépasser deux ie

$$(n - r) = 4 - 2 = 2.$$

En bordant le mineur d'ordre deux non nul par les éléments correspondant de la colonne des constantes et par les éléments de la troisième ligne, on obtient le premier déterminant caractéristique :

$$D_{r+1} = D_{2+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & \beta \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad (5.60)$$

En encadrant le mineur de par les éléments respectifs de la colonne des constantes et par les éléments respectifs de la quatrième ligne, on parvient au second déterminant caractéristique :

$$D_{r+2} = D_{2+2} = \begin{vmatrix} & 1 & -2 & \\ 1 & 2 & & \beta \\ \hline 5 & 9 & \mu & \end{vmatrix} \quad (5.61)$$

Afin de connaître les valeurs de D_{r+1} et D_{r+2} on applique la règle de Sarrus car l'ordre de ces déterminants caractéristiques est trois.

Précisons que la règle de Sarrus consiste à répéter, au dessous des deux tableaux fournis respectivement par D_{r+1} et D_{r+2} , les deux premières lignes et à affecter du signe positif les produits obtenus parallèlement à la diagonale principale, du signe négatif ceux obtenus parallèlement à la diagonale non principale :

Pour le moment passons à l'application de la règle de Sarrus pour l'exemple traité.

Par rapport à D_{r+1} on procède comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 1 & -2 \\
 1 & 2 & \lambda \\
 3 & 5 & 2 \\
 \hline
 1 & 1 & -2 \\
 1 & 2 & \beta
 \end{array}
 \quad (5.62)$$

donc

$$D_{r+2} = \left\{ 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot \lambda \right\} - \left\{ (-2) \cdot 2 \cdot 3 + \lambda \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \right\} \quad (5.63)$$

$$D_{r+2} = \left\{ (4 - 10 + 3\lambda) - (-12 + 5\lambda + 2) \right\} = (-6 + 3\lambda) - (-10 + 5\lambda) \quad (5.64)$$

$$D_{r+2} = -6 + 10 + 3\lambda - 5\lambda = 4 - 2\lambda \quad (5.65)$$

$$\text{d'où } \boxed{D_{2+1} = 4 - 2\lambda} \quad (5.66)$$

Pour le second déterminant caractéristique D_{r+2}

on a :

$$D_{r+2} = \{(1.2.\mu - 1.92 + 5.1\lambda)\} - \{(-2).2.5 + \lambda.91 + \mu.11\} \quad (5.68)$$

$$D_{r+2} = (2\mu - 12 + 5\lambda) - (-20 + 9\lambda + \mu) \quad (5.69)$$

$$D_{r+2} = 2\mu - 12 + 5\lambda + 20 - 9\lambda - \mu \quad (5.70)$$

$$D_{r+2} = \mu + 2 - 4\lambda \quad (5.71)$$

$$\text{d'où } \boxed{D_{r+2} = 2 - 4\lambda + \mu} \quad (5.72)$$

D'après le théorème de Fontené-Rouché, deux cas de figures peuvent être distingués :

Premièrement : le système (s) est consistant si et seulement si les deux déterminants caractéristique sont nuls ie $D_{r+1} = D_{r+2} = 0$ ce qui nous ramène à double l'égalité :

$$-2\lambda + 4 = -4\lambda + \mu + 2 = 0 \quad (5.73)$$

A partir de la première équation $-2\lambda + 4 = 0$ on déduit la valeur du paramètre λ qui est égal à 2.

En substituant cette valeur dans la seconde équation $-4\lambda + \mu + 2 = 0$ on parvient à la valeur du second paramètre soit $\mu = 6$.

Donc les conditions de compatibilité du système (S) selon le théorème de Fontené-Rouché sont :

$$(\lambda, \mu) = (2, 6)$$

Puisque le rang du système (S) est égal à deux, ce dernier se réduit alors d'une manière automatique aux deux équations principales.

En outre, on sait que $(P-r) = 3-2=1$, ce qui signifie que le degré d'indétermination du système (S) vaut un. Pour fixer les idées, on considère μ, v comme deux variables principales, tandis que w est pris comme variable auxiliaire qui joue le rôle d'un paramètre.

Au cas où nous préférons retenir les deux premières équations, tout en négligeant les deux dernières, on aboutit à un système (S_1) équivalent à S soit :

$$S \left\{ \begin{array}{l} u + v + 2w = -2 \\ u + 2v + 3w = \beta \\ 3u + 5v + 8w = 2 \\ 5u + 9v + 14w = \mu \end{array} \right\} \iff S_1 \left\{ \begin{array}{l} u + v = -2w - 2 \\ u + 2v = -3w + \beta \end{array} \right.$$

Il est remarquable que le rang de S_1 est identique à la fois au nombre d'équations et au nombre de variables. Le système (S_1) , par rapport aux inconnues principales v, u est bien un système de Cramer. L'application de la règle de Cramer devient par conséquent possible.

Ainsi on obtient successivement :

$$i) \frac{u}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta} \rightarrow \frac{u}{\begin{vmatrix} (-2w-2) & 1 \\ (-3w+\lambda) & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1 \quad (5.74)$$

d'où $u = -w - \lambda - 4$ et tenant compte du fait que $\lambda = 2$ il vient $u = -w - 6$

En attribuant à l'inconnue auxiliaire w la valeur arbitraire λ , il résulte que

$$\boxed{u = -\alpha - 6} \quad (5.75)$$

C'est-à-dire que la variable principale u possède une infinité de valeur dépendant du paramètre λ

$$ii) \frac{v}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta} \rightarrow \frac{v}{\begin{vmatrix} 1 & (-2w-2) \\ 1 & (-3w+\lambda) \end{vmatrix}} = 1$$

$$d'où $v = (-3w + \lambda) - (2w - 2) = -w + \lambda + 2$ (5.76)$$

En remplaçant λ par sa valeur, on parvient à $v = -w + 4$

Or, on sait déjà que $w = \alpha$ d'où $v = -\alpha + 4$ et la solution globale du système (S) devient :

$$\mu = -\alpha - 6 ; v = -\alpha + 4$$

Par conséquent, il est possible d'obtenir une infinité de solutions en attribuant un nombre infini de valeurs arbitraires au paramètre λ , ce qui confirme que le système (S_1) est indéterminé à un paramètre.

Deuxièmement : si on suppose que $n \neq 2$ et $\mu \neq 6$ alors le système (S_1) n'a pas de solution car il existe un déterminant caractéristique non nul ie $D_{r+1} \neq 0$ et $D_{r+2} \neq 0$ ce qui conduit à l'incompatibilité du système (S).

Théorème de Kronecker-Capelli

Un système algébrique linéaire non homogène admet une solution si, et seulement si, le rang de la matrice de ce système est égal au rang de la matrice élargie.

Démonstration :

Considérons un système (S) algébrique linéaire non homogène de n équations à p inconnues où n n'est pas nécessairement identique à p :

$$S \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1j}x_j & \dots & a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2j}x_j & \dots & a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & a_{i2}x_2 & \dots & a_{ij}x_j & \dots & a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \dots & a_{nj}x_j & \dots & a_{np}x_p = b_n \end{array} \right. \quad (5.77)$$

Maintenant une précision importante s'impose à savoir que même dans le cas de l'hypothèse de consistance du système (S), le théorème de Kronecker-Capelli, bien qu'il soit un théorème fondamental de compatibilité d'un système algébrique linéaire non homogène, ne fournit malheureusement pas de méthode pratique de résolution. Dans ce qui suit, on va proposer des procédures permettant de solutionner le système (S) et cela en distinguant les différents cas de figures possibles.

Au préalable, reconsidérons le système algébrique linéaire non homogène (S) dont la matrice fondamentale $A = [a_{ij}] ; i=1,2,\dots,p$ est de rang r qui est égal, rappelons le, au nombre maximum de lignes ou de colonnes linéairement indépendants de cette matrice des coefficients du système (S).

Nous pouvons écrire ce système d'une manière condensée sous la forme :

$$\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.78)$$

Ce qui conduit à l'équation matricielle

$$AX=B \quad (5.79)$$

où A est la matrice du système (S) , X le vecteur colonne des inconnues $X=[x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_p]^t$ et B le vecteur colonne des termes constants soit, $B = [b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n]^t$

Selon les valeurs des coefficients et des composants constants, un tel système peut soit avoir une solution unique ou posséder une infinie de solutions ou bien encore n'admettre aucune solution.

La matrice des coefficients des équations du système notée A est donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

On l'appelle matrice fondamentale du système S si on juxtapose à la matrice A le vecteur colonne des seconds membres des équations du système (S) ; on obtient une matrice dite élargie soit :

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} & b_n \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Admettant maintenant que le rang de la matrice A soit égal à r, auquel cas, le rang de la matrice élargie G est au moins identique à celui de A c'est-à-dire,

$$\text{Rang } [AB] = \text{rang } (G) \geq \text{rang } (A) \quad (5.82)$$

Adoptons l'hypothèse selon laquelle, le système (S) est consistant, autrement dit, qu'il admet une solution. Considérons que l'ensemble des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ représente la solution du système (S).

La substitution, dans le système (S) ; des inconnues par ces nombres, conduit à n identités :

$$S1 \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1j}\alpha_j + \dots + a_{1p}\alpha_p = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2j}\alpha_j + \dots + a_{2p}\alpha_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{ij}\alpha_j + \dots + a_{ip}\alpha_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nj}\alpha_j + \dots + a_{np}\alpha_p = b_n \end{array} \right. \quad (5.83)$$

Ce qui peu s'écrire d'une autre manière :

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_j \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{ip} \\ \vdots \\ a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

ou bien encore

$$\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_j A^j + \dots + \alpha_p A^p = B \quad (5.85)$$

où $A^j, j=1,2,\dots,p$ sont les vecteurs colonnes de A d'une façon plus brève on obtient :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j A^j = B \quad (5.86)$$

La substitution dans le système (S) ; des inconnues par ces nombres conduit à n identités :

$$S1 \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1j}\alpha_j + \dots + a_{1p}\alpha_p = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2j}\alpha_j + \dots + a_{2p}\alpha_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{ij}\alpha_j + \dots + a_{ip}\alpha_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nj}\alpha_j + \dots + a_{np}\alpha_p = b_n \end{array} \right. \quad (5.87)$$

Ces identités indiquent que le vecteur colonne des constantes B est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes $A^j, j=1,2,\dots,p$ de la matrice A multipliés respectivement par les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p$ d'où

$$B = \sum_{j=1}^p \alpha_j A^j \quad (5.88)$$

Ce qui montre que la dernière colonne de la matrice composite $G = [AB]$ est une combinaison linéaire des autres colonnes de cette même matrice, la série des coefficients de cette combinaison étant, respectivement, les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p$. Il est maintenant clair que tout vecteur colonne de la matrice élargie $[AB]$, est également un vecteur colonne de la matrice A, excepté le

dernier, dont les éléments s'expriment linéairement par les éléments des autres vecteurs colonnes de la matrice A.

Algébriquement, cela se traduit tout simplement par la nullité du déterminant du système et de la matrice composite [AB] soit $\det [AB] = \det [{}^1A, {}^2A, {}^3A, \dots, {}^jA, \dots, {}^pA] = 0$

Il en résulte que les systèmes des vecteurs colonnes des deux matrices A et [AB] sont équivalents. Par conséquent, la matrice des coefficients A et la matrice composite $G=[AB]$ possèdent le même rang, autrement dit

$$\text{rang } [A] = \text{rang } [AB] \quad (5.89)$$

Réciproquement, admettons que le rang de la matrice fondamentale A soit identique au rang de la matrice élargie [AB], ceci signifie, évidemment, que toute famille comportant un nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants issus de la matrice A est aussi un système linéairement indépendant d'un nombre maximal de vecteurs colonnes de la matrice augmentée $G= [AB]$. C'est la raison pour laquelle, il est possible, d'exprimer la dernière colonne de la matrice élargie G combinaison linéaire du système des vecteurs de la matrice A. Plus précisément, si l'on dispose d'une suite de coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p$ de telle sorte que si l'on effectue, successivement, les multiplications des vecteurs colonnes $A_j, j=1,2,\dots,p$ et après sommation, on parvient au vecteur colonnes des termes constants, c'est-à-dire, qu'on retrouve la combinaison linéaire précédemment établie soit :

$$B = \sum_{j=1}^p \alpha_j A^j \quad (5.90)$$

Ce qui montre que l'ensemble des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_p$ forme bien une solution du système (S).

Par conséquent, l'identité des rang des deux matrices A et [AB] engendre la consistance du système (S).

Equivalence entre le théorème de Fontené-Rouché et le théorème de Kronecker-Capelli :

On démontre que la nullité de tous les déterminants caractéristiques d'un système d'équations linéaires $AX=B$ équivaut à la condition que la matrice composite [AB] ait le même rang que la matrice des coefficients A.



5-1-2-Illustration géométrique des théorèmes de Fontené-Rouché et Kronecker-Capelli :

Soit un système algébrique linéaire non homogène de deux équations à deux inconnues.

$$S \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1. \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (5.91)$$

où les coefficients a_{ij} , $i = 1,2 ; j = 1,2$. sont des réelles strictement positives.

Il est évident que chacune des deux équations du système (S), représente une droite dans \mathbb{R}^2 dans le plan xy .

Afin de déterminer la solution de ce système (S), on doit envisager trois éventualités.

Premièrement :

Si le déterminant du système (S) est non nul $\Delta \neq 0$

$$\det[A] = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \quad (5.92)$$

où n est le nombre d'équations et p le nombre de variables, ce qui implique que le système (S) possède une solution unique.

Etant donné que le rang de la matrice composite AB est égale au rang de la matrice des coefficients A ie $\text{Rang}[AB] = \text{Rang}[A] = 2$, la compatibilité du système S est également confirmée par le théorème Kronecker-Capelli

Géométriquement, cela signifie que les deux droites L_1, L_2 émanent du système (S) (figure 5.2). et ont un seul point d'intersection $P(x,y)$ ie $L_1 \cap L_2 = \{P(x,y)\}$, dont les coordonnées sont données par la formule de Cramer :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} ; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (5.92)$$

$$\text{où } \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (5.93)$$

Remarquons dans ce cas que les coefficients des deux droites L_1, L_2 ne sont pas proportionnels,

$$\text{cela signifie que } \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (5.94)$$

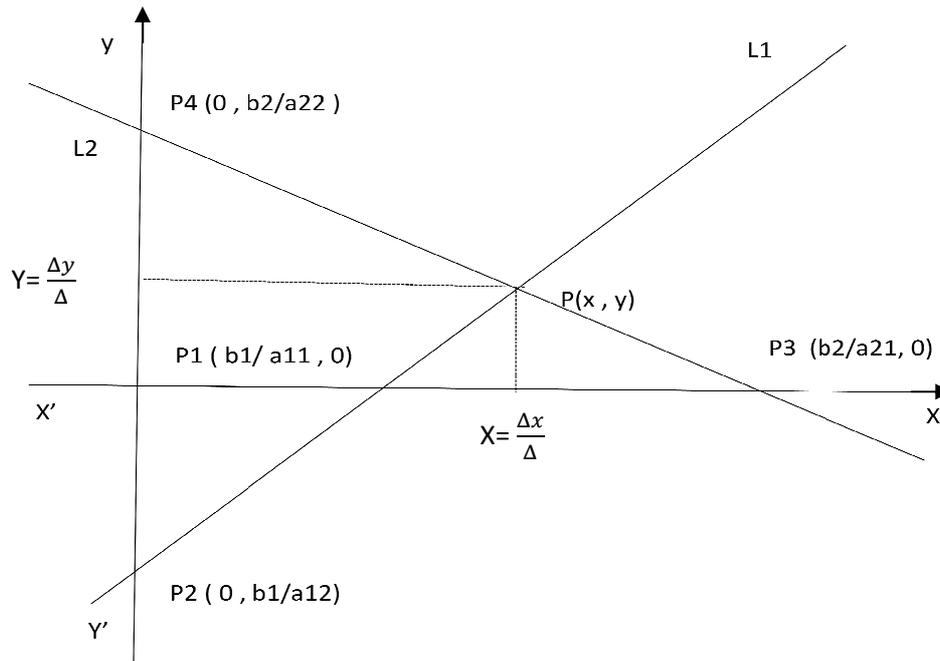


Figure 5.2 : Représentation graphique d'un système Linéaire bidimensionnel ayant une solution unique.

Deuxièmement :

Si le déterminant du système (S) est nul ie

$$\det[A] = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \quad (5.95)$$

alors le rang du système (S) est égale à l'unité autrement dit Rang [A]=1 et donc il est inférieur au nombre d'équations : Rang[A]<n

En outre puisque [n-Rang(A)]=1, donc on a un seul déterminant caractéristique qu'on va supposer égale à zéro ie

$$C_{n+1} = C_{1+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \Delta y = 0 \quad (5.96)$$

Ce qui entraine la compatibilité du système (S).

Compte tenu du Rang [A]=1, le système (S) se réduit automatiquement à une seule équation soit $a_{11}x + a_{21}y = b_2$.

Si on suppose que Rang [AB] = Rang[A] = 0 ; d'après le théorème de Kronecker-Capelli, le système S est compatible.

Par ailleurs, on sait que $\text{Rang}[A] < p$, ce qui signifie que l'une des variables va jouer le rôle d'un paramètre.

Par conséquent, le système (S) est indéterminé à un paramètre. Selon le théorème de Fontené-Rouché, en attribuant des valeurs arbitraires à une des variables par exemple x on parvient à une infinité de solutions

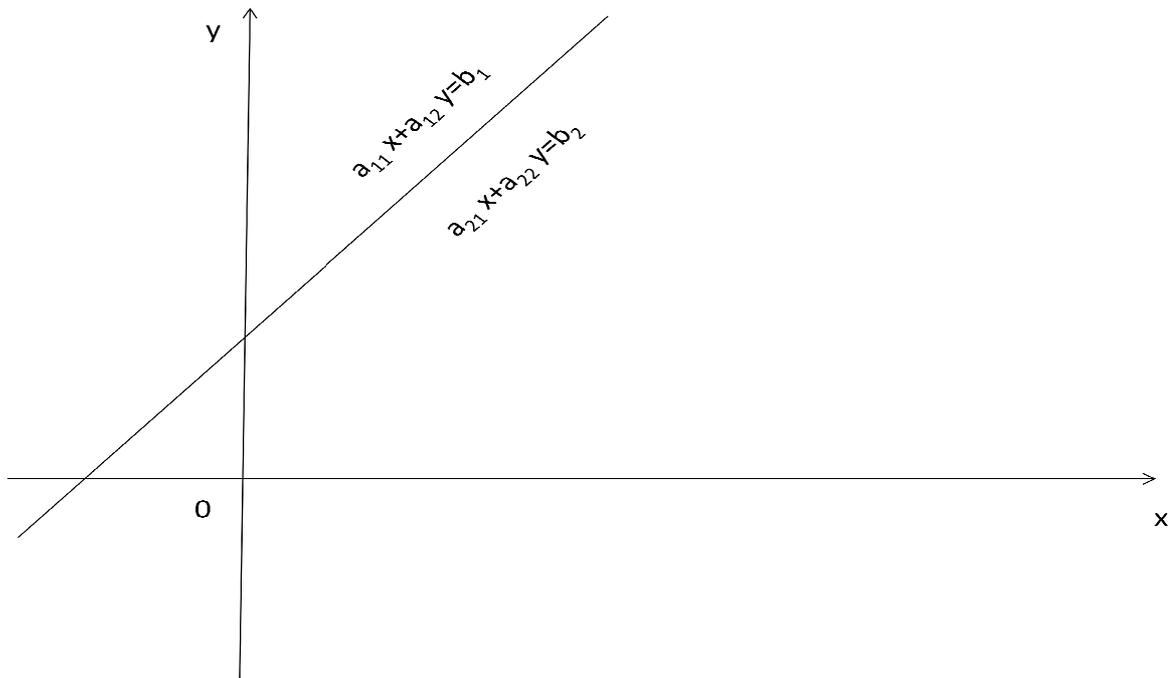


Figure 5.3 : Représentation graphique d'un système linéaire bidimensionnel
Indéterminé à un paramètre.

Comme le montre la figure 5.3, les deux droites sont confondues, cela s'explique par le fait que les coefficients ainsi que les termes constants des deux droites sont proportionnels entre eux,

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \quad (5.97)$$

Troisièmement :

Si le déterminant du système (S) est nul ie

$$\det[A] = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad (5.98)$$

donc le rang du système (S) est égal à l'unité, ce qui veut dire également qu'il est inférieur au nombre d'équations ie $\text{Rang}[A] < n$.

Parallèlement, puisque $[P - \text{Rang}(A)] = 1$, alors il existe un seul déterminant caractéristique supposé non nul ie

$$C_{r+1} = C_{1+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \Delta y \neq 0 \quad (5.99)$$

En vertu du théorème de Fontené-Rouché cela induit la non compatibilité du système (S), c'est-à-dire d'un point de vue géométrique (figure 5.3) que les deux droites L1 ; L2 sont parallèles ie

$$L1 // L2 \quad d'o\grave{u} \quad L1 \cap L2 = \emptyset$$

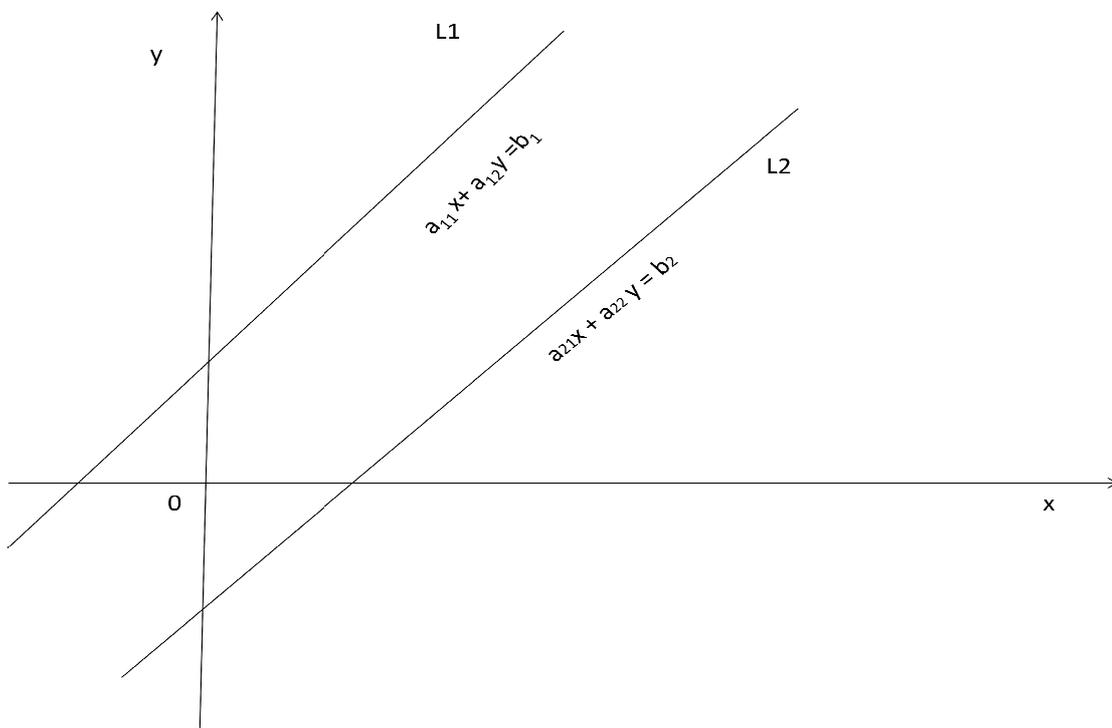


Figure 5.4 : Représentation graphique d'un système linéaire incompatible

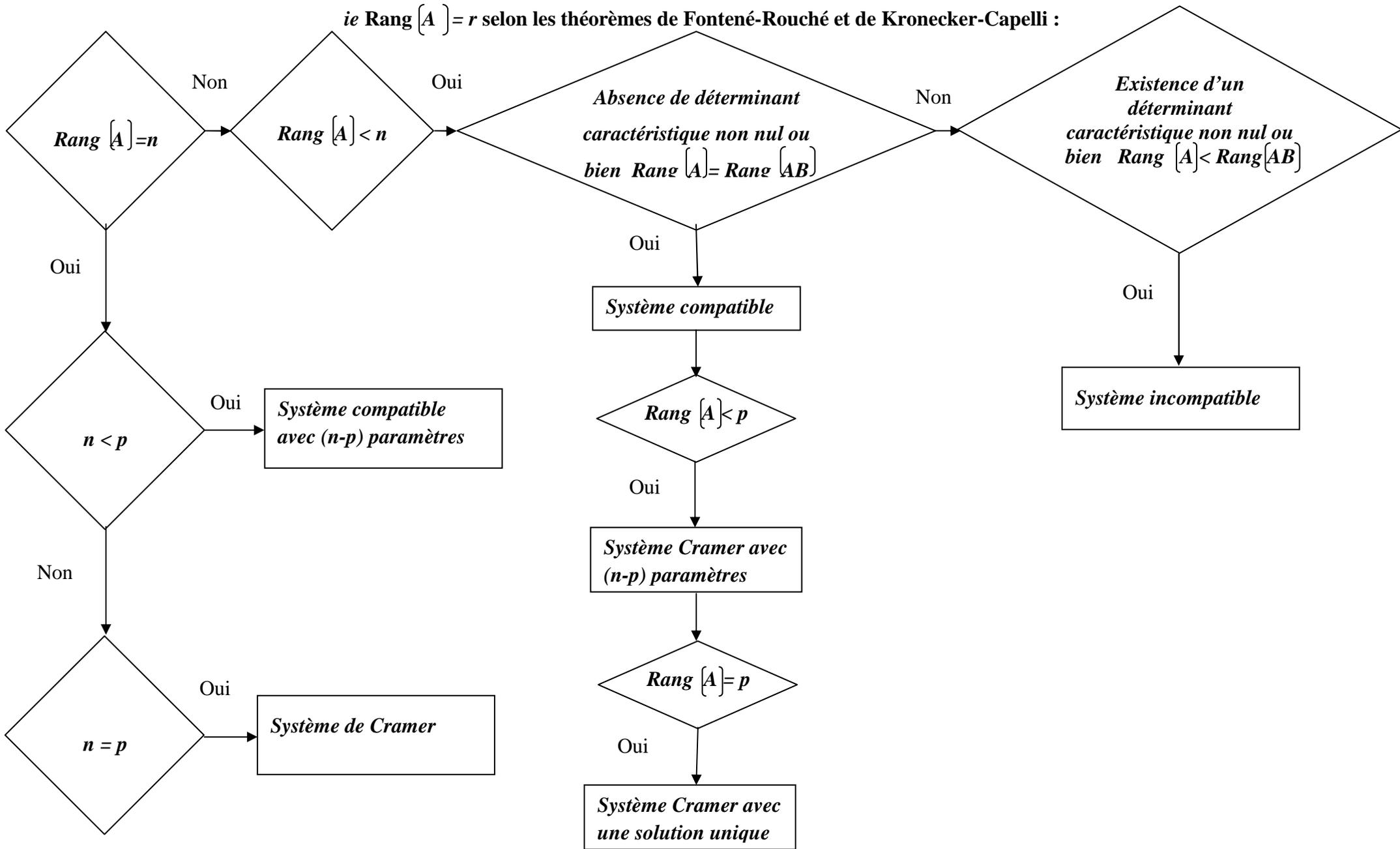
Par référence au théorème Kronecker-Capelli, cela suppose que le rang de la matrice [A] est inférieur au rang de la matrice élargie [AB] ie $\text{Rang}[A] < \text{Rang}[AB]$ qui signifie que le système (S) est inconsistant.

Dans conditions, il est clair que les coefficients des deux droites L1;L2 sont proportionnels :

$$\text{autrement dit : } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (5.100)$$

5-3-Organigramme de résolution d'un système non homogène compatible $AX = B$ de n équations linéaires, à p inconnues et de rang r

ie Rang $[A] = r$ selon les théorèmes de Fontené-Rouché et de Kronecker-Capelli :



Chapitre VI

Optimisation non linéaire comme solution alternative
aux systèmes linéaires incompatibles.

6-1 Définition d'un système linéaire non homogène du type incompatible

Dans les études pratiques, menées dans différents secteurs de l'activité humaine, le chercheur est souvent, confronté à des systèmes linéaires non homogènes du type incompatible. Cet état de fait traduit, tout simplement, que le vecteur inconnu X dans l'équation matricielle $AX = B$ est soumis à un nombre trop élevé de conditions qui malheureusement, ne peuvent pas être satisfaites, simultanément. Par référence au théorème de Fontené-Roché, cela signifie que :

- i. Le rang de la matrice des coefficients A est inférieur au nombre d'équations n : $\text{Rang}(A) < n$
- ii. Parmi les $[n - \text{Rang}(A)]$ déterminants caractéristiques, il en existe un dont la valeur est non nulle.

Quant au théorème Kronecker-Capelli, cela veut dire que la condition respective de compatibilité du système $AX = B$ soit $\text{Rang}(AB) = \text{Rang}(A)$ n'est pas vérifiée. Par conséquent, on est en présence du cas où $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(AB)$ d'où la justification de la non consistance du système sus-indiqué.

Rappelons que les conditions de non compatibilité du système $AX = B$, relatives, respectivement, au théorème de Fontené-Rouché et au théorème de Kronecker-Capilli, sont équivalentes.

Cela implique que dans l'équation matricielle $AX = B$, le signe d'égalité n'a plus de raison d'être et on devrait noter plutôt $AX \neq B$ car il y a, nécessairement, un vecteur écart à composantes non nulles soit :

$$AX - B = E \quad (6.1)$$

Il n'est plus question de trouver des solutions exactes, car cela est, tout simplement, impossible et on doit se contenter d'un ensemble de résolutions approximatives, en utilisant les techniques d'optimisation non linéaires.

6-2 Recherche de la solution optimale d'un système linéaire incompatible

Sachant qu'il est impossible d'annuler E c'est-à-dire $\vec{E} \neq \vec{0}$, on peut cependant chercher une méthode qui permet de le réduire à son niveau minimum. Pour ce faire, il est logique de concevoir une fonction objectif qui conduit à la minimisation des écarts quadratiques soit :

$$\text{Min}(JcX) = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \dots + \vec{e}_i^2 + \dots + \vec{e}_n^2 = \text{Min} \sum_{i=1}^n \vec{e}_i^2 = \text{Min} E^T E \quad (6.2)$$

autrement dit la fonction économique peut être notée de la manière suivante :

$$\text{Min } J(x) = \text{Min } (AX - B)^T (AX - B) \quad (6.3)$$

Étant donné que $E^T E > 0$, alors il devient plausible de faire usage de la notion de norme.

Il est clair que la distance entre les termes constants du vecteur \vec{B} et celui de AX peut être mesurée par une norme adéquate.

Parmi la série des normes disponibles, la norme euclidienne est fréquemment utilisée.

Elle est définie comme suit :

$$L_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ij} - b_i \right\|_2 = \sum_{i=1}^n (x_{ij} a_{ij} - b_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (6.4)$$

A présent, on introduit l'équivalence logique suivante :

$$\text{Min } J(X) = \text{Min}_{x \in R^n} \|AX - B\| \Leftrightarrow \text{Min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} \|AX - B\|^2 \quad (6.5)$$

Conformément aux règles du produit scalaire on note

$$\text{Min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} \|AX - B\|^2 = \text{Min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} \langle AX - B, AX - B \rangle \quad (6.6)$$

Après développement, on obtient

$$\text{min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} [\langle AX, AX \rangle - \langle AX, B \rangle - \langle B, AX \rangle + \langle B, B \rangle] \quad (6.7)$$

En vertu de la propriété de symétrie, on a :

$$\text{Min } J(X) = \text{Min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} [\langle AX, AX \rangle - 2 \langle AX, B \rangle + \langle B, B \rangle] \quad (6.8)$$

Ecrivons les termes de la fonction objective d'une autre manière

$$\text{Min } J(X) = \text{Min}_{x \in R^n} \frac{1}{2} [\langle X, A^T X \rangle - 2 \langle A^T B, X \rangle + \langle B, B \rangle] \quad (6.9)$$

Appliquons les techniques de dérivation vectorielle

$$\nabla J(X) = \frac{1}{2} [2 A^T A X - 2 A^T B] \quad (6.10)$$

Les conditions du premier ordre pour avoir une solution optimale consistent dans la nullité du gradient de la fonction objectif soit :

$$\nabla J(X) = 0 \quad (6.11)$$

$$\text{D'où } [A^T A X - A^T B] = 0 \quad (6.12)$$

Ce qui donne

$$A^T A X = A^T B \quad (6.13)$$

En supposant que $\text{Det}(A^T A) \neq 0$, c'est-à-dire $A^T A$ est régulière, il résulte finalement que la solution optimale vaut :

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (6.14)$$

6-2-1 Détermination de la nature de la solution optimale :

En trouvant la solution optimale $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$, on est dès lors, certain que la fonction économique $J(X)$ est stationnaire, c'est-à-dire, que cet indice de performance passe nécessairement par un maximum ou bien un minimum. Reste à prouver qu'il s'agit bien d'un minimum. Pour ce faire, on va étudier le comportement de la fonction objectif $J(X)$ au voisinage du point optimum \hat{X} .

$$\text{On pose } y = \hat{x} + z \text{ où } z \text{ est un vecteur arbitraire} \quad (6.15)$$

$$\text{Par conséquent } J(X) = (AX - B)^T (AX - B) \quad (6.16)$$

$$\text{devient égale à } (Ay - B)^T (Ay - B) \quad (6.17)$$

En substituant y par sa valeur on a

$$[A(\hat{X} + Z) - B]^T [A(\hat{X} + Z) - B] = [A\hat{X} + AZ - B]^T [A\hat{X} + AZ - B] \quad (6.18)$$

En développant on obtient :

$$[(A\hat{X})^T + (AZ)^T - B^T] [A\hat{X} + AZ - B] = [\hat{X}^T A^T + Z^T A^T - B^T] [A\hat{X} + AZ - B] \quad (6.19)$$

$$= X^T A^T A X + X^T A^T A Z - X^T A^T B + Z^T A^T A \hat{X} + Z^T A^T A Z - Z^T A^T B - B^T A \hat{X} - B^T A Z + B^T B \quad (6.20)$$

En arrangeant les termes, il vient :

$$= (B^T B - B^T A \hat{X} - X^T A^T B + \hat{X}^T A^T A X) + (AZ)^T A \hat{X} + (AZ)^T A \hat{X} - (AZ)^T B + (AZ^T) AZ - (AZ)^T B \quad (6.21)$$

$$= (A \hat{X} - B)^T (A X - B) + 2(AZ)^T A X - 2(AZ)^T B + (AZ)^T A Z \quad (6.22)$$

Finalement on a :

$$= (A \hat{X} - B)^T (A X - B) + (2AZ)^T (A \hat{X} Z - B) + (AZ)^T A Z \quad (6.23)$$

ou bien

$$= (A \hat{X} - B)^T (A X - B) + 2Z^T A^T (A \hat{X} - B) + (AZ)^T A Z \quad (6.24)$$

ou encore

$$= (A \hat{X} - B)^T (A X - B) + 2Z^T (A^T A \hat{X} - A^T B) + (AZ)^T A Z \quad (6.25)$$

Mais on sait déjà qu'à l'optimum on a :

$$A^T A \hat{X} = A^T B \quad (6.26)$$

De là

$$2Z^T (A^T A \hat{X} - A^T B) = 0 \quad (6.27)$$

De plus, il est clair que

$$(AZ)^T A Z \geq 0 \quad (6.28)$$

Ainsi :

$$(A y - B)^T (A y - B) = (A \hat{X} - B)^T (A X - B) + (AZ)^T A Z \quad (6.29)$$

Finalement on aboutit à

$$J \Rightarrow J(y) = J(\hat{X}) + (AZ)^T A Z \quad (6.30)$$

C'est-à-dire que

$$J(y) > J(\hat{X}) \quad (6.31)$$

Clicours.COM

La variation de la fonction économique au voisinage de l'optimum est positive ce qui établit immédiatement que $J(\hat{X})$ est absolument convexe et l'optimum obtenu $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$ est bien un minimum global.

6-2-2 Résolution d'un système linéaire inconsistant:

Considérons le système linéaire incompatible (S)

$$S \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = \beta \\ \alpha x = \gamma \\ \alpha x + \alpha y = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ étant des réels strictement positifs} \quad (6.32)$$

On suppose également que $\beta > \gamma$.

Pour trouver la solution du système S, établissons, tout d'abord, les conditions de non comptabilité du système (S), en procédant selon le théorème de Fontené-Rouché.

La forme matricielle du système (S) est

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} \text{ ou bien } AX = B \text{ avec } p=2 \text{ et } n=3 \quad (6.33)$$

On sait que $\text{rang}(A) \leq \min(n, P)$ ie $\text{rang}(A) \leq \min(2,3)$

$$\text{or Det}(A) = \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 \quad (6.34)$$

Puisque $\alpha > 0$ par hypothèse, alors $\text{Rang}(A) = 2$

Etant donné que $n - \text{rang}(A) = 3 - 1$ donc il existe un seul déterminant caractéristique

$$\text{soit } \text{Det}(C_{r+1}) = \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} \quad (6.35)$$

En utilisant la règle de Sarraus on obtient :

$$- \begin{vmatrix} -\alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha & \alpha & \beta \end{vmatrix} \quad (6.36)$$

Le développement des Det (C_{r+1}) donne

$$\text{Det } (C_{1+1}) = (0 + \alpha^2 \beta + \alpha^2 \gamma) - (0 - \alpha^2 \gamma + \alpha^2 \beta) = 2\alpha^2 \gamma \quad (6.37)$$

Pour la suite calculons la matrice inverse $(A^T A)^{-1}$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T A)}{\text{Det}(A^T A)} = \frac{\begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 3\alpha^2 \end{bmatrix}}{6\alpha^4} \quad (6.38)$$

De plus

$$A^T B = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ 2\alpha\beta \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

En substituant ces résultats dans la formule (6.14). donnant la solution minimale il résulte :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{6\alpha^4} \begin{bmatrix} 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 3\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ 2\alpha\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ 2\alpha\beta \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Finalement on obtient

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{3\alpha} \\ \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix} \text{ donc } x = \frac{\gamma}{3\alpha} \text{ et } y = \frac{\beta}{\alpha} \quad (6.41)$$

Il s'en suit que $\text{Det } (C_{1+1}) \neq 0$ et par conséquent, en vertu du théorème de Fontené –Rouché, le système (S) est incompatible .

Cependant, il y a une alternative; en effet à défaut d'une solution exacte on se contente d'une solution approchée fournie par la relation (6.14).

Pour trouver cette solution optimale, il faut tout d'abord, vérifier que les matrice $(A^T A)$ est régulière.

$$\text{Or } A^T A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha^2 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

Puisque $\text{Det}(A^T A) = 6\alpha^4 \neq 0$; la matrice est non singulière d'où la faisabilité de la solution optimale (6.14).

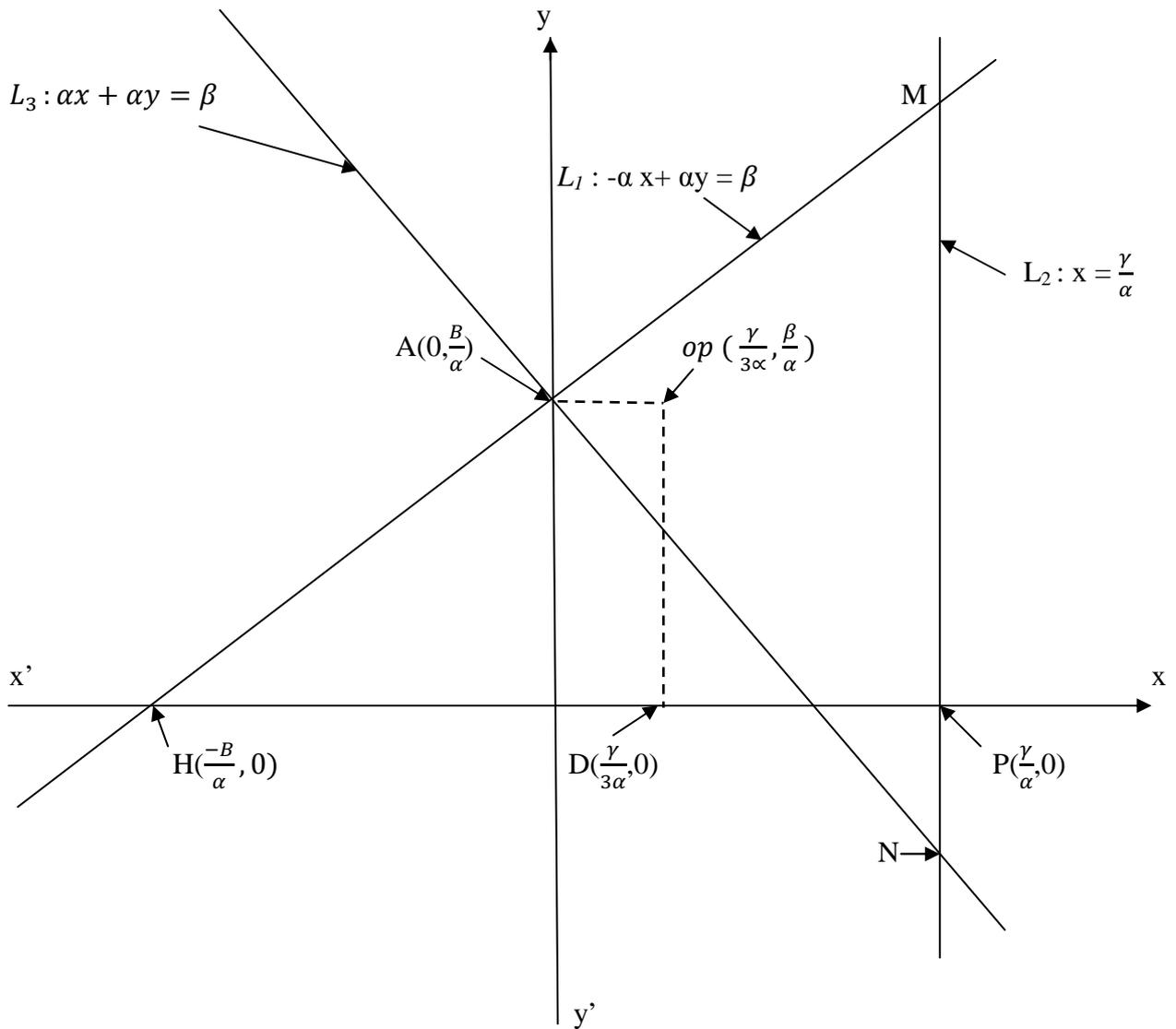


Figure 6.1 : Localisation de la solution minimale globale du système (S).

Remarque :

La solution optimale se situe à l'intérieur du triangle $N A M$. Maintenant, on va déterminer la valeur minimale de l'erreur quadratique

En substituant les valeurs des coordonnées du point optimum dans les équations du système (S) on obtient :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \left(\frac{\gamma}{3\alpha}\right) + \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \beta \\ \alpha \left(\frac{\gamma}{3\alpha}\right) - \gamma \\ \alpha \left(\frac{\gamma}{3\alpha}\right) + \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\gamma}{3} \\ \frac{-2\gamma}{3} \\ \frac{\gamma}{3} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\text{Min } \|AX - B\|^2 = \text{Min } \sum_{i=1}^3 e^2 i = \text{Min}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (6.44)$$

$$= \left(\frac{-\gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2\gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{3}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{9} + \frac{4\gamma^2}{9} + \frac{\gamma^2}{9} \quad (6.45)$$

Finalement on parvient à :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^3 e^2 i = \frac{6\gamma^2}{9} = \frac{2\gamma^2}{3} \quad (6.46)$$

6-2-3 Etude du cas particulier où la matrice $A^T A$ est non régulière :

Quand la matrice $A^T A$ est singulière, c'est que son déterminant est nul et donc n'admet pas de matrice inverse. Le minimum de la norme euclidienne n'est plus unique mais dépend linéairement de $[n - \text{Rang}(A)]$ paramètres.

Cette éventualité se produit uniquement lorsque le rang r de la matrice A est inférieur au nombre des inconnues P : $\text{Rang}(A) < P$ (6.47)

Autrement dit lorsque les vecteurs colonnes de A sont linéairement dépendants.

Afin de trouver une solution optimale, on peut procéder comme suit : on considère d'une manière isolée (r) colonnes principales de A engendrant une sous matrice de même rang r que A . on suppose que ce sont les premières colonnes de A : A^1, A^2, \dots, A^r , constituant la sous matrice A_P alors que A_S est la sous matrice des autres colonnes dites colonnes secondaires :

$$A = [A_P \quad A_S], \quad A_P(n,r) \quad (6.48)$$

Les inconnues principales x_1, x_2, \dots, x_r constituent le sous vecteur X_P :

$$X = \begin{bmatrix} X_P \\ X_S \end{bmatrix} \quad ; \quad X_P = [x_1, x_2, \dots, x_r]^T \quad (6.49)$$

$$X_S = [r_{+1}, r_{+2}, \dots, X_P]^T \quad (6.50)$$

$$\text{d'où } A_P X_P = B \quad (6.51)$$

En prémultipliant par A_p^T il vient

$$A_p^T A_p X_p = A_p^T B \quad (6.52)$$

De là on aboutit à la solution minimale unique :

$$\hat{X}_p = [A_p^T A_p]^{-1} A_p^T B \quad (6.53)$$

On démontre qu'on obtient une solution minimale en complétant cette solution par $[n - \text{rang}(A)]$ zéros en emplacement des colonnes secondaires :

$$\hat{X} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_r, 0, 0 \dots \dots 0] \quad (6.54)$$

A titre d'illustration, considérons le système suivant :

$$S = \begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha\beta \\ 3\alpha x + 3\beta y = 12\alpha \end{cases} \quad (6.56)$$

avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$

Matriciellement, le système S peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 3\alpha & 3\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ 12\alpha \end{bmatrix} \iff AX=B \quad (6.57)$$

On peut facilement montrer que $\text{Rang}[A] < \text{Rang}[AB]$ et donc par référence au théorème de Kronecker-Capelli, le système (S) est incompatible.

Il faut donc se rabattre sur une solution optimale du système (S). Par référence à (6.14) on sait que le minimum global de la norme euclidienne est donnée par : $\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$

Vérifions d'abord si $A^T A$ est non singulière. Pour cela, procédons au calcul du déterminant de la matrice $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 3\alpha & 3\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha^2 + 9\alpha^2) & (\alpha\beta + 9\alpha\beta) \\ (\alpha\beta + 9\alpha\beta) & (\beta^2 + 9\beta^2) \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

d'où

$$\det[A^T A] = \begin{vmatrix} (\alpha^2 + 9\alpha^2) & (\alpha\beta + 9\alpha\beta) \\ (\alpha\beta + 9\alpha\beta) & (\beta^2 + 9\beta^2) \end{vmatrix} = (\alpha^2 + 9\alpha^2)(\beta^2 + 9\beta^2) - (\alpha\beta + 9\alpha\beta)^2 \quad (6.59)$$

Après développement du $\det[A^T A]$ on parvient à :

$$\det[A^T A] = \alpha^2 \beta^2 + 9\alpha^2 \beta^2 + 9\alpha^2 \beta^2 + 81\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 - 18\alpha^2 \beta^2 + 81\alpha^2 \beta^2 = 0 \quad (6.60)$$

Ce qui implique que la matrice $A^T A$ est singulière.

Prenons pour A_{P_1} la première colonne de A

$$A_{P_1} = [\alpha \quad 3\alpha] \quad (6.61)$$

$$[A_{P_1}^T A_{P_1}] = [\alpha \quad 3\alpha] \begin{bmatrix} \alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} = \alpha^2 + \alpha^2 = 10\alpha^2 \quad (6.62)$$

$$\text{et } [A_{P_1}^T B] = [\alpha \quad 3\alpha] \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ 12\alpha \end{bmatrix} = \beta\alpha^2 + 36\alpha^2 \quad (6.63)$$

d'où

$$x = (A_{P_1}^T A_{P_1})^{-1} A_{P_1}^T B = \frac{\beta\alpha^2 + 36\alpha^2}{10\alpha^2} = \frac{\beta + 36}{10} \quad (6.64)$$

La première solution optimale est donc :

$$[x, 0]^T = \left[\frac{\beta + 36}{10}, 0 \right] \quad (6.65)$$

A présent prenons pour A_{P_2} la seconde colonne de A :

$$A_{P_2} = \begin{bmatrix} \beta \\ 3\beta \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

$$A_{P_2}^T A_{P_2} = [\beta, 3\beta]^T \begin{bmatrix} \beta \\ 3\beta \end{bmatrix} = \beta^2 + 9\beta^2 = 10\beta^2 \quad (6.67)$$

Sachant que :

$$A_{P_2}^T B = [\beta, 3\beta]^T \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ 12\alpha \end{bmatrix} = \alpha\beta^2 + 36\alpha\beta \quad (6.68)$$

$$\text{alorsy} = (A_{P_2}^T A_{P_2})^{-1} A_{P_2}^T B = \frac{\alpha\beta^2 + 36\alpha\beta}{10\beta^2} = \frac{\alpha\beta(\beta + 36)}{10\beta} \quad (6.69)$$

Par conséquent, la seconde solution optimale est:

$$[0, y] = \left[0, \frac{\alpha\beta(\beta+36)}{10\beta} \right] \quad (6.70)$$

6-2-3-1 Interprétation géométrique :

Les composantes du vecteur de l'erreur :

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

$$\text{d'où } e_1 = \alpha x + \beta y - \alpha\beta \quad (6.72)$$

$$e_1 = \alpha \frac{(\beta+36)}{10} - \alpha\beta = \frac{\alpha\beta+36\alpha-10\alpha\beta}{10} \quad (6.73)$$

$$e_1 = \frac{-9\alpha\beta+36\alpha}{10} \quad (6.74)$$

$$\text{et } e_2 = 3\alpha x + 3\beta y - 12\alpha \quad (6.75)$$

$$e_2 = 3\beta\alpha \frac{(\beta+36)}{10\beta} - 12\alpha \quad (6.76)$$

$$e_2 = \frac{3\alpha\beta^2+108\alpha\beta-120\alpha\beta}{10\beta} \quad (6.77)$$

$$e_2 = \frac{3\alpha\beta^2-12\alpha\beta}{10\beta} \quad (6.78)$$

Il est clair que les deux écarts, respectivement, $e_1 = \frac{-9\alpha\beta+36\alpha}{10}$ et $e_2 = \frac{3\alpha\beta^2-12\alpha\beta}{10\beta}$ sont les deux distances approximatives des points (x, y) aux deux droites L_1 et L_2 relatives au système (S). puisque $\text{rang}(A) = 1$ aucun couple des valeurs (x, y) ne saurait satisfaire simultanément leurs équations respectives.

Les points d'une droite L parallèle, en même temps, à L_1 et à L_2 constituent la solution optimale. Les solutions obtenues par les deux matrices A_{P_1} et A_{P_2} sont les intersections de cette droite L avec les axes.

Pour la représentation graphique et afin de fixer les idées on suppose que :

$$\alpha = 4 \text{ et } \beta = 3$$

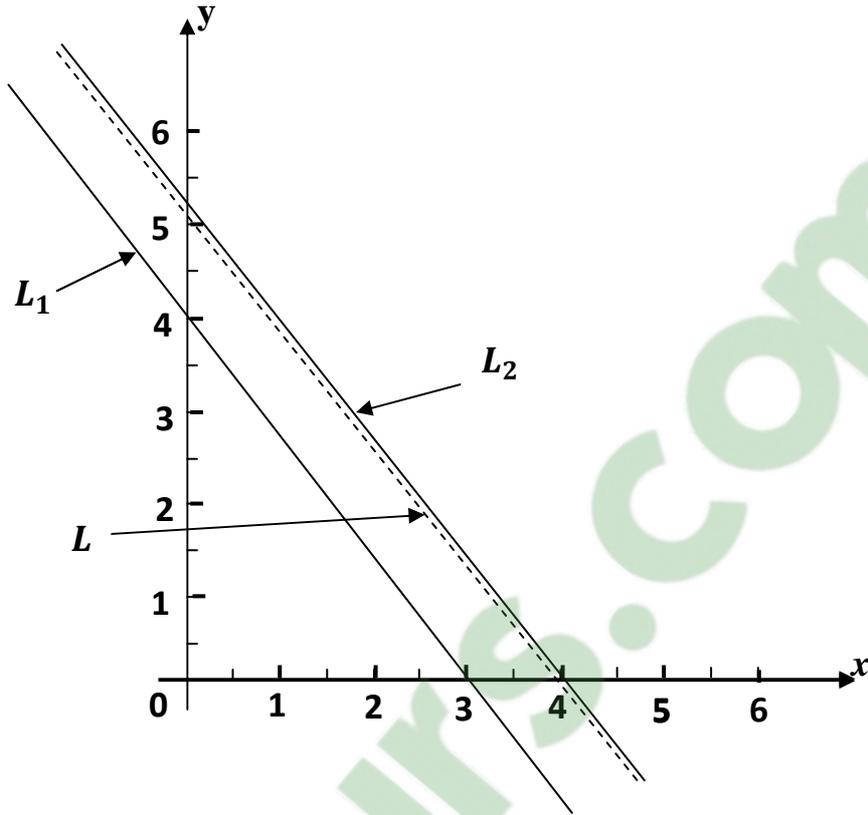


Figure 6.2 : Existence d’une infinité de solutions optimales représentées par la droite L .

6-3 Adaptation de la minimisation de la norme euclidienne au cas particulier de l’estimation des paramètres de forme β et d’échelle η du modèle Weibull standard

Un suivi en fiabilité d’un certain nombre d’équipements nous a fourni une série d’instantes de défaillances : t_1, t_2, \dots, t_n . En faisant les substitutions appropriées, dans la forme du modèle Weibull standard soumis à une double transformation logarithmique, on obtient un système de n équations linéaires à deux inconnues :

$$S \begin{cases} \beta \ln(t_1 - \gamma_M) - \beta \ln \eta = \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\ \beta \ln(t_2 - \gamma_M) - \beta \ln \eta = \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \beta \ln(t_n - \gamma_M) - \beta \ln \eta = \ln \ln \frac{1}{1-F(t_n)} \end{cases} \quad (6.79)$$

où γ_M est la valeur modale correspondant au maximum de l’intensité de linéarisation du nuage de points :

$$N\left\{\ln(t_i), \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}\right\} \tag{6.80}$$

Matriciellement transcrit le système (S) devient :

$$\begin{bmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_3 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_4 - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_i - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_n - \gamma_M) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \\ \dots \\ \beta \\ \dots \\ -\beta \ln \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_n)} \end{bmatrix} \tag{6.81}$$

ou bien d'une manière condensée on a $AX = B$ (6.82)

La question qui se pose, en premier lieu, est d'étudier la compatibilité d'un tel système.

Afin de connaître le rang du système (S) on calcule le déterminant de la matrice des coefficients soit :

$$Det(A) = \begin{vmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 \end{vmatrix} = \ln(t_1 - \gamma_M) - \ln(t_2 - \gamma_M) \tag{6.83}$$

d'où $Det(A) = \ln\left(\frac{t_1 - \gamma_M}{t_2 - \gamma_M}\right) \neq 0$ (6.84)

Donc le rang maximum du système (S) est égal à 2 seulement il est inférieur au nombre d'équations n : $Rang(A) < n$ (6.85)

Parmi les $[n - rang(A)] = n - 2$ déterminants caractéristiques, voyons s'il en existe un distinct de zéro.

Soit le déterminant caractéristique :

$$C_{r+1} = C_{2+1} = \begin{vmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\ \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\ \ln(t_3 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_3)} \end{vmatrix} \tag{6.86}$$

d'après la règle de Sarrus on a :

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\
 \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\
 \ln(t_3 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_3)}
 \end{array} \right| \\
 \hline
 \left| \begin{array}{ccc}
 \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\
 \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)}
 \end{array} \right| \\
 \hline
 \left| \begin{array}{ccc}
 \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\
 \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)}
 \end{array} \right|
 \end{array} \right\} \\
 - \left. \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\
 \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)}
 \end{array} \right| \\
 \hline
 \left| \begin{array}{ccc}
 \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\
 \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 & \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)}
 \end{array} \right|
 \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (6.87)$$

Après avoir effectué les produits respectifs on obtient :

$$\begin{aligned}
 C_{2+1} &= \ln(t_1 - \gamma_M) \left[\ln \ln \frac{1}{[1-F(t_3)][1-F(t_2)]} \right] + \ln(t_2 - \gamma_M) \left[\ln \ln \frac{1}{[1-F(t_1)][1-F(t_3)]} \right] + \dots \\
 &+ \ln(t_3 - \gamma_M) \left[\ln \ln \frac{1}{[1-F(t_2)][1-F(t_1)]} \right]
 \end{aligned} \quad (6.88)$$

Etant donné que :

$$\text{i- } t_1 - \gamma_M > 0; \frac{1}{[1-F(t_3)][1-F(t_2)]} > 0 \quad (6.89)$$

$$\text{ii- } t_2 - \gamma_M > 0; \frac{1}{[1-F(t_1)][1-F(t_3)]} > 0 \quad (6.90)$$

$$\text{iii- } t_3 - \gamma_M > 0; \frac{1}{[1-F(t_2)][1-F(t_1)]} > 0 \quad (6.91)$$

alors le déterminant caractéristique C_{2+1} est non nul ie $C_{2+1} \neq 0$. Il s'en suit d'après le théorème de Fontené-Rouché que le système (S) n'admet pas de solution. Or d'après (6.14) on sait que la solution optimale vaut :

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

Effectuons le produit matricielle $(A^T A)$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & \ln(t_2 - \gamma_M) & \dots & \ln(t_i - \gamma_M) & \dots & \ln(t_n - \gamma_M) \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_i - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_n - \gamma_M) & 1 \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

$$\text{d'où } A^T A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 & \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \\ \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) & n \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

Examinons la régularité de la matrice $A^T A$ en calculant le déterminant respectif :

$$Det(A^T A) = n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2 \quad (6.94)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité (E14) par le facteur $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ il vient :

$$\frac{1}{n^2} Det(A^T A) = \frac{1}{n^2} \left\{ n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2 \right\} \quad (6.95)$$

d'où :

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - \frac{[\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2}{n^2} \quad (6.96)$$

ou bien :

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\overline{\ln(t_i - \gamma_M)}]^2 \quad (6.97)$$

ou bien encore :

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - 2 [\overline{\ln(t_i - \gamma_M)}]^2 + [\overline{\ln(t_i - \gamma_M)}]^2 \quad (6.98)$$

$$= \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2 - 2 \overline{\ln(t_i - \gamma_M)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) + \frac{1}{n} n \overline{\ln(t_i - \gamma_M)} \quad (6.99)$$

Or on sait que $\sum_{i=1}^n (1) = n$ il s'en suit que :

$$= \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2 - 2 \overline{\ln(t_i - \gamma_M)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) + \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2 \quad (6.100)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - 2 \overline{\ln(t_i - \gamma_M)} \ln(t_i - \gamma_M) + [\overline{\ln(t_i - \gamma_M)}]^2 \right\} \quad (6.101)$$

Finalemment :

$$\frac{1}{n^2} Det(A^T A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M) - \overline{\ln(t_i - \gamma_M)}]^2 \quad (6.102)$$

On reconnaît, aisément, la formule de la variance de la variable aléatoire $\ln(t_i - \gamma_M)$ soit :

$$\frac{1}{n^2} Det(A^T A) = Var[\ln(t_i - \gamma_M)] \quad (6.103)$$

$$d'où \quad Det(A^T A) = n^2 * Var[\ln(t_i - \gamma_M)] \quad (6.104)$$

Etant donné que n^2 est strictement positif, alors, le signe du déterminant $Det(A^T A)$ dépend uniquement de la variance $Var[\ln(t_i - \gamma_M)]$. Or la variance comme l'indique Vincent-Giar (57) en tant que caractéristique mesurant la dispersion des points d'observation autour de la moyenne possède un signe strictement positif.

Ne pouvant être par définition négative, l'hypothèse de nullité de la variance $Var[\ln(t_i - \gamma_M)]$ est rejetée en ce sens qu'elle suppose que l'ensemble des valeurs observées sont, identiquement, égales à la moyenne.

Par conséquent $Det(A^T A) > 0$, il résulte que la matrice $A^T A$ n'est pas singulière et admet donc un inverse, ce qui implique que le système (S) possède une solution optimale.

L'optimum ou plus exactement le minimum recherché dans l'espace des paramètres inconnus est nécessairement unique.

Maintenant calculant l'inverse de $A^T A$:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{Adj(A^T A)}{Det(A^T A)} = \frac{\begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \\ -\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) & \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.105)$$

Ensuite calculons le produit matriciel $A^T B$:

$$A^T B = \begin{bmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & \ln(t_2 - \gamma_M) & \dots & \ln(t_i - \gamma_M) & \dots & \ln(t_n - \gamma_M) \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_n)} \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

Ce qui entraîne le vecteur colonne suivant :

$$A^T B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \end{bmatrix} \quad (6.107)$$

Il reste à déterminer les valeurs des inconnues β et η :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \ln \eta \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \\ -\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) & \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

ou bien :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \ln \eta \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} n \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ -\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \end{bmatrix}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.109)$$

d'où :

$$\beta = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.110)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par n on obtient l'estimateur ponctuel optimal du paramètre de forme β :

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.111)$$

Pour déterminer l'estimateur ponctuel optimal du paramètre d'échelle η on calcule d'abord le

terme constant $-\beta \ln \eta$ soit :

$$-\beta \ln \eta = \frac{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.112)$$

ou bien :

$$\beta \ln \eta = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2} \quad (6.113)$$

En prenant l'exponentiel des deux membres de l'égalité précédente on parvient à :

$$\eta^\beta = e^{\frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2}} \quad (6.114)$$

Finalemment l'estimateur ponctuel optimal du paramètre d'échelle η est donné par la relation :

$$\eta = \sqrt[e^{\frac{\beta \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{n \sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n (\ln(t_i - \gamma_M))]^2}}]{\beta} \quad (6.115)$$

6-4 Conception de la fonction objectif du type pondéré

Dans la pratique, la norme euclidienne $L_2 = \|AX - B^*\|_2$ est souvent inadéquate pour les raisons suivantes :

- Les données numériques peuvent correspondre à des grandeurs physiques différentes ou d'échelles différentes.
- Certaines valeurs peuvent être plus précises que d'autres et il faut être sûr que l'approximation B^* sera davantage influencée par les valeurs précises que les autres.
- Quand le modèle d'approximation est fondé sur un procédé de linéarisation la fonction objectif devient biaisée.

Ces considérations conduisent souvent à associer à chaque mesure un poids noté W_i , $i=1,2,\dots,n$.

La norme des moindres carrés devient la norme des carrés pondérés de Legendre.

Plus précisément, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_{ij} a_{ij} - b_i^* \right\|_{2,W} = \sum_{i=1}^n (x_{ij} a_{ij} - b_i^*)^2 W_i \quad (6.116)$$

Matriciellement la norme de Legendre devient :

$$E^T W E = \langle AX - B, W(AX - B) \rangle \quad (6.117)$$

où $E=AX-B$ et W la matrice de pondération supposée symétrique

Ainsi les fonctions objectives acquièrent la forme suivante :

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} J_w(X) = \text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \langle AX - B, W(AX - B) \rangle \quad (6.118)$$

$$= \text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \langle AX - B, WAX - WB \rangle \quad (6.119)$$

En développant le produit scalaire on obtient :

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} [\langle AX, WAX \rangle - \langle AX, WB \rangle - \langle B, WAX \rangle + \langle B, WB \rangle] \quad (6.120)$$

En réarrangeant les termes il découle :

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} [\langle X, (A^T W A) X \rangle - 2 \langle X, A^T W B \rangle + \langle B, W B \rangle] \quad (6.121)$$

$$\text{Min}_{X \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} [\langle X, A^T W A X \rangle - \langle A^T W B, X \rangle + \langle B, W B \rangle] \quad (6.122)$$

A l'optimum le gradient de la fonction objectif est nul

$$\nabla J_w(X) = (A^T W B) X - A^T W B = 0 \quad (6.123)$$

En supposant $A^T W A$ définie positive l'optimum pondéré est fourni par

$$\nabla J_w(X) = (X) = 0 \quad \Leftrightarrow \hat{X} = (A^T W A)^{-1} A^T W B \quad (6.124)$$

Le calcul de la matrice de Hesse donne :

$\nabla^2 J_w(X) = A^T W A$ (6.125) Sachant que la matrice de pondération W est définie positive par construction (4) donc $A^T W A > 0$ cela implique que la fonction objectif (6.118) est convexe et l'optimum obtenu est un minimum global.

6-4-1 Perfectionnement des estimateurs ponctuels des paramètres de forme β et d'échelle η du modèle Weibull standard bi-logarithmiquement transformé par l'usage de la norme de Legendre :

Il est évident que les deux fonctions objectif respectivement,

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n \left\{ F(t_i) - \left[1 - e^{-\left(\frac{t_i - \gamma_M}{\eta}\right)^\beta} \right] \right\}^2 \quad (6.126)$$

$$\text{et } \text{Min } \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - [\beta \ln(t_i - \gamma_M) - \beta \ln \eta] \right\}^2 \quad (6.127)$$

sont différentes, car la première est liée au modèle Weibull standard originale alors que la seconde est associée à sa forme bi-logarithmiquement transformée.

Ainsi dans l'espace des paramètres β , η les deux minimum ne coïncident pas. Les estimateurs de β et η obtenus à partir du premier indice de performance sont incontestablement plus sûrs que ceux dérivés du second en raison de l'effet de la transformation logarithmique double appliquée au modèle Weibull standard.

Afin de pallier à cet inconvénient, on intègre dans la structure analytique de la fonction objectif un facteur de pondération. Dans les conditions du modèle Weibull logarithmiquement transformé, puisqu'on démontre que le facteur de pondération pour une série t_i ; $i=1,2,\dots,n$ non corrigée vaut :

$$w_i = \{[1 - F(t_i)] \ln[1 - F(t_i)]\}^2 \quad (6.128)$$

ou

$$w_i = [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \quad (6.129)$$

alors pour une série corrigée avec la grandeur de Gamma modale on trouve :

$$w_i = \{[1 - F(t_i - \gamma_M)] \ln[1 - F(t_i - \gamma_M)]\}^2 \quad (6.130)$$

ou bien

$$w_i = [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \quad (6.131)$$

Par conséquent, la seconde fonction objectif acquiert, finalement, la forme analytique suivante :

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \beta \ln(t_i - \gamma_M) - \beta \ln \eta \right\}^2 [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \quad (6.132)$$

Matriciellement transcrit cela donne :

$$\text{Min } EWE = \text{Min}[AX - B]^T W [AX - B] \tag{6.133}$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} \ln(t_1 - \gamma_M) & 1 \\ \ln(t_2 - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_i - \gamma_M) & 1 \\ \dots & \dots \\ \ln(t_n - \gamma_M) & 1 \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} B \\ \\ \\ -B \ln \eta \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \ln \ln \frac{1}{1-F(t_1)} \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_2)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \dots \\ \ln \ln \frac{1}{1-F(t_n)} \end{bmatrix} \tag{6.134}$$

$$\text{et } W = \begin{bmatrix} [R(t_1 - \gamma_M) \ln R(t_1 - \gamma_M)]^2 & 0 \dots \dots & 0 \dots \dots & 0 \\ 0 & [R(t_2 - \gamma_M) \ln R(t_2 - \gamma_M)]^2 & 0 \dots \dots & 0 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \dots & [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 & 0 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \dots & 0 \dots \dots & [R(t_n - \gamma_M) \ln R(t_n - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix} \tag{6.135}$$

Rappelons que W désigne la matrice de pondération.

$$\text{On sait déjà d'après (6.124) que le minimum absolu de la fonction objectif : } \text{Min } [AX - B]^T W [AX - B] \text{ est égal à } X = (A^T W A)^{-1} A^T W B \tag{6.136}$$

Maintenant calculons l'inverse de A^TWA .

$$\text{Soit } (A^TWA)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^TWA)}{\det A^TWA} \quad (6.137)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 & -\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) \\ -\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) & \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - [\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M)]^2} \quad (6.138)$$

Par ailleurs on a :

$$A^TWA = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 & \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) \\ \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) & \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix} \quad (6.139)$$

A présent calculons le produit matriciel A^TWB

$$A^TWB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \end{bmatrix} \quad (6.140)$$

De la on passe a la détermination des valeurs inconnues des paramètres de forme B et d'échelle η

$$X = \frac{\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 & -\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) \\ -\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) & \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \\ \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - \{\sum_{i=1}^n [R(t_i - \gamma_M) \ln R(t_i - \gamma_M)]^2 \ln(t_i - \gamma_M)\}^2} \quad (6.141)$$

L'estimateur pondère du paramètre de la forme β est donc

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2} \quad (6.142)$$

ou bien

$$\beta = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2} \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2} \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2} \quad (6.143)$$

Pour la détermination de l'estimateur pondère du paramètre d'échelle n , on calcule d'abord la grandeur $-\beta \ln \eta$

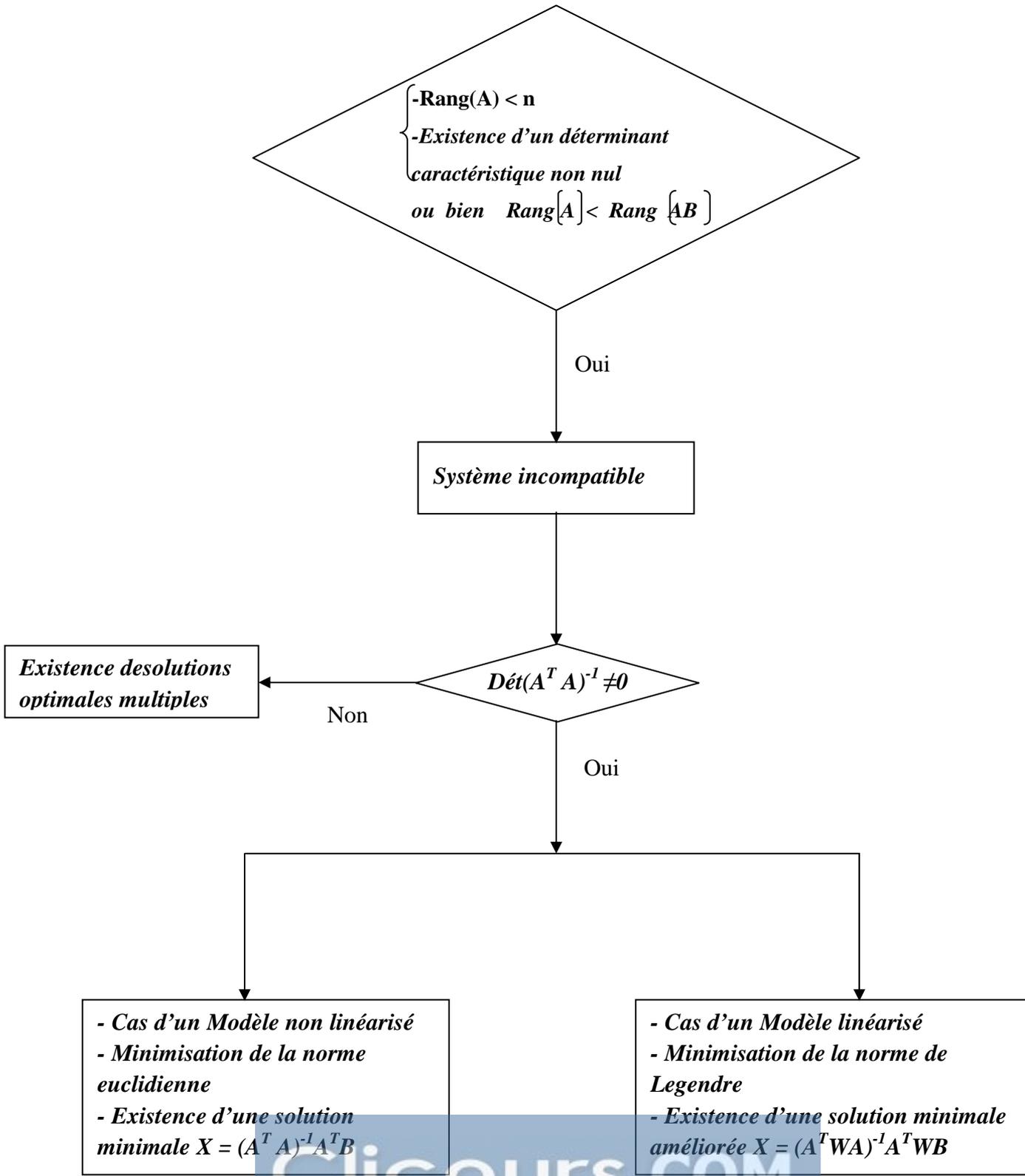
$$-\beta \ln \eta = \frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2} \quad (6.144)$$

$$\ln \eta^\beta = \frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2} \quad (6.145)$$

$$\eta^\beta = e^{\frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2}} \quad (6.146)$$

$$\text{Finalement on trouve : } \eta = \sqrt[n]{e^{\frac{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} - \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 [\ln(t_i - \gamma_n)]^2 - \left\{ \sum_{i=1}^n [R(t_i) \ln R(t_i)]^2 \ln(t_i - \gamma_n) \right\}^2}}}} \quad (6.147)$$

6-5 Organigramme de résolution optimale d'un système linéaire incompatible $AX \neq B$



6-6 Optimisation non linéaire et modélisation de l'impact du nombre de composants indispensables sur la fiabilité d'un système monté en série

On se propose dans ce qui suit de montrer que la mise en œuvre, sans, discernement, de la méthode des moindres carrés qui implique la minimisation de la norme euclidienne au modèle linéarisé revient au fait d'adopter l'hypothèse selon laquelle l'erreur quadratique associée à la forme non linéarisée du modèle $\sum_{i=1}^n (e_i)^2$ est identiquement égale à l'écart quadratique lié à sa forme linéarisée $\sum_{i=1}^n (E_i)^2$:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \text{Min} (E_i)^2 \quad (6.148)$$

Pourtant cette égalité est dépourvue de tout fondement logique, ce qui entraîne l'obtention des estimateurs moins sûrs pour les paramètres inconnus.

Deux alternatives s'offrent à nous pour pouvoir contourner ce problème.

- i. Soit rechercher rigoureusement les grandeurs paramétriques inconnues en se servant d'une technique d'estimation adaptée aux modèles non linéaire; en particulier la méthode de Newton-Raphson.
- ii. Ou bien tenir compte de la transformation due à la linéarisation à l'aide des coefficients de pondérations W_i , ce qui nous conduit à la minimisation de la norme euclidienne. Les estimateurs ponctuels optimaux des paramètres obtenus par la minimisation de la norme euclidienne peuvent être améliorés d'une manière significative en effectuant la minimisation de la norme de Legendre.

En général, la prise en ligne de compte des coefficients de pondération dans l'élaboration de la fonction objectif correspondante permet de réduire l'erreur quadratique du lissage d'une manière satisfaisante.

Dans la littérature consacrée au problème de la fiabilité [46], on se contente seulement de représenter l'allure graphique de la relation liant la fiabilité d'un système monté selon le schéma en série avec le nombre de composants sans pour autant identifier le type de modèle pouvant rendre compte de ce genre de relation.

A partir d'une simple représentation des données brutes de fiabilité, on effectue un lissage selon un modèle mathématique approprié en utilisant d'abord la technique de minimisation de

la norme euclidienne, ensuite en appliquant la méthode de minimisation de la norme de Legendre afin d'obtenir des estimations ponctuels des paramètres inconnus plus fiables.

Nous n'avons pas besoin de procéder à la collecte des données de fiabilité car on peut les confectionner par un simple calcul basé sur quatre hypothèses :

- i. Hypothèse d'indépendance de l'avènement des défaillances.
- ii. Hypothèse de probabilité de bon fonctionnement élémentaire des composants en fixant arbitrairement un niveau supérieur soit $P_f = 97\%$.
- iii. Choix de 33 systèmes S_j ; $j=1,1,\dots,m$ en faisant varier le nombre de composants indispensables de $n_1=2$ à $n_{33}=200$.
- iv. Hypothèse d'un schéma d'assemblage de composants en série qui implique que l'avarie d'un élément engendre la défaillance de tout le système.

Il est évident, dans ces conditions de faire usage de la formule d'évaluation de la fiabilité du système correspondant au schéma d'assemblage en série soit $R_t(t) = \prod_{i=1}^n R_s(t)$ (tableau 1.1).

Après avoir effectué les calculs nécessaires, on obtient les données qui sont regroupées dans le tableau (1.6). La forme du diagramme de dispersion correspondant à la série $[n_j, R_j(t)]$ est illustrée par la figure 6.1

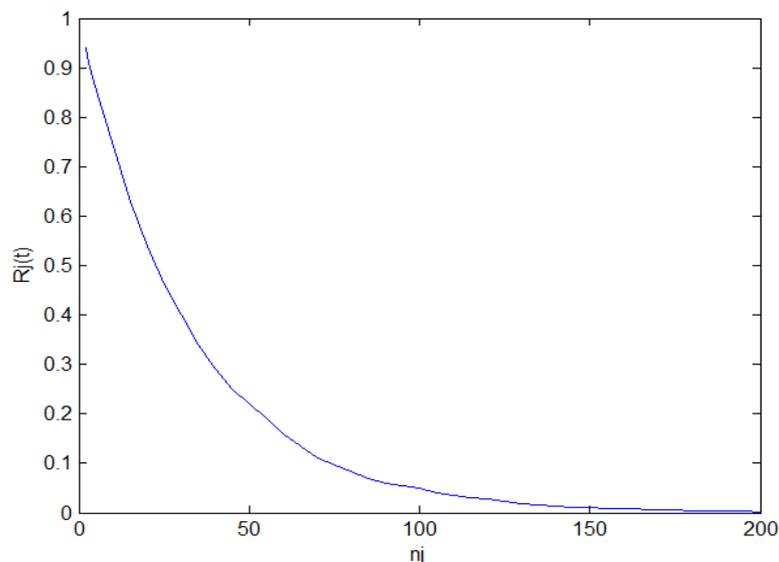


Figure 6.3 : Représentation graphique du nuage de points du nombre n_j ; $j=1,2,\dots,33$ de composants indispensables et du niveau de fiabilité de système correspondant.

Tableau 6.1 : Regroupement des données de fiabilité.

N=° de série des systèmes S_j	Nombre de composants indispensables : n_j	Fiabilité d'un Composant quelconque $R_E(t) = 97\%$	Fiabilité du système correspondant : $R_j(t)$
S_1	02	97%	$(0.97)^2=0.94$
S_2	03	97%	$(0.97)^3=0.91$
S_3	04	97%	$(0.97)^4=0.88$
S_4	10	97%	$(0.97)^{10}=0.74$
S_5	15	97%	$(0.97)^{15}=0.63$
S_6	20	97%	$(0.97)^{20}=0.54$
S_7	25	97%	$(0.97)^{25}=0.46$
S_8	30	97%	$(0.97)^{30}=0.40$
S_9	35	97%	$(0.97)^{35}=0.34$
S_{10}	40	97%	$(0.97)^{40}=0.29$
S_{11}	45	97%	$(0.97)^{45}=0.25$
S_{12}	50	97%	$(0.97)^{50}=0.22$
S_{13}	55	97%	$(0.97)^{55}=0.19$
S_{14}	60	97%	$(0.97)^{60}=0.16$
S_{15}	70	97%	$(0.97)^{70}=0.11$
S_{16}	85	97%	$(0.97)^{85}=0.07$
S_{17}	90	97%	$(0.97)^{90}=0.06$
S_{18}	100	97%	$(0.97)^{100}=0.05$
S_{19}	105	97%	$(0.97)^{105}=0.04$
S_{20}	115	97%	$(0.97)^{115}=0.03$
S_{21}	120	97%	$(0.97)^{120}=0.027$
S_{22}	125	97%	$(0.97)^{125}=0.22$
S_{23}	130	97%	$(0.97)^{130}=0.019$
S_{24}	140	97%	$(0.97)^{140}=0.014$
S_{25}	145	97%	$(0.97)^{145}=0.012$
S_{26}	150	97%	$(0.97)^{150}=0.01$
S_{27}	155	97%	$(0.97)^{155}=0.009$
S_{28}	160	97%	$(0.97)^{160}=0.008$
S_{29}	170	97%	$(0.97)^{170}=0.006$
S_{30}	185	97%	$(0.97)^{185}=0.004$
S_{31}	190	97%	$(0.97)^{190}=0.003$
S_{32}	195	97%	$(0.97)^{195}=0.0026$
S_{33}	200	97%	$(0.97)^{200}=0.0023$

Etape préliminaire : cette phase occupe une place capitale dans le processus de modélisation.

En effet, afin d'éviter toute erreur de spécification de modèle du lissage à proposer il y a lieu de procéder à un examen, attentif du diagramme de dispersion mettant en jeu le nombre de composants et le niveau de fiabilité du système respectif (voire figure 6.1).

L'analyse du diagramme de dispersion $N [n_j, R_j(t)]$ montre une tendance du diagramme de distorsion de décroissance exponentielle. D'après la figure 6.1 il semble que le modèle le plus adéquat pour rendre compte de ce comportement géométrique est donc du type :

$$Z = h e^{-\alpha x} \quad (6.149)$$

où h et α sont deux paramètres inconnus.

La linéarisation de ce type de dépendance implique l'application de l'opérateur logarithmique népérien.

$$\ln z = \ln h e^{-\alpha x} = \ln h - \alpha x \quad (6.150)$$

En posant :

$$y = \ln z \quad \delta = \ln h \text{ on obtient } y = \delta - \alpha x \quad (6.151)$$

L'association de l'équation $\ln z = \ln h - \alpha x$ aux données d'observation du tableau (6.1) nous permet d'aboutir à un système de 33 équations linéaires.

$$S \left\{ \begin{array}{l} -\alpha x_1 + \ln h = \ln z_1 \\ -\alpha x_2 + \ln h = \ln z_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -\alpha x_i + \ln h = \ln z_i \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -\alpha x_{32} + \ln h = \ln z_{32} \end{array} \right. \quad (6.152)$$

Matriciellement on a :

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \\ \vdots \\ \ln h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln z_1 \\ \ln z_2 \\ \vdots \\ \ln z_i \\ \vdots \\ \ln z_n \end{bmatrix} \quad (6.153)$$

Plus brièvement $AX=B$

$$\text{où : } A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{33} & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \vdots \\ \ln h \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \ln z_1 \\ \ln z_2 \\ \vdots \\ \ln z_i \\ \vdots \\ \ln z_n \end{bmatrix}$$

Étudions la compatibilité du système (s) en utilisant le théorème de Kronecker-Capelli. Pour se faire calculant d'abord, le rang de la matrice des coefficients $[A]$ soit :

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0 \text{ ce qui signifie que } \text{Rang}(A)=2 \quad (6.154)$$

Calculons maintenant, le rang de la matrice élargie $[AB]$.

Pour calculer le rang de la matrice élargie $[AB]$ on évalue le déterminant de la matrice composite $[AB]$.

Le déterminant de la matrice composite $[AB]$ est égale à :

$$\text{Det}[AB] = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & \ln z_1 \\ x_2 & 1 & \ln z_2 \\ x_3 & 1 & \ln z_3 \end{vmatrix} \quad (6.155)$$

L'application de la règle de Sarrus donne :

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{ccc} x_1 & 1 & \ln z_1 \\ x_2 & 1 & \ln z_2 \\ x_3 & 1 & \ln z_3 \end{array} \right\} \\ - \left. \begin{array}{ccc} x_1 & 1 & \ln z_1 \\ x_2 & 1 & \ln z_2 \end{array} \right\} + \end{array} \quad (6.156)$$

$$\text{Det}[AB] = x_1 \ln z_3 + x_2 \ln z_1 + x_3 \ln z_2 - x_3 \ln z_1 - x_1 \ln z_2 - x_2 \ln z_3$$

$$= x_1 (\ln z_3 - \ln z_2) + x_2 (\ln z_1 - \ln z_3) + x_3 (\ln z_2 - \ln z_1)$$

$$= x_1 \ln \frac{z_3}{z_2} + x_2 \ln \frac{z_1}{z_3} + x_3 \ln \frac{z_2}{z_1} \neq 0 \text{ d'où Rang } [AB] = 3. \quad (6.157)$$

Par conséquent $\text{Rang}[A] < \text{Rang}[AB]$ et d'après le théorème de Krenecker-Capelli le système (S) est inconsistant .

Ainsi la recherche des estimateurs $\delta = \ln h$ et α nécessite la minimisation de la norme euclidienne par rapport au modèle exponentiel linéarisé :

$$\min \|AX - B\|_2 = \min \sum_{i=1}^n (z_i - \delta + \alpha x_i)^2 \quad (6.158)$$

Or on a vu que la solution minimale de cette fonction objectif est donnée par :

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (6.159)$$

Trouvons d'abord la matrice $A^T A$ ensuite vérifions si elle est inversible :

$$A^T A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \quad (6.160)$$

Le calcul du $\det(A^T A)$ donne

$$\det(A^T A) = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 \quad (6.161)$$

Donc $\det(A^T A) \neq 0$ et la matrice $(A^T A)$ est non singulière, d'où l'existence l'inverse de $(A^T A)$.

$$(A^T A)^{-1} = \frac{Adj(A^T A)}{Det(A^T A)} = \frac{\begin{vmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (6.162)$$

Calculons maintenant $A^T B$:

$$A^T B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln z_1 \\ \ln z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \ln z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \ln z_i \\ \sum_{i=1}^n \ln z_i \end{bmatrix} \quad (6.163)$$

Par conséquent la solution optimale vaut :

$$X = \begin{bmatrix} -\alpha_0 \\ \ln h_0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \ln z_i \\ \sum_{i=1}^n \ln z_i \end{bmatrix} \quad (6.164)$$

Après avoir effectué le produit matriciel, on obtient les estimateurs ponctuels non pondérés des deux paramètres α et $\delta = \ln h$ soit :

$$-\alpha = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \ln z_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \ln z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (6.165)$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n :

$$\alpha_0 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \ln z_i - \sum_{i=1}^n x_i \ln z_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (6.166)$$

$$-\delta_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \ln z_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i \ln z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

Puisque $\delta_0 = \ln h_0$ alors $h_0 = \exp \delta_0$ (6.167)

Remarquons que ces deux estimateurs comportent un défaut car ne ils correspondent pas au minimum de la norme euclidienne par rapport au modèle non linéaire soit :

$$\min \|AX - B\|_2 = \sum_{i=1}^n [z_i - h \exp(-\alpha x)]^2 \quad (6.168)$$

Mais ils sont liés à la forme linéarisée du modèle autrement dit :

$$\min \|AX - B\|_2 = \sum_{i=1}^n [z_i - \delta + \alpha x]^2 \quad (6.169)$$

Ce qui est tout à fait différent. Néanmoins, il est possible de réduire l'impact de la linéarisation du modèle sur l'estimation des paramètres α_0 et $\delta_0 = \ln h_0$ en employant la norme de Legendre.

6-7 Recherches des estimateurs ponctuels pondérés des paramètres α_p et δ_p

Afin de trouver les estimateurs optimaux ponctuels pondérés, il faut minimiser la norme de Legendre soit :

$$\min \|AX - B\|_{2,w} = \min \sum_{i=1}^n [z_i - h \exp(-\alpha x)]_{w_i}^2 \quad \text{où : } w_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n \quad (6.170)$$

Dans le contexte du modèle $z = \exp(-\alpha x)$ sous sa forme linéarisée, on prouve que le facteur de pondération est égal à : $w_i = z_i^2; i=1, 2, \dots, n$.

En intégrant le facteur de pondération $w_i = z_i^2$ dans la structure analytique de la fonction objectif (6.170), on obtient :

$$\min \|AX - B\|_{2,w} = \min [AX - B]^T W [AX - B] = \min \sum_{i=1}^n [z_i - h \exp(-\alpha x_i)]^2 z_i^2 \quad (6.171)$$

Comme la solution minimale est égale à :

$X = (A^T W A)^{-1} A^T W B$ on calcule directement l'inverse de la matrice de pondération $A^T W A$,

car l'association de la matrice de pondération W n'influe pas sur le caractère inversible de cette dernière.

Soit :

$$(A^T W A)^{-1} = \frac{\text{adj}(A^T W A)}{\det(A^T W A)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n z_i^2 & -\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \\ -\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \quad (6.172)$$

A présent, calculons le produit matricielle $A^T W A$:

$$A^T W A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^2 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & z_i^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & z_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln z_1^2 & 1 \\ \ln z_2^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \ln z_i^2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \ln z_n^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.173)$$

Ce qui nous amène à :

$$A^T W A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i \end{bmatrix} \quad (6.174)$$

Le vecteur des inconnus paramétriques est donc :

$$X = \begin{bmatrix} -\alpha_p \\ \delta_p \end{bmatrix} \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n z_i^2 & -\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \\ -\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i & \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 \end{vmatrix}}{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i \\ \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i \end{bmatrix} \quad (6.175)$$

d'où

$$-\alpha_p = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \quad (6.176)$$

Donc l'estimateur optimal ponctuel pondéré du paramètre α est égal à :

$$\alpha_p = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \quad (6.177)$$

ou bien

$$\alpha_p = \frac{\frac{1}{\sum_{i=1}^n z_i^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n z_i^2} (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \quad (6.178)$$

L'estimateur optimal ponctuel pondéré du paramètre δ est donc :

$$\delta_p = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 \ln z_i - \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i \ln z_i}{\sum_{i=1}^n z_i^2 \sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 - (\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i)^2} \quad (6.179)$$

Puisque $h_p = \exp \delta_p$ alors $h_p = \exp \delta_p$ (6.180)

La détermination des estimateurs ponctuels pondérés conduit à un gain de précision qu'on peut mesurer par le rapport des racines carrés des erreurs quadratiques.

$$\frac{\sqrt{Q_p}}{\sqrt{Q_0}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - h_p \exp - \alpha x_p)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - h_0 \exp - \alpha x_0)^2}} \quad (6.181)$$

Graphiquement, ce gain de précision se traduit par un meilleur ajustement du nuage de point $N\{z_i, x_i\}$ au modèle exponentiel $z_p = h_p \exp - \alpha x_p$ et cela comparativement au même modèle avec des estimateurs non pondérés des paramètres α_0, h_0 soit $z_0 = h_0 \exp - \alpha x_0$.

6-8 Presentation des resultats du lissage exponentiel

Tableau 6.2 : Estimation non pondérée des paramètres.

Paramètre	Valeur correspondante
$\delta_0 = \ln h_0$	-0.014769
$h_0 = \text{Exp } \delta_0$	0.98534
α_0	0.030425

Tableau 6.3 : Estimation pondérée des paramètres.

Paramètre	Valeur correspondante
$\delta_p = \ln h_p$	-0.0014348
$h_p = \text{Exp } \delta_p$	0.99857
α_p	0.030686

Tableau 6.4 : Ajustement sans pondération du modèle.

Forme analytique théorique	Forme analytique concrète
$z_0 = h_0 \exp(-\alpha_0 x)$	$z_0 = 0.98534 \exp(0.030425x)$

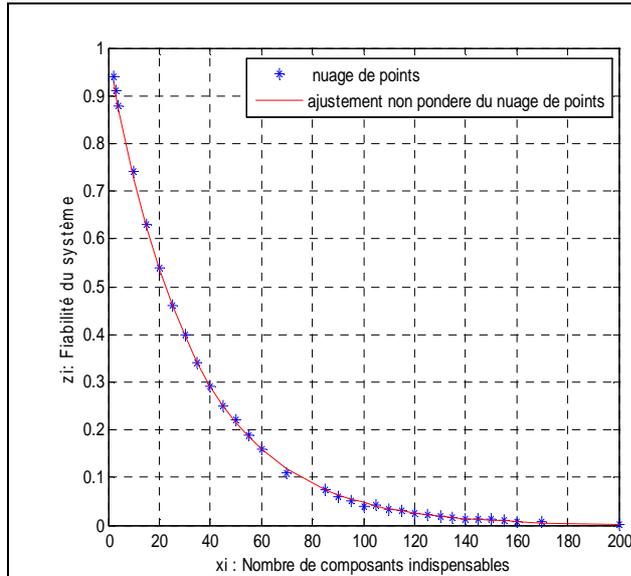


Figure 6.4 : Ajustement sans pondération du modèle au nuage de points

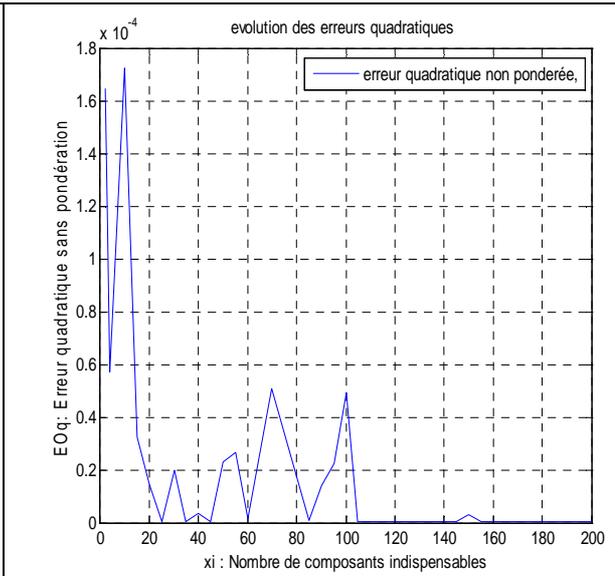
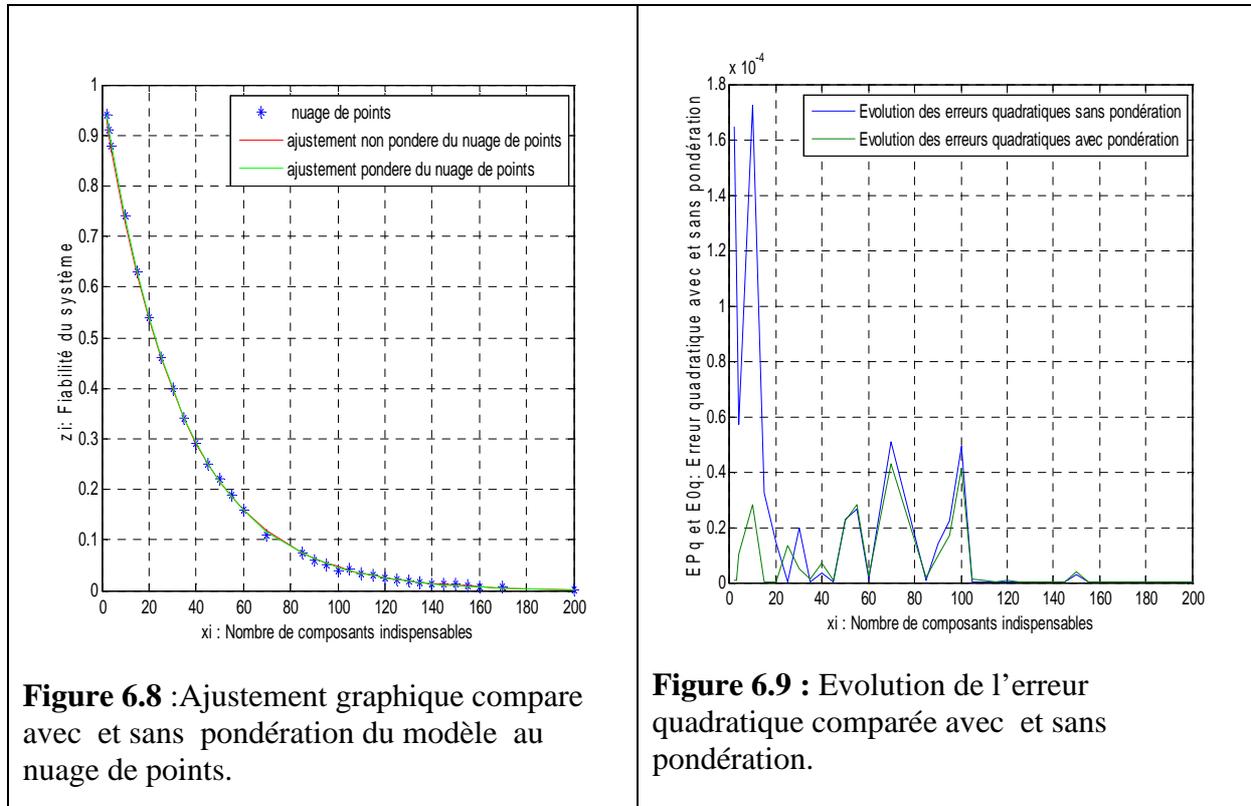


Figure 6.5 : Evolution de l'erreur quadratique sans pondération

Tableau 6.5 : Ajustement avec pondération du modèle.

Forme analytique théorique	Forme analytique Concrète
$z_p = h_p \exp(-\alpha_p x)$	$z_p = 0.99857 \exp(-0.030686x)$
<p>Figure 6.6 : Ajustement avec pondération du modèle au nuage de points</p>	<p>Figure 6.7 : Evolution de l'erreur quadratique avec pondération</p>

6-9 Ajustement graphique comparé avec et sans pondération du modèle exponentiel décroissant au nuage de points



Commentaire I :

La représentation graphique, d'une manière simultanée des deux lissages indiquent visiblement que les deux ajustements s'appliquent totalement l'un sur l'autre. Cela est d'autant plus vraisemblable que l'évolution comparative des deux écarts quadratiques avec et sans pondération par rapport à une échelle verticale plus grande montre qu'ils sont en apparence nuls (figure 6.10). En réalité, cela est vraiment erroné, car si nous opérons un 'zoom', on observe facilement un écart entre les deux courbes de lissage. Plus précisément la seconde courbe d'ajustement obtenue en employant les estimateurs pondérés paraît plus proche du nuage de points comparativement à la première.

Par conséquent, la haute qualité des deux types d'ajustement ne devrait pas conduire à la conclusion hâtive selon laquelle il n'y a pas de distinction entre le premier et le second lissage exponentiel. D'ailleurs l'évolution comparative par rapport à une échelle verticale plus réduite, des deux écarts quadratiques -avoisinant, systématiquement, la valeur nulle- montre malgré tout une nette diminution de l'erreur d'ajustement engendrée par l'estimation des

paramètres h_p et α_p suite à la minimisation de la norme de Legendre. Cela veut dire que la performance du second lissage est supérieure au premier.

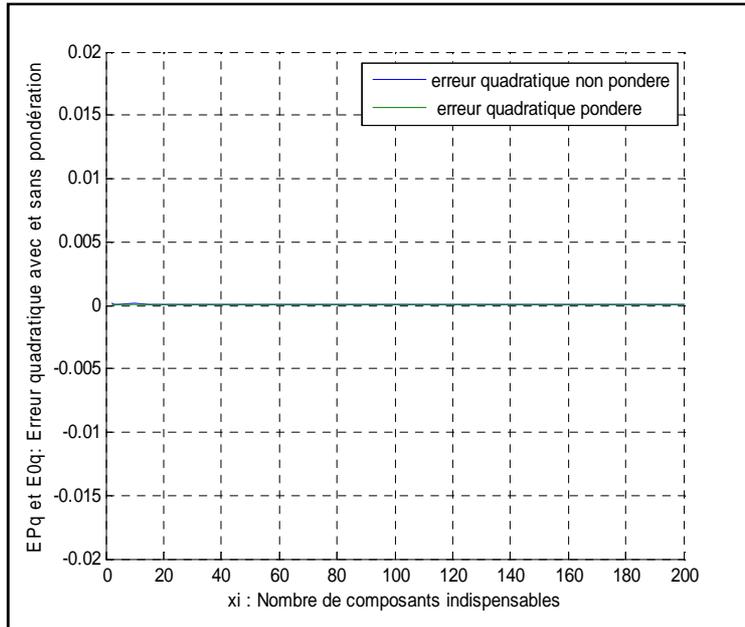


Figure 6.10 : Evolution des erreurs quadratiques non pondérées et pondérées avec échelle verticale agrandie.

Tableau 6.6 : Ecart entre valeurs observées et modèle théorique.

Type d'écart quadratique	Valeur correspondante
$E_0 = \sum_{i=1}^n [z_i - h_0 \exp(-\alpha_0 x_i)]^2$	0.00076984
$E_p = \sum_{i=1}^n [z_i - h_p \exp(-\alpha_p x_i)]^2$	0.00024273

Tableau 6.9 : Gain de précision par rapport à l'ajustement.

Rapport des écarts quadratiques	Valeur correspondante
$R_E = \frac{E_p}{E_0}$	0.3153
Racine carré du rapport des écarts quadratiques	Valeur correspondante
$GP = \sqrt{\frac{E_p}{E_0}}$	0.56152

Commentaire II :

Le rapport des deux écarts quadratiques traduit une réduction significative de l'erreur de l'ajustement. On remarque un très grand gain de précision dû principalement au perfectionnement des estimateurs des paramètres, suite à la minimisation de la norme de Legendre au lieu de la norme euclidienne, ce qui se traduit par un ajustement quasiment parfait des données d'observation avec le modèle d'ajustement exponentiel comme le montre la figure 6.5.

Conséquence : Ces résultats nous montrent que le schéma d'assemblage des composants en série a pour inconvénient la réduction importante de la fiabilité du système qui peut devenir nulle pour un nombre élevé d'éléments même si la fiabilité individuelle est très élevée. Heureusement qu'il existe des techniques de redondance qui permettent de maintenir la fiabilité des systèmes à un haut niveau, sinon à un seuil viable. Malheureusement la technique de redondance arrive rapidement à un niveau de saturation. Seul le développement technologique est en mesure d'accroître la fiabilité d'un équipement sans pour autant avoir des effets majeurs.

Chapitre VII

Résultats du traitement statistique, numérique
des données de fiabilité et leur interprétation.

7-1 Présentation des données de défaillance

Généralement, les données de survie qu'on se propose de traiter sont issues de l'exploitation du matériel. Dans le but de donner une illustration concrète de l'application du modèle de Weibull standard soumis à une transformation logathrhimique double, on s'est contenté de recueillir des données de fiabilité d'exploitation se rapportant seulement à deux dispositifs notamment, relais et mécanisme.

Parallèlement, on a essayé d'adapter la collecte des données de fiabilité de façon à tenir compte uniquement des deux parmi les trois variantes possibles des valeurs modales du paramètre d'origine γ à savoir : $\gamma_M < 0$, $\gamma_M > 0$. L'étude du cas où $\gamma_M = 0$ requiert une approche particulière.

Le caractère fastidieux des calculs n'a pas pu être dépassé que par l'élaboration d'un long programme informatique issu du logiciel MATLAB.

Tableau 7.1 : Relevé historique des instants de défaillance en heures du dispositif : Relais.

1283	4865	8185	13210	28946
1887	5147	8559	14833	29254
1888	5350	8843	14840	30822
2357	5353	9305	14988	38319
3137	5410	9460	16306	41554
3606	5536	9595	17621	42870
3752	6499	10247	17807	62690
3914	6820	11492	20747	63910
4394	7733	12913	21990	68888
4398	8025	12937	23449	73473

Tableau 7.2 : Relevé historique des instants de défaillance en heures du dispositif : Mécanisme.

150	2750	3900	4900
700	2950	4000	5000
1000	3050	4100	5200
1400	3150	4200	5400
1600	3250	4300	5600
2000	3350	4400	5700
2150	3450	4500	6000
2350	3600	4600	6200
2500	3700	4700	6600
2650	3800	4800	

Remarque :

Avant d'entamer le traitement effectif des données des avaries il est nécessaire de situer les résultats de la fiabilité d'exploitation dans le cadre général de la typologie des principaux essais de survie afin de pouvoir spécifier le mode calculatoire à adopter.

7-2 Aperçu sur les principales catégories d'essais de fiabilité

7-2-1 Définition d'un essai de fiabilité :

C'est un type d'expérience menée, en général, en laboratoire, qui consiste à soumettre un échantillon de pièces ou de dispositifs lors de la phase de conception, de développement ou de production, à un certain niveau de contraintes variées en nature et en intensité, dans le but de connaître les caractéristiques réelles de fiabilité d'un composant ou d'un système, notamment :

- i. La connaissance du mode prédominant de défaillance.
- ii. La détermination du seuil réel de fiabilité.
- iii. La détermination et la justification des actions correctives requises.
- iv. La comparaison des résultats obtenus du traitement par rapport aux objectifs fixés.

7-2-2 Typologie des essais en fiabilité :

L'analyse fiabiliste dispose d'un éventail de types d'essais de fiabilité dont voici un aperçu.

7-2-2-1 Essai de conformité :

Il s'agit d'une expérience réalisée dans des conditions de laboratoire ou d'exploitation pour savoir dans quelle mesure la valeur d'une certaine fiabilité est concordante avec les objectifs fixés.

7-2-2-2 Essai de détermination :

Il s'agit d'une expérimentation réalisée dont le but est de déterminer la valeur d'une caractéristique de fiabilité.

7-2-2-3 Essai simple tronqué :

C'est un type d'expérience qui se distingue à la fois par l'application de contrainte à intensité normale et par la fixation à priori d'un temps d'arrêt des opérations de l'essai.

7-2-2-4 Essai simple censuré :

C'est un type d'expérience marqué en même temps par l'application d'un ensemble de contraintes à intensité normale et un arrêt des opérations de l'essai dès l'apparition d'un nombre de défaillances fixé à l'avance.

7-2-2-5 Essai de fiabilité en exploitation :

C'est un genre d'expérience réalisé dans des conditions réelles d'exploitation et la vérification de la conformité d'une caractéristique en même temps la détermination de la fiabilité opérationnelle.

7-2-2-6 Essai accéléré :

C'est une expérience, au cours de laquelle le niveau des contraintes appliquées est choisi de sorte qu'il soit au-delà du seuil fixé dans les conditions normales d'exploitation afin d'accélérer l'impact des contraintes sur le dispositif objet de l'essai.

7-2-2-7 Essai sous contraintes échelonnées :

Il s'agit d'une expérience pendant laquelle une certaine contrainte est appliquée à un échantillon de composants ou de systèmes lors de périodes successives d'égale durée avec des niveaux croissant d'une période à l'autre.

7-2-2-8 Essai sous contraintes cycliques :

En fait, il est question d'expériences dans lesquelles on prévoit l'interruption périodique de la puissance des contraintes exercées aux dispositifs soumis au processus de vieillissement, dans le but, de favoriser l'apparition d'une certaine catégorie particulière de défaillance.

7-2-2-9 Mode de traitement des données de défaillance d'exploitation :

Maintenant reconsidérons, le cas particulier relatif à notre travail qui se rapporte aux données de défaillances issues de l'exploitation réelle d'un équipement. En fait, il s'agit d'une sorte d'essai de fiabilité en exploitation (7-2-2-5). Dans ce type d'expérience, on désire connaître la fiabilité des dispositifs, dans des conditions concrètes de mise en service. Plus précisément il est question de déterminer la fiabilité opérationnelle. Dans la mesure où les contraintes appliquées sont tout simplement, normales alors le traitement computationnel des données des avaries s'opère de la même manière que dans le cas de l'essai du type simple.

Une précision importante, concernant la conduite des opérations de traitement computationnel des données de fiabilité s'impose vu que la taille des certains échantillons objet d'investigation est grande. Statistiquement parlant, dans ce cas, il est permis de procéder par regroupement des données de défaillances en un certain nombre de classes et appliquer ainsi, le test de X^2 sur la validité du modèle Weibull standard au lieu des tests de Kolmogorov- Smirnov et binomial simplifié. Bien que cette procédure soit dans une certaine mesure, techniquement fondée, elle présente l'inconvénient majeur d'aboutir à une perte d'information vitale car on utilise non pas les données ponctuelles mais on emploie les valeurs correspondantes aux centres de classes. Il ressort, donc, que cette méthode de traitement computationnel des données de défaillances n'est malheureusement pas entièrement valable car elle rentre en contradiction avec l'objectif, d'aboutir à un résumé optimal de l'information disponible, et exerce, automatiquement un impact négatif sur l'estimation des paramètres inconnus alors que les moyens computationnels existants, de part leur puissance et leur vitesse offrent l'opportunité d'agir, d'une manière, plus rigoureuse en mettant en exécution l'algorithme le plus pertinent possible.

7-2-3 Détermination comparative de l'estimateur du paramètre de localisation γ du modèle Weibull standard :

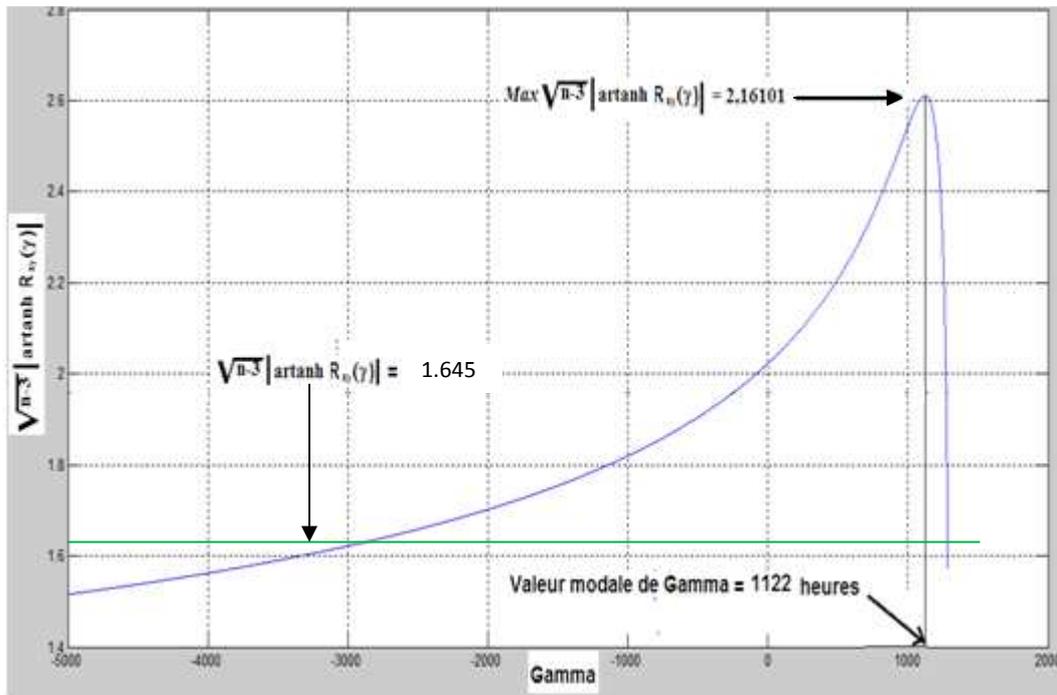


Figure 7.1 : La Représentation graphique de $\sqrt{n-3} |\operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma)|$ avec paramétrage en fonction de la valeur modale de gamma positive pour un dispositif : relais.

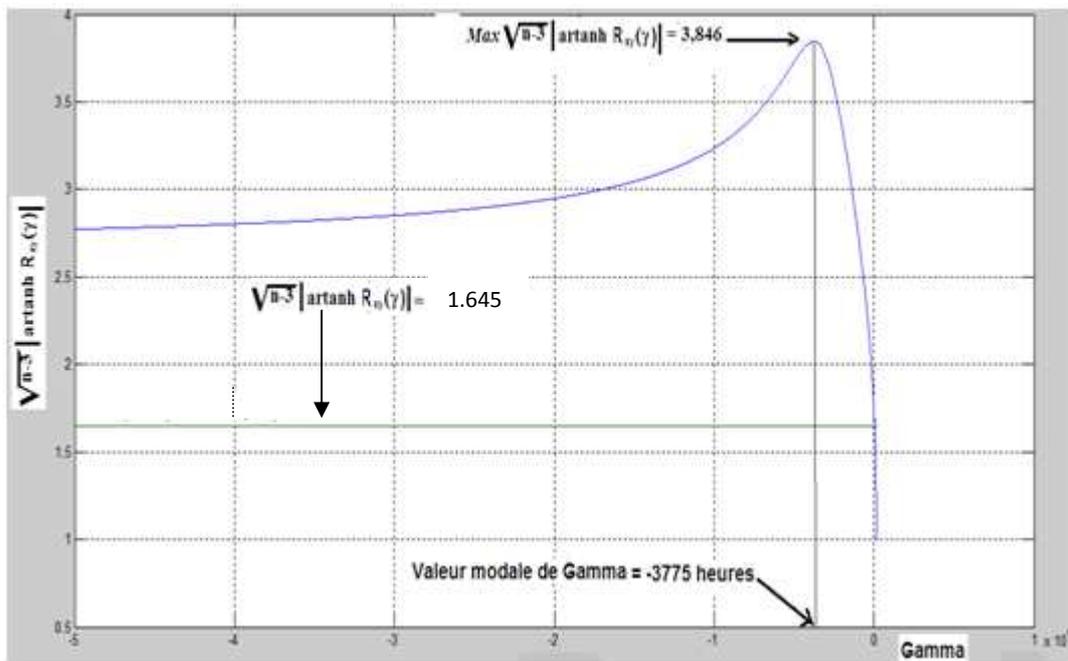


Figure 7.2 : Représentation graphique de $\sqrt{n-3} |\operatorname{arctanh} R_{xy}|$ avec paramétrage en fonction du paramètre d'origine γ dont la valeur modale est négative pour un dispositif : mécanisme.

Commentaire 1:

Puisque la forme analytique du test unilatéral de Z transformée de Fisher, au risque $\alpha = 5\%$ est donnée par l'inéquation :

$$\sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right| \geq 1,645 \tag{7.1}$$

$$\text{où } R_{xy}(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M) \sum_{i=1}^n \operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [\ln(t_i - \gamma_M)]^2 - \frac{1}{n} [\sum_{i=1}^n \ln(t_i - \gamma_M)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)} \right]^2}} \tag{7.2}$$

alors, la droite horizontale correspondant à : $\sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right| = 1,645$

est la limite en deçà de laquelle l'hypothèse d'une liaison linéaire entre les grandeurs variables :

$$\ln(t_i - \gamma_M) \text{ et } \operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)} \tag{7.3}$$

est rejetée alors que pour les valeurs : $\sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right|$

située au dessus d'elle, l'hypothèse d'une relation linéaire entre les variables sus indiquées est acceptée.

Puisque le traitement numérique des données de fiabilité a conduit à

$$\operatorname{Max} \sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right| > 1,645 \tag{7.4}$$

alors la linéarité de la relation entre $\ln(t_i - \gamma_M)$ et $\operatorname{lnln} \frac{1}{1-F(t_i)}$ est admise, de même le modèle théorique de Weibull est valide.

Sachant que pour le dispositif relais, le maximum global de la quantité $\sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right|$ est atteint au point d'abscisse $\gamma_M = 1122$ heures et d'ordonnée :

$$\operatorname{Max} \sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right| = 2,16101 \tag{7.5}$$

alors la valeur modale correspondant au niveau maximum de redressement linéaire du modèle Weibull logarithmiquement transformé sera considérée comme estimateur ponctuel du paramètre d'origine et donc $\gamma_M = 1122$ heures.

Ceci est valable aussi pour le système type mécanisme puisque

$$\operatorname{Max} \sqrt{n-3} \left| \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_j) \right| = 3,846 \tag{7.6}$$

La valeur modale du paramètre d'origine est : $\gamma_M = -3775$ heures, cette même valeur est donc l'estimateur ponctuel de Gamma.

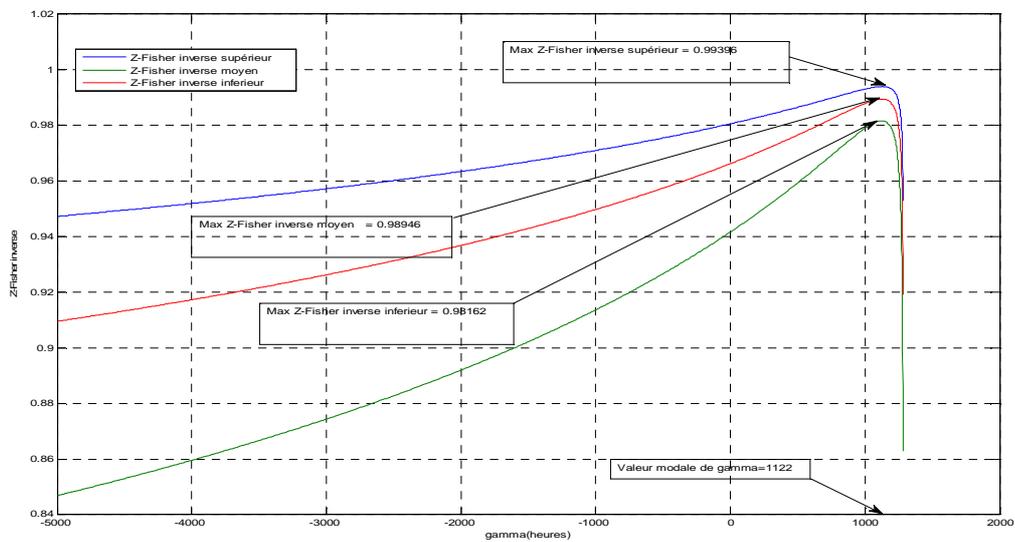


Figure 7.3 : Représentation graphique des trois termes du test bilatéral de Z-transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque $\alpha = 5\%$ en fonction du paramètre d'origine γ dont la valeur modale est positive.

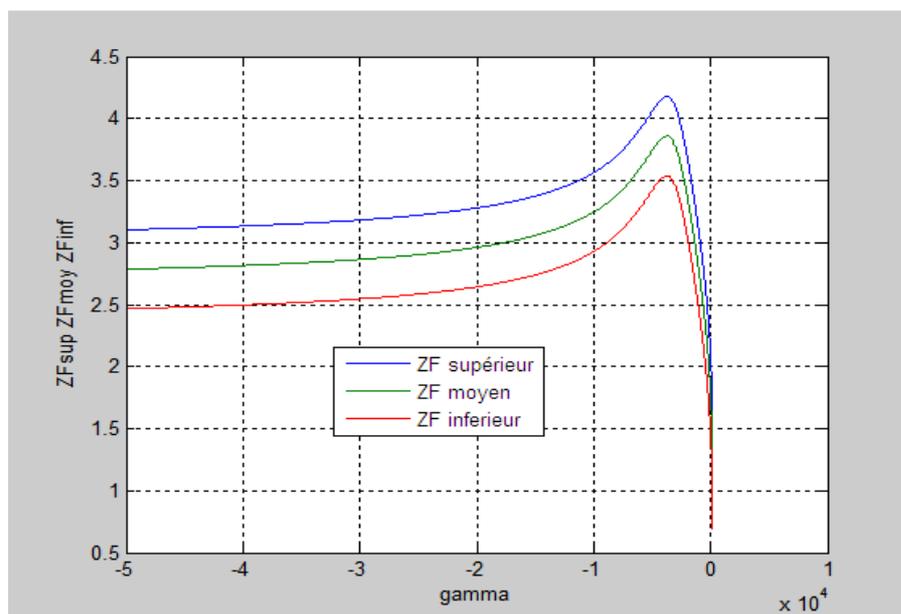


Figure 7.4 : Représentation graphique des trois termes du test bilatéral de Z-transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque $\alpha = 5\%$ en fonction du paramètre d'origine γ dont la valeur modale est négative.

Commentaire 2 :

Les limites de l'intervalle de confiance de z –transformée de FISHER avec paramétrage sont données par :

$$i- \text{ Limite Sup : } Z_{sup}(\gamma_M) = \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma) + \frac{R_{xy}(\gamma_M)}{2(n-1)} + \frac{1,96}{\sqrt{n-3}} \quad (7.7)$$

$$ii- Z_{moy}(\gamma_M) = \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_M). \quad (7.8)$$

$$iii- Z_{inf}(\gamma_M) = \operatorname{arctanh} R_{xy}(\gamma_M) + \frac{R_{xy}(\gamma_M)}{2(n-1)} - \frac{1,96}{\sqrt{n-3}} \quad (7.9)$$

Comme le montre la figure 7.3 (cas du dispositif relais), la courbe correspondant au terme intermédiaire $Z_{moy}(\gamma_M)$ est bien encadrée par les deux courbes coïncidant avec les limites du test bilatéral de Z transformée de Fisher. Il s'ensuit donc que l'hypothèse d'une liaison linéaire entre les deux variables $\ln(t_i - \gamma_M); \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}$ est vraisemblable avec un niveau de confiance de $(1 - \alpha) = 95\%$. Dans ces conditions, la validité du modèle Weibull standard est assurée.

Les trois maxima correspondant $Z_{sup}(\gamma_M), Z_{moy}(\gamma_M), Z_{inf}(\gamma_M)$ sont respectivement :

$$\text{Max } Z_{sup}(\gamma_M) = 2.9001 \quad (7.10)$$

$$\text{Max } Z_{moy}(\gamma_M) = 2.6201 \quad (7.11)$$

$$\text{Max } Z_{inf}(\gamma_M) = 2.3401 \quad (7.12)$$

On remarque que les valeurs du paramètre d'origine de Weibull logarithmiquement transformée sont identiques et par conséquent l'estimateur du paramètre de localisation sera $\gamma_M = 1122$ heures.

Pour le cas du dispositif mécanisme, (voir figure 7.4), l'hypothèse d'une relation linéaire entre les deux variables $\ln(t_i - \gamma_M); \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}$ est acceptée pour un seuil de risque $\alpha = 5\%$. Les trois maxima respectifs, correspondent à la valeur modale $\gamma_M = -3775$ heures, ce qui implique un redressement de la courbe du modèle de Weibull vers la droite; donc l'estimateur de Gamma est identique à celui obtenu par la méthode précédente.

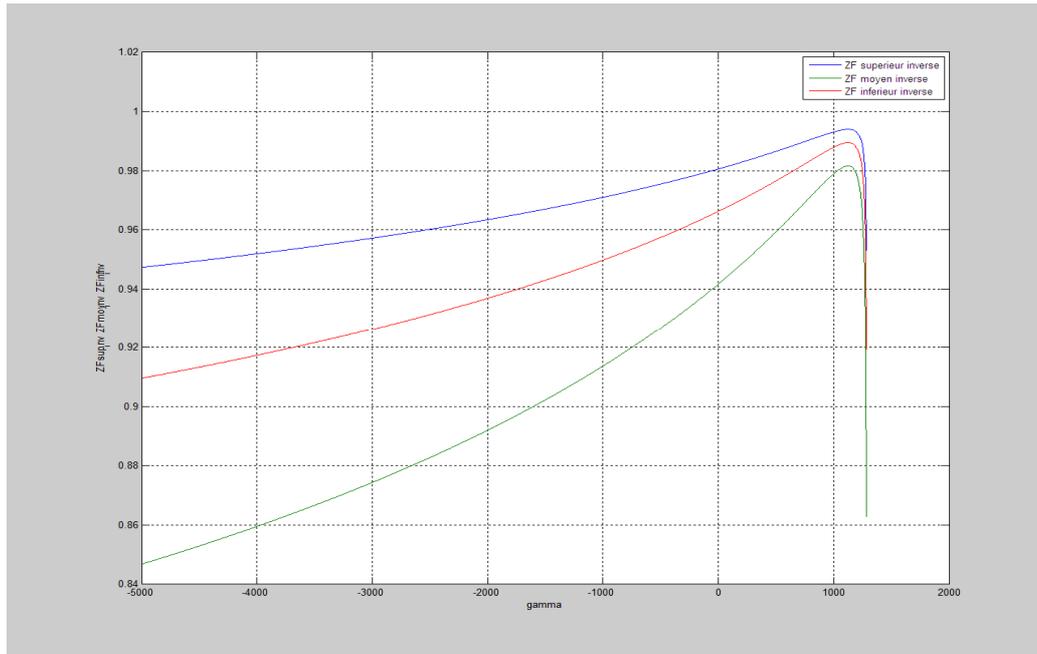


Figure 7.5 : Représentation graphique des trois termes de l'inverse du test bilatéral de Z transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque $\alpha = 5\%$ en fonction du paramètre d'origine γ .

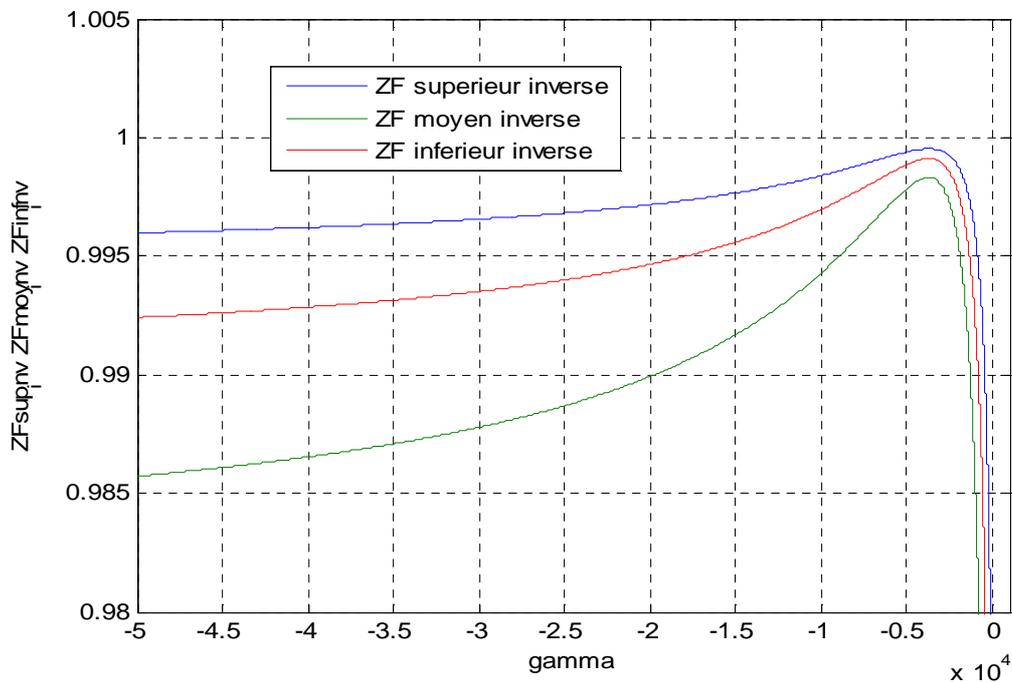


Figure 7.6 : Représentation graphique des trois termes de l'inverse du test bilatéral de Z transformée de Fisher avec paramétrage au seuil de risque $\alpha = 5\%$ en fonction du paramètre d'origine γ .

Commentaire 3 :

Les figures 7.5 et 7.6 indiquent que les courbes correspondant aux termes intermédiaires $R_{xy} \text{ moy}(\gamma_M) = Th Z_{moy}(\gamma_M)$ pour les deux types de dispositif sont bien situées entre les deux extrémités de l'intervalle de confiance du test bilatéral de l'inverse de Z-transformée de Fisher avec paramétrage soit :

$$R_{xy} \text{ sup}(\gamma_M) = Th Z_{sup}(\gamma_M) \quad (7.13)$$

et

$$R_{xy} \text{ inf}(\gamma_M) = Th Z_{inf}(\gamma_M) \quad (7.14)$$

Par conséquent, on peut confirmer avec un niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ que la relation entre $\ln(t_i - \gamma_M)$ et $\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}$ est linéaire dans les deux cas de figure et donc le modèle Weibull proposé est admis.

Les trois maxima relatifs au dispositif relais sont moins élevés que les valeurs correspondantes des optima du dispositif mécanisme comme le confirment les résultats suivants :

➤ Dispositif : Relais

- i- $MaxR_{xy} \text{ sup}(\gamma_M) = MaxTh Z_{sup}(\gamma_M)=0.99396$
- ii- $MaxR_{xy} \text{ moy}(\gamma_M) = MaxTh Z_{moy}(\gamma_M)=0.98946$
- iii- $MaxR_{xy} \text{ inf}(\gamma_M) = MaxTh Z_{inf}(\gamma_M)=0.98162$

➤ Dispositif : Mécanisme

- i- $MaxR_{xy} \text{ sup}(\gamma_M) = MaxTh Z_{sup}(\gamma_M)=0.99953$
- ii- $MaxR_{xy} \text{ moy}(\gamma_M) = MaxTh Z_{moy}(\gamma_M)=0.99911$
- iii- $MaxR_{xy} \text{ inf}(\gamma_M) = MaxTh Z_{inf}(\gamma_M)=0.99832$

La série des trois valeurs modales de Gamma émanant des optima du dispositif relais sont identiques (Figure 7.5). La même remarque est valable pour les optima du dispositif mécanisme (Figure 7.6). Par conséquent, pour le premier dispositif, l'estimateur du paramètre d'origine est $\gamma_M=1122$ heures alors que pour le second dispositif, l'estimateur du paramètre de localisation vaut $\gamma_M = -3773$ heures.

Ces deux valeurs modales coïncident avec le maximum de redressement linéaire de la courbe du modèle Weibull logarithmiquement transformé. Elles nous permettent d'obtenir deux séries corrigées d'une manière optimale, soit respectivement pour le premier et le deuxième système $T_i = t_i - 1122$ et $T_i = t_i + 3773$.

Remarque :

Une remarque importante s'impose à ce stade de notre développement; elle consiste dans le fait que les méthodes antérieures et plus particulièrement le test bilatéral de Z transformée de Fisher ont un double rôle.

- I. D'abord tester la validité du modèle Weibull standard sous sa forme linéarisée.
- II. Ensuite fournir un estimateur optimal ponctuel du paramètre d'origine γ .

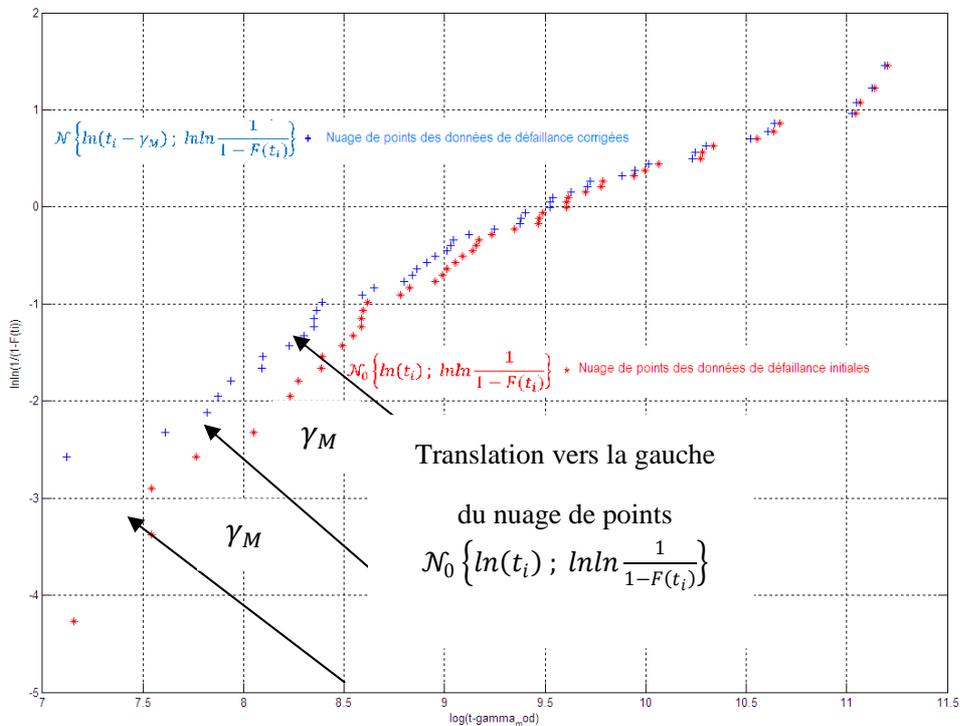


Figure 7.7 : Redressement du nuage de points initial $\mathcal{N}_0 \left\{ \ln(t_i) ; \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}$ vers la gauche selon la grandeur γ_M

Commentaire 4 :

Comme précédemment, les différentes méthodes mises en œuvre donnent la même évaluation pour la valeur modale γ_M ce qui confère une confiance à l'estimateur ponctuel optimal du paramètre d'origine γ .

Maintenant on corrige la série des instants de défaillances en mettant $T_i = t_i - \gamma_M$.

On constate visiblement que le nuage de points $\mathcal{N}_1 \left\{ \ln(t_i - \gamma_M) \text{ et } \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}$ présente une tendance nette vers une forme géométrique linéaire.

Le nuage de points initial $\mathcal{N}_0 \left\{ \ln(t_i - \gamma_M) \text{ et } \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}$ a subi un mouvement translatoire vers la gauche d'une grandeur γ_M car $\gamma_M > 0$.

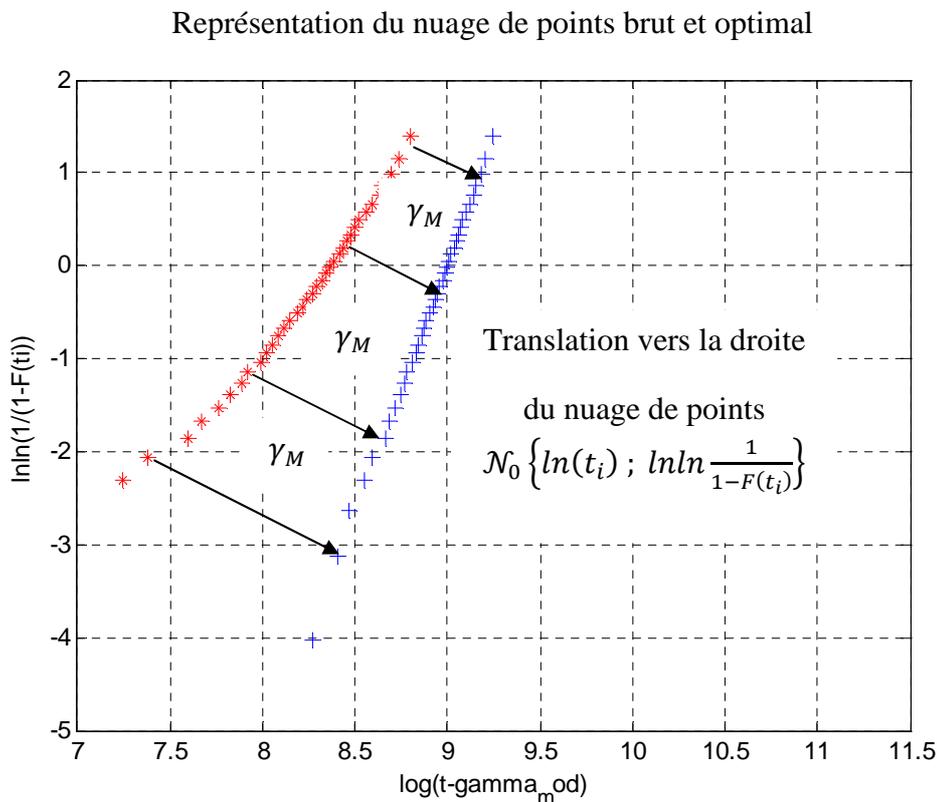


Figure 7.8 : Redressement du nuage de points initial $\mathcal{N}_0 \left\{ \ln(t_i); \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}$ vers la droite selon la grandeur γ_M .

Commentaire 5 :

On constate que toutes les valeurs modales émanant des différentes méthodes employées sont identiques, ce qui donne une assurance quant à la qualité de l'estimateur ponctuel du paramètre d'origine soit $\hat{\gamma} = \gamma_M$.

En soustrayant de chaque composante de la série initiale $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ la valeur modale γ_M on obtient une série corrigée $T_i = t_i - \gamma_M$.

Après translation d'une grandeur γ_M , on aboutit à un nuage de points $\mathcal{N}_1 \left\{ \ln(t_i - \gamma_M) \text{ et } \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\}$ marqué par une nette tendance vers une forme géométrique qui s'ajuste bien avec l'allure d'une droite.

Étant donné que la valeur modale γ_M est négative, cela veut dire, que le nuage de points

$$\mathcal{N}_0 \left\{ \ln(t_i - \gamma_M) \text{ et } \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)} \right\} \quad (7.15)$$

à été soumis à une translation vers la droite.

Tableau 7.3 : Présentation comparative des résultats.

FACTEURS DE COMPARAISON	TYPE DE DISPOSITIF	RELAIS	MÉCANISME
	$\text{Max} \sqrt{n-3} \text{arctanh } R_{xy}(\gamma_j) $	2,16101	3.846
	Max arth $Z_{\text{sup}}(\gamma)$	2.9001	4.1771
	Max arth $Z_{\text{moy}}(\gamma)$	2.6201	3.8591
	Max arth $Z_{\text{inf}}(\gamma)$	2.3401	3.5412
	Max th $Z_{\text{sup}}(\gamma)$	0.99396	0.99953
	Max th $Z_{\text{moy}}(\gamma)$	0.98946	0.99911
	Max th $Z_{\text{inf}}(\gamma)$	0.98162	0.99832
	Valeur modale du paramètre d'origine ou estimateur ponctuel du paramètre $\gamma : \gamma_M$	1122 heures	-3775 heures
	Estimateur ponctuel non pondéré du paramètre de forme : β_0	0.97119	5.3553

Estimateur ponctuel non pondéré du paramètre d'échelle : η_0	15185 heures	8085.3 heures
Estimateur ponctuel pondéré du paramètre de forme : β_p	0.91074	5.4165
Estimateur ponctuel pondéré du paramètre d'échelle : η_p	14152 heures	8089.1 heures
Fonctions de fiabilité respectivement avec des paramètres $\beta_0, \eta_0, \gamma_M : R_0(T)$ et $\beta_p, \eta_p, R_p(T)$	$R_0(T) = e^{-\left(\frac{t-\gamma_M}{15185}\right)^{0.97119}}$ $R_p(T) = e^{-\left(\frac{t-\gamma_M}{14152}\right)^{0.91074}}$ <p>Voir figure :7.9</p>	$R_0(T) = e^{-\left(\frac{t+3775}{8085.3}\right)^{5.3553}}$ $R_p(T) = e^{-\left(\frac{t+3775}{8089.1}\right)^{5.4165}}$ <p>Voir figures:7.10</p>
Estimateur ponctuel non pondéré du MTBF : $E_0(t) = \gamma_M + \eta_0 x$	16663heures	4499.4 heures
Estimateur ponctuel pondéré du MTBF = $E_p(t) = \gamma_M + \eta_p x$	16013heures	4736.4 heures
Estimateur de l'écart-type sans pondération $\delta_0(t) = \eta_0 y$	16400 heures	8732.1 heures
Estimateur de l'écart-type avec pondération $\delta_p(t) = \eta_p y$	16558 heures	9464.3 heures

Tableau 7.4 : Présentation comparative des résultats .

<p>TYPE DE DISPOSITIF</p> <p>FACTEURS DE COMPARAISON</p>	<p>RELAIS</p>	<p>MÉCANISME</p>
<p>Fiabilité au seuil du MTBF avec des estimateurs non pondérés des paramètres : $R_0(MTBF)$</p>	<p>$R_0(MTBF) = 0.35962$</p>	<p>$R_0(MTBF) = 0.32243$</p>
<p>Fiabilité au seuil du MTBF avec des estimateurs pondérés des paramètres : $R_p(MTBF)$</p>	<p>$R_p(MTBF) = 0.35084$</p>	<p>$R_p(MTBF) = 0.26785$</p>
<p>Valeur de taux de défaillance au seuil de MTBF avec des estimateur non pondéré des paramètres : $\lambda_0(MTBF)$</p>	<p>$\lambda_0(MTBF) = 6,3913 \times 10^{-5}$</p>	<p>$\lambda_0(MTBF) = 73,256 \times 10^{-5}$</p>
<p>Valeur du taux de défaillance au seuil de MTBF avec des estimateur pondéré des paramètres : $\lambda_p(MTBF)$</p>	<p>$\lambda_p(MTBF) = 6,4063 \times 10^{-5}$</p>	<p>$\lambda_p(MTBF) = 83,834 \times 10^{-5}$</p>
<p>Fonctions du taux de défaillance avec des estimateurs non pondérés et pondérés des paramètres : $\lambda_0(t)$</p>	<p>$\lambda_0(t) = 6.3956 \times 10^{-5} \times \left(\frac{t-1122}{15185}\right)^{-0.028812}$</p> <p>$\lambda_p(t) = 6.4355 \times 10^{-5} \times \left(\frac{t-1122}{14152}\right)^{-0.089263}$</p>	<p>$\lambda_0(t) = 66,236 \times 10^{-5} \times \left(\frac{t+3775}{8085.3}\right)^{4.3553}$</p> <p>$\lambda_p(t) = 66,961 \times 10^{-5} \times \left(\frac{t+3775}{8089.1}\right)^{4.4165}$</p>

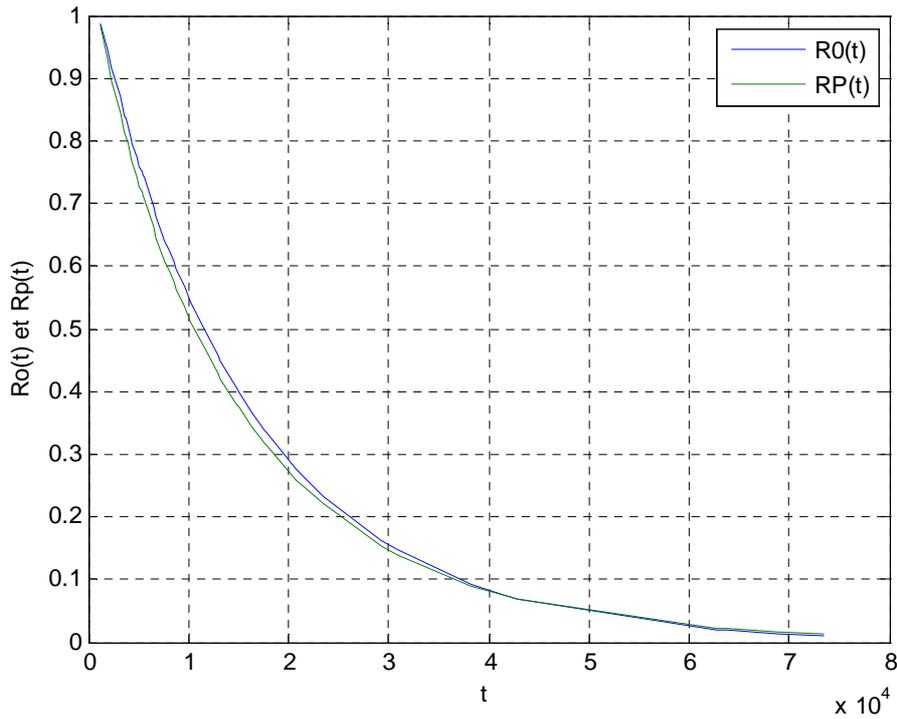


Figure 7.9 : Allure graphique de la fonction de fiabilité respectivement avec des paramètres β_0 , η_0, γ_M : $R_0(T)$ et : β_p, η_p , $R_p(T)$. (Dispositif : Relais).

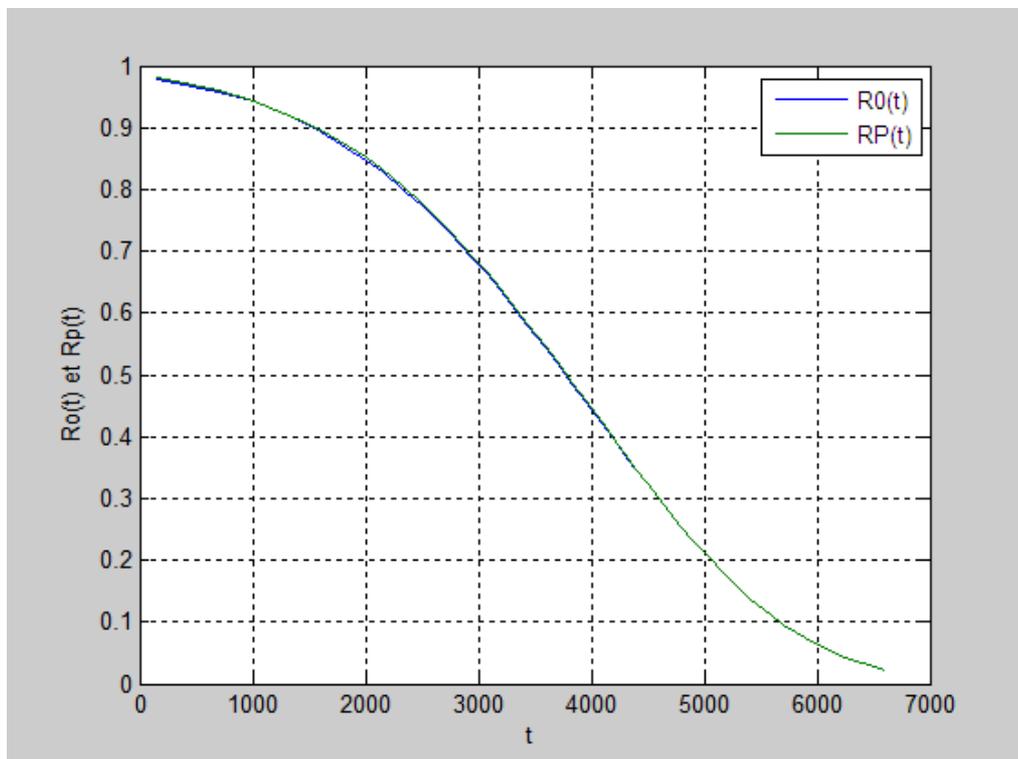


Figure 7.10 : Allure graphique de la fonction de fiabilité respectivement avec des paramètres $\beta_0, \eta_0, \gamma_M$: $R_0(T)$ et : β_p, η_p , $R_p(T)$. (Dispositif : Mekanisme).

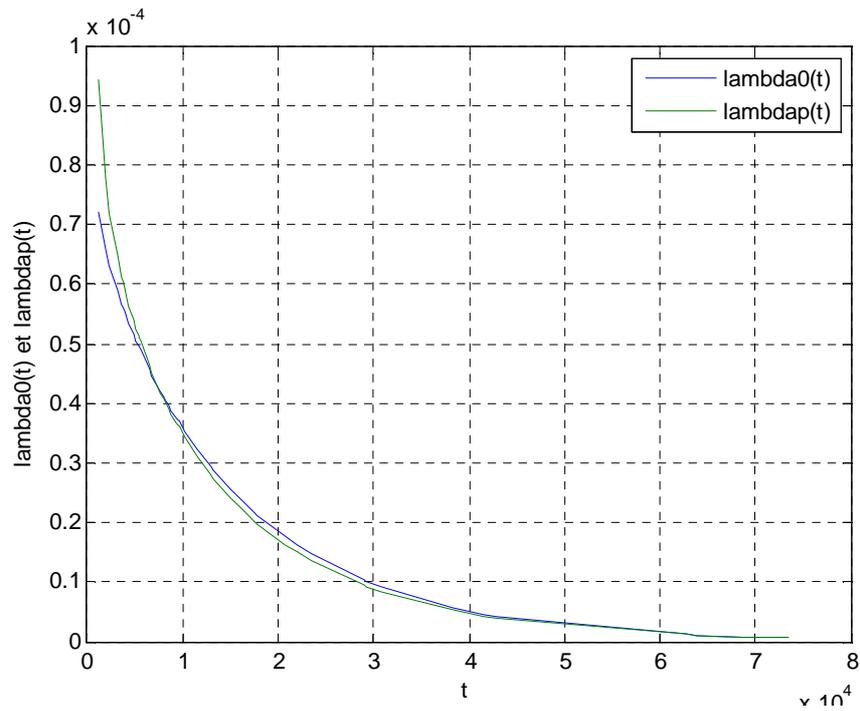


Figure 7.11: Allure du taux de défaillance avec des estimateurs non pondérés et pondérés des paramètres : $\lambda_0(t)$.

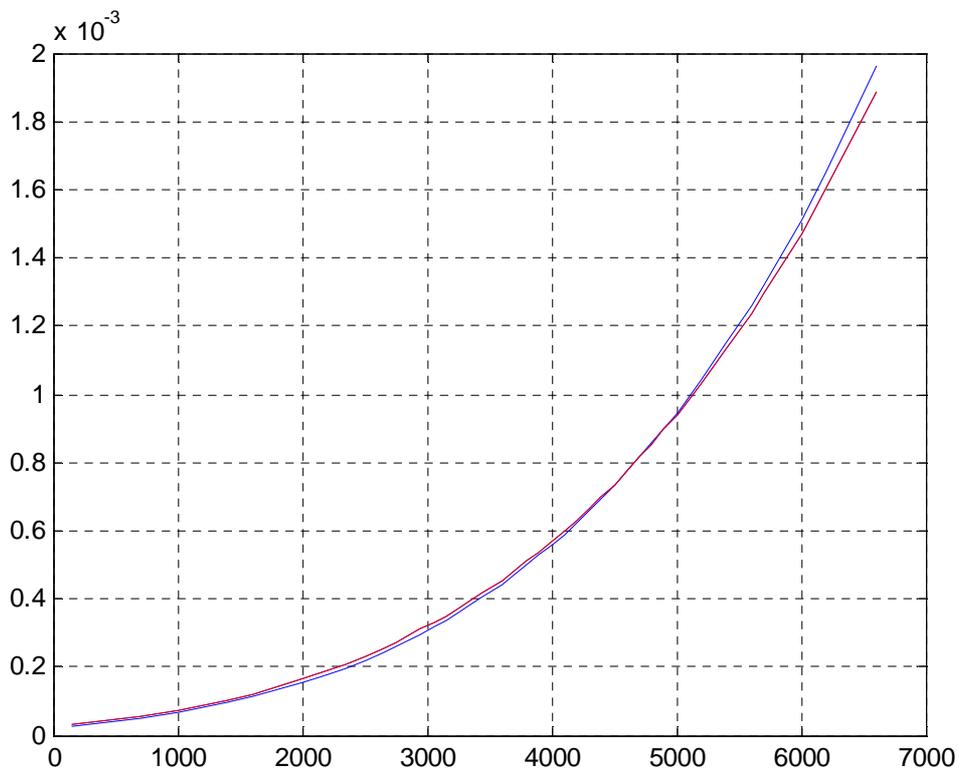


Figure 7.12 : Allure du Taux de défaillance avec des estimateurs non pondérés et pondérés des paramètres : $\lambda_0(t)$.

Commentaire 6 :

D'après la figure 7.11 le taux de défaillance $\lambda(t)$ est décroissant car $\beta < 1$. Par conséquent le dispositif relais se trouve dans la phase de jeunesse. Il faudrait que le fabricant applique la technique du déverminage (burn – in) pour éliminer les pannes du type infantile et cela avant le débarquement du matériel a destination du client.

Par référence à la figure 7.12 on constate que le taux de défaillance $\lambda(t)$ est croissant car $\beta > 1$. Donc le dispositif mécanisme se trouve dans la période de vieillesse. La maintenance préventive est applicable pour contourner l'apparition des défaillances d'usure.

Tableau 7.13 : Application des tests de Kolmogorov-Smirnov et binomial simplifié pour le dispositif: Relais.

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
1	1283	0.98318	0.016821	0.0029324
2	1887	0.93226	0.067735	0.034005
3	1888	0.93219	0.067813	0.014242
4	2357	0.89719	0.10281	0.029401
5	3137	0.84413	0.15587	0.062612
6	3606	0.81463	0.18537	0.072271
7	3752	0.80576	0.19424	0.061299
8	3914	0.79609	0.20391	0.051135
9	4394	0.76836	0.23164	0.059019
10	4398	0.76814	0.23186	0.039403

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
11	4865	0.74243	0.25757	0.045268
12	5147	0.72746	0.27254	0.040397
13	5350	0.71693	0.28307	0.031087
14	5353	0.71677	0.28323	0.0114
15	5410	0.71385	0.28615	0.0055205
16	5536	0.70745	0.29255	0.01896
17	6499	0.66085	0.33915	0.0078016
18	6820	0.64617	0.35383	0.0026394
19	7733	0.60654	0.39346	0.02243
20	8025	0.59448	0.40552	0.014643
21	8185	0.588	0.412	0.0012854
22	8559	0.57317	0.42683	0.003723
23	8843	0.5622	0.4378	0.012594
24	9305	0.54487	0.45513	0.01511
25	9460	0.5392	0.4608	0.029279
26	9595	0.53431	0.46569	0.044235
27	10247	0.51143	0.48857	0.041189
28	11492	0.47077	0.52923	0.020372

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
29	12913	0.42876	0.57124	0.001797
30	12937	0.42809	0.57191	0.017372
31	13210	0.42052	0.57948	0.029645
32	14833	0.37848	0.62152	0.0074495
33	14840	0.37831	0.62169	0.02712
34	14988	0.37472	0.62528	0.043367
35	16306	0.34431	0.65569	0.032802
36	17621	0.31664	0.68336	0.024972
37	17807	0.31292	0.68708	0.041099
38	20747	0.26006	0.73994	0.0080725
39	21990	0.24067	0.75933	0.008526
40	23449	0.21986	0.78014	0.0075613
41	28946	0.15709	0.84291	0.035375
42	29254	0.15418	0.84582	0.018436
43	30822	0.14026	0.85974	0.012522
44	38319	0.089709	0.91029	0.043228
45	41554	0.074166	0.92583	0.038929
46	42870	0.068669	0.93133	0.024585

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
47	62690	0.022028	0.97797	0.051384
48	63910	0.020564	0.97944	0.033008
49	68888	0.01555	0.98445	0.018181
50	73473	0.01204	0.98796	0.0018491
47	62690	0.022028	0.97797	0.051384
48	63910	0.020564	0.97944	0.033008

Tableau 7.6 : Application des tests de Kolmogorov-Smirnov et binomial simplifié pour le dispositif : Mécanisme.

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
1	3925	0.019704	0.017766	0.0019378
2	4475	0.039683	0.043147	0.0034645
3	4775	0.05592	0.068528	0.012608
4	5175	0.085127	0.093909	0.008782
5	5375	0.1035	0.11929	0.015791
6	5775	0.14886	0.14467	0.0041858

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
7	5925	0.16905	0.17005	0.00099804
8	6125	0.19882	0.19543	0.0033898
9	6275	0.22331	0.22081	0.0024955
10	6425	0.24964	0.24619	0.0034505
11	6525	0.26821	0.27157	0.0033601
12	6725	0.30771	0.29695	0.010751
13	6825	0.32857	0.32234	0.0062398
14	6925	0.35015	0.34772	0.0024302
15	7025	0.37238	0.3731	0.00072143
16	7125	0.39521	0.39848	0.0032661
17	7225	0.4186	0.42386	0.005262
18	7375	0.45456	0.44924	0.0053184
19	7475	0.47901	0.47462	0.0043934
20	7575	0.50376	0.5	0.0037593
21	7675	0.52871	0.52538	0.0033287
22	7775	0.55377	0.55076	0.0030091
23	7875	0.57885	0.57614	0.0027041
24	7975	0.60384	0.60152	0.0023138

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
25	8075	0.62864	0.6269	0.0017364
26	8175	0.65315	0.65228	0.00086905
27	8275	0.67727	0.67766	0.00039078
28	8375	0.7009	0.70305	0.0021438
29	8475	0.72394	0.72843	0.0044879
30	8575	0.74629	0.75381	0.0075161
31	8675	0.76787	0.77919	0.011316
32	8775	0.7886	0.80457	0.015968
33	8975	0.82722	0.82995	0.0027243
34	9175	0.86171	0.85533	0.006378
35	9375	0.89177	0.88071	0.01106
36	9475	0.90511	0.90609	0.00098155
37	9775	0.93847	0.93147	0.0069961
38	9975	0.95547	0.95685	0.0013873
39	10375	0.97872	0.98223	0.0035139
29	8475	0.72394	0.72843	0.0044879
30	8575	0.74629	0.75381	0.0075161
31	8675	0.76787	0.77919	0.011316

N° de série	Instants de défaillances corrigés	Fonction de répartition théorique	Fonction de répartition empirique	Série des écarts
i	Ti(heures)	F(ti)	$Q(ti) = \frac{i-0,3}{n+0,4}$	$D_n = F(ti) - Q(ti) $
32	8775	0.7886	0.80457	0.015968
33	8975	0.82722	0.82995	0.0027243
34	9175	0.86171	0.85533	0.006378
35	9375	0.89177	0.88071	0.01106
36	9475	0.90511	0.90609	0.00098155
37	9775	0.93847	0.93147	0.0069961
38	9975	0.95547	0.95685	0.0013873
39	10375	0.97872	0.98223	0.0035139

Tableau 7.7 : Recueil des résultats des tests de Kolmogorov-Smirnov et binomial simplifié.

Test de Kolmogorov-Smirnov : Max écart empirique $\text{Max } D_n = \text{Max} F(ti) - Q(ti) $	Max $D_{50} = 0.072271$	Max $D_{39} = 0.015968$
Test de Kolmogorov-Smirnov : Max écart théorique $D_n \alpha$	$D_{50;0,05} = 0.19233$	$D_{39;0,05} = 0.21777$
Test binomial simplifié Max écart empirique : $\text{Max } B_n$	Max $B_{50} = 0.072271$	$B_{39} = 0.015968$
Test binomial simplifié Ecart théorique $B(n ; 0,5, \alpha)$	$B(50 ; 0,5, 0,05) = 0,14425$	$B(39 ; 0,5, \alpha) = 0.16333$

Commentaire 7 :

Au seuil de signification $\alpha = 5\%$ on a constaté d'une part que : $\text{Max } D_{50} < D_{50;0,05}$ et que $\text{Max } B_{(50)} < B(50; 0,5; 0,05)$ sont vérifiés pour les données correspondant au système relais ce qui implique l'acceptation de l'hypothèse du modèle Weibull standard.

Remarque : On peut observer que les limites du test de Kolmogorov-Smirnov sont déterminées comme suit :

$$L_{\text{inf}} = F(t_i) - D_{n,\alpha} = F(t_i) - D_{50; 0,05} = F(t_i) - 0.19233$$

$$L_{\text{sup}} = F(t_i) + D_{n,\alpha} = F(t_i) + D_{50; 0,05} = F(t_i) + 0.19233$$

alors que les limites du test binomial simplifié sont fixées de la manière suivante :

$$L_{\text{inf}} = F(t_i) - B(n; 0,5, \alpha) = F(t_i) - B(50; 0,5, 0,05) = F(t_i) - 0,14425$$

$$L_{\text{sup}} = F(t_i) + B(n; 0,5, \alpha) = F(t_i) + B(50; 0,5, 0,05) = F(t_i) + 0,14425$$

Ce qui nous permet de passer à la forme graphique des deux tests :

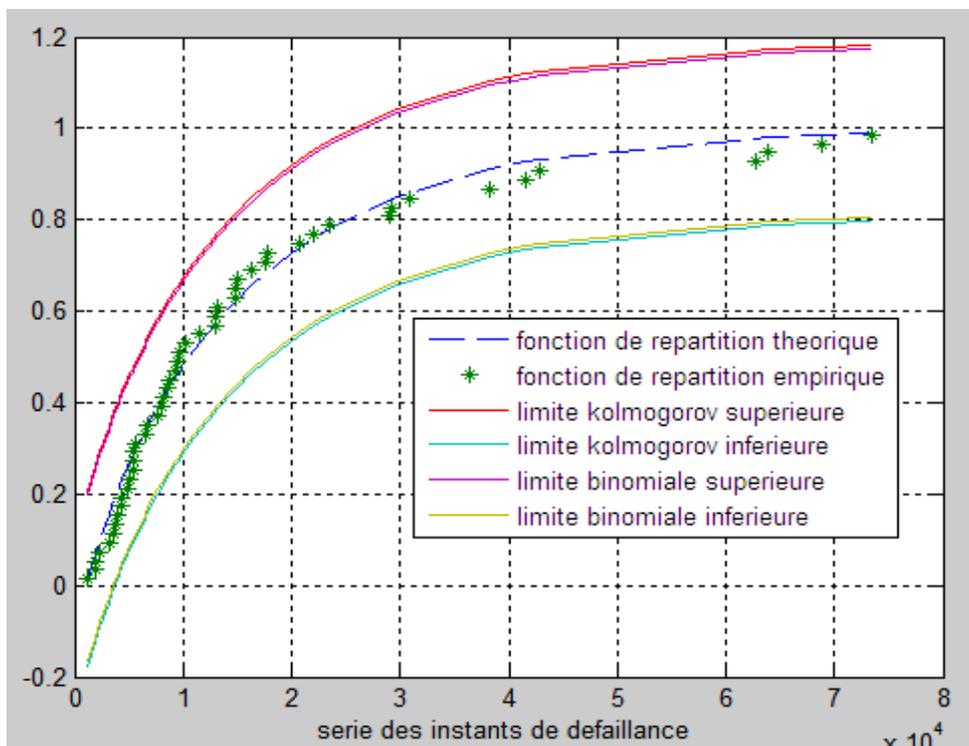


Figure 7.13: Variante graphique des tests de Kolmogorov-Smirnov et binomial simplifié.

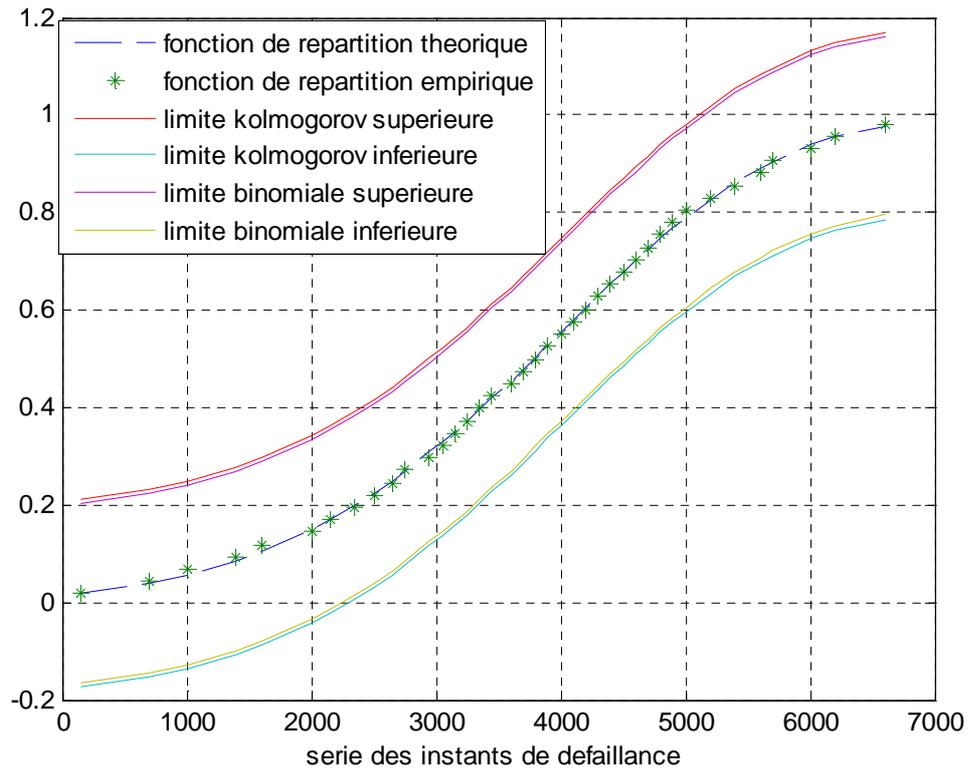


Figure 7.14: Variante graphique des tests de Kolmogorov -Smirnov et binomial simplifié.

Commentaire 8 :

Toutes les valeurs de la fonction de répartition réelle se situent à l'intérieur des limites fixées par le test binomial simplifié qui est plus sensible que le test de Kolmogorov-Smirnov, ce qui confirme le même résultat obtenu précédemment par les formes analytiques des deux tests.

Par conséquent, au seuil de risque $\alpha = 5\%$ on admet la validité de l'hypothèse du modèle Weibull standard.

7-3 Exploitation des résultats d'estimation des paramètres γ, β, η pour déterminer la périodicité optimale de la maintenance préventive

Dispositif : mécanisme

Supposons que le coût de défaillance d'un relais vaille 30000 DA et le coût de la maintenance préventive respectif soit égale à 1000 DA.

Puisque le modèle Weibull standard est validé, alors l'application de la formule (27) due à Dodson Bryan est possible. Etant donné que $Cd/Cp = 30$. et sachant que $\beta_p = 5.4165$, par

conséquent la mise en œuvre de la maintenance préventive est économiquement et mathématiquement justifiée. Maintenant, il reste à déterminer la périodicité optimale des interventions préventives donnée par la formule :

$$T_{op} = R \eta + \gamma.$$

Etant donné que dans l'annexe tableau 1 on ne trouve pas la valeur de R correspondant simultanément à $\beta = 5.4165$ et au ratio $C_d / C_p = 30$, il est nécessaire d'effectuer une interpolation appropriée. Donc la valeur de R est égale :

$$R = \frac{5.4165 * 0.387}{5} = 0.4192. \quad (7.16)$$

En substituant chaque terme par sa valeur respective dans la formule (1.52), on parvient à :

$$T_{op} = (0.4192) (8089.1) + (-3775) = 3390.95 - 3775 = -384.049.$$

Il est évident que l'on doit considérer la valeur absolue de la grandeur trouvée. Finalement la programmation des interventions préventives doit être effectuée au temps T_{op} donné par :

$$T_{op} = |-384.049| = 384.049 \text{ heures.}$$

7-3-1 Appréciation de la performance de la périodicité de la maintenance préventive selon la méthode graphique de Weibull :

L'expert français en fiabilité Patrique Lyonnet [48] a traité les mêmes données de défaillance relative au dispositif mécanisme et abouti aux résultats suivants comme l'indique la figure (7.15) :

- Estimateur ponctuel graphique du paramètre d'origine γ : $\gamma_g = -2000$ heures.
- Estimateur ponctuel graphique du paramètre de forme β : $\beta_g = 3.6$.
- Estimateur ponctuel graphique du paramètre d'échelle η : $\eta_g = 6050$ heures.

Remarque :

Etant donné que l'écart entre la valeur modale du paramètre de repérage γ (voir figure 7.2) et celle trouvée par la méthode graphique de Weibull est égal à :

$$\gamma_M - \gamma_g = -3775 - (-2000) = -1775 \text{ heures,}$$

alors il faudrait que le procédé itératif de linéarisation par rapport à la méthode graphique sur papier fonctionnel de Weibull se poursuive encore 1775 fois, avec un pas d'incrément $\Delta \gamma = 1$, pour atteindre la valeur modale effective du paramètre d'origine γ .

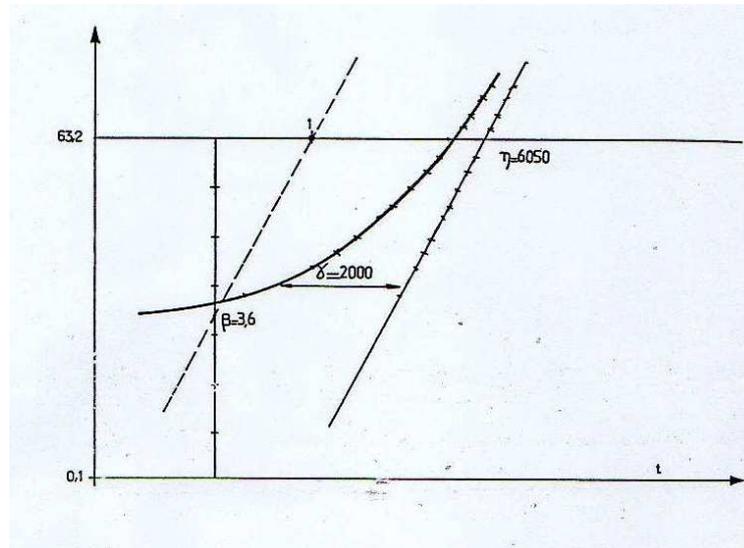


Figure 7.15 : Estimation graphique ponctuel des paramètres γ , β , η par rapport aux données de défaillance du dispositif mécanisme (Tableau 7.2).

Tenant compte de $\beta = 3.6$ et $Cd / Cp = 30$ de même que de la valeur du facteur R donnée par le (Tableau 1 Annexe) :

Après interpolation, la valeur du facteur R vaut :

$$R = \frac{3.6 * 0.328}{3} = 0.3936 \quad .$$

Par référence à la formule Dodson Bryan [27] on trouve :

$$T_g = R * \eta_g + \gamma_g = (0.3936) * (6050) + (-2000) = 2381.28 - 2000 = 381.28 \text{ heures.}$$

On observe que la valeur de la périodicité de la maintenance préventive graphiquement déterminée (T_g) s'écarte de la valeur de périodicité optimale des opérations de maintenance préventive (Top)

$$Top - T_g = 381.28 - (-384.049) = 765.329 \text{ heures.}$$

Conclusion :

Afin, d'achever notre travail, on voudrait tout d'abord, et cela en dehors du problème centrale de notre recherche relative à l'estimation du paramètre de localisation s'appesantir sur le résultat préliminaire concernant la modélisation de l'impact de la variation du nombre de composants fondamentaux sur la fiabilité globale d'un système groupé en série. Un tel résultat a été rendu possible après avoir effectué un lissage des données de fiabilité concernant trente trois systèmes comportant comme minimum un nombre de deux éléments indispensables pour des systèmes élémentaires allant jusqu'au système les plus complexe pouvant contenir, éventuellement un nombre avoisinant deux cent pièces fondamentales. L'hypothèse de base adoptée pour le traitement des données de survie est que les différents systèmes ont leurs composants regroupés selon le schéma en série. Il faut rappeler dans ce contexte que la substance de ce résultat réside la réduction exponentielle du niveau de la fiabilité et qui peut même être nulle lorsque le nombre d'éléments constituant un système dépasse une certaine limite techniquement établie. De la les spécialistes des équipements industriels doivent réduire au maximum possible le recours à ce type de conception du matériel.

Par ailleurs, l'examen approfondie des résultats essentiels obtenus montre clairement et cela contrairement à ce qui a été annoncé au niveau de l'introduction qu'il s'agit non pas seulement d'une nouvelle méthode d'estimation du paramètre d'origine γ , mais en réalité il s'agit carrément de l'élaboration de trois nouvelles méthodes pour l'estimation de cette même grandeur paramétrique de repérage du modèle Weibull standard. Bien entendu cela a requit la transformation du test ponctuel de linéarité de Z-transformée de Fisher en une fonction dépendant de la variation de la valeur du paramètre d'origine γ d'où le test de linéarité de Z-transformée de Fischer avec paramétrage. Ainsi après avoir conçu trois indices de performance se rapportant au test sus-indiqués dans sa triple variante on a été conduit à déterminer les optima des trois programmes mathématiques dont les valeurs modales ont été considérées comme estimateurs du paramètre de repérage du modèle Weibull standard et cela en effectuant un traitement computationnel des données de défaillance. De cette manière il est possible de suivre l'évolution de l'ensemble des tests de linéarité de Z-transformée de Fischer suivant la variation de la grandeur du paramètre γ .

L'application de ces méthodes aux deux dispositifs, respectivement, relais et mécanisme, on observe qu'elles sont entièrement opérationnelles car elles permettent d'aboutir en quelques secondes aux estimateurs des paramètres d'origine γ , de forme β et d'échelle η .

Evidemment, l'optimalité de l'estimateur du paramètre de localisation γ entraîne une correction optimale de la série des instants de défaillance, ce qui garantit à son tour une estimation optimale des deux autres paramètres respectivement, de forme β et d'échelle η .

Un autre résultat intéressant auquel a conduit notre recherche consiste dans la remise en cause de l'équivalence logique, faussement établie dans la littérature spécialisée en fiabilité [21][36][47], entre la simple transformation bi-logarithmique du modèle Weibull standard et l'aboutissement à la forme linéarisée de ce dernier. En effet bien que, au préalable, l'application double de l'opérateur logarithmique népérien au modèle Weibull standard soit une condition nécessaire elle reste, toutefois, insuffisante, tant que la valeur du paramètre d'origine γ est non nulle. Il est dans ce cas, nécessaire, d'ajouter la seconde condition concernant la détermination de la valeur modale du paramètre d'origine γ pour obtenir la forme linéarisée du modèle Weibull standard. Cependant l'équivalence logique en question n'est vraie que dans le cas où la valeur du paramètre de repérage est nulle.

Parallèlement, il est important de noter que les méthodes proposées permettent d'éviter les conséquences indésirables d'une estimation défaillante du paramètre de localisation γ sur l'optimalité de la dimension temporel des interventions préventives. En effet, partant de la formule de Dodson Bryan (2.31) relative la détermination de la périodicité de la maintenance préventive, il est possible de constater dans le cas d'une surestimation du paramètre γ , une translation vers la droite du temps des actions préventives par rapport à l'abscisse du minimum du coût totale de la maintenance et vice versa, dans le cas où il y a une sous estimation de la grandeur paramétrique de repérage. Dans les deux situations on observe, par conséquent une démarcation par rapport à l'optimum du coût de maintenance total. Ce qui va induire une incidence négative sur la pertinence technico-économique de l'entreprise et corrobore, encore une fois, l'importance de la question de l'élaboration d'un nouvel estimateur à caractère optimal du paramètre d'origine γ .

En outre, si on ne respecte pas le critère d'arrêt optimal relatif aux tests de linéarité à la fois unilatéral et bilatéral de Z-transformé Fischer avec paramétrage on risque en plus d'une estimation erronée du paramètre de position γ d'aboutir à une estimation non correcte du paramètre de forme β . Dans ces conditions le manager peut être piégé car il va

vraisemblablement établir un faux diagnostic sur la nature en besoin de maintenance du matériel. Afin de fixer les idées, si par exemple la vraie valeur du paramètre de forme est égal à un alors que l'estimateur réel de ce même paramètre est strictement supérieur à un. Considérant cette information comme étant fiable il va prendre des dispositions nécessaires pour appliquer la maintenance préventive alors qu'il devrait soit lancer un programme d'inspection périodique du matériel, ou bien procéder par la mise en œuvre de la maintenance prédictive.

Au cas où il ya une sous-estimation du paramètre échelle β , on va assister à un scénario inverse. Evidemment l'état du matériel peut correspondre effectivement à la phase d'usure qui réclame automatiquement une politique de maintenance préventive, alors que dans la pratique on va mettre en œuvre des actions de maintenance prédictive ou bien lancer un programme d'inspection périodique du matériel. Ces éléments montrent encore une fois l'intérêt d'un estimateur rigoureux du paramètre d'échelle β qui joue un rôle stratégique dans l'orientation de la politique de maintenance.

Du point de vue perspectif d'application il y a lieu d'insister sur un avantage essentiel lié aux méthodes proposées car elles permettent d'aboutir à l'estimation la plus exacte du niveau réel de la fiabilité opérationnelle d'un matériel. En fait, maintenant le manager maintenancier d'une entreprise nationale est en mesure d'effectuer une comparaison sur des bases objectives entre d'une part le niveau de la fiabilité opérationnelle prévisionnelle $[R_p(t)]$ établie par le fournisseur et le niveau réel de la fiabilité opérationnelle $[R_u(t)]$ établie par l'utilisateur. Alors dans ces conditions on peut imaginer trois cas de figure :

- i. $R_u(t) - R_p(t) = 0$ ce qui implique que $R_u(t) = R_p(t)$. Cela signifie que nous somme dans la situation idéale car il n'existe aucun conflit potentiel entre le producteur et l'utilisateur.
- ii. $R_u(t) - R_p(t) > 0$ ce qui implique que $R_u(t) > R_p(t)$. Cette éventualité est invraisemblable car n'étant pas réaliste compte tenu d'une part de l'intensité des contraintes réelles d'exploitation et du niveau potentiel du management de la maintenance des équipements. Cette inéquation ne peut être renversée que dans le cas exceptionnel d'adoucissement des conditions réelles de service.
- iii. $R_u(t) - R_p(t) < 0$ ce qui implique que $R_u(t) < R_p(t)$. Dans le cadre de cette éventualité l'entreprise réceptrice du matériel se trouve dans une position légale forte. Le

maintenancier, devant ce cas dont l'avènement est le plus probable doit choisir la solution légale la plus avantageuse.

A ce stade se pose la question du test d'acceptation ou de refus du matériel. Deux alternatives sont envisageables :

- Si l'écart fiabiliste ne dépasse pas un certain seuil minimal tolérable noté (m), alors on accepte de garder le matériel ie $R_u(t) - R_p(t) \leq m$.
- Si l'écart dépasse le seuil minimal tolérable désigné (m), alors on refuse le matériel ou bien on exige un dédommagement de la part du fournisseur.

Quant aux limites de notre travail de recherche, on a relevé d'abord le fait d'avoir exclu le traitement des données de défaillance relatives aux essais incomplets. En outre bien que ce cas n'a pas été au centre de notre intérêt d'étude il convient d'indiquer que si le test de linéarité du nuage de points, $N_1 = \{ \ln(t_i - \gamma_M) ; \ln \frac{1}{1-F(t)} \}$ s'avère non significatif il est vraisemblable qu'on est face de données de défaillance relatives à un modèle Weibull standard du type mixé. Le traitement des données de défaillance dans ces conditions requiert l'usage d'une autre méthode appropriée à ce cas de figure, notamment, la méthode des nuées dynamiques.

On ce qui concerne les données d'avarie qui de part leur taille requièrent un regroupement en classes on a préféré les garder sous forme ponctuelle et de procéder aux calculs nécessaires sans transformation aucune afin d'aboutir à un résumé optimal de l'information statistique disponible.

Bien qu'en s'appuyant sur le fait incontestable que la majeure partie des pannes et convenablement décrite par le modèle Weibull standard comme l'indique le docteur B R Bernaty [50], on devrait adopter, systématiquement, ce modèle de fiabilité. Mais, la logique d'un traitement, scientifiquement, fondé des données de défaillances suppose, l'application d'un test de validité de l'hypothèse du modèle de défaillance proposé notamment les deux tests non paramétrique respectivement de Kolmogorov-Smirnov et de Binomial simplifié. C'est justement, cette méthode basée sur la prudence qu'on a appliqué dans notre traitement des données de défaillances. Cependant, en toute rigueur, lorsqu'on est dans le cas où plusieurs modèles de fiabilité sont admis, simultanément, il y a lieu d'appliquer un critère supplémentaire permettant de faire un arbitrage pertinent entre les différentes éventualités, dans le but, d'adopter le modèle de survie qui possède l'écart résiduel comparatif minimum.

Cette méthode est justifiée par le fait que lorsqu'un modèle est accepté cela n'implique pas, nécessairement, qu'il est le seul valable. En effet, d'autres modèles de survie peuvent également être admis au même titre que le premier. En dernier instance, on ne peut être, statistiquement, certain que par rapport aux modèles de fiabilité rejetés.

Maintenant, on doit s'appesantir sur un élément important, et qui est basé sur le fait que l'exécution des actions de la maintenance préventive selon une périodicité optimale demeure une condition sine qua non de l'optimum global du cout total de la maintenance, malheureusement, elle est insuffisante. En réalité, il y a lieu, également de déterminer les périodicités optimales, aussi bien, de la maintenance prédictive que celle du programme d'inspection périodique de sorte qu'on puisse aboutir à un minimum du cout total de la combinaison de toute les formes des activités d'entretien afin de réaliser la pertinence technico-économique du management de la maintenance.

Sur le plan de perspectives possibles l'estimation ponctuelle optimale du paramètre de localisation γ est réalisée par le biais de la méthode proposée, cela va impliquer entre autre une estimation ponctuelle optimale du paramètre d'échelle β de sorte que si sa valeur effective est strictement inférieure à l'unité, alors, l'entreprise réceptrice du matériel productif peut, légalement, le refuser, catégoriquement, et le remettre ainsi au fournisseur, ou bien demander, tout bonnement, d'être conséquemment dédommagée, car en général, ce genre de pannes surviennent pendant la phase considérée sont générées par des défauts de fabrication ou sont dues à la faiblesse des composants ou bien à des défaut de manipulation par des opérateurs.

En guise, d'illustration on peut concevoir éventuellement l'utilisation de la méthode computationnelle proposée dans le management d'un projet réel complexe comme celui du Tram-Way d'Oran ou d'un système d'équipements de toute entreprise industrielle et même de services (notamment le transport des hydrocarbures, en particulier le suivie de la fiabilité d'un gaz au duc ou d'un pipeline) ; ce qui nous permettra de tester la pertinence de nos résultats théoriques confrontés à la réalité de terrain.

Passons maintenant, aux questions ouvertes :

- i. Quelles sont les conséquences sur l'estimation de la fiabilité des systèmes en excluant l'hypothèse de nullité systématique du paramètre de localisation.
- ii. A quel type de loi obéit la distribution d'échantillonnage du paramètre de repérage d'origine γ . La réponse à cette question permettra d'aboutir à une estimation par intervalle de confiance de ce paramètre.

- iii. Comment est-il possible de modéliser le comportement géométrique du test de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage dans sa double variante unilatéral et bilatéral.

ClicCours.com

ANNEXE

Tables statistiques

Tableau 1 : Calcul du coefficient F en fonction du ratio du coût de défaillance au coût de maintenance préventive : $R = \frac{C_d}{C_p}$ et en fonction de la valeur du paramètre de forme β .

C_f/C_p	β							
	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	7.0	10.0
2.0	2.229	1.091	0.883	0.810	0.766	0.761	0.775	0.803
2.2	1.830	0.981	0.816	0.760	0.731	0.733	0.755	0.788
2.4	1.579	0.899	0.764	0.720	0.702	0.711	0.738	0.777
2.6	1.401	0.834	0.722	0.688	0.679	0.692	0.725	0.766
2.8	1.265	0.782	0.687	0.660	0.659	0.675	0.713	0.758
3.0	1.158	0.738	0.657	0.637	0.642	0.661	0.702	0.749
3.3	1.033	0.684	0.620	0.607	0.619	0.642	0.687	0.739
3.6	0.937	0.641	0.589	0.582	0.600	0.627	0.676	0.730
4.0	0.839	0.594	0.555	0.554	0.579	0.609	0.662	0.719
4.5	0.746	0.547	0.521	0.526	0.557	0.591	0.648	0.708
5	0.676	0.511	0.493	0.503	0.538	0.575	0.635	0.699
6	0.574	0.455	0.450	0.466	0.509	0.550	0.615	0.683
7	0.503	0.414	0.418	0.438	0.486	0.530	0.600	0.671
8	0.451	0.382	0.392	0.416	0.468	0.514	0.587	0.661
9	0.411	0.358	0.372	0.398	0.452	0.500	0.575	0.652
10	0.378	0.337	0.355	0.382	0.439	0.488	0.566	0.645
12	0.329	0.304	0.327	0.357	0.417	0.469	0.550	0.632
14	0.283	0.279	0.306	0.338	0.400	0.454	0.537	0.621
16	0.266	0.260	0.288	0.323	0.386	0.441	0.526	0.613
18	0.244	0.244	0.274	0.309	0.374	0.430	0.517	0.605
20	0.226	0.230	0.263	0.298	0.364	0.421	0.508	0.598
25	0.193	0.205	0.239	0.275	0.343	0.402	0.492	0.584
30	0.170	0.186	0.222	0.258	0.328	0.387	0.478	0.573
35	0.152	0.172	0.207	0.245	0.315	0.374	0.468	0.564
40	0.139	0.160	0.197	0.234	0.304	0.364	0.459	0.557
45	0.128	0.151	0.187	0.225	0.295	0.356	0.451	0.550
50	0.119	0.143	0.179	0.217	0.288	0.348	0.444	0.544
60	0.105	0.130	0.167	0.204	0.274	0.335	0.432	0.534
70	0.095	0.120	0.157	0.193	0.264	0.325	0.422	0.526
80	0.087	0.112	0.148	0.185	0.255	0.316	0.415	0.518
90	0.080	0.106	0.141	0.177	0.248	0.309	0.407	0.513
100	0.074	0.101	0.135	0.172	0.241	0.303	0.402	0.507
150	0.057	0.082	0.115	0.150	0.217	0.278	0.379	0.487
200	0.047	0.071	0.103	0.136	0.203	0.263	0.363	0.472
300	0.035	0.058	0.087	0.119	0.182	0.243	0.343	0.454
500	0.025	0.045	0.071	0.100	0.161	0.219	0.319	0.431
1000	0.016	0.032	0.054	0.079	0.135	0.190	0.288	0.403

Tableau 3 : Fonction intégrale de la loi de la place-Gauss (probabilité de trouver une valeur inférieure à x)

X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56750	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59484	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.61910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67365	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76731	0.77035	0.77337	0.77637	0.77936	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84124	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94245	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95819	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97773	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98077	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98500	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98840	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99111	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99324	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99492	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99621	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99720	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99795	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99851	0.99851	0.99856	0.99861

Suite du Tableau 3 : F(x) pour les grandes valeurs de X .

X	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3,	13510^{-5}	96810^{-6}	68710^{-6}	48310^{-6}	33710^{-6}	22310^{-6}	15910^{-6}	10810^{-6}	72310^{-8}	48110^{-7}
4,	31710^{-7}	20710^{-7}	13310^{-7}	8510^{-7}	5410^{-7}	3410^{-7}	2110^{-7}	1310^{-7}	7910^{-8}	4810^{-8}
5,	2910^{-8}	1710^{-8}	1010^{-8}	5810^{-9}	3310^{-9}	1910^{-9}	1110^{-9}	6010^{-10}	3310^{-10}	1810^{-10}

Nota : la table donne les valeurs F(x) pour x positif ; lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table

Exemple : pour X= 0.97, F(x)= 0.82639

pour X= 0.97, F(x)= 0.17361

Tableau 4 : Valeurs «maximales admissibles » $V_{\max}(n ; Q)$ des écarts réduits («élimination des résultats aberrants d'observation ; schéma à une dimension ; seuil de signification $\alpha=Q/200\%$)

n	Q, %								
	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20
3	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.412	1.406
4	1.732	1.732	1.731	1.730	1.728	1.723	1.710	1.689	1.645
5	1.996	1.994	1.990	1.982	1.972	1.955	1.917	1.869	1.791
6	2.219	2.212	2.203	2.183	2.161	2.130	2.067	1.996	1.894
7	2.408	2.395	2.377	2.344	2.310	2.265	2.182	2.093	1.974
8	2.568	2.547	2.521	2.476	2.431	2.374	2.273	2.172	2.041
9	2.704	2.677	2.643	2.586	2.532	2.464	2.349	2.238	2.097
10	2.822	2.788	2.747	2.680	2.616	2.540	2.414	2.294	2.146
11	2.925	2.884	2.837	2.760	2.689	2.606	2.470	2.343	2.190
12	3.015	2.969	2.915	2.830	2.753	2.663	2.519	2.387	2.229
13	3.096	3.044	2.984	2.892	2.809	2.716	2.563	2.426	2.264
14	3.167	3.111	3.046	2.947	2.859	2.759	2.602	2.461	2.297
15	3.232	3.171	3.102	2.997	2.905	2.800	2.638	2.494	2.327
16	3.290	3.225	3.152	3.042	2.946	2.837	2.670	2.523	2.354
17	3.343	3.274	3.198	3.083	2.983	2.871	2.701	2.551	2.380
18	3.392	3.320	3.240	3.120	3.017	2.903	2.728	2.577	2.404
19	3.437	3.361	3.278	3.155	3.049	2.932	2.754	2.601	2.426
20	3.478	3.400	3.314	3.187	3.079	2.959	2.779	2.623	2.447
21	3.516	3.436	3.347	3.217	3.106	2.984	2.801	2.644	2.467
22	3.552	3.469	3.378	3.245	3.132	3.008	2.823	2.664	2.486
23	3.585	3.500	3.407	3.271	3.156	3.030	2.843	2.683	2.504
24	3.616	3.529	3.434	3.295	3.179	3.051	2.862	2.701	2.521
25	3.646	3.566	3.459	3.318	3.200	3.071	2.880	2.718	2.537
26	3.673	3.582	3.483	3.340	3.220	3.089	2.897	2.734	2.553
27	3.699	3.606	3.506	3.360	3.239	3.107	2.913	2.749	2.568
28	3.724	3.629	3.528	3.380	3.258	3.124	2.929	2.764	2.582
29	3.747	3.651	3.548	3.399	3.275	3.140	2.944	2.778	2.596
30	3.769	3.672	3.567	3.416	3.291	3.156	2.958	2.792	2.609
31	3.791	3.692	3.586	3.433	3.307	3.171	2.972	2.805	2.622
32	3.811	3.711	3.603	3.449	3.322	3.185	2.985	2.818	2.634
33	3.830	3.729	3.620	3.465	3.337	3.199	2.998	2.830	2.646
34	3.848	3.746	3.638	3.480	3.351	3.212	3.010	2.842	2.657
35	3.866	3.762	3.652	3.494	3.364	3.224	3.022	2.853	2.668
36	3.882	3.778	3.667	3.507	3.377	3.236	3.033	2.864	2.679
37	3.898	3.793	3.681	3.521	3.389	3.248	3.044	2.874	2.689
38	3.914	3.808	3.695	3.533	3.401	3.259	3.055	2.885	2.699
39	3.929	3.822	3.708	3.545	3.413	3.270	3.065	2.894	2.709
40	3.943	3.835	3.720	3.557	3.424	3.281	3.075	2.904	2.718
41	3.957	3.848	3.733	3.568	3.435	3.291	3.084	2.913	2.727
42	3.970	3.861	3.745	3.579	3.445	3.301	3.094	2.922	2.736
43	3.983	3.873	3.756	3.590	3.455	3.310	3.103	2.931	2.745
44	3.995	3.885	3.767	3.600	3.465	3.320	3.112	2.940	2.753
45	4.007	3.896	3.778	3.610	3.474	3.329	3.120	2.948	2.762
46	4.019	3.907	3.788	3.620	3.483	3.338	3.129	2.956	2.770
47	4.030	3.918	3.798	3.630	3.492	3.346	3.137	2.964	2.778
48	4.041	3.928	3.808	3.639	3.501	3.354	3.145	2.972	2.785
49	4.052	3.938	3.818	3.648	3.510	3.363	3.152	2.980	2.793
50	4.062	3.948	3.827	3.656	3.518	3.370	3.160	2.987	2.800
51	4.072	3.957	3.836	3.665	3.526	3.378	3.167	2.994	2.807
52	4.082	3.966	3.845	3.673	3.534	3.386	3.175	3.001	2.814

Tableau 5 : Loi Kolmogorov-Smirnov

Intervalles de confiance de F(x)

(valeurs critique pour le test de Kolmogorov-Smirnov)

n	Niveau Significatif α				
	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	1.18	0.19	0.21	0.23	0.27
n > 35	$1.07 / \sqrt{n}$	$1.14 / \sqrt{n}$	$1.22 / \sqrt{n}$	$1.36 / \sqrt{n}$	$1.63 / \sqrt{n}$

Tableau 6 :Test binomial simplifié

Valeurs de B (n ;05 ; α) en fonction du nombre de défaut n et du seuil de confiance α .

n	Risque d'erreur		
	$\alpha= 0.10$	$\alpha= 0.05$	$\alpha= 0.01$
2	0.475	0.487	0.497
3	0.432	0.454	0.484
4	0.402	0.432	0.471
5	0.369	0.402	0.452
6	0.347	0.382	0.434
7	0.327	0.362	0.417
8	0.307	0.343	0.400
9	0.292	0.328	0.386
10	0.277	0.313	0.372
11	0.265	0.300	0.360
12	0.255	0.289	0.348
13	0.245	0.279	0.338
14	0.236	0.270	0.328
15	0.228	0.261	0.319
16	0.221	0.253	0.311
17	0.215	0.246	0.303
18	0.209	0.240	0.295
19	0.203	0.234	0.288
20	0.198	0.228	0.282
21	0.193	0.223	0.276
22	0.189	0.218	0.271
23	0.185	0.213	0.265
24	0.181	0.209	0.260
25	0.177	0.205	0.255
26	0.173	0.201	0.251
27	0.170	0.197	0.247
28	0.167	0.194	0.243
29	0.164	0.190	0.239
30	0.161	0.187	0.235
31	0.158	0.184	0.231
32	0.156	0.181	0.227
33	0.153	0.178	0.224
34	0.151	0.176	0.220
35	0.149	0.174	0.218
n > 35	0.882	1.02	1.30
	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$

Epstein (tests for the validity of the Assumption that the underlying distribution of life is exponential. Technometrics- Vol.2 N01 Feb. 1960 et Vol.2 N02 May 1960)(Article traduit par Mlle Roch R.S.A. 1962 Vol. N03) .

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] A Lentin et J. Rivaud, Leçons d'algèbre moderne. Vuibert Paris 1969.
- [2] A. Donnedu, Polynômes et algèbre linéaire, tome 2. Vuibert 1979.
- [3] Anne Marie Dussaix, Jean Pierre Indjehagopian, Méthodes statistiques appliquées à la gestion, Les Editions d'organisation Paris 1979.
- [4] A. Gourdon et M Boumahrat, Méthodes numériques appliquées (seconde édition), Office des Publications Universitaires Alger 1991.
- [5] Albert Moujallon, Eléments de statistiques mathématiques, Vuibert Paris 1968.
- [6] Alain Pollard et Claude Rivoire, Fiabilité et statistiques Prévisionnelles, Editions Eyrolles et Editions d'Organisation Paris 1971.
- [7] A. Kuroch, Cours d'algèbre supérieure, Editions Mir Moscou 1973.
- [8] Amar Aissani, Modélisation et Simulation (2^{ème} édition), Office des Publications Universitaires Alger 2007.
- [9] A. Khaled Saad Allah, Mathématique et Informatique Tome 2, Editions la Cédrate Alger 2010.
- [10] Alexander M. Mood, Franklin A. Graybl Duane C. Boes, Introduction to the theory of statistics, International student edition Tosho printing COLTD Tokyo 1974.
- [11] AdalSoudou, MouafakDaboul, L'intégration, Editeurs Dar El Fatah, Librairie El Razi Damas 1971.
- [12] A .K.M Adams, Mathematical analysis for Management decision, The Mac Millan Company New 1970.
- [13] B.L Der Waerden, Statistique Mathématique, Dunod Paris 1967.
- [14] Bazovsky I, Fiabilité, Théorie et Pratique de la sureté de fractionnement, Dunod Paris 1966.

- [15] B. Lévine, Fondements théoriques de la radiotechnique statistique Tome II, Editions Mir Moscou.
- [16] Bouchikhi Chir, Communication: « Impact du paramètre d'origine sur l'interprétation géométrique du modèle Weibull, linéarisé », Séminaire de mathématiques 25 et 26 juin 1995 Département de Mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Saida
- [17] Bouchikhi Chir, Elements of linear algebra with economical applications, Mathematics department, Faculty of Sciences, Oran University 2009.
- [18] Curtis Gerard, Patrick O. Wheatley, Applied numerical analysis, Addison Wesley publishing Company California 1983.
- [19] Chapiroille Pet De Pazzis, La fiabilité des systèmes, Masson Paris 1968.
- [20] Christian scouarnec, Algèbre spectrale, Publisud Midi Pyrénées 1989.
- [21] Christian Labrousse, Introduction à l'économétrie, Dunod Paris 1972.
- [22] C .Marcovici TC. Ligeron, Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique, Techniques et documentation Paris 1974.
- [23] C.D Lai, Min Xie and D.N.P Murthy, A modified Weibull distribution, IEEE Transaction in Reliability Vol 52 N01 March 2003.
- [24] Daniel Dumas de Raully, L'estimation statistique, Gauthier Villars Paris 1969.
- [25] Dominick Salvatore, Econométrie et statistiques appliquées, Mc. Graw Hill New york 1985.
- [26] David M.Himmebleu, Applied non linear programming, McGraw Hill Book Company Texas 1972.
- [27] Dubey S.D, Hyper efficient estimator of location parameter of Weibull law, Journal (NRL) Naval Research Logistics Quarterly, Volume 13, Issus 3, pages 259-264 September 1966.
- [28] Dodson B, Determining the Optimum Schedule for Preventive Maintenance, Quality Engineering, Vol.6 No, 4.

- [29] Elie Azoulay et Jean avignant, Mathématique 4 Algèbre ,Mc Graw Hill Paris 1974.
- [30] F Quittard Pinon Plignelet, Eléments de statistiques Tome II (Decision, Estimation, Test), Office des Publications Universitaires Alger 1982.
- [31] Gerald Baillargeon, Probabilités, Statistiques et technique de régression, Les Editions SMG Québec 1989.
- [32] GerardCallot ,Cours de statistiques descriptives (seconde édition), Dunod Paris 1973.
- [33] G-Zoutendijka, Mathematical programming Methods, North Holland Publishing Company, Netherlands 1976.
- [34] Jean Charles Gille et Mare Cligne, Calcul matriciel et introduction à l'analyse, fonctionnelle Tome 1 et Tome 2, Eyrolles Paris 1981.
- [35] Joseph.HKindle, Géométrie Analytique (Série Schawm), Mc Grawhill Paris 1979.
- [36] J.Bass, Eléments de calcul de Probabilité (3^{ème} édition) ,Masson et Lie Editeurs Paris 1974.
- [37] J. F. Anscomb, Article paru dans l'American statistique vol 27.1973
- [38] J. C Ligeron, A Delage, M Neff, La Fiabilité en exploitation, Techniques et Documentation Lavoisier Paris 1984.
- [39] L.R Foulds, Optimization technics, Springer-Verlag New York 1981.
- [40] Lucas Pun, Introduction à la pratique de l'optimisation, Dunod Paris 1972.
- [41] M Romakine, Eléments d'algèbre linéaire et programmation linéaire, Les Editions D'Organisation et Editions Eyrolles Paris 1971.
- [42] Mortou I .Kamien and Nancy L Schwartz, Dynamic optimization: The calculs of variations and optimal control in economics and Management, Elsevier Science Publishing Co in New York 1983.
- [43] M.FallahN.H.Alla, Exercices corrigés en analyse numérique élémentaire, Office des Publications Universitaires Alger 2008.

- [44] Maurice School et Grey Peyrache, *Traité de Fiabilité*, Masson et Lie Paris 1969.
- [45] MossedekBouseboua, *Eléments de la Théorie des Probabilités (Tome1)*, Office des Publications Universitaires Alger 2004.
- [46] Malika Babes, *Statistiques, Files d'attentes et Simulation*, Office des Publications Universitaires Alger 1995.
- [47] N.Piscounov, *Calcul différentiel et intégral Tome 1 et Tome II*, Edition Mir Moscou 1980.
- [48] Norman Gaither, Serge Carrier, *L'entreprise et la gestion des opérations*, Les Editions HRW.L tee Montréal 1983.
- [49] P Lyonnet, *La maintenance, Mathématiques et Méthodes*, Techniques et documentation Lavoisier 1988.
- [50] Pierre Dagnelie, *Théorie et méthodes statistiques Volume 1*, Les presses agronomiques de Grembloux 1981.
- [51] Robert B. Abernethy, *The new Weibull handbook Fifth Edition 2010 (summary of the handbook)*[http://www.barringer 1.com/tnwb.html](http://www.barringer1.com/tnwb.html).
- [52] R Faure et J L Louriere, *Fiabilité et renouvellements des équipements*, Gautier Villard Editeur Paris 1974.
- [53] Robert Frey et Jean Marie Gogne, *La maîtrise de la qualité*, Les Editions d'organisation Paris 1983.
- [54] S.Aïvazian, *Etude statistique des dépendances*, Edition Mir Moscou 1978.
- [55] S.Aïvazian, I Enukov, L Mechalkine, *Eléments de modélisation et traitement primaire des données*, Edition Mir Moscou 1988.
- [56] S.S Wilks, *Elementary statistical analysis*, Princeton University Press Thirteenth Printing New Jersey 1966.
- [57] S Frontier, *Méthode statistique*, Masson Paris 1981.

- [58] SalimaTlemçani, Constat alarmant d'un technicien, Article paru au journal El Watan du 02/09/2010.
- [59] Vincent Giard, Statistiques appliquées à la gestion, Economica Paris 1982.
- [60] U. Smirnov, Cours de Mathématiques supérieures Tome 1, Office des Publications Universitaires Alger 1988.
- [61] Yves Lepage, Marc Moore, Roch Roy, Introduction à la théorie de probabilité, Presses de l'université du Québec 1980.
- [62] Zineb M, Le délabrement des équipements entrave le secteur industriel, Journal le Jeune indépendant du 25/10/2003.
- [63] Zotssmani, M Khiat, A Chaker, Z Frioui. [PDF] Programmation optimale des périodes et du coût de la maintenance préventive périodique d'un système parallèle-série par l'algorithme de colonie de fourmis. Ie.utcluj.ro-2012-

Résumé :

Après avoir effectué, une étude comparative entre les principaux modèles mathématiques de fiabilité on a opté pour le modèle Weibull standard universellement utilisé car il se distingue par sa capacité de décrire, convenablement, un pourcentage de pannes variées pouvant atteindre le seuil de 95%, comme le précise le Dr Robert B. Abernethy [51]. La formule mathématique du modèle Weibull standard permettant d'évaluer la fiabilité, facteur fondamental d'un management scientifique de la maintenance d'un matériel, exige l'estimation du triplet paramétrique, notamment le paramètre d'origine γ , le paramètre de forme β et enfin le paramètre d'échelle η .

Sachant que la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, est plus performante, que les deux méthodes, respectivement, des moments et des moindres carrés, on a élaboré la fonction objectif correspondante. Le problème d'estimation, ainsi posé, revêt un caractère tridimensionnel, d'où la nature fort laborieuse du processus calculatoire. Donc on a été contraint de décomposer l'indice de performance global en deux programmes mathématiques non linéaires partiels. Le premier concernant la recherche du maximum du test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage appliqué au modèle Weibull standard bi-logarithmiquement modifié et dont le maximum coïncide avec la valeur modale du paramètre de localisation γ qui est considéré comme l'estimateur ponctuel optimal de cette grandeur paramétrique fondamentale. Conformément à cette méthode computationnelle, on a parallèlement, transformé le test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher ainsi que sa variante inversée sous une forme dépendant du paramètre de repérage γ . Le traitement des données de fiabilité à corroborer la concordance des résultats fournies, séparément, par les trois méthodes distinctes d'où la pertinence de ces nouvelles techniques d'estimation ponctuelle du paramètre de position γ .

Quant au second programme mathématique non linéaire partiel, il consiste à minimiser la norme euclidienne avec paramétrage afin d'aboutir au minimum absolu de l'écart quadratique appliqué au modèle Weibull standard soumis à une double transformation logarithmique, ce qui permet d'obtenir les estimateurs ponctuels optimaux, respectivement, de forme β et d'échelle η . De cette façon, la formule de Bryan Dodson donnant la périodicité optimale des interventions préventives devient plus précise. Ainsi, on met à la disposition du manager maintenancier des informations fiables qu'ils lui garantissent la mise au point d'un diagnostic juste sur l'état effectif du matériel et lui permettent l'adoption de la politique de maintenance la plus adéquate pour la prise en charge de l'entretien des équipements selon un plan opératoire technico-économiquement optimal, ce qui va contribuer à l'amélioration de la rentabilité de l'entreprise.

Mots-clés : Modèle Weibull standard, paramètre d'origine γ , paramètre de forme β , paramètre d'échelle η , courbe en baignoire, test de Kolmogorov-Smirnov, test binominal simplifié, méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher, test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher.

Résumé

Après avoir effectué, une étude comparative entre les principaux modèles mathématiques de fiabilité on a optée pour le modèle Weibull standard universellement utilisé car il se distingue par sa capacité de décrire, convenablement, un pourcentage de pannes variées pouvant atteindre le seuil de 95%, comme le précise le Dr Robert B. Abernethy [51]. La formule mathématique du modèle Weibull standard permettant d'évaluer la fiabilité, facteur fondamental d'un management scientifique de la maintenance d'un matériel, exige l'estimation du triplet paramétrique, notamment le paramètre d'origine γ , le paramètre de forme β et enfin le paramètre d'échelle η .

Sachant que la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, est plus performante, que les deux méthodes, respectivement, des moments et des moindres carrés, on a élaboré la fonction objectif correspondante. Le problème d'estimation, ainsi posé, revêt un caractère tridimensionnel, d'où la nature fort laborieuse du processus calculatoire. Donc on a été contraint de décomposer l'indice de performance global en deux programmes mathématiques non linéaires partiels. Le premier concernant la recherche du maximum du test unilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher avec paramétrage appliqué au modèle Weibull standard bi-logarithmiquement modifié et dont le maximum coïncide avec la valeur modale du paramètre de localisation γ qui est considéré comme l'estimateur ponctuel optimal de cette grandeur paramétrique fondamentale. Conformément à cette méthode computationnelle, on a parallèlement, transformé le test bilatéral de linéarité de Z-transformée de Fisher ainsi que sa variante inversée sous une forme dépendant du paramètre de repérage γ . Le traitement des données de fiabilité à corroborer la concordance des résultats fournies, séparément, par les trois méthodes distinctes d'où la pertinence de ces nouvelles techniques d'estimation ponctuelle du paramètre de position γ .

Quant au second programme mathématique non linéaire partiel, il consiste à minimiser la norme euclidienne avec paramétrage afin d'aboutir au minimum absolu de l'écart quadratique appliqué au modèle Weibull standard soumis a une double transformation logarithmique, ce qui permet d'obtenir les estimateurs ponctuels optimaux, respectivement, de forme β et d'échelle η . De cette façon, la formule de Bryan Dodson donnant la périodicité optimale des interventions préventives devient plus précise. Ainsi, on met a la disposition du manager maintenancier des informations fiables qu'ils lui garantissent la mise au point d'un diagnostic juste sur l'état effectif du matériel et lui permettent l'adoption de la politique de maintenance la plus adéquate pour la prise en charge de l'entretien des équipements selon un plan opératoire technico-économiquement optimal, ce qui va contribuer à l'amélioration de la rentabilité de l'entreprise.

Mots-clés :

Weibull standard; Courbe En Baignoire; Test De Kolmogorov-Smirnov; Test Binominal Simplifié; Estimation Du Maximum De Vraisemblance; Test Unilatéral De Linéarité; Test Bilatéral De Linéarité; Fisher; Bryan Dodson; Estimateurs ponctuels optimaux ; Rentabilité de l'entreprise.