

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 THÉORIE POUR LA MODÉLISATION D'UN AÉRONEF	5
1.1 Concept	5
1.2 Repères.....	5
1.2.1 Repère cartésien NED.....	6
1.2.2 Repère-avion.....	7
1.2.3 Repère-stabilité.....	8
1.2.4 Repère-vent.....	9
1.3 Transformations d'axes.....	9
1.4 Inertie	13
1.4.1 Tenseur d'inertie.....	14
1.5 Dynamique de l'aéronef.....	16
1.5.1 Accélération linéaire et angulaire.....	17
1.5.2 Conditions initiales et intégration.....	19
1.6 Linéarisation	20
1.6.1 Dérivées aérodynamiques de stabilité et de contrôle.....	20
1.6.2 Représentation d'état	21
CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU BOEING 747	27
2.1 Développement de la modélisation du Boeing 747 sous MATLAB	27
2.1.1 Forces et moments	29
2.1.2 Coefficients aérodynamiques.....	33
2.1.3 État à l'équilibre.....	34
2.1.4 Linéarisation	36
2.1.4.1 Dérivation formelle des dérivées aérodynamiques de stabilité..	36
2.1.4.2 Déviation autour d'un point d'équilibre	39
2.1.4.3 Comparaison des méthodes.....	41
2.2 Validation de la modélisation	44
2.3 Écarts entre la modélisation et le Boeing 747.....	45
2.3.1 Essais en régime permanent.....	46
2.3.2 Essais dynamiques	47
2.3.2.1 Dynamique longitudinale.....	48
2.3.2.2 Dynamique latérale	50
CHAPITRE 3 INVERSION DYNAMIQUE	53
3.1 Asservissement non-linéaire	53
3.1.1 Techniques d'asservissement non-linéaires.....	54
3.1.2 Stabilisation et suivi de trajectoire.....	55
3.1.3 Comportement d'un système	57
3.2 Inversion dynamique.....	59

3.2.1	Linéarisation du retour d'état.....	59
3.2.2	Outils mathématiques.....	60
	3.2.2.1 Dérivée de Lie.....	61
	3.2.2.2 Difféomorphisme.....	62
	3.2.2.3 Transformation de coordonnées.....	63
3.2.3	Linéarisation entrée-sortie.....	63
3.2.4	Dynamique-zéro.....	69
3.2.5	Entrées multiples – Sorties multiples.....	69
3.3	Synthèse des lois de commande.....	71
3.3.1	Lois de commande longitudinale.....	74
	3.3.1.1 Dynamique-zéro longitudinale.....	85
3.3.2	Lois de commande latérale.....	87
	3.3.2.1 Dynamique-zéro latérale.....	92
3.3.3	Contrôleurs linéaires.....	93
CHAPITRE 4 ESSAIS SIMULÉS ET ANALYSE.....		97
4.1	Caractéristiques de manœuvrabilité.....	97
4.1.1	Ouvrages de référence.....	98
4.1.2	Systèmes équivalents.....	99
4.1.3	Définition des paramètres mesurés.....	103
	4.1.3.1 Dynamique longitudinale.....	103
	4.1.3.2 Dynamique latérale.....	105
4.2	Essais en simulateur.....	106
4.2.1	Engagement du mode de commande d'angle.....	106
	4.2.1.1 Réponse longitudinale.....	107
	4.2.1.2 Réponse latérale.....	108
4.2.2	Commande de vitesse angulaire.....	109
	4.2.2.1 Commande de tangage.....	110
	4.2.2.2 Commande de roulis.....	111
4.3	Résultats des essais de simulation.....	112
4.3.1	Engagement du mode d'angle commandé.....	112
	4.3.1.1 Réponse longitudinale.....	112
	4.3.1.2 Réponse latérale.....	115
4.3.2	Commande de vitesse angulaire.....	119
	4.3.2.1 Mouvement de tangage.....	119
	4.3.2.2 Mouvement de roulis.....	123
4.4	Analyse de la performance.....	126
4.4.1	Angle de tangage.....	126
4.4.2	Maintien de vitesse.....	128
4.4.3	Angle de roulis.....	130
4.4.4	Amortissement de lacet et coordination de virage.....	132
4.4.5	Comparaison entre le contrôleur longitudinal et latéral.....	133
CONCLUSION.....		137
RECOMMANDATIONS.....		139

ANNEXE I	CARACTÉRISTIQUES DE LA MODÉLISATION DU BOEING 747	141
ANNEXE II	DÉRIVATION DES VARIABLES POUR LA MODÉLISATION.....	155
ANNEXE III	DÉRIVÉES AÉRODYNAMIQUES DE STABILITÉ.....	161
ANNEXE IV	RÉSULTATS DES ESSAIS LONGITUDINAUX ET LATÉRAUX.....	167
ANNEXE V	ESTIMATION DU MODÈLE DU BOEING 747	185
ANNEXE VI	SIMPLIFICATION DE LA DYNAMIQUE LATÉRALE.....	197
ANNEXE VII	CRITÈRES POUR LES NIVEAUX DE QUALITÉS DE VOL	203
ANNEXE VIII	EXEMPLES DE RÉPONSE TEMPORELLE À UN ESSAI.....	211
	LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	215
	BIBLIOGRAPHIE.....	218

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1	Variables d'état à l'équilibre.....22
Tableau 1.2	Perturbation des variables d'état et de contrôle23
Tableau 2.1	Noms des variables de l'équation de la composante des forces et moments30
Tableau 2.2	Écart de variable d'état pour calculer la différence dans l'accélération40
Tableau 2.3	Analyse statistique pour la comparaison entre la déviation autour d'un point d'équilibre et la simulation non-linéaire42
Tableau 2.4	Écarts entre les variables à l'équilibre de la modélisation et des mesures expérimentales du Boeing 74746
Tableau 2.5	Incertitude des données expérimentales du Boeing 74747
Tableau 2.6	Analyse statistique du mode phugoïde49
Tableau 2.7	Analyse statistique du mode roulis hollandais.....51
Tableau 3.1	Réglages des pôles du contrôleur linéaire pour chaque axe de contrôle....94
Tableau 3.2	Constantes de temps pour les actionneurs de la dynamique longitudinale.....95
Tableau 4.1	Prérequis de performance pour la réponse longitudinale.....107
Tableau 4.2	Exigences de performance pour la réponse latérale.....108
Tableau 4.3	Exigences pour la performance d'une commande de roulis112

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	Repère cartésien NED.....	6
Figure 1.2	Repère-avion.....	7
Figure 1.3	Repère-stabilité.....	9
Figure 1.4	Angles d'Euler.....	10
Figure 3.1	Superposition des boucles de commande longitudinale.....	73
Figure 3.2	Superposition des boucles de commande latérale.....	74
Figure 3.3	Force centrifuge due au taux de roulis.....	76
Figure 4.1	Exemple de génération de commande avec fonction sinusoïdale.....	110
Figure 4.2	Performance du mode courte période pour l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage.....	113
Figure 4.3	Critères de performance en fréquence pour l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage.....	114
Figure 4.4	Critères de performance pour un contrôleur longitudinal avec un engagement du mode de suivi d'angle de tangage.....	115
Figure 4.5	Paramètres de la dynamique du mode roulis hollandais.....	116
Figure 4.6	Niveau de performance requis pour l'amortissement de lacet.....	117
Figure 4.7	Paramètres de la dynamique du mode roulis.....	118
Figure 4.8	Critères de performance du mode courte période pour l'asservissement d'une vitesse angulaire.....	119
Figure 4.9	Réponse fréquentielle des essais pour une vitesse angulaire commandée.....	120
Figure 4.10	Critères de performance d'un contrôleur longitudinal pour une vitesse angulaire commandée.....	121

XVIII

Figure 4.11	Critères de performance du régime transitoire pour la commande d'une vitesse angulaire.....	122
Figure 4.12	Performance de la réponse temporelle du mode roulis hollandais	123
Figure 4.13	Critères additionnels de performance pour l'amortissement de lacet.....	124
Figure 4.14	Performance du mode roulis pour la réponse temporelle du taux de variation de l'angle de roulis.....	125

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

ADC	<i>Air Data Computer</i>
CG	Centre de gravité
CI	Centre d'inertie
ILS	<i>Instrument Landing System</i>
ISA	<i>International Standard Atmosphere</i>
KCAS	<i>Knots Calibrated Airspeed</i>
KEAS	<i>Knots Equivalent Airspeed</i>
KIAS	<i>Knots Indicated Airspeed</i>
KTAS	<i>Knots True Airspeed</i>
LQG	Linéaire quadratique gaussienne
MIMO	<i>Multi-Input-Multi-Output</i>
NED	<i>North-East-Down</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
OACI	Organisation de l'Aviation Civile Internationale
RI	Référentiel inertiel
RNI	Référentiel non-inertiel
SISO	<i>Single-input-single-output</i>
VOR	<i>VHF Omnidirectional Range</i>

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

UNITÉS

deg	Degré
ft	Pied
hr	Heure
kg	Kilogramme
kts	Nœuds
lbs	Livre (masse)
lbf	Livre (force)
m	Mètre
min	Minute
N	Newton
nm	Mille nautique
rad	Radian
s	Seconde

ANGLES ET REPÈRES

$M_{s \rightarrow b}$	Matrice de transformation du repère-stabilité au repère-avion
$M_{\phi\theta\psi}$	Matrice de transformation du repère-avion au repère NED
x_b, y_b, z_b	Axes du repère-avion
x_e, y_e, z_e	Axes du repère NED
x_s, y_s, z_s	Axes du repère-stabilité
x_w, y_w, z_w	Axes du repère-vent
α	Angle d'attaque (deg)
$\dot{\alpha}$	Taux de variation d'angle d'attaque (deg/s)
β	Angle de dérapage (deg)
γ	Angle de trajectoire de vol (deg)
ψ, θ, ϕ	Cap, angle de tangage et roulis (deg)
$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$	Taux de variation du cap, de l'angle de tangage et de roulis (deg/s)
$\ddot{\theta}$	Accélération angulaire de l'angle de tangage (deg/s ²)

COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES

C_D, C_L, C_Y	Traînée, portance, et force latérale
C_l, C_m, C_n	Moment de roulis, tangage et lacet
$C_{l_{ac}}$	Moment de roulis estimé de l'avion
C_{l_p}, C_{l_r}	Moment de roulis dû au roulis et au lacet
C_{l_β}	Moment de roulis dû au dérapage
$C_{l_{\delta_r}}, C_{l_{\delta_w}}$	Moment de roulis dû à la déflexion du palonnier et des ailerons
$C_{m_{ac}}$	Moment de tangage estimé de l'avion
$C_{m_{\delta_e}}$	Moment de tangage dû à la déflexion de la gouverne de profondeur
$C_{Y_{ac}}$	Force latérale estimée de l'avion
C_{Y_p}, C_{Y_r}	Force latérale due au roulis et au lacet

DYNAMIQUE (suite)

ω_d	Fréquence amortie (rad·s ⁻¹)
------------	--

COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES (suite)

$C_{Y_{\delta_r}}$	Force latérale due à la déflexion du palonnier
--------------------	--

CONDITION DE VOL

g	Accélération gravitationnelle (m/s ²)
h, h_{ref}	Altitude actuelle et commandée (ft)
M_a	Nombre de Mach
V, V_e, V_i	Vitesse propre, équivalente et indiquée (kts)
V_{ref}	Vitesse commandée (kts)
VV, VV_{ref}	Vitesse verticale actuelle et commandée (ft/min)
η	Écart de l'angle de faisceau d'alignement de piste (deg)
μ	Distance de la dérive (nm)
ρ	Densité de l'air (kg/m ³)
ρ_0	Densité de l'air normalisée au niveau de la mer (kg/m ³)
$\psi_{ref}, \theta_{ref}, \phi_{ref}$	Angle commandé de cap, tangage et de roulis (deg)

DÉRIVÉES DE STABILITÉ

M_u, M_q	Accélération angulaire de tangage en fonction de u et q
$M_w, M_{\dot{w}}$	Acc. ang. de tangage en fn de w et \dot{w}
$M_{\delta_e}, M_{\delta_{th}}$	Acc. ang. de tangage en fn de δ_e et δ_{th}
U_0, W_0	Vitesse u et w à l'équilibre (m/s)
θ_0	Angle de tangage à l'équilibre (rad)
X_u, X_w, X_q	Accélération longitudinale en fonction de u, w et q
$X_{\delta_e}, X_{\delta_{th}}$	Acc. long. en fn de δ_e et δ_{th}
Z_u, Z_w, Z_q	Accélération verticale en fonction de u, w et q
$Z_{\delta_e}, Z_{\delta_{th}}$	Acc. vert. en fn de δ_e et δ_{th}

DIVERS

t	Temps (s)
μ_D	Moyenne de l'écart

DYNAMIQUE

ζ	Taux d'amortissement
ζ_{cp}, ζ_{ph}	Taux d'amortissement du mode courte période et phugôïde
ζ_R, ζ_{rh}	Taux d'amortissement du mode roulis et roulis hollandais

MESURES DE PERFORMANCE (suite)

ω_n	Fréquence propre (rad·s ⁻¹)
ω_{ncp}	Fréquence propre du mode courte période et phugoïde (rad·s ⁻¹)
ω_{nph}	
ω_{nR}	Fréquence propre du mode roulis et roulis hollandais (rad·s ⁻¹)
ω_{nrh}	

FORCES ET MOMENTS

F_D, F_L, F_Y	Force aérodynamique de traînée, de portance et latérale (N)
L, r	Vecteur du moment cinétique (N·m) et de son bras de levier (m)
L, M, N	Moment cinétique de roulis, de tangage et de lacet (N·m)
L_s, M_s, N_s	Moment cinétique aérodynamique de roulis, de tangage et de lacet (N·m)
X, Y, Z	Force résultante longitudinale, latérale et verticale (N)

INVERSION DYNAMIQUE

e	Écart du suivi de la sortie
f, g, h	Champs vectoriels d'état, de contrôle et de sortie
f_α	Champ scalaire pour le taux de variation de l'angle d'attaque
L_f, L_g	Dérivée de Lie en fonction de f et g
$T(x)$	Matrice de transformation de coordonnées
v	Vecteur des lois de commande
x_d, y_d	Vecteur de référence d'état et de sortie
z, \dot{z}	Nouveau vecteur d'état et sa dérivée
$\alpha(x), \beta(x)$	Champs vectoriels formant la loi de commande

MESURES DE PERFORMANCE

CAP	Paramètre d'anticipation de contrôle (g ⁻¹ s ⁻²)
T_R	Constante de temps du mode roulis (s)
t_r	Temps de réaction (s)
t_s	Temps de stabilisation (s)
t_1	Délai équivalent (s)
T_{θ_2}	Constante de temps du zéro de tangage haute fréquence (s)
ΔV_{max}	Écart maximal de la vitesse (kts)
$\Delta \phi_{rp}$	Erreur en régime permanent de l'angle de roulis (deg)
$\Delta \theta_{max}$	Écart maximal en tangage (deg)

VITESSE ET ACCÉLÉRATION

p, q, r	Composantes de la vitesse angulaire dans le repère-avion (rad/s)
-----------	--

$\Delta \theta_{rp}$	Erreur en régime permanent de l'angle de tangage (deg)
ζ_ϕ	Ratio d'amortissement de l'angle de roulis
$\omega_{n\phi}$	Fréquence propre en roulis (rad·s ⁻¹)

PARAMÈTRES DE L'AVION

b	Envergure de l'aile (m)
\bar{c}	Longueur moyenne de la corde (m)
I	Tenseur d'inertie
I_x, I_y, I_z, I_{xz}	Composantes du tenseur d'inertie (kg·m ²)
m	Masse de l'avion (kg)
Q	Débit de carburant (lbs/(hr·lbf))
S	Surface de l'aile (m ²)
T, T_c	Poussée actuelle et commandée (N)
z_{ei}, z_{eo}	Composante verticale du bras de levier des réacteurs intérieurs et extérieurs (m)
δ_e, δ_{ec}	Déflexion de la gouverne de profondeur actuelle et commandée (deg)
δ_F	Position des volets hyper-sustentateurs
δ_{th}	Position de la manette des gaz
ϵ_h	Angle dans le plan x_b - y_b entre le vecteur poussée et x_b (deg)
ϵ, ϵ_v	Angle dans le plan x_b - z_b entre le vecteur poussée et x_b (deg)
τ_T, τ_{δ_e}	Constante de temps de la dynamique des réacteurs et de δ_e (s ⁻¹)

REPRÉSENTATION D'ÉTAT

A, B	Matrice d'état et de commande
C, D	Matrice de sortie et d'action directe
u	Vecteur d'entrée
x, \dot{x}	Vecteur d'état et sa première dérivée de temps
y	Vecteur de sortie

VARIABLES DE COMMANDE

q_c	Vitesse angulaire de tangage commandée (rad/s)
V_c, \dot{V}_c	Vitesse et accélération linéaire commandée (m/s)
$\theta_c, \dot{\theta}_c, \ddot{\theta}_c, \ddot{\theta}'_c$	Angle de tangage commandé et les trois premières dérivées de temps
$\phi_c, \dot{\phi}_c, \ddot{\phi}_c$	Angle de roulis commandé et les deux premières dérivées de temps

p_s, q_s, r_s	Composantes de la vitesse angulaire dans le repère-stabilité (rad/s)
$\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$	Composantes de l'accélération angulaire dans le repère-avion (rad/s ²)
u, v, w	Composante de la vitesse linéaire dans le repère-avion (m/s)
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	Composante de l'accélération linéaire dans le repère-avion (m/s ²)
\mathbf{V}, \mathbf{v}_b	Vecteur vitesse linéaire (m/s)
$\dot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{V}}$	Vecteur accélération linéaire (m/s ²)
$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_b$	Vecteur vitesse angulaire (rad/s)
$\dot{\boldsymbol{\omega}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_b$	Vecteur accélération angulaire (rad/s ²)

INTRODUCTION

Dans le processus de conception d'un avion, la manœuvrabilité est une qualité qui doit être prise en considération à plusieurs étapes avant la certification, soit du design initial à la validation en vol. Lorsque l'aéronef est piloté manuellement, il doit présenter un comportement dynamique qui facilite l'exécution de tâche opérationnelle. Une normalisation de la dynamique contribue également à assurer la sécurité d'un vol, en permettant une certaine similitude pour le pilote en transposant une expérience similaire d'un type d'avion à un autre.

Dans l'aviation commerciale moderne, l'utilisation des systèmes de pilotage automatique est monnaie courante. Elle permet de libérer le pilote du suivi actif nécessaire pour maintenir une trajectoire de vol prédéterminée et le relaye à un rôle de gestionnaire pour les tâches additionnelles qui peuvent également affecter la sécurité du vol. La dynamique générée par le pilote automatique doit également répondre à des caractéristiques normalisées et adaptées pour le type d'avion et la phase de vol. En raison de l'enveloppe opérationnelle étendue de conditions de vol, la synthèse d'un contrôleur peut être relativement complexe afin d'atteindre un niveau de performance acceptable. Les avionneurs vont normalement concevoir une multitude de ces contrôleurs. Chacun de ces contrôleurs ne servira que pour la combinaison d'altitude et de vitesse pour laquelle il a été ajusté. Avec cette approche, la conception d'un système de pilotage automatisé ne se résume pas à la synthèse d'une seule loi de commande, mais bien d'une série pour couvrir l'enveloppe opérationnelle.

Différentes techniques d'asservissement ont déjà été étudiées pour le Boeing 747 dans les dernières années afin de moderniser les techniques classiques utilisées. Par exemple, Abd Elwahab, Elden, Imam, et Al Amin (2017) introduisent un contrôleur avec un gain pour le retour d'état de la vitesse angulaire en lacet pour satisfaire les normes de qualités de vol d'un amortisseur de lacet. Richardson et al. (2011) présentent des résultats utilisant une technique de placement de pôles et évaluent si l'objectif du placement de ceux-ci est atteint. Ganguli, Marcos, et Balas (2002) ont travaillé sur une synthèse d'une commande optimale de l'axe longitudinal. Ces trois techniques possèdent certains points en commun. Pour chacune, la

linéarisation de l'état de l'avion doit être effectuée pour le point de vol afin d'appliquer la méthode d'asservissement. Dès que l'état de l'avion s'éloigne du point de vol pour lequel le contrôleur a été conçu, les performances peuvent se détériorer. Également, un modèle avec un haut degré de fidélité est requis uniquement pour le développement initial de ces lois de commande, retardant toujours le moment pour lequel nous pouvons commencer à calculer ces lois pour l'intégration. Afin de minimiser le coût associé avec cette étape, la création d'un contrôleur qui rencontre les normes pour l'ensemble de l'enveloppe avec une modélisation approximative peut s'avérer attrayante pour un avionneur.

L'inversion dynamique est une méthode d'asservissement qui permet la synthèse d'un seul contrôleur pour l'ensemble de la plage d'utilisation du système. La loi de commande permet de linéariser la variable de sortie qui fait l'objet du suivi. Un contrôleur linéaire est alors ajouté à la nouvelle représentation du système pour corriger les déviations du signal de référence. La modélisation du système doit être intégrée dans la loi de commande avec cette technique. Donc, les variables permettant le calcul de l'état de l'avion doivent être mesurables et tout écart entre le système et la modélisation peut modifier la linéarisation, influençant les caractéristiques de la dynamique. Comparativement à l'approche préconisée par les avionneurs, l'économie de temps réalisée avec la création d'un seul contrôleur est généralement perdue avec la prise de mesures requises pour le développement d'une modélisation du système avec un haut niveau de fidélité et un processus de certification plus complexe, compte tenu de l'écart avec les normes de conception, qui correspondent à un ensemble de régulateur linéaire quadratique gaussienne (LQG).

L'objectif principal de ce projet de recherche est d'évaluer la performance d'un contrôleur d'inversion dynamique qui utilise une modélisation approximative du Boeing 747. Nous voulons déterminer si une estimation des termes qui influence principalement la force et le moment aérodynamique est suffisante pour obtenir un pilote automatique qui pourrait être mis en ligne sur cet avion. Contrairement à l'intégration d'une modélisation exacte pour l'inversion dynamique, cette approche permettrait de diminuer le temps requis pour obtenir un contrôleur

fonctionnel, sans sacrifier des caractéristiques adéquates pour effectuer le vol de façon sécuritaire.

Afin d'étudier la question, nous avons créé une modélisation du Boeing 747 sur une plateforme de simulation temporelle, basée sur les données recueillies par Boeing et publiées par la NASA. L'accès à cette plateforme personnalisée pour la simulation a facilité le début de la phase expérimentale pour les essais préliminaires de la loi de commande. Un objectif secondaire de ce projet de recherche est donc la validation de cette modélisation avec des résultats de tests en vol.

Le projet est divisé en plusieurs étapes. Au chapitre 1, nous introduisons le cadre de travail pour créer une modélisation. Le chapitre 2 porte sur l'implémentation de la modélisation du Boeing 747 et une validation permettant d'évaluer si la plateforme de simulation peut être utilisée dans les essais préliminaires du contrôleur. Dans le chapitre 3, nous développons mathématiquement les lois de commande pour les différents axes de contrôle. Finalement, au chapitre 4, nous effectuons des essais sur la plateforme de simulation FlightSIM de Presagis™ qui a permis la mesure de différents paramètres de performance de l'asservissement pour nous aider à déterminer si la mise en ligne du contrôleur est envisageable.

CHAPITRE 1

THÉORIE POUR LA MODÉLISATION D'UN AÉRONEF

1.1 Concept

Pour effectuer des essais sur un contrôleur pour une éventuelle mise en ligne, il est nécessaire de tester la technique avec une simulation temporelle. Pour créer cette simulation, une modélisation du système physique doit être développée à l'aide de formules mathématiques. Définir l'espace et un système de repérage dans lequel l'objet peut se déplacer est la première étape du processus qui est vitale à la démarche. Plusieurs repères seront introduits pour prendre en compte les différents aspects de la modélisation. Nous développerons également une méthode pour naviguer entre ces repères permettant de suivre parallèlement la progression dans les différents référentiels. Un avion peut être représenté par un objet rigide avec six degrés de liberté. Nous devons alors introduire les équations qui décrivent cette dynamique. En combinant la somme des forces, les moments, les vitesses linéaires et angulaires, il est possible d'obtenir les six composantes d'accélération, permettant le calcul de l'évolution de l'état dans chaque repère. Un dernier aspect théorique sera également abordé, la linéarisation, qui aidera pour discuter de la stabilité du système.

1.2 Repères

Afin de pouvoir décrire le mouvement d'un objet physique, il est nécessaire de décrire un espace dans lequel l'objet peut se déplacer. Les différentes définitions contribuent à l'analyse de la dynamique de l'objet. Un repère est un ensemble de vecteurs et un point d'origine pouvant être utilisés pour déterminer des distances et des directions (Stevens, Lewis, & Johnson, 2015). Un seul repère est suffisant pour étudier le déplacement d'un objet dans son entier. Cependant, certains se prêtent mieux que d'autres à l'analyse pour différentes analyses ou représentations. Par exemple, un repère cartésien fixe dans lequel un aéronef se déplace est idéal pour la position. À l'opposé, essayer de décomposer les forces et moments agissant sur l'avion n'est pas une tâche aussi facile avec ce dernier. En définissant un repère qui se déplace avec

l'aéronef, le calcul des forces sera facilité. Dans le cadre de ce projet de recherche, nous utiliserons les repères tels que définis par le document de référence de la modélisation (Hanke & Nordwall, 1970) : le repère-avion, le repère-stabilité et le repère-vent. Tout d'abord, nous devons introduire un repère décrivant la position de l'aéronef et dans lequel il peut se déplacer, le repère cartésien *North-East-Down* (NED).

1.2.1 Repère cartésien NED

Le repère cartésien NED contribue à la description de la position de l'aéronef dans l'espace. Un point d'origine est tout d'abord défini. Il s'agit normalement de l'aérodrome de départ ou du point de départ de la simulation. L'axe z_e est ensuite tracé parallèlement à la force gravitationnelle de ce point, vers le centre de la Terre. Un plan perpendiculaire à ce vecteur, passant par le point d'origine, est alors utilisé afin de tracer les deux autres axes, x_e pointant vers le nord et y_e pointant vers l'est (Figure 1.1).

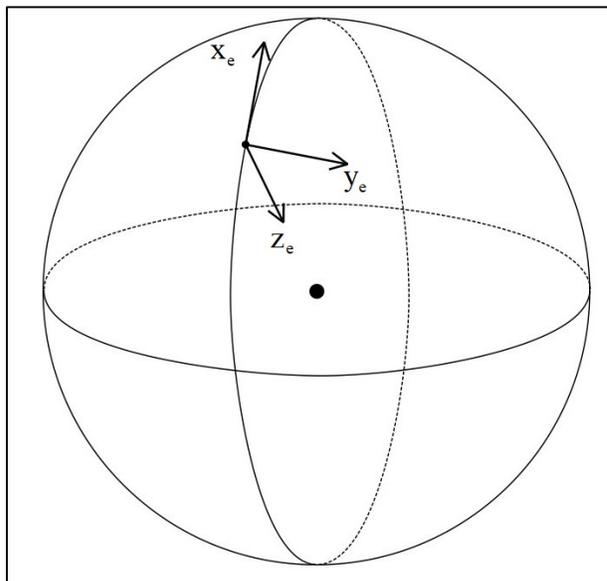


Figure 1.1 Repère cartésien NED

Ce référentiel n'est pas inertiel, c'est-à-dire qu'il est en constante accélération. La Terre est en rotation sur elle-même et également en orbite autour du Soleil. Une surface plane représente

l'espace dans lequel l'aéronef évolue autour du point d'origine. Bien que cette représentation ne soit pas représentative de la Terre, son utilisation est appropriée pour déterminer la position d'un aéronef évoluant à proximité du point d'origine, tel que requis pour la validation de lois de commande, et du même coup ignore la force de Coriolis et la force centrifuge qui sont générées par le déplacement de la Terre (Stevens et al., 2015, p.41). En d'autres mots, il peut être considéré comme référentiel inertiel. Ce repère permet d'atteindre une modélisation satisfaisante de la réalité, si la distance du point d'origine se limite à quelques centaines de milles nautiques (Stevens et al., 2015, p.41).

1.2.2 Repère-avion

Le repère cartésien NED offre une méthode adéquate pour décrire la position de l'aéronef ainsi que la vitesse totale. Cependant, la description de l'accélération par développement mathématique est laborieuse. Pour cette raison, nous pouvons utiliser le repère-avion afin d'accomplir cette tâche. Le point d'origine est défini avec le centre de gravité de l'aéronef. Le premier axe, x_b , est parallèle à la ligne de référence horizontale. L'axe z_b pointe vers le bas et forme un plan, avec x_b , faisant une réflexion de l'avion. Finalement, l'axe y_b est normal à ce plan, pointant à tribord de l'appareil (Figure 1.2).

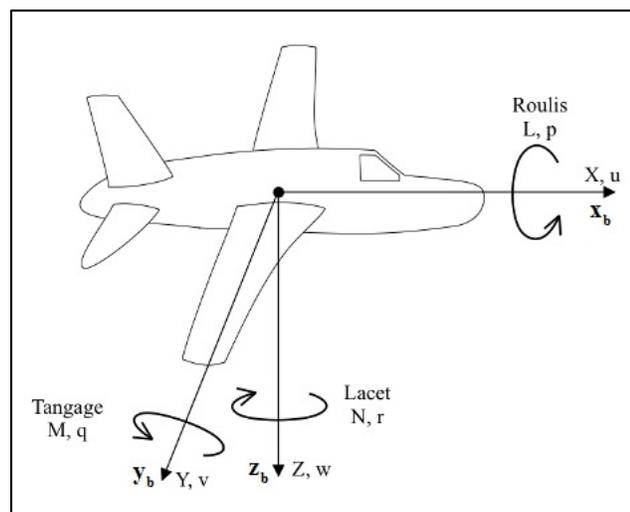


Figure 1.2 Repère-avion

Dans ce repère, plusieurs variables doivent être définies. Pour le mouvement linéaire, trois composantes sont définies pour la vitesse (u , v et w) et la force appliquée (X , Y et Z), représentant respectivement les composantes longitudinale, latérale et verticale. Quant au mouvement rotationnel, la vitesse angulaire (p , q et r) et le moment (L , M et N) sont respectivement les composantes de roulis, de tangage et de lacet. Les composantes d'accélération vont également être nécessaires à la modélisation et seront marquées d'un point au-dessus de la lettre associée à la composante de vitesse, linéaire ou angulaire.

Il existe plusieurs avantages avec ce référentiel afin de décrire ces variables locales. En utilisant ce repère, il est possible de découpler la dynamique linéaire de la dynamique angulaire (Stevens et al., 2015, p.34). La combinaison des différentes composantes de vitesse permet de calculer des variables nécessaires à la modélisation, par exemple, l'angle d'attaque (α) et l'angle de dérapage (β). Les équations décrivant le mouvement linéaire sont simplifiées, étant donné que l'accélération du centre d'inertie est obtenue par la somme de toutes les forces agissant sur l'avion, peu importe leur point d'application (Stevens et al, 2015, p.34). De plus, les angles d'Euler, nécessaires à la création de la simulation, sont formés avec la différence d'orientation entre le repère-avion et le repère cartésien NED.

1.2.3 Repère-stabilité

Les forces de portance et de traînée sont définies comme étant respectivement les résultantes aérodynamiques perpendiculaire et parallèle au vecteur de vitesse pour un état de vol à l'équilibre. Le repère-stabilité permet de travailler avec un référentiel aligné avec ces composantes. En effectuant une rotation du repère-avion dans le plan x_b-z_b , l'axe x_s pointe parallèlement au vecteur de vitesse propre, le vecteur du déplacement de l'avion dans la masse d'air, lorsque l'angle de dérapage est nul. L'axe y_s est parallèle à y_b créant un plan x_b-y_b , permettant la définition de l'axe z_s normal à ce plan, pointant sous l'avion (Figure 1.3).

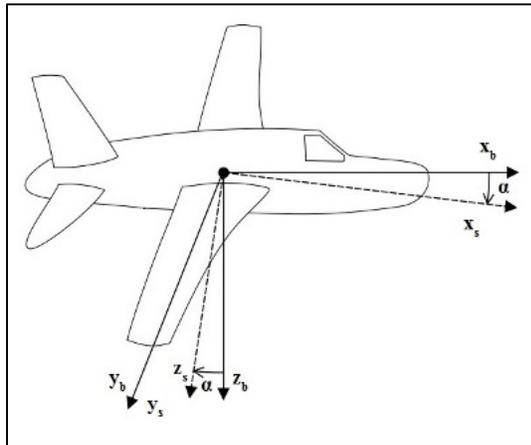


Figure 1.3 Repère-stabilité

Les principaux avantages de ce repère sont sa relation avec la collecte de données expérimentales lors d'essais en vol et en soufflerie (Cook, 2013, p.18) et sa simplicité pour l'analyse des effets de perturbations sur un vol stabilisé (Stevens et al., 2015, p.76).

1.2.4 Repère-vent

Le repère-vent est semblable au repère-stabilité, c'est-à-dire que les deux sont identiques en vol coordonné. L'ajout d'une rotation dans le plan x_s - y_s , qui correspond à l'angle de dérapage β , permet de définir l'axe x_w , parallèle et opposé au vecteur du vent relatif, qu'il soit en vol équilibré ou non. La composante de vitesse dans cet axe représente la vitesse propre de l'avion et la direction du vecteur, la trajectoire de vol. Le principal avantage de ce repère est qu'un de ces axes est parallèle à la trajectoire de l'aéronef, peu importe qu'il soit à l'équilibre ou non. Il ne sera pas grandement utilisé dans notre développement, néanmoins sa définition découle naturellement de la démarche utilisée jusqu'à présent.

1.3 Transformations d'axes

L'attitude d'un aéronef est définie par l'orientation angulaire du repère-avion avec le repère cartésien NED. Ces angles sont un cas spécifique d'angles d'Euler. Ceux-ci sont définis par une rotation d'angles autour de trois axes (Cook, 2013, p.19). Le sens de rotation est important

et doit suivre la règle de la main droite. La lettre ψ désigne le cap de l'avion, la lettre θ pour l'angle de tangage, et la lettre ϕ pour l'angle de roulis.

La démarche suivante est tirée du livre de Rose (1995). Tout d'abord, la rotation dans le plan x_e-y_e est effectuée pour définir l'angle ψ . Deuxièmement, la plateforme est pivotée dans le nouveau plan $x-z$ pour former l'angle θ . Finalement, la troisième rotation est dans le dernier plan $y-z$, d'un angle ϕ . La Figure 1.4 montre le sens de chaque rotation.

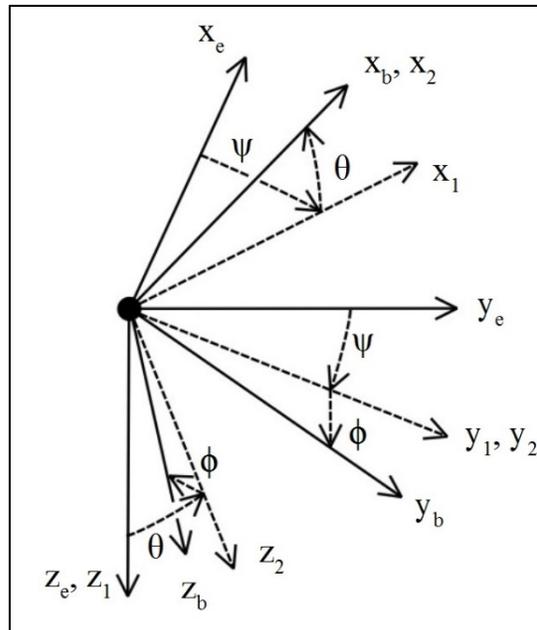


Figure 1.4 Angles d'Euler

En partant avec le repère cartésien NED, la première rotation est dans le plan x_e-y_e , et l'orientation résultante est représentée avec les composantes de vecteur $[x_1 \ y_1 \ z_1]^T$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_e \cos \psi + y_e \sin \psi \\ y_1 &= -x_e \sin \psi + y_e \cos \psi \\ z_1 &= z_e \end{aligned} \quad (1.1)$$

La matrice de cette première rotation est

$$\mathbf{M}_\psi = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

La deuxième rotation est complétée dans le plan x_ψ - z_ψ :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pour laquelle la deuxième matrice de rotation correspond à

$$\mathbf{M}_\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

La troisième matrice de rotation peut être calculée en utilisant une technique similaire :

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Le résultat de la multiplication des trois matrices permet de transformer une quantité d'un repère cartésien NED à un repère-avion.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\phi\theta\psi} &= \mathbf{M}_\phi \mathbf{M}_\theta \mathbf{M}_\psi \\ \mathbf{M}_{\phi\theta\psi} &= \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi & \sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \psi & +\cos \phi \cos \psi & \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \\ +\sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Une autre transformation qui a déjà été abordée précédemment est celle du repère-vent vers le repère-avion. Il est possible de décrire la matrice de transformation entre les deux repères en utilisant la matrice suivante (Cook, 2013, p.22), où V représente la vitesse totale de l'avion.

$$\mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Finalement, la dernière transformation relie également les vitesses angulaires entre le repère-avion et le repère cartésien NED. Cook (2013) explique la relation entre les deux repères pour les taux de variation d'angle de cette façon :

1. Le taux de variation de roulis, p , est égal à la somme des composantes $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ calculées pour une rotation dans l'axe x_b .

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \quad (1.8)$$

2. Le taux de variation de tangage, q , est égal à la somme des composantes $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ calculées pour une rotation dans l'axe y_b .

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \quad (1.9)$$

3. Le taux de variation de lacet, r , est égal à la somme des composantes $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ calculées pour une rotation dans l'axe z_b .

$$r = \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi \quad (1.10)$$

La matrice de transformation pour les vitesses angulaires peut être formée en combinant les trois dernières équations :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Étant donné que l'intégration est complétée dans le repère-avion, le changement de référentiel contribuera à la simplification des calculs. À partir de ces transformations, il sera possible d'ajouter une partie des variables nécessaires à la création de la modélisation de l'aéronef. Avant d'arriver dans le cœur de la simulation, une discussion sur l'inertie de l'aéronef servira à introduire un facteur qui influence grandement l'accélération.

1.4 Inertie

La modélisation d'un aéronef est étudiée à l'aide de la physique mécanique. En ayant décrit l'espace dans lequel l'objet peut se déplacer, les lois de Newton peuvent maintenant être utilisées pour l'intégration de l'accélération. Avant d'arriver à ce sujet, l'inertie d'un objet doit être définie pour expliquer le mouvement linéaire et angulaire, passant respectivement par la masse et le centre d'inertie. Le terme centre de gravité est plus communément utilisé en aviation. Il existe une différence entre les deux définitions, mais elle est négligeable pour le vol d'un avion. Dans cette section, nous allons utiliser le terme centre d'inertie parce que c'est bel et bien la définition mathématique de celui-ci que nous effectuons, mais les deux expressions seront interchangeables pour le reste du document.

La première loi de Newton dit qu'un objet ponctuel ayant une masse et une vitesse restera en mouvement rectiligne uniforme, si aucune force n'est appliquée (Morin, 2008, p.51). Ce concept peut être généralisé pour un objet rigide possédant trois dimensions. Lorsque l'accélération est étudiée dans le référentiel du centre d'inertie, il est possible d'étudier un système regroupant plusieurs objets comme une masse ponctuelle et appliquer la somme des forces à ce point unique (Morin, 2008, p.162). Pour un corps rigide, ce centre est fixe dans l'espace, si la masse est conservée et qu'aucun déplacement de ces points n'est effectué. Dans le cas d'un avion, le carburant alimente la combustion des réacteurs diminuant la masse totale de l'avion ainsi que le centrage avec le déplacement du fluide dans les réservoirs. En sortant

le train d'atterrissage, le pilote modifie également le centre d'inertie. Cependant, dans le cadre d'une simulation se déroulant sur quelques minutes pour l'évaluation de la performance d'un contrôleur, ces effets peuvent être négligés pour deux raisons : la constante de temps de la variation de la masse est d'un ordre grandement plus long que la dynamique de l'avion et le changement est minime pour la distribution de la masse en relation avec l'ensemble de l'avion. La modélisation développée sera à masse fixe avec un centre d'inertie fixe pour une situation de vol spécifique. La masse et la configuration de l'aéronef seront déterminées pour chaque repositionnement de l'appareil. Pour déterminer la norme de l'accélération, nous devons diviser la force nette par la masse. Pour trouver le point d'application des forces et moment, nous devons définir le centre d'inertie avec l'équation suivante (Morin, 2008, p.161) :

$$\mathbf{R}_{CI} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad (1.12)$$

Pour laquelle \mathbf{R}_{CI} est la position du centre d'inertie, m_i et \mathbf{r}_i représentent respectivement la masse et la position d'un élément fini du système, et M est la masse totale.

Le mouvement cinétique d'un objet est centré autour de son centre d'inertie. Selon la distribution de la masse d'un objet autour de celui-ci, l'accélération angulaire sera différente pour un même couple appliqué sur l'avion. La généralisation de cette propriété est le tenseur d'inertie.

1.4.1 Tenseur d'inertie

Le moment d'inertie contribue à déterminer l'accélération angulaire engendrée par un moment appliqué sur un objet. Plus ce moment d'inertie est grand, plus l'accélération sera diminuée. La généralisation de ce moment d'inertie est appelée le tenseur d'inertie. Il détermine la relation du moment angulaire, \mathbf{L} , et la vitesse angulaire, $\boldsymbol{\omega}$ (Morin, 2008, p.376). Il est défini par la géométrie et la distribution de la masse de l'objet.

En prenant le cas spécifique d'une rotation autour d'un axe passant par le centre d'inertie, il est possible de développer l'équation de moment cinétique suivante (Morin, 2008, p.376).

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (1.13)$$

Dans l'équation (1.13), \mathbf{L} est le moment d'une masse dm infinitésimale positionnée à une distance r et ayant une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Étant donné que le mouvement est en trois dimensions, il est possible de décomposer les trois vecteurs en trois composantes distinctes. La direction dans laquelle un axe pointe sera dénotée en indice dans la composante. Pour le moment et la vitesse angulaire, le vecteur représente la quantité en rotation autour de l'axe en indice. Il est donc possible d'exprimer :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \hat{x} + (\omega_z x - \omega_x z) \hat{y} + (\omega_x y - \omega_y x) \hat{z} \end{aligned} \quad (1.14)$$

La prochaine étape amène à utiliser cette dernière équation pour compléter l'expression qui est intégrée :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ (\omega_x z - \omega_z y) & (\omega_z x - \omega_x z) & (\omega_x y - \omega_y x) \end{vmatrix} \\ &= (\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z zx) \hat{x} \\ &\quad + (\omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z yz - \omega_x xy) \hat{y} \\ &\quad + (\omega_z (x^2 + y^2) - \omega_x zx - \omega_y yz) \hat{z} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il est possible de mettre sous forme matricielle ce résultat :



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) & -\int xy & -\int zx \\ -\int xy & \int (x^2 + z^2) & -\int yz \\ -\int zx & -\int yz & \int (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dm \\
&= \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Afin de préciser l'équation pour une modélisation aéronautique, certains termes peuvent être simplifiés. Étant donné que l'avion est normalement symétrique dans le plan x_b-z_b , en intégrant la masse pour la multiplication de x et y , et de y et z , la somme du côté bâbord de l'avion annule celui de tribord. Il est donc possible d'écrire la matrice du tenseur d'inertie pour une modélisation d'aéronef avec uniquement quatre termes.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_z \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Avec l'inertie d'un avion définie, il est maintenant possible d'aborder le cœur du mécanisme pour le calcul de la modélisation, les forces et les moments.

1.5 Dynamique de l'aéronef

La partie d'une modélisation donnant vie à une simulation est l'intégration des accélérations obtenues à partir de la somme des forces et des moments agissant sur un objet. Les variables d'état servent à calculer un vecteur force et un vecteur moment cinétique pour un temps déterminé, permettant ensuite l'intégration de cette accélération afin d'obtenir l'évolution de la vitesse et de la position. Au prochain pas d'intégration, les nouveaux vecteurs force et moment sont alors recalculés avec les nouvelles valeurs des variables, afin de répéter le cycle.

Les définitions des référentiels et de l'inertie amènent finalement à cette dynamique qui est le centre d'intérêt de la modélisation.

Plusieurs aspects doivent être abordés afin de permettre les calculs de toutes les variables d'intérêt. Tout d'abord, les composantes d'accélération, linéaire et angulaire, doivent être définies. Ces six composantes formeront les entrées pour les équations décrivant le mouvement de l'avion. Une discussion sur l'intégration et les conditions initiales s'en suivra. Et finalement, la transformation de repère permettra d'obtenir toutes les variables nécessaires à la modélisation.

1.5.1 Accélération linéaire et angulaire

La première étape permettant l'intégration des variables pour la simulation est la relation entre les forces et les moments, avec les accélérations. Le référentiel le plus approprié pour le calcul est le repère-avion. Morin (2008) définit l'équation pour l'évolution d'une quantité dans un repère en constante accélération comme étant

$$\left. \frac{d \mathbf{A}}{dt} \right|_{RI} = \left. \frac{d \mathbf{A}}{dt} \right|_{RNI} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (1.18)$$

Pour laquelle \mathbf{A} représente un vecteur pouvant être mesuré en tout point. L'indice RI indique un référentiel inertiel, repère NED, et l'indice RNI , un référentiel non-inertiel, tel que le repère-avion. Pour la modélisation, la quantité de mouvement sera un des vecteurs utilisés dans l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d (m \mathbf{v}_b)}{dt} \right|_{RI} &= \left. \frac{d (m \mathbf{v}_b)}{dt} \right|_{RNI} + \boldsymbol{\omega}_b \times (m \mathbf{v}_b) \\ m \left. \frac{d \mathbf{v}_b}{dt} \right|_{RI} &= m \left(\left. \frac{d \mathbf{v}_b}{dt} \right|_{RNI} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans ce développement, nous considérons que la masse est constante. Les forces résultantes longitudinale, latérale et verticale sont représentées par le vecteur $[X \ Y \ Z]^T$. Pour la modélisation, le vecteur de force net représente les composantes de cette dérivée. Le deuxième terme est égal à la variation du vecteur \mathbf{v}_b dans le repère-avion, soit la composante d'accélération qui est utilisée pour l'intégration. Finalement, le dernier terme émerge avec la vitesse angulaire de l'aéronef. Avec un système à six degrés de liberté, les axes du repère-avion peuvent effectuer une rotation. Cette rotation est prise en considération avec ce dernier terme. L'équation peut être mise sous forme matricielle, afin d'être utilisée pour l'intégration (<http://www.mathworks.com/help/aeroblks/>) (Cook, 2013, p.78).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = m \left(\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix} \right) \quad (1.20)$$

Une démarche similaire est nécessaire afin d'obtenir les composantes d'accélération angulaire. L'expression $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b$ peut remplacer \mathbf{A} dans l'équation (1.18).

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b)}{dt} \right|_{RI} &= \left. \frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b)}{dt} \right|_{RNI} + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b) \\ \left. \frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b)}{dt} \right|_{RI} &= \mathbf{I} \left. \frac{d(\boldsymbol{\omega}_b)}{dt} \right|_{RNI} + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b) \end{aligned} \quad (1.21)$$

La dérivée du référentiel inertiel de cette équation représente le moment net appliqué à l'avion (L, M, N). La dérivée du référentiel non-inertiel est l'accélération angulaire à intégrer pour la modélisation. Il est possible de réécrire cette équation sous la forme matricielle suivante (<http://www.mathworks.com/help/aeroblks/>) (Cook, 2013, p.79) :

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_b) \quad (1.22)$$

1.5.2 Conditions initiales et intégration

Jusqu'à présent, les résultats des équations obtenues avec les composantes de la somme des forces et moments sont les vecteurs d'accélération, linéaire et angulaire. Pour la modélisation, les résultats que nous désirons obtenir comprennent la vitesse angulaire et linéaire dans le repère-avion, la position dans le repère NED et les angles d'Euler. Il est possible d'obtenir ces variables à partir de l'intégration des composantes d'accélération.

Pour toute intégration, les conditions initiales doivent être déterminées. Pour une modélisation avec six degrés de liberté utilisant les angles d'Euler et dans un repère inertiel NED, les conditions initiales à définir comprennent (<http://www.mathworks.com/help/aeroblks/>) :

- la position initiale dans le repère inertiel,
- la vitesse linéaire initiale dans le repère-avion (u, v, w) ,
- les angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) ,
- la vitesse angulaire dans le repère-avion (p, q, r) ,
- la masse,
- le tenseur d'inertie.

Les composantes de la vitesse linéaire peuvent être directement intégrées avec les accélérations linéaires respectives. La même opération peut être effectuée avec les composantes de la vitesse angulaire en utilisant les accélérations angulaires. Avec la matrice $\mathbf{M}_{\psi\theta\phi}$, il est possible de transformer les composantes de la vitesse linéaire du repère-avion au repère NED. Ces nouvelles composantes (u_e, v_e, w_e) seront une sortie de la modélisation et intégrées pour calculer la nouvelle position dans le repère inertiel. Les taux de variation des angles d'Euler sont calculés à l'aide des vitesses angulaires et les angles d'Euler. Ces taux de variation peuvent ensuite être intégrés pour calculer les nouveaux angles d'Euler. Un certain nombre d'équations additionnelles est présenté à l'Annexe II, tel que le calcul de l'angle d'attaque, l'angle de dérapage et les conversions de vitesse. Avant de nous lancer dans la modélisation du Boeing 747, nous devons parler de la linéarisation de l'état pour une condition de vol, une technique qui s'avère utile pour l'asservissement et la validation de la modélisation.

1.6 Linéarisation

Jusqu'à présent, le développement mathématique nous a permis d'utiliser des équations non-linéaires afin de décrire la dynamique d'un avion. Il y a cependant des avantages à travailler avec des équations linéaires, car elles nous permettent de trouver plus aisément des paramètres caractérisant la dynamique du système, tout en étant valides malgré la simplification. Si nous supposons que l'entrée du système ou la perturbation est suffisamment petite autour d'un point d'équilibre, nous pouvons effectuer un développement en série de Taylor pour calculer le résultat. Alors, seulement les termes du premier ordre de la série, représentant l'écart de la commande et de l'état, nous permettent d'obtenir un résultat valable. Pour déterminer si une condition de vol est un point d'équilibre stable, nous pouvons utiliser le théorème de Lyapunov. La définition de la stabilité, dans le sens de Lyapunov, est qu'un point d'équilibre est stable si et seulement si l'état linéarisé tangent est stable (Tewari, 2011).

Une condition de vol à l'équilibre nécessite que toutes les composantes de vitesse, linéaire et angulaire, soient constantes (Stevens et al., 2015, p.118). Pour un vol rectiligne en palier, le vecteur d'accélération angulaire, l'angle de roulis et de dérapage seront nuls. La valeur en régime permanent des variables telles que les composantes de vitesse, d'angle d'attaque et d'angles d'Euler, sera donnée pour chaque condition de vol. Ces variables formeront également un vecteur d'état qui sera utilisé pour la représentation d'état. Les valeurs des entrées de contrôle, comme l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur ou la poussée, seront également associées à cette condition et formeront le vecteur de contrôle. Nous utiliserons alors une représentation d'état pour construire un modèle linéaire basé sur des perturbations autour d'un point d'équilibre. Les valeurs de la matrice seront déterminées à partir des coefficients de linéarisation appelés communément dérivées de stabilité qui peuvent être mesurées ou calculées.

1.6.1 Dérivées aérodynamiques de stabilité et de contrôle

Les dérivées aérodynamiques de stabilité se montrent utiles lors du design préliminaire de l'aéronef; elles peuvent être estimées à partir de la géométrie de l'avion et utilisées pour

calculer les modes et la stabilité de l'avion (Stevens et al., 2015, p.203). Elles sont définies avec une dérivée partielle d'une force ou d'un moment aérodynamique par rapport à une variable du vecteur d'état, à un point d'équilibre. La dérivée aérodynamique de contrôle est similaire, mais la force ou le moment est provoqué par une des gouvernes de vol. Si nous prenons l'exemple d'une variation dans la force longitudinale, X , en fonction d'une variation de la composante horizontale du vecteur vitesse, u , la dérivée sera définie mathématiquement par :

$$\tilde{X}_u = \frac{\partial X}{\partial u} \quad (1.23)$$

Il est possible d'adimensionner les forces et moments afin de simplifier l'écriture et d'avoir une relation directe avec les accélérations. Ils seront alors divisés par la masse ou par le moment d'inertie lui correspondant.

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \quad (1.24)$$

Avec cette équation, on suppose que la force X varie linéairement avec une variation de vitesse u et l'état est stable au sens de Lyapunov. Cette affirmation est généralement valide si nous considérons uniquement une légère perturbation autour d'un point d'équilibre (Queijo, 1971). Les dérivées de stabilité vont servir à construire la représentation d'état afin d'obtenir un modèle linéaire d'un aéronef.

1.6.2 Représentation d'état

La dynamique ou l'état d'un système linéaire peut être décrit à l'aide d'un nombre de variables appelées variables d'état (Cook, 2013, p.93). Le nombre de ces variables dépend du degré de liberté du système. L'équation mathématique de cette représentation est :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (1.25)$$

Où $\mathbf{x}(t)$ représente le vecteur d'état, $\mathbf{u}(t)$ est le vecteur de contrôle, \mathbf{A} est la matrice d'état, et \mathbf{B} est la matrice de contrôle (Cook, 2013, p.93). Un vecteur de sortie peut également être déterminé comme étant

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (1.26)$$

Où $\mathbf{y}(t)$ représente le vecteur de sortie, \mathbf{C} est la matrice de sortie et \mathbf{D} est la matrice d'action directe (Cook, 2013, p. 87). Le vecteur de sortie peut être le résultat d'une opération mathématique des variables d'état et de contrôle, ou simplement retourner la valeur des variables d'état.

Afin de construire ces matrices, il faut considérer une situation de vol autour d'un point d'équilibre. En limitant la perturbation au plan x_b - z_b , nous pouvons découpler la dynamique longitudinale et latérale et étudier les différents modes indépendamment (Cook, 2013, p. 87). Regardons tout d'abord le cas longitudinal, et supposons que l'angle de roulis et de dérapage sont maintenus à zéro. Les valeurs à l'équilibre des variables d'état sont énumérées dans le Tableau 1.1.

Tableau 1.1 Variables d'état à l'équilibre

Variable	Description
U_0	Composante de vitesse dans l'axe x_b
W_0	Composante de vitesse dans l'axe z_b
θ_0	Angle de tangage

De plus, il faut définir les variables des vecteurs d'état et de contrôle. Ces variables seront des valeurs de perturbations autour du point d'équilibre.

Tableau 1.2 Perturbation des variables d'état et de contrôle

Variables	Description
u	Composante de vitesse dans l'axe x_b
w	Composante de vitesse dans l'axe z_b
q	Taux de variation de l'angle de tangage
θ	Angle de tangage
δ_e	Déflexion de la gouverne de profondeur
δ_{th}	Angle de la manette de poussée

Il est possible de réécrire les forces et moments de la dynamique longitudinale en substituant les valeurs de variables d'état à l'équilibre (adapté de Cook, 2013, p. 100)

$$\begin{aligned}
 X &= m(\dot{u} + qW_0) \\
 Z &= m(\dot{w} - qU_0) \\
 M &= I_y \dot{q}
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

En affirmant que seulement les variables d'état et de contrôle peuvent contribuer à une variation dans la somme des forces ou moments, il est maintenant possible de transformer ces forces et ces moments en utilisant les dérivées aérodynamiques. Ces dérivées aérodynamiques sont équivalentes au premier terme d'une série de Taylor pour le moment ou la force en question, pour un écart de la condition d'équilibre. Cette démarche, à la base, consiste à dériver la force ou le moment en fonction d'une variable d'état. La dynamique longitudinale étant représentée avec quatre variables d'état (Tableau 1.2), on obtient les termes X_u, X_w, Z_u, Z_w , etc. À noter que dans la dérivation, le seul terme d'un ordre plus élevé qui est significatif est la dérivée de la vitesse verticale (\dot{w}) (Cook, 2013, p. 83). Finalement, l'influence d'une variation de l'angle de tangage sera également calculée avec l'effet du poids sur les composantes de force $\left(\frac{\partial}{\partial t}[mg|\sin \theta \ 0 \ \cos \theta|]\right)$. Afin d'alléger la notation, l'adimensionnement sera effectué dès le départ :

$$\begin{aligned}
\frac{X}{m} &= X_u u + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_w w + X_q q + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_{th}} \delta_{th} - g \theta \cos \theta_0 \\
\frac{Z}{m} &= Z_u u + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_w w + Z_q q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_{th}} \delta_{th} - g \theta \sin \theta_0 \\
\frac{M}{I_y} &= M_u u + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_w w + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_{th}} \delta_{th}
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Nous pouvons alors substituer les valeurs de l'équation (1.27) avec les forces et moment représentés à l'équation (1.28), tout en isolant la valeur d'accélération (adapté de Cook, 2013, p. 103) :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= X_u u + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_w w + (X_q - W_0) q - g \theta \cos \theta_0 + X_{\delta_e} \delta_e \\
&\quad + X_{\delta_{th}} \delta_{th} \\
\dot{w} &= Z_u u + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_w w + (Z_q + U_0) q - g \theta \sin \theta_0 + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_{th}} \delta_{th} \\
\dot{q} &= M_u u + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_w w + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_{th}} \delta_{th}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Ces équations peuvent être réécrites afin de regrouper tous les \dot{w} .

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= X_u u + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_w w + (X_q - W_0) q - g \theta \cos \theta_0 + X_{\delta_e} \delta_e \\
&\quad + X_{\delta_{th}} \delta_{th} \\
\dot{w} &= \frac{Z_u}{1 - Z_{\dot{w}}} u + \frac{Z_w}{1 - Z_{\dot{w}}} w + \frac{(Z_q + U_0)}{1 - Z_{\dot{w}}} q - \frac{g \sin \theta_0}{1 - Z_{\dot{w}}} \theta + \frac{Z_{\delta_e}}{1 - Z_{\dot{w}}} \delta_e \\
&\quad + \frac{Z_{\delta_{th}}}{1 - Z_{\dot{w}}} \delta_{th} \\
\dot{q} &= M_u u + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_w w + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_{th}} \delta_{th}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Il est possible de poser les hypothèses que $Z_{\dot{w}} \ll 1$, $X_q \ll W_0$, $Z_q \ll U$ et que la contribution de \dot{w} comparée à l'accélération \dot{u} est négligeable. L'équation (1.30) devient alors

$$\dot{u} = X_u u + X_w w - W_0 q - g \cos \theta_0 \theta + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_{th}} \delta_{th} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}\dot{w} &= Z_u u + Z_w w + U_0 q - g \sin \theta_0 \theta + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_{th}} \delta_{th} \\ \dot{q} &= (M_u + M_{\dot{w}} Z_u) u + (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) w + (M_q + M_{\dot{w}} U_0) q \\ &\quad - M_{\dot{w}} g \sin \theta_0 \theta + (M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e}) \delta_e + (M_{\delta_{th}} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_{th}}) \delta_{th}\end{aligned}$$

Il est maintenant possible d'écrire l'équation (1.31) sous forme matricielle pour la représentation d'état de la dynamique longitudinale de l'avion.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_0 & -g \cos \theta_0 \\ Z_u & Z_w & U_0 & -g \sin \theta_0 \\ M_u + M_{\dot{w}} Z_u & M_w + M_{\dot{w}} Z_w & M_q + M_{\dot{w}} U_0 & M_{\dot{w}} g \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_{th}} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_{th}} \\ M_{\delta_e} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_e} & M_{\delta_{th}} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_{th}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_{th} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.32)$$

Sous cette forme, la matrice d'état sera grandement utile afin de calculer les modes du point de vol pour lequel les mesures des dérivées aérodynamiques ont été collectées. Pour la dynamique latérale, un développement similaire peut être effectué et le résultat est présenté avec l'équation-A (II-13).

Dans ce chapitre, nous avons développé les outils nécessaires pour une représentation adéquate d'un modèle dynamique, tels que les repères, la dynamique de l'aéronef et la linéarisation. Nous pouvons maintenant aborder les particularités de la synthèse de notre modélisation du Boeing 747 et la validation de celle-ci.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU BOEING 747

Dans le développement d'un contrôleur, l'accès à une modélisation du système est crucial pour évaluer la loi de commande. Une plateforme est nécessaire pour implémenter la boucle de commande et mesurer les variables de sortie. En créant notre propre modèle, nous pouvons obtenir la valeur de n'importe quel signal à tout moment, et faciliter ainsi la programmation et le côté technique. De plus, nous avons une plus grande flexibilité dans les essais pour le contrôle général de la simulation. La modélisation du Boeing 747 que nous allons créer est basée sur les données publiées par Hanke et Nordwall (1970).

Dans la synthèse de ce modèle, nous devons premièrement discuter du cœur de la simulation, c'est-à-dire la variation de la position et la vitesse pour ce système à six degrés de liberté, au travers de la variation du vecteur force et moment. Une étape importante dans la création de cette modélisation est la validation pour s'assurer que les données recueillies dans l'ouvrage de référence ont bien été recréées dans le logiciel de simulation, et que l'interaction entre les équations de force et de moment crée une dynamique qui représente adéquatement le Boeing 747.

2.1 Développement de la modélisation du Boeing 747 sous MATLAB

La modélisation créée dans le cadre de ce projet de recherche fut développée à l'aide du logiciel MATLAB®, un logiciel de programmation mathématique. Il inclut un environnement graphique de simulation appelé Simulink® permettant la création de modèles. Une des boîtes d'outils s'appelle Aerospace Blockset™, une bibliothèque permettant l'utilisation de différentes fonctions utiles dans une application aérospatiale, allant du bloc central servant à l'intégration des accélérations pour créer le déplacement de l'avion, jusqu'aux calculs de valeurs caractéristiques de variables, telles que la vitesse équivalente ou les données atmosphériques.

Le référentiel utilisé pour la simulation est un repère terrestre plat, semblable au repère cartésien NED décrit précédemment. Les coordonnées à l'origine sont en tout temps la position initiale de la simulation pour l'axe x_e et y_e . La valeur initiale de l'axe z_e est le négatif de l'altitude à l'initialisation de la simulation.

Pour diminuer la complexité de la modélisation, nous considérons que l'avion est un corps rigide et que sa masse est constante. En regardant les contributions aux coefficients aérodynamiques, l'aéroélasticité est un effet qui est pris en compte et dépend de la vitesse et l'altitude. Cependant, le centre et le moment d'inertie sont gardés constants au cours d'une simulation avec l'affirmation que l'avion est un corps rigide. Dans le développement des lois de commande au Chapitre 3, la masse et le moment d'inertie seront pris en considération dans la synthèse du contrôleur. On peut donc supposer que le biais provenant d'une consommation de carburant sera minimisé. Par contre, durant la validation finale du contrôleur avec le logiciel FlightSIM de Presagis™, la masse ne sera pas maintenue à une valeur constante, et ainsi, nous pourrions évaluer si les lois de commande corrige adéquatement pour une variation de celle-ci.

Les facteurs externes doivent également être définis dans le cadre de la modélisation. Afin de pouvoir comparer les performances en vol et l'instrumentation, une norme atmosphérique devait être définie (Nelson, 1998). En 1952, l'Organisation Internationale de l'Aviation Civile (OACI) a adopté l'*International Standard Atmosphere* (ISA). Cette atmosphère normalisée se caractérise par des valeurs prédéfinies au niveau de la mer, accompagnées d'un profil de variations linéaires de température pour différentes tranches d'atmosphère (voir Tableau-A II-1). L'outil Aerospace Blockset™ est utilisé afin de générer les valeurs de température, de pression et de densité, en fonction de l'altitude.

La force gravitationnelle constitue un autre facteur externe à considérer. La loi universelle de la gravitation stipule que l'accélération gravitationnelle varie à l'inverse du carré de la distance de la source. Avec une augmentation de l'altitude, il y a une légère diminution de l'accélération gravitationnelle, une différence de $0,04 \text{ m/s}^2$ sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. La densité irrégulière de la planète génère également un champ gravitationnel qui n'est pas uniforme. Ces

effets de variation seront ignorés et une valeur normalisée de $9,81 \text{ m/s}^2$ est utilisée pour la modélisation.

Une dernière considération doit être discutée pour la simulation, soit le pas d'intégration. Sous Simulink®, il existe deux méthodes pour résoudre une intégration : un pas variable et un pas fixe. L'intégration à pas variable est inspirée par la méthode Runge-Kutta-Fehlberg. Elle utilise deux méthodes Runge-Kutta de différents ordres, pour le calcul de l'intégration et pour contrevérifier l'erreur de troncation (Atkinson, Han, & Stewart, 2009). L'estimation de l'erreur peut être diminuée pour la modélisation en variant le pas d'intégration et optimiser le temps pour compléter la simulation. Cette méthode sera utilisée pour la création de la modélisation et du design du contrôleur. Pour la validation finale de la performance de la loi de commande, une résolution à pas fixe sera utilisée, afin de voir si le contrôleur est sensible à une réduction de la précision des variables utilisées.

Ayant abordé les considérations générales de la modélisation, nous pouvons maintenant discuter des vecteurs de force et de moment qui vont permettre d'obtenir les valeurs d'accélération nécessaire à l'intégration, et ainsi animer à la simulation.

2.1.1 Forces et moments

Pour créer la modélisation, la somme des forces et des moments doit être calculée afin d'intégrer les accélérations des équations de la dynamique. Cette somme est le résultat des effets aérodynamiques agissant sur l'aéronef, la poussée et le champ gravitationnel. Comme mentionné au chapitre précédent, la collecte de données expérimentales et la présentation des fonctions aérodynamiques sont simplifiées dans le repère-stabilité (Hanke & Nordwall, 1970). Les composantes de la force et du moment sont préférablement exprimées dans le repère-avion, pour faciliter l'intégration. Une transformation de repère est alors nécessaire. Tout d'abord, nous devons calculer la résultante aérodynamique de l'aéronef dans le repère-stabilité.

Les forces et moments aérodynamiques sont toujours fonction des variables d'état. Il est possible d'établir des coefficients adimensionnels, nommés coefficients aérodynamiques, permettant d'exprimer la relation avec la pression dynamique et une constante reliée à la dimension de l'aéronef. Le Tableau 2.1 énumère le nom de chacune des variables. Nous pouvons exprimer les trois équations des composantes du vecteur force et du vecteur moment dans le repère-stabilité :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_D \\ F_Y \\ F_L \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{pmatrix} C_D \\ C_Y \\ C_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} L_S \\ M_S \\ N_S \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{pmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Tableau 2.1 Noms des variables de l'équation de la composante des forces et moments

Variable	Nom	Description
F_D, F_Y, F_L	Force de traînée, latérale et de portance	Force aérodynamique, positif dans la direction $-x_s, y_s$ et $-z_s$
L_S, M_S, N_S	Moment aérodynamique de roulis, tangage et lacet	Moments aérodynamiques
ρ	Densité de l'air	Mesurée en kg/m^3

V	Vitesse propre	Mesurée en m/s
S	Superficie de l'aile	Aire de la surface de référence
b	Envergure de l'aile	Mesurée en m
\bar{c}	Corde moyenne	Mesurée en m
C_L, C_D, C_Y	Coefficient de portance, traînée et de la force latérale	Coefficients adimensionnels
C_l, C_m, C_n	Coefficient du moment de roulis, tangage et lacet	Coefficients adimensionnels

Ces vecteurs sont exprimés dans le repère-stabilité. La matrice de l'équation (1.7) permet d'effectuer la transformation au repère-avion, en considérant que $\beta = 0$.

$$\mathbf{M}_{s \rightarrow b} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

En multipliant les vecteurs de l'équation (2.1) avec la matrice $\mathbf{M}_{s \rightarrow b}$, nous obtenons les forces et moments aérodynamiques dans le repère-avion. La poussée des réacteurs est également une force qui génère un moment et doit être modélisée.

Le Boeing 747 possède quatre réacteurs montés sur les ailes. Les réacteurs sont orientés avec un angle de 2,5 degrés vers le haut (ϵ_v) et de 2 degrés vers le centre de l'avion (ϵ_h) (Hanke & Nordwall, 1970). La symétrie des réacteurs annule la contribution à la force latérale. Ainsi, seule une légère réduction des composantes dans les deux axes x_b et z_b sera incluse dans le calcul. Dans le repère-avion, les vecteurs de force et de moment associés à la poussée des moteurs s'écrivent alors

$$\begin{vmatrix} X_{eng} \\ Y_{eng} \\ Z_{eng} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \epsilon_v \cos \epsilon_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \epsilon_v \cos \epsilon_h & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{vmatrix} L_{eng} \\ M_{eng} \\ N_{eng} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z_{e_o} + z_{e_i} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

où T est la poussée totale des quatre réacteurs, alors que z_{e_o} et z_{e_i} sont les bras de levier verticaux des réacteurs extérieurs et intérieurs, respectivement.

La dernière addition nécessaire pour finaliser la somme des vecteurs résultants est l'accélération gravitationnelle. Elle n'influence que le vecteur force et n'a aucun impact sur le moment. L'accélération gravitationnelle est parallèle et positive dans la direction de z_e . On peut utiliser la matrice $\mathbf{M}_{\phi\theta\psi}$ afin d'incorporer la gravité à la somme des forces dans le repère-avion :

$$\begin{vmatrix} X_{grav} \\ Y_{grav} \\ Z_{grav} \end{vmatrix} = \mathbf{M}_{\phi\theta\psi} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Nous pouvons maintenant écrire les six équations pour les forces et moments nets dans le repère-avion comme étant :

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -F_D \\ F_Y \\ -F_L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T \cos \epsilon_v \cos \epsilon_h \\ 0 \\ -T \sin \epsilon_v \cos \epsilon_h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_S \\ M_S \\ N_S \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ z_{e_o} + z_{e_i} \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} T$$

Ayant maintenant développé les équations des forces et moments, nous pouvons examiner de quelle façon la valeur des coefficients aérodynamiques est déterminée.

2.1.2 Coefficients aérodynamiques

Pour maintenir un vol rectiligne en palier, un avion doit générer une force opposant le champ gravitationnel de la Terre. Cette force est générée grâce à sa forme géométrique et l'angle formé avec le vent relatif. Dans le dernier sous-chapitre, nous avons introduit l'équation régissant ces forces aérodynamiques avec la multiplication de la pression dynamique, un paramètre se rapportant à la dimension de l'avion et le coefficient aérodynamique. Si nous diminuons la vitesse, le coefficient aérodynamique doit être augmenté pour contrer la gravité et maintenir le vol en palier. Le pilote cabre alors légèrement le nez de l'avion pour augmenter l'angle d'attaque des ailes pour générer une plus grande portance.

L'angle d'attaque n'est qu'un seul des états qui contribue au coefficient aérodynamique total. Ce coefficient est le résultat d'une somme de composantes représentant différentes contributions. Par exemple, pour le coefficient de portance, l'angle d'attaque, le taux de variation de l'angle de tangage, l'aéroélasticité, et les entrées des différentes surfaces de contrôle, pour n'en nommer que quelques-uns, apportent chacun une contribution à la somme. L'ensemble des contributions sera une fonction d'une ou plusieurs variables d'état, telles que la vitesse équivalente, le nombre de Mach, le centre de gravité, l'altitude, et bien d'autres. Chaque terme pour chaque coefficient est décrit dans l'Annexe I, portant sur un résumé des données utilisées du document de la NASA pour le développement de la modélisation. Ces relations seront calculées à partir d'une base de données qui a été assemblée avec le document publié par la NASA.

Le document de Hanke et Nordwall (1970) est une collection de toutes les données de modélisation mesurées par Boeing, et utilisées par la NASA pour le développement de leur modélisation du Boeing 747. Nous utiliserons ces données pour également développer notre modélisation. Elles sont toutes sous forme graphique et nécessiteront d'être converties sous forme numérique.

Chacun des graphiques a été manuellement retranscrit sous forme de tableau afin de créer la base de données. En moyenne, une quinzaine de points fut utilisée pour chaque courbe. La résolution entre les paires de données collectées était variable, en fonction de la forme de la courbe. Une densité de points moins élevée a été utilisée pour représenter les régimes plus linéaires, en comparaison avec ceux qui sont courbés, afin de préserver l'intégrité des données utilisées.

Avec la base de données recopiée, une interpolation des tableaux permet d'obtenir la valeur désirée. Par exemple, le coefficient de base de portance ($C_{L_{basic}}$) pour une configuration de volets autre que rentrée est une fonction de l'angle d'attaque. Si l'angle d'attaque se situe entre deux points de la base de données, il est nécessaire d'utiliser une technique pour estimer la valeur. La méthode que nous utiliserons sera la méthode des splines cubiques. Un polynôme cubique est calculé pour chaque intervalle et la continuité des deux premières dérivées est assurée, et également utilisée pour calculer les coefficients pour chacun des polynômes (Yang, Cao, Chung, & Morris, 2005). Certaines interpolations entraînaient des problèmes avec cette technique. Une méthode linéaire à deux dimensions est alors utilisée pour exécuter le calcul. Avec tous les termes formant les équations de force et de moment, la simulation peut maintenant être lancée afin d'étudier, premièrement, le comportement en régime permanent.

2.1.3 État à l'équilibre

Pour obtenir la somme nette des forces et moments, il est nécessaire d'utiliser les variables du vecteur d'état et de contrôle pour calculer les coefficients aérodynamiques. Les accélérations sont connues dès l'initialisation, en opposition aux vitesses et positions qui sont le résultat d'une intégration. Les conditions initiales servent donc à établir ce point de départ pour l'intégration. La détermination de ce point est essentielle pour que la simulation commence dans une configuration de vol qui pourra être stabilisée.

L'état idéal pour initialiser la simulation est l'état d'équilibre pour la condition de vol que nous étudions. Dans l'étude de la dynamique d'un avion ou de la performance d'un contrôleur, l'introduction de nouvelles commandes ou de perturbations nous permet d'observer la réaction

d'un système en régime permanent. En démarrant dans cette condition, on s'assure d'être dans un régime de vol valide pour la modélisation. De plus, l'avion ne nécessite pas d'être stabilisé avant d'introduire des commandes pour les essais. Il est donc préférable d'initialiser le vecteur d'état et de contrôle pour démarrer à l'équilibre.

Afin de simplifier la détermination de la configuration à l'équilibre, seule une technique pour initialiser la simulation en vol rectiligne en palier a été développée. La vitesse, l'altitude, la masse, le centrage, la position des volets et du train d'atterrissage sont tous déterminés par l'utilisateur. Les surfaces de contrôle sont placées à leur position neutre, à l'exception du stabilisateur horizontal. Calculer cette position d'équilibre équivaut à annuler la somme nette des trois équations de la dynamique longitudinale (X, Z, M) et poser une vitesse angulaire de zéro ($q = 0$). Nous pouvons déduire que nous avons besoin de trois variables pour stabiliser l'aéronef à l'équilibre. Ces trois valeurs seront l'angle de déflexion du stabilisateur horizontal, la poussée des réacteurs et l'angle d'attaque. En initialisant une simulation en proximité du point d'équilibre, des contrôleurs simplifiés vont stabiliser l'avion à l'altitude et la vitesse demandée.

Afin d'obtenir cet équilibre, deux contrôleurs Proportionnel-Intégral-Dérivée (PID) ont été implémentés afin de stabiliser l'altitude et la vitesse, sans égard à leur régime transitoire. La simulation est lancée et après l'atteinte du régime permanent, l'angle de déflexion du stabilisateur horizontal, la poussée des réacteurs et l'angle d'attaque sont mesurés. Les valeurs des variables d'état et de contrôle caractérisant cette position d'équilibre sont alors transférées dans une base de données, représentant l'état d'équilibre pour cette configuration. Cette base de données peut être alors utilisée pour un accès rapide lors d'un repositionnement. Ayant maintenant le moyen d'obtenir le vecteur d'état complet à l'équilibre pour une configuration, l'introduction de perturbations autour d'un point d'équilibre nous permettra d'étudier la dynamique de l'avion et permettra une comparaison entre la modélisation et le Boeing 747.

2.1.4 Linéarisation

La dynamique d'un avion peut être quantifiée à l'aide des racines provenant des équations décrivant le mouvement. Les racines correspondent à des modes de la dynamique et aident à qualifier sa stabilité. Ces deux modes sont la phugoïde et le mode courte période. Vepa (2015) définit le mode phugoïde comme étant une conservation d'énergie, pour lequel la somme de l'énergie de translation, de rotation, et potentielle est une valeur constante. En d'autres mots, le changement de vitesse se transforme en changement d'altitude autour des deux valeurs d'équilibre. Il définit également le mode courte période¹ comme étant généralement une oscillation haute fréquence de la perturbation de la vitesse dans l'axe z_b et le taux de variation de tangage. Pour une modélisation, ces deux caractéristiques sont d'une grande utilité pour comparer le modèle avec les mesures réelles ou avec un autre modèle. Également, en ayant la représentation matricielle de la dynamique, des techniques classiques d'asservissement peuvent aider au design préliminaire du contrôleur. La linéarisation permet une description mathématique de ces modes.

Deux méthodes de linéarisation seront développées afin de pouvoir comparer les modes avec la réponse temporelle de la modélisation non-linéaire. La première technique repose sur une dérivation formelle des dérivées aérodynamiques de stabilité, et la deuxième adopte une approche expérimentale en modifiant légèrement les variables des vecteurs d'état et de contrôle autour du point d'équilibre pour calculer ces dérivées.

2.1.4.1 Dérivation formelle des dérivées aérodynamiques de stabilité

Les dérivées aérodynamiques de stabilité représentent la tangente de la variation de force ou de moment, au point d'équilibre, avec la perturbation d'une seule variable à la fois. En d'autres termes, comme définies au chapitre 1, elles sont des dérivées partielles. Trois des équations de la représentation d'état représentent la dynamique longitudinale de l'avion au travers de deux

¹ Traduit du terme anglais *short period*

accélérations linéaires et une accélération angulaire. Il est possible de trouver formellement la dérivée partielle d'une accélération en fonction de la variable désirée. La technique suivante, développée dans le repère-avion, est inspirée d'une démarche dans le repère-stabilité du livre de Stevens et al. (2015).

Nous pouvons isoler l'accélération linéaire dans l'axe x_b en combinant les équations (1.20) et (2.5) pour obtenir :

$$\dot{u} = \frac{1}{m} (-F_D \cos \alpha + F_L \sin \alpha + T \cos \epsilon_v \cos \epsilon_h - g \sin \theta) - qw + rv \quad (2.6)$$

Nous pouvons calculer la dérivée de stabilité de la force aérodynamique en fonction de la variable w . Il est à noter que le terme qw est ignoré lors de cette étape car nous cherchons l'influence d'une variation de w lorsque toutes les autres variables d'état sont maintenues à zéro ($q = 0$). Cette équation est alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} (\dot{u}) &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial w} \\ &= \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial F_D}{\partial w} \cos \alpha + F_D \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} + \frac{\partial F_L}{\partial w} \sin \alpha + F_L \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le développement des dérivées partielles des forces aérodynamiques peut être écrit avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_L}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{2} \rho (\sqrt{u^2 + v^2 + w^2})^2 S C_L \right) \\ &= \rho w S C_L + \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial w} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme expliqué précédemment, les coefficients aérodynamiques peuvent être décomposés en plusieurs termes contribuant à la somme de ce coefficient. Dans les graphiques fournis par Hanke et Nordwall (1970), la variable indépendante en abscisse est représentée avec l'angle

d'attaque du plan des ailes, du nombre de Mach ou de la vitesse équivalente. Quelques graphiques possèdent une autre dimension avec l'altitude, ou un angle de déflexion des commandes. Pour évaluer la dérivée partielle, la règle de dérivation en chaîne permet d'obtenir un terme qui se rapporte à la pente mesurée sur les graphiques et une opération à partir des variables d'état. Une dérivée partielle de l'angle d'attaque correspondra alors à :

$$\frac{\partial C_L}{\partial w} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial w} \left(\tan^{-1} \frac{w}{u} \right) = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{u}{u^2 + w^2} \quad (2.9)$$

La dérivée partielle $\frac{\partial \alpha}{\partial w}$ est calculée à partir de la relation entre l'angle d'attaque et la vitesse w .

La dérivée $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ est la pente mesurée à partir des courbes présentées par Hanke et Nordwall (1970). Pour une relation entre le coefficient de portance en fonction du nombre de Mach (M), la dérivée partielle est alors écrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_L}{\partial w} &= \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial w} = \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{a} \right) \\ &= \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{w}{a \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{w}{a V} \end{aligned} \quad (2.10)$$

La variable a représente la vitesse du son pour les conditions atmosphériques locales de l'aéronef. La vitesse équivalente (V_e) peut également être la variable en abscisse. Nous pouvons réécrire l'équation-A (II-12) sous la forme :

$$V_e = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \quad (2.11)$$

La dérivée partielle en fonction de la vitesse équivalente peut alors être écrite avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_L}{\partial w} &= \frac{\partial C_L}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial w} = \frac{\partial C_L}{\partial V_e} \frac{\partial}{\partial w} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \\
&= \frac{\partial C_L}{\partial V_e} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Le développement a été fait pour un seul coefficient aérodynamique afin de donner une idée de la démarche générale utilisée. L'Annexe III contient l'ensemble des résultats obtenus des dérivées partielles qui ont été utilisées pour le calcul de la matrice d'état. Avec la description de cette méthode complétée, le développement de l'approche expérimentale va permettre la comparaison des deux techniques pour déterminer la pertinence de chacune.

2.1.4.2 Déviation autour d'un point d'équilibre

La dérivation formelle que nous avons développée utilise une approche théorique pour linéariser. La deuxième méthode que nous allons aborder repose sur une démarche expérimentale afin de répondre aux mêmes besoins. Il sera alors possible de comparer les deux techniques avec les données d'une modélisation non-linéaire.

La linéarisation permet de caractériser la dynamique autour d'un point d'équilibre. Cette caractérisation se manifeste au travers d'un changement de la force ou d'un moment avec une légère perturbation ou entrée au système. Dans un contexte de simulation, il est possible de repositionner en modifiant légèrement les conditions initiales et de mesurer la force ou le moment. Nous pouvons comparer ce changement avec la valeur à l'équilibre pour calculer le quotient de l'accélération générée et l'écart de la variable d'état. Rappelons qu'au chapitre 1, il avait été démontré qu'une dérivée de stabilité peut être écrite avec :

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) correspond à la dérivée de l'accélération longitudinale pour une variation de la vitesse longitudinale dans le repère-avion. En considérant que la force varie linéairement autour du point d'équilibre, il est possible de réécrire les dérivées partielles comme étant une variation finie :

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{\Delta X}{\Delta u} \quad (2.14)$$

En réajustant légèrement la vitesse u , la force nette longitudinale (X) exercée sur l'avion peut être récupérée dès l'initialisation de la simulation, avant que tous les autres facteurs n'influencent sa valeur. En prenant une mesure de la force ou du moment légèrement au-dessus et au-dessous de la valeur d'équilibre, la différence de ces deux mesures est ensuite divisée par le double de la déviation pour obtenir la dérivée partielle. En ajoutant la division par la masse, nous calculons alors la dérivée aérodynamique de stabilité recherchée.

En référence aux dérivées de la matrice d'état de l'équation (1.32), le repère-avion sera utilisé pour exprimer les variables. Pour la matrice de contrôle, la déviation de l'angle de déflexion est utilisée pour la gouverne de profondeur, et la déviation de la force de poussée à l'équilibre pour l'entrée des réacteurs. L'écart utilisé pour chaque variable dans le calcul est présenté au Tableau 2.2.

Tableau 2.2 Écart de variable d'état pour calculer la différence dans l'accélération

Variable	Déviation
u	5 m/s
w	1 m/s
\dot{w}	1 m/s ²
q	1°s ⁻¹
δ_e	1°

2.1.4.3 Comparaison des méthodes

En utilisant une des deux méthodes définies, chacune des représentations linéaires peut être comparée à la modélisation non-linéaire pour déterminer laquelle donne de meilleurs résultats. Les valeurs propres de la matrice d'état correspondent aux pôles du système que nous allons utiliser pour l'évaluation. La variable de sortie montrant les caractéristiques de ces modes est l'angle de tangage. En générant une perturbation à l'aide de la gouverne de profondeur avec la modélisation non-linéaire, la réponse temporelle de l'angle de tangage permettra de calculer les propriétés des deux modes d'oscillation, nécessaire à la comparaison.

En affirmant que la réponse prendra la forme de deux modes distincts avec des racines complexes, le signal de l'angle de tangage suivant une perturbation aura deux oscillations avec deux fréquences distinctes et s'amortissant à un taux qui leur est propre. Il est donc possible d'écrire une approximation de l'équation décrivant ce mouvement en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \theta(t) = & A_{cp} \cos(\omega_{d_{cp}} t + \phi_{cp}) \exp(-\sigma_{cp} t) \\ & + A_{ph} \cos(\omega_{d_{ph}} t + \phi_{ph}) \exp(-\sigma_{ph} t) + C \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dans l'équation précédente, la constante C représente l'angle de tangage à l'équilibre. Les constantes avec l'indice cp se rapportent au mode courte période, et ceux avec l'indice ph , au mode phugoïde. La lettre A décrit l'amplitude du mode, ω_d la fréquence amortie et σ l'amortissement du système. L'outil Curve Fitting Toolbox™ de l'application MATLAB® permet de déterminer la valeur des paramètres de cette équation à l'aide de la réponse temporelle de la modélisation non-linéaire. La valeur des paramètres est ajustée pour minimiser la différence entre le résultat donné par l'équation et les données expérimentales. Avec les paramètres calculés par la linéarisation et la modélisation non-linéaire, les termes qui formeront la base de l'évaluation doivent être introduits.

Afin de faire une comparaison, les paramètres peuvent être transformés en deux quantités communément utilisées dans le domaine de l'asservissement, la fréquence propre (ω_n) et le

taux d'amortissement (ζ). Ces deux variables sont définies par Nise (2011) avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\omega_d^2 + \zeta^2} \\ \zeta &= \frac{\sigma}{\omega_n}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Un outil statistique est maintenant nécessaire pour comparer la différence entre ces paramètres et tirer des conclusions. Il est possible d'effectuer un test d'hypothèse avec deux séries de résultats pour lesquelles chaque paire de données est reliée entre elles. La méthode de comparaison appropriée est le test T (Wackerly, Mendenhall, & Scheaffer, 2008). La différence entre chaque paire de résultats correspondant à une situation de vol est calculée. En effectuant cette différence entre les résultats venant de la modélisation et des techniques développés, il est possible de poser l'hypothèse nulle suivante :

$$\mu_D = 0\tag{2.17}$$

Où μ_D représente la moyenne de l'écart entre chaque paire de données, calculée pour la fréquence propre et le taux d'amortissement. Le test va nous permettre de rejeter l'hypothèse nulle en affirmant que les deux échantillons ont une différence non nulle qui existe, ou d'ouvrir la porte à la possibilité que la paire de résultats soit équivalente. En comparant la méthode expérimentale avec la modélisation non-linéaire, nous obtenons les résultats présentés au Tableau 2.3.

Tableau 2.3 Analyse statistique pour la comparaison entre la déviation autour d'un point d'équilibre et la simulation non-linéaire

Mode	Courte période		Phugoïde	
	ω_{ncp}	ζ_{cp}	ω_{nph}	ζ_{ph}
Moyenne de l'écart	$-0,239 s^{-1}$	0,161	$-0,0039 s^{-1}$	$-0,014$
Écart-type	$0,245 s^{-1}$	0,145	$0,0069 s^{-1}$	0,031

Intervalle de confiance	$[-0,443;$ $-0,034]$	$[0,040;$ $0,282]$	$[-0,0097;$ $0,0018]$	$[-0,0394;$ $0,0117]$
-------------------------	-------------------------	-----------------------	--------------------------	--------------------------

Nous pouvons observer que pour le mode phugoïde, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée. On peut avancer la possibilité que les deux échantillons soient équivalents. En revanche, pour le mode courte période, l'hypothèse nulle est rejetée pour les deux paramètres. Nous devons conclure que nous avons un biais dans les paramètres du mode courte période. La fréquence d'oscillation déterminée par cette technique serait légèrement plus élevée que la modélisation non-linéaire, et le système serait légèrement moins amorti. L'intervalle de confiance se trouve juste à l'extérieur de la valeur recherchée. Une hypothèse quant à la cause de cette déviation est que certains effets non-linéaires influencent ces deux paramètres dans la modélisation. Avec une observation plus pointue des résultats (Tableaux-A IV-4 et IV-5), nous pouvons constater dans les essais 5 à 8, que cette déviation est plus marquée. Ces essais étaient effectués dans un régime où la compressibilité et l'aéroélasticité doivent être considérées, diminuant la validité de l'approximation linéaire. Ces deux effets combinés peuvent expliquer l'influence sur le résultat. Malgré cette légère déviation, il est raisonnable d'affirmer que cette technique peut être utilisée pour déterminer la matrice d'état pour une modélisation si la commande développée est contrevalidée avec le modèle non-linéaire.

La deuxième méthode qui a été mise à l'essai ne donne pas des résultats aussi prometteurs. Afin d'utiliser le test T précédemment utilisé, il doit être raisonnable de croire que les résultats sont distribués suivant la loi normale. Une observation des différences des paramètres (Tableaux-A IV-6 et IV-7) démontre qu'il y a un mélange de résultats qui peuvent être représentatifs et des données éloignées. Il semble avoir une certaine logique pour les situations de vol 1 à 4, les essais n'étant pas dans un domaine où la compressibilité de l'air a de l'importance. Compte tenu de l'échantillon limité disponible pour l'analyse, on ne peut pas conclure qu'il y a une familiarité entre la technique de dérivation formelle et la modélisation non-linéaire. Une explication possible est que dans la démarche de Stevens et al. (2015), certains paramètres qui n'étaient pas disponibles pour la version modélisée du Boeing 747 ont été utilisés. Pour cette raison, une méthode alternative pour calculer ces dérivées de stabilité a

dû être développée. Il est possible que cette technique ne donne pas les résultats escomptés et ne représente pas bien les dérivées aérodynamiques de stabilité.

En résumé, une des méthodes développées, la dérivation formelle, nécessite d'être retravaillée avant d'être opérationnelle. Il serait prudent d'initialement travailler dans un régime subsonique pour limiter les non-linéarités qui peuvent influencer le résultat. D'un autre côté, la technique utilisant la déviation autour d'un point d'équilibre a permis de trouver des résultats satisfaisants. Les données semblent avoir un léger biais dans le mode courte période, un point qui doit être gardé en tête si nous utilisons cette linéarisation pour la conception d'un contrôleur. Cependant, une modélisation à partir d'une représentation d'état avec la valeur de ces paramètres donnerait des résultats qui se rapprocheraient d'une simulation avec le modèle non-linéaire. Nous pouvons donc affirmer que nous avons une méthode nous permettant de linéariser la dynamique de l'avion. Avec cette comparaison satisfaisante, une évaluation des données recensées avec des essais en vol de Boeing continuera à bâtir la confiance que nous acquérons quant à la fidélité du modèle.

2.2 Validation de la modélisation

Un des éléments donnant forme à la modélisation est la base de données décrivant l'aéronef. Ces données ont été manuellement extraites des graphiques du document de la NASA (Hanke & Nordwall, 1970), une méthode qui ouvre la porte à des erreurs de transcription. Au cours d'une simulation, tous les termes sont calculés à l'aide d'une interpolation, linéaire ou en utilisant la méthode des splines cubiques. Les courbes des graphiques et les valeurs générées à partir de la base de données doivent faire l'objet d'une validation pour s'assurer de leur fidélité.

Une des techniques utilisées pour la validation est une comparaison visuelle des courbes. Cette méthode est qualitative et ne permet pas de contrevérifier mathématiquement les données. Un graphique a été généré pour chacune des courbes retranscrites. Leurs formes ont été comparées visuellement et des ajustements qui étaient observables et requis ont été apportés. Avec la qualité des données du document de référence, cette technique était une des seules solutions

viables pour assurer une conformité avec la base de données. Chacun des graphiques a été comparé et ajusté avec satisfaction, et le plus haut degré de précision possible avec cette méthode a été atteint. Étant donnée la limite de cette technique, une prochaine étape de validation permet d'introduire une certaine quantification pour essayer de solidifier cette démarche.

Avec les possibilités d'extraction des données limitées par le format de celles-ci, la seule comparaison numérique pouvant être faite est limitée à des cas spécifiques. En prenant un moment précis au milieu d'une manœuvre, la contribution de chaque terme est calculée par la modélisation et notée. Cette contribution est alors comparée numériquement à la valeur calculée manuellement à partir des graphiques du document de référence et des variables mesurées à ce moment. Cette technique a permis de vérifier que les valeurs transcrites dans la base de données ont été initialement bien transposées, et que l'interpolation est également valide pour les points étudiés. Maintenant qu'une vérification individuelle de toutes les composantes de la modélisation avec des cas spécifiques a été complétée, une validation de l'interaction de ces composantes permettra de rehausser le niveau de confiance que nous avons envers la modélisation et des essais effectués pour la synthèse du contrôleur.

2.3 Écarts entre la modélisation et le Boeing 747

Les deux techniques précédemment utilisées pour valider la base de données de la modélisation ont été limitées à une comparaison qualitative et une comparaison numérique limitée pour quelques études de cas spécifiques. Afin d'augmenter le niveau de confiance de la modélisation, nous pouvons utiliser des résultats évaluant la modélisation dans son entier. Par exemple, il est possible de comparer des variables caractérisant un point d'équilibre. Également, des essais dynamiques permettent d'évaluer les modes mesurés et les comparer au document de référence.

2.3.1 Essais en régime permanent

La dynamique longitudinale d'un avion peut être décrite avec trois équations différentielles : deux composantes du vecteur force et une composante de vecteur moment. À l'équilibre, ces trois équations doivent donner un résultat qui est égal à zéro. Trois variables doivent alors être calculées afin de résoudre ce système d'équations. Le document de référence pour la modélisation fournit les résultats en régime permanent pour l'angle d'attaque, l'angle de déflexion du stabilisateur horizontal et la force de poussée. La valeur de ces variables en régime permanent donnera une base de comparaison entre la modélisation et les données d'essais en vol de Boeing.

Afin d'obtenir ces résultats pour la modélisation créée, le document de Hanke et Nordwall (1970) présente un total de 40 différents points de vol à l'équilibre sur l'ensemble de l'enveloppe de vol (Tableau-A IV-1). Les trois variables d'intérêt seront notées après la stabilisation en régime permanent. La différence entre la modélisation et les données de Boeing est alors calculée pour chaque situation (Tableau-A IV-2). Comme précédemment utilisé, le test T donnera un outil de comparaison. Le Tableau 2.4 montre la moyenne de l'écart, l'écart-type et l'intervalle pour un niveau de confiance de 95%, calculés pour les trois variables. Il est nécessaire de noter que la force de poussée à l'équilibre n'est donnée que pour 21 points de vol, et non l'échantillon complet.

Tableau 2.4 Écarts entre les variables à l'équilibre de la modélisation et des mesures expérimentales du Boeing 747

Paramètre	Angle d'attaque (°)	Déflexion du stabilisateur (°)	Force de poussée (N)
Moyenne de l'écart	-0.008	-0.061	911
Écart-type	0,129	0,103	3062
Intervalle de confiance	[-0,050; 0,034]	[-0,094; -0,029]	[-470; 2380]

L'hypothèse nulle n'est pas rejetée pour l'angle d'attaque et la force de poussée. Pour l'angle de déflexion du stabilisateur horizontal, l'hypothèse nulle est rejetée selon le test. Cependant, la différence entre la modélisation et les données de Boeing est minime. De plus, Hanke et Nordwall (1970) notent qu'il y a une incertitude expérimentale correspondant aux valeurs transcrites dans le Tableau 2.5 pour les variables respectives.

Tableau 2.5 Incertitude des données expérimentales du Boeing 747

Variable	Incertitude expérimentale
Angle d'attaque	$\pm 0,5^\circ$
Déflexion du stabilisateur horizontale	$\pm 0,5^\circ$
Force de poussée	$\pm 3\%$

Avec l'aide de ces données sur les mesures, nous pouvons constater que tous les écarts à la moyenne sont inférieurs à l'incertitude des données recueillies lors d'essais en vol. De plus, une analyse plus approfondie des résultats montre qu'il n'y a aucun écart qui est plus grand que cette incertitude pour l'angle d'attaque et la déflexion du stabilisateur horizontale, et uniquement deux points de vol pour la force de poussée.

À l'aide du test statistique effectué précédemment et l'incertitude de mesure de Boeing, nous pouvons conclure que les données en régime permanent de la modélisation représentent adéquatement un Boeing 747.

2.3.2 Essais dynamiques

Avec le résultat obtenu des essais en régime permanent, il est raisonnable d'affirmer que les coefficients aérodynamiques de la modélisation représentent adéquatement un Boeing 747 en régime permanent. En introduisant des vitesses angulaires non nulles, la dynamique créée par la variation des coefficients autour d'un point d'équilibre pourra être étudiée. De plus, les termes contribuant aux coefficients aérodynamiques qui dépendent des vecteurs de vitesse et d'accélération se joindront à l'ensemble de la modélisation. Une comparaison des modes

phugoïde, courte période et de roulis hollandais aidera à tirer des conclusions sur la fidélité de la modélisation.

2.3.2.1 Dynamique longitudinale

Le document de Hanke et Nordwall (1970) présente huit essais en vol pour la dynamique longitudinale de l'avion (Tableau-A IV-3). Avec une initialisation à partir d'un vol rectiligne en palier, une entrée échelon est commandée avec la gouverne de profondeur pour un bref moment, suivie d'un retour au neutre de la commande. La réponse temporelle de l'angle de tangage représente bien les deux modes principaux de la dynamique longitudinale. Dans le document de référence, les résultats sont exclusivement présentés sous forme graphique. Une comparaison quantitative présente des difficultés dues à la mauvaise qualité des graphiques et l'absence de données numériques. Les deux seules quantités pouvant être extraites avec une incertitude raisonnable sont la période du mode phugoïde et son amortissement. Uniquement une analyse qualitative du comportement général de la modélisation peut être accomplie pour comparer les résultats.

Pour calculer les modes longitudinaux des données provenant de la modélisation, la technique utilisant l'outil Curve Fitting Toolbox™ de MATLAB® est utilisée à nouveau. L'équation (2.15) contient un nombre trop élevé de paramètres à estimer pour la quantité de points qui peut être extrait des graphiques du document de référence. En prenant les maximas et minimas du mode phugoïde de leur essai en vol, la fréquence et l'amortissement de ce mode peuvent être estimés. La version simplifiée de l'équation ci-dessous pour l'estimation des paramètres prendra la forme d'une oscillation s'amortissant sans décalage de phase. Pour un résultat optimal, une estimation manuelle de la fréquence a dû être intégrée avec certaines situations afin d'augmenter la précision de l'estimation.

$$\theta(t) = A_{ph} \cos(\omega_{d_{ph}} t) \exp(-\sigma_{ph} t) + C \quad (2.18)$$

Comme décrit précédemment, nous pouvons transformer ces paramètres pour obtenir la fréquence propre et le taux d'amortissement (Tableau-A IV-8). À l'aide d'un test T, avec un

niveau de confiance à 95%, la conclusion est que nous ne pouvons pas réfuter l'hypothèse nulle. Il n'est pas possible d'affirmer que les moyennes des différences calculées ne sont pas égales à zéro, augmentant la confiance quant à la représentation de la modélisation. Le Tableau 2.6 présente la moyenne, l'écart-type et l'intervalle de confiance de la moyenne avec un niveau à 95%.

Tableau 2.6 Analyse statistique du mode phugoïde

Paramètre	Fréquence propre	Taux d'amortissement
Moyenne de l'écart	0,00274 s ⁻¹	0,00130s ⁻¹
Écart-type	0,00605s ⁻¹	0,0207s ⁻¹
Intervalle de confiance	[-0,0023 ; 0,0078]	[-0,0160; 0,0186]

Pour l'analyse qualitative des graphiques des essais, les différences observées seront discutées plus en profondeur que les similitudes. Les huit résultats de la modélisation sont présentés dans l'Annexe IV, avec les Figures-A IV-1 à IV-8. La différence marquante pour toutes les situations est la valeur du facteur de charge (n_z), qui est le ratio entre la portance et le poids de l'avion (Hurt, 1965, p. 37). La valeur au début de la manœuvre est erronée. Lors des oscillations du mode phugoïde, le maxima et le minima diffèrent également. Il semblerait que le facteur de charge est calculé autrement. Les données provenant de Boeing ont été probablement mesurées à partir de capteurs qui n'étaient pas au centre de gravité. Il est nécessaire d'avancer que l'équation du facteur de charge de la modélisation ne représente pas bien cette valeur. Compte tenu de l'effet limité du facteur de charge sur les coefficients aérodynamiques, cette erreur ne semble pas affecter la dynamique. Une autre différence qui a été observée est la réponse suivant la perturbation pour la situation 8. Dans la modélisation, l'amplitude du mode phugoïde est différente de celle des données de Boeing. Le signal temporel de l'angle de tangage est assez particulier. La perturbation engendre un premier maxima pour le mode courte période qui est comparable à l'essai en vol, mais elle ne génère pas un angle de tangage aussi grand pour le deuxième maxima. Aucune raison ne paraît évidente pour expliquer ce phénomène. Cependant, la fréquence propre et le taux d'amortissement sont comparables aux résultats de Boeing. À priori, cette différence

n'engendre pas de déviation sur les modes longitudinaux de cette situation. Dans l'ensemble de cette comparaison qualitative, une attention particulière était donnée à la réponse temporelle de l'angle de tangage. L'amplitude, la fréquence et l'amortissement étaient comparés. La forme générale de la courbe, spécialement suivant la perturbation, devait être comparable aux essais de Boeing. L'absence de données numériques limite la force de la comparaison. Des similitudes entre les essais en vol et simulés ont pu être observées.

La méthode quantitative, initialement utilisée, augmente la confiance que nous bâtissons pour la fidélité de la modélisation de la dynamique longitudinale. La méthode qualitative a permis de comparer le comportement général de la modélisation avec le Boeing 747. La confiance bâtie pour la dynamique longitudinale permet maintenant d'introduire la dynamique latérale, transformant un système de trois à six degrés de liberté.

2.3.2.2 Dynamique latérale

Dans la dynamique latérale, un des modes dominants est le roulis hollandais. Il se caractérise par une oscillation dont la période est de l'ordre de quelques secondes en s'amortissant, parfois faiblement, après un certain temps. L'amortisseur de lacet est conçu pour contrer le faible amortissement de ce mode. Il est possible de garder ce système hors fonction et d'effectuer des essais en vol pour voir les caractéristiques de la réponse temporelle. Hanke et Nordwall (1970) présentent neuf essais en vol distincts démontrant ce mode (Tableau-A IV-9). Au début de l'essai, l'avion est en palier avec un angle de roulis nul, et un angle de dérapage de quatre ou cinq degrés, variant selon la situation. La procédure utilisée pour exécuter ce test n'est pas décrite dans l'ouvrage de référence, mais il est raisonnable de croire que l'avion fut d'abord compensé en vol rectiligne en palier. Par la suite, les entrées aux commandes de vol sont actionnées par le pilote pour atteindre l'assiette désirée. Finalement, toutes les commandes sont relâchées par le pilote, retournant au neutre, et la réponse temporelle de l'aéronef est enregistrée pour l'angle de dérapage et l'angle de roulis. Avec notre modélisation, nous pouvons recréer cette situation en initialisant directement l'assiette de vol en dérapage pour

analyser la réponse. La variable d'intérêt pour étudier cette dynamique est l'angle de dérapage (β).

Pour comparer numériquement la dynamique latérale, les paramètres du mode roulis hollandais peuvent être calculés en utilisant la réponse temporelle de l'angle de dérapage. Comparable à la procédure utilisée en dynamique longitudinale, nous pouvons poser une équation et utiliser l'outil Curve Fitting Toolbox™ de MATLAB ® pour déduire ces paramètres, pour la modélisation et pour les graphiques tirés de Hanke et Nordwall (1970). Dans le cas présent, l'équation ci-dessous ne prendra en compte qu'une seule paire de racines complexes et une relation linéaire du premier ordre pour tenir compte de la légère déviation de l'angle de roulis due à l'initiation du mode spirale. Il est nécessaire de noter qu'uniquement des écarts inférieurs à cinq degrés pour ce dernier ont été observés lors des essais, ouvrant la possibilité d'utiliser une relation linéaire au lieu d'exponentielle pour tenir compte de cet effet.

$$\beta(t) = A_{rh} \cos(\omega_{d_{rh}} t + \phi_{rh}) \exp(-\sigma_{rh} t) + Bt + C \quad (2.19)$$

En comparaison avec les essais longitudinaux, une plus grande précision a pu être atteinte dans l'extraction des données de l'ouvrage de référence, compte tenu de la plus grande fréquence, un amortissement modéré de ce mode, ainsi qu'une meilleure résolution des graphiques. Comme effectué précédemment pour la dynamique longitudinale, nous devons convertir les paramètres pour obtenir la fréquence propre et le taux d'amortissement (Tableau-A IV-10). La différence entre les résultats de la modélisation et de l'avion peut alors être calculée. Finalement, la même analyse statistique est accomplie et présentée dans le Tableau 2.7.

Tableau 2.7 Analyse statistique du mode roulis hollandais

Paramètre	Fréquence propre	Taux d'amortissement
-----------	------------------	----------------------

Moyenne de l'écart	$0,317 s^{-1}$	0,0851
Écart-type	$0,0773 s^{-1}$	0,0261
Intervalle de confiance	[0,258 ; 0,377]	[0,065 ; 0,105]

L'élément marquant de cette analyse est que l'hypothèse nulle est rejetée dans les deux cas et que nous devons affirmer qu'il y a un écart dans les paramètres du mode roulis hollandais de la modélisation et des données provenant des essais en vol de Boeing. La fréquence d'oscillation est plus élevée pour la modélisation, et la dynamique est amortie un peu plus rapidement.

Dans le processus de validation de la modélisation, il n'a pas été possible de trouver la source de cette différence et de rectifier la situation. La contrevérification de chacune des contributions des coefficients, quoique limitée à des cas spécifiques, n'a pas révélé d'anomalies dans les calculs. Le document de Hanke et Nordwall (1970) fournit les équations de la dynamique utilisées par la NASA lors de la création de leur modélisation, en opposition aux outils du Aerospace Blockset™, utilisés dans le présent travail. Bien qu'étant une méthode différente de calcul, il est peu probable que cette raison soit la cause de l'écart. Il faut alors affirmer que la cause est inconnue pour le moment. En gardant en perspective que le but est la synthèse d'un contrôleur, des essais sur un autre simulateur de vol seront également effectués. Si jamais une différence notable est observée dans l'asservissement du mode roulis hollandais lors de la transition entre la modélisation créée et le logiciel FlightSIM de Presagis™, un ajustement sera alors probablement nécessaire dans les paramètres de la commande utilisée.

Avec une modélisation d'un Boeing 747 qui montre généralement des caractéristiques semblables aux résultats d'essais en vol, nous pouvons maintenant porter notre attention sur le cœur de ce projet de recherche, la synthèse de la loi de commande avec l'inversion dynamique.

CHAPITRE 3

INVERSION DYNAMIQUE

La technique d'asservissement préconisée dans ce projet de recherche, l'inversion dynamique, a été étudiée abondamment depuis une quarante d'années, initialement avec la linéarisation du retour d'état. La théorie développée au cours de plusieurs années de recherche nous permet de développer des lois de commande qui découplent certaines variables de sortie par rapport à certaines entrées, ou de transformer un système non-linéaire en système linéaire équivalent (Dang Vu, 1997, p. 102). Dans le cadre de ce projet, nous désirons explorer une nouvelle façon d'aborder la synthèse de ce type de contrôleur, dans le but ultime d'épargner sur le temps consacré pour la conception, en utilisant une description du modèle de l'avion qui est assez limitée.

Dans ce chapitre, nous aborderons d'abord les raisons pour utiliser une méthode d'asservissement non-linéaire. Puis, nous introduirons la théorie de l'inversion dynamique, avec les outils nécessaires pour son étude. Finalement, nous développerons mathématiquement les équations qui composeront notre loi de commande.

3.1 Asservissement non-linéaire

Avec une approche plus classique, un contrôleur conçu à partir d'un asservissement linéaire est généralement limité dans sa plage d'utilisation et dans sa performance. Si les variables d'état s'écartent trop de la condition d'équilibre, le modèle linéarisé qui a été utilisé pour le design du contrôleur dévie de façon significative du système non-linéaire et une instabilité pourrait se développer.

Dans le but d'optimiser la performance de la commande pour notre système, nous commencerons par élaborer les raisons pour lesquelles une technique non-linéaire d'asservissement peut être avantageuse. Une introduction sur les généralités de la marche à suivre sur les objectifs d'asservissement et les méthodes d'analyse de la réponse nous permettra

d'aborder des sujets qui seront utilisés dans la synthèse de notre contrôleur d'inversion dynamique.

3.1.1 Techniques d'asservissement non-linéaires

L'asservissement linéaire permet de contrôler un système dynamique, pourvu que le comportement de ce système soit linéaire autour du point d'équilibre. Dans le cas d'un avion de ligne, l'enveloppe opérationnelle varie d'un régime subsonique à transsonique. À basse vitesse, la relation dominante entre les coefficients aérodynamiques et l'angle d'attaque peut être estimée comme étant linéaire. Avec une augmentation de la vitesse, les effets d'aéroélasticité commencent à avoir une influence, et génèrent une différence dans les dérivées aérodynamiques qui sont différentes à basse vitesse. En haute altitude, la vitesse indiquée pourrait suggérer un régime de vol non-compressible, cependant le nombre de Mach est plus élevé et les effets transsoniques commencent à modifier les composantes du vecteur aérodynamique, influençant, entre autres, la portance, la traînée et le moment longitudinal.

Traditionnellement, la synthèse d'un système de pilotage automatique est effectuée à l'aide de plusieurs contrôleurs conçus pour différents points de vol. Un point de vol est la combinaison du nombre de Mach et d'une altitude, et le contrôleur calculé à partir du modèle linéarisé autour de ce point de vol sert à asservir uniquement à proximité de ce point. Ce contrôleur doit stabiliser le système pour l'étendue des valeurs possibles de masse et centrage, tout en démontrant une performance acceptable pour toute l'étendue des valeurs opérationnelles.

L'utilisation d'une technique d'asservissement non-linéaire répond principalement au cas d'un système avec une plage étendue d'opération donnant des variations de forces et de moments qui ne sont plus linéaires autour d'un point d'équilibre. Fondamentalement, ces deux besoins peuvent être considérés comme équivalents, étant donné qu'il est possible de diminuer l'enveloppe opérationnelle autour d'un point d'équilibre, jusqu'au point où nous obtenons une variation asymptotique, donnant un équivalent linéaire. Pour un avion de ligne, étant donné que traditionnellement il est asservi à l'aide de multiples contrôleurs linéaires, nous pouvons

raisonnablement affirmer qu'autour d'un point d'équilibre, le système est linéaire, mais que l'ensemble de l'enveloppe de vol n'est pas représenté adéquatement avec uniquement une relation linéaire. À l'aide de l'inversion dynamique, il est possible de linéariser le retour d'état pour toute l'enveloppe opérationnelle, afin d'obtenir un système équivalent linéaire, et pouvant être asservi à l'aide d'outils classiques. De cette façon, nous espérons créer un seul contrôleur pour toute l'enveloppe de vol, au lieu de plusieurs contrôleurs tel que décrit précédemment, diminuant le temps requis pour la conception du système de pilotage automatisé.

Afin d'atteindre un objectif satisfaisant d'asservissement, Slotine et Li (1991) décrivent une procédure générique à prendre pour la synthèse d'un contrôleur non-linéaire :

1. définir un comportement désiré, et sélectionner les actionneurs et capteurs,
2. créer une modélisation du système à asservir avec un ensemble d'équations différentielles,
3. faire la synthèse d'une loi de commande pour le système,
4. analyser et simuler les résultats du système de contrôle,
5. implémenter le système de contrôle sur une application réelle.

La modélisation du Boeing 747 a déjà été complétée et abordée dans les deux premiers chapitres. Des actionneurs de premier ordre ont servi au développement de celle-ci, et étant donné que toutes les variables d'état sont accessibles, aucun capteur supplémentaire n'est requis pour la modélisation. La simulation utilisant le logiciel MATLAB® permettra la collecte des données qui serviront pour l'ajustement du contrôleur. Une implémentation sur un avion n'étant pas une possibilité, le logiciel de simulation de Presagis™ sera utilisé comme plateforme additionnelle pour des essais, permettant une validation avec un outil externe et une reproductibilité des résultats. Afin de déterminer un comportement désiré pour le système asservi, il faut d'abord discuter du but de l'implémentation de notre contrôleur.

3.1.2 Stabilisation et suivi de trajectoire

Deux objectifs peuvent être visés lorsqu'un contrôleur est conçu : une stabilisation du système ou un suivi de trajectoire. Un stabilisateur ou un régulateur nous permet de stabiliser l'état d'un

système autour d'un point d'équilibre (Slotine & Li, 1991). En prenant en exemple un amortisseur de lacet, la fréquence naturelle et l'amortissement du roulis hollandais sont modifiés pour répondre à des caractéristiques de vol qui sont acceptables (Stevens et al., 2015, p. 257). Slotine et Li (1991) définissent une stabilisation asymptotique d'un système non-linéaire décrit pour le système d'équations suivant

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1)$$

Une loi de commande \mathbf{u} doit alors rétablir l'état \mathbf{x} vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$, lorsque le système démarre à partir de tout point de la région Ω . La région Ω est définie comme étant assez étendue pour qu'un seul contrôleur linéaire ne puisse pas accomplir la tâche pour tous les points. Il est également possible de définir un état désiré, \mathbf{x}_d , et d'évaluer l'objectif de contrôle pour ce point. Avec la sélection de ce vecteur d'état à l'équilibre, un problème de stabilisation est analogue à un suivi de trajectoire.

Slotine et Li (1991) définissent le suivi de trajectoire asymptotique du système non-linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

et d'une trajectoire désirée \mathbf{y}_d . Une loi de contrôle \mathbf{u} doit alors neutraliser les erreurs de suivi de trajectoire, $\mathbf{y} - \mathbf{y}_d$, tout en gardant la valeur des variables d'état \mathbf{x} bornée dans des intervalles normaux d'opérations, à partir de tout point d'une région Ω .

La loi de contrôle assurant ce suivi de trajectoire peut également utiliser les dérivées de la sortie \mathbf{y} . Si les dérivées sont utilisées, pour assurer l'efficacité de cette approche, il est nécessaire de filtrer la variable de sortie et le filtre utilisé doit avoir une constante de temps inférieure à la dynamique du système pour assurer la performance du système en boucle fermée (Slotine & Li, 1991).

Il est possible de tracer un parallèle entre ces deux objectifs. Un contrôleur qui est conçu pour simplement stabiliser un système vers un état \mathbf{x}_d , qu'il soit nul ou non, s'apparente à un problème de suivi de trajectoire. Ce contrôleur est un cas particulier d'un suivi de trajectoire pour lequel le vecteur de sortie, \mathbf{y} , correspond aux variables du vecteur d'état, \mathbf{x} (Slotine & Li, 1991). Lorsque l'attention est portée sur les équations qui composent le contrôleur, l'entrée peut généralement être décomposée en deux parties, le retour d'état et l'action directe (*feedforward*), chacun ayant un effet sur la stabilisation et le suivi de trajectoire, respectivement.

3.1.3 Comportement d'un système

Dans le domaine de l'asservissement linéaire, la dynamique du système avec une loi de commande est définie systématiquement dans un domaine temporel et fréquentiel (Slotine & Li, 1991, p. 197). Avec les équations décrivant le système dans le domaine de Laplace, nous pouvons obtenir plusieurs caractéristiques telles que l'ordre du système et sa stabilité. Un contrôleur linéaire peut être intégré également dans ce domaine. Avec ce nouveau résultat, il est possible d'obtenir analytiquement la réponse temporelle du système asservi.

Définir systématiquement des caractéristiques d'un système complexe, comme un avion de ligne, n'est pas une tâche aussi simple pour la synthèse d'un contrôleur non-linéaire. Par exemple, les caractéristiques d'une réponse temporelle à une entrée échelon, telles que l'amortissement ou la fréquence propre, ne sont pas garanties quand la valeur de l'entrée commandée est doublée à cause de l'influence des non-linéarités. Une approche générale unique pour une analyse du domaine temporel n'est pas possible (Slotine & Li, 1991). Deux techniques peuvent être utilisées afin d'effectuer des essais pour recueillir des données, l'analyse de la stabilité asymptotique du système dans son entier, ou des essais expérimentaux couvrant l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Lorsque nous désirons étudier le comportement asymptotique d'un système, il est d'abord nécessaire de définir la valeur du vecteur d'état (\mathbf{x}) pour laquelle l'analyse sera faite. Pour ce point, il est possible de linéariser la modélisation du système et la loi de commande. Tant que la stabilité au sens de Lyapunov est assurée, nous pouvons utiliser cet outil d'analyse. La modélisation non-linéaire est alors transformée en plusieurs modèles linéaires et équivalents, et des méthodes classiques nous permettent d'analyser le domaine temporel et fréquentiel.

Avec cette approche, la linéarisation sur toute l'enveloppe opérationnelle est nécessaire. Une série de points à l'équilibre est définie et la représentation linéaire du système et du contrôleur est calculée pour chaque condition. Si une déviation des performances est observée pour un point, un ajustement au contrôleur doit être apporté. En modifiant le contrôleur pour ce point seulement, nous modifions la dynamique pour toute l'enveloppe d'opération, étant donné que nous cherchons à accomplir la tâche avec une seule loi de commande pour tout le domaine de vol. Un processus itératif est alors enclenché pour effectuer l'ajustement final du contrôleur. Cette technique de synthèse est similaire à celle utilisée pour le séquençement de gain, mais le contrôleur n'est pas ajusté localement, mais globalement, changeant le comportement global à chaque itération. Les essais doivent être recommencés pour assurer une performance adéquate sur tout le régime opérationnel. Donc, une analyse qui utilise la linéarisation est valide uniquement dans un régime pour lequel le système est stable au sens de Lyapunov.

L'option alternative nous amène à effectuer les tests nécessaires pour une évaluation des performances du contrôleur à l'aide d'essais expérimentaux dans l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle. Sur une plateforme de simulation, le système peut être réinitialisé à n'importe quel point d'équilibre. Une commande au vecteur d'entrée est alors introduite et la réponse temporelle est enregistrée pour être analysée. Nous pouvons utiliser une équation linéaire pour tenter d'identifier la courbe et obtenir la fréquence naturelle et l'amortissement. Nous avons alors des données quantitatives pour évaluer la performance du contrôleur. Étant donné la possibilité de manipuler à notre convenance les logiciels de simulation, cette technique de collecte de données sera privilégiée.

Lors des essais simulés, des correctifs devront être apportés afin d'optimiser la performance du contrôleur. Ce processus itératif devient alors une balance entre la stabilité, le coût, la robustesse, la précision et la rapidité de la réponse temporelle (Slotine & Li, 1991). L'équilibre peut être précaire dans certaines zones d'opérations. Un compromis entre toutes les qualités de vol observées doit être trouvé afin d'obtenir une performance globale qui correspond au cahier de charges.

Sachant maintenant les raisons pour lesquelles une technique non-linéaire d'asservissement peut nous aider à diminuer le temps de synthèse d'un contrôleur et les particularités des méthodes d'analyse pour établir la performance de ce contrôleur, nous pouvons maintenant introduire la méthode d'asservissement que nous allons étudier, l'inversion dynamique.

3.2 Inversion dynamique

Wang et al. (2011, p. 264) définissent l'inversion dynamique comme étant une approche pour laquelle la linéarisation du retour d'état est appliquée aux variables de sortie d'intérêt. Dans la synthèse du contrôleur, nous linéarisons ces sorties avec une transformation des variables grâce au retour d'état. Afin de bien comprendre l'inversion dynamique, nous devons réviser les particularités de la linéarisation du retour d'état, le concept général de celui-ci.

3.2.1 Linéarisation du retour d'état

L'idée centrale de la linéarisation du retour d'état consiste à transformer algébriquement la dynamique d'un système non-linéaire en dynamique linéaire invariante dans le temps (Marquez, 2003, p. 255). La linéarisation est effectuée à l'aide d'une transformation exacte de l'état du système et d'un retour d'état.

Cette technique a déjà fait l'objet de recherches et d'applications pour l'asservissement d'hélicoptères et d'avions à haute performance (Slotine & Li, 1991, p. 207). Comme discuté précédemment, la méthode de prédilection utilisée par les avionneurs de catégorie transport est la synthèse de multiples contrôleurs, chacun pouvant uniquement asservir un domaine

opérationnel étroit, et opter pour le séquençement de gains afin de couvrir toute l'enveloppe de vol. Si avec la création d'une seule loi de commande nous pouvons obtenir une performance adéquate pour l'ensemble des conditions d'opérations, une économie de temps apportera une réduction du coût global pour le processus de conception et de validation.

À l'aide de l'inversion dynamique, les variables à asservir sont linéarisées et un seul contrôleur est alors nécessaire pour tout le domaine de vol. L'efficacité de cette linéarisation dépend, entre autres, de la précision du modèle utilisé pour la représentation du système avec le retour d'état. Le but de ce projet de recherche est d'évaluer si la synthèse d'un seul contrôleur d'inversion dynamique combiné avec une modélisation approximative permet d'atteindre des caractéristiques de performances satisfaisantes pour un avion de catégorie transport.

La linéarisation du retour d'état peut être séparée en deux branches : la linéarisation entrée-état, et la linéarisation entrée-sortie. La première technique nous permet de linéariser l'entrée du système à partir des variables d'état, une méthode analogue à la stabilisation du système. Si la variable d'intérêt pour le suivi de trajectoire n'est pas une variable d'état, il est nécessaire d'utiliser le vecteur des variables de sortie (\mathbf{y}) et la linéarisation entrée-sortie. Cette dernière est le centre d'intérêt pour ce projet de recherche. Pour permettre son étude, nous devons introduire certains outils mathématiques pour développer ce concept.

3.2.2 Outils mathématiques

Le but ultime de l'inversion dynamique pour la linéarisation d'entrée-sortie est une transformation de la représentation d'état du système, afin d'obtenir une variable linéarisée faisant l'objet de l'asservissement à l'entrée du système. Nous pouvons alors ajouter un contrôleur linéaire pour générer les commandes. Certaines opérations mathématiques nous permettront d'établir un lien entre cette variable et celle du vecteur d'entrée au système qui lui est associé. Ce lien dictera la matrice qui transformera le système initial pour celui que nous obtenons avec les lois de commande. Les outils mathématiques suivants serviront à manipuler les équations pour trouver une relation appropriée pour cette loi de commande.

3.2.2.1 Dérivée de Lie

Tel que présenté par Marquez (2003, p. 256), si nous posons un champ scalaire $h : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, et un champ vectoriel $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la dérivée de Lie de h en fonction de f , dénotée $L_f h(\mathbf{x})$, est définie comme étant

$$L_f h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Si nous possédons deux champs vectoriels $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la combinaison des dérivées successives de Lie est alors

$$L_g L_f h(\mathbf{x}) = L_g [L_f h(\mathbf{x})] = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Pour le cas spécial $f = g$:

$$L_f L_f h(\mathbf{x}) = L_f^2 h(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Le cas général de la dérivée de Lie correspond à

$$L_f^i h(\mathbf{x}) = \frac{\partial (L_f^{i-1} h)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

Plus spécifiquement pour la représentation d'un système dynamique suivant (adapté de Slotine & Li, 1991, p. 230)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

La dérivée de la sortie \mathbf{y} est alors égale à

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f h \quad (3.8)$$

La deuxième dérivée de \mathbf{y} est la deuxième dérivée de Lie de h en fonction de \mathbf{x} , présentée ci-dessous et le cas général s'écrit à l'aide de l'équation (3.6).

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{\partial(L_f h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f^2 h \quad (3.9)$$

3.2.2.2 Difféomorphisme

Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite un difféomorphisme local sur le sous-ensemble D (Marquez, 2003, p. 259), si

- i. la fonction f est dérivable pour D dans son entier,
- ii. et son inverse f^{-1} existe, est dérivable sur l'ensemble du domaine, et est définie comme étant

$$f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad (3.10)$$

Une fonction f est un difféomorphisme global, si les conditions suivantes sont également réunies

- i. $D = \mathbb{R}^n$, et
- ii. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \|f(\mathbf{x})\| = \infty$

Afin de faciliter la confirmation d'un difféomorphisme local, il est possible d'affirmer que si la matrice Jacobienne $Df = \nabla f$ n'est pas singulière à aucun point $\mathbf{x}_0 \in D$, alors $f(\mathbf{x})$ est un difféomorphisme dans un sous-ensemble $\omega \subset D$. Avec ces définitions, nous pouvons maintenant introduire la transformation de coordonnées qui permettra de bâtir la technique d'inversion dynamique.

3.2.2.3 Transformation de coordonnées

En considérant une représentation d'état non-linéaire de la forme suivante

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (3.11)$$

Un difféomorphisme $T(\mathbf{x})$ peut être utilisé pour une transformation de coordonnées (Marquez, 2003, p. 260). En définissant $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$, nous trouvons

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}] \quad (3.12)$$

Étant donné que T est un difféomorphisme, nous pouvons récupérer le vecteur d'état à l'aide de celui-ci :

$$\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.13)$$

3.2.3 Linéarisation entrée-sortie

Soit la représentation d'état d'un système non-linéaire (Marquez, 2003, p. 275) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} & f, g : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ y &= h(\mathbf{x}) & h : D \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.14)$$

dans lesquels f et g sont des fonctions de dimensions n et la fonction h unidimensionnelle. Ce système possède donc une seule entrée et une seule sortie, et est communément appelé SISO (*Single-Input-Single-Output*). Le système peut être linéarisé avec le retour d'état avec un degré relatif r s'il existe une transformation de l'état et de l'entrée

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \Phi(\mathbf{x}) & \mathbf{z} &\in \mathbb{R}^r \\ \mathbf{u} &= \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v} & \mathbf{v} &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans laquelle $\beta(\mathbf{x}) \neq 0$ et Φ est un difféomorphisme qui transforme l'équation (3.14) en système linéaire équivalent :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v \quad (3.16)$$

Si la variable de sortie (y) n'a pas une relation directe avec l'entrée (u), il est possible de dériver la variable de sortie en fonction du temps pour obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u \\ &= L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si cette manipulation donne une valeur $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \neq 0$, alors nous pouvons isoler l'entrée u à l'aide de l'équation suivante (Marquez, 2003, p. 276) :

$$u = \frac{1}{L_g h(\mathbf{x})} [-L_f h(\mathbf{x}) + v] \quad (3.18)$$

Cette équation introduit la variable v , qui est la nouvelle entrée linéarisée. Avec un résultat $L_g h(\mathbf{x}) = 0$, nous devons alors dériver à nouveau. La deuxième dérivée nous donne l'équation suivante :

$$v = \ddot{y} = L_f^2 h(\mathbf{x}) + L_g L_f h(\mathbf{x})u \quad (3.19)$$

Si jamais l'entrée n'est toujours pas dans l'équation, il est possible de dériver y en fonction du temps, jusqu'à l'émergence de l'entrée u (Dang Vu, 1997, p. 104). La forme généralisée de l'équation prendra la forme suivante :

$$v = y^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{(r-1)} h(\mathbf{x}) u \quad (3.20)$$

Où la variable r représente le degré relatif de la représentation d'état linéarisée. La loi de commande peut être écrite sous une forme générale

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{(r-1)} h(\mathbf{x})} [-L_f^r h(\mathbf{x}) + v] \quad (3.21)$$

Si le terme $L_g L_f^{(r-1)} h(\mathbf{x}) = 0$, aucune loi de commande n'a alors été trouvée. Cette observation démontre qu'il n'y a aucun lien direct entre l'entrée du système (u), et la sortie (y) et ses dérivées. Dans ce cas, une autre méthode d'asservissement doit être utilisée. La représentation du système linéaire équivalent prend alors la forme canonique de Brunovsky (Dang Vu, 1997, p. 104) :

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}v \quad (3.22)$$

Pour laquelle les coordonnées du vecteur \mathbf{z} sont :

$$z_k = \Phi_k(\mathbf{x}) = L_f^{k-1} h(\mathbf{x}) \quad k = 1, \dots, r \quad (3.23)$$

Ce processus que nous venons tout juste de décrire utilise les dérivées de Lie pour obtenir la valeur du vecteur d'entrée u avec une approche mathématique formelle. En observant les équations d'état et en essayant de combiner des substitutions, il est aussi possible de trouver une relation simple et directe entre la valeur d'observation, et la valeur de commande (Slotine & Li, 1991, p. 216). Une combinaison de dérivations en fonction du temps et de substitution nous permettra d'obtenir ce résultat.

Après avoir établi la relation entre l'entrée et la sortie, l'objectif est le maintien d'un suivi d'une trajectoire désirée y_d , tout en gardant le système stabilisé dans une enveloppe opérationnelle. Pour atteindre ce but, nous devons générer la valeur de y_d et de ces dérivées jusqu'à un ordre assez élevé (Slotine & Li, 1991, p. 216).

Prenons l'exemple suivant d'un système de deuxième ordre :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_2^2 + (x_1 + 10)u \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{3.24}$$

Dans ce système d'équations, nous pouvons écrire les fonctions f , g et h :

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} -2x_1^3 + x_2 \\ 3x_2^2 \end{bmatrix} \\ g(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + 10 \end{bmatrix} \\ h(\mathbf{x}) &= x_2\end{aligned}\tag{3.25}$$

Les dérivées de Lie pour ce système sont alors :

$$\begin{aligned}L_f h &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -2x_1^3 + x_2 \\ 3x_2^2 \end{bmatrix} = 3x_2^2 \\ L_g h &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + 10 \end{bmatrix} = x_1 + 10\end{aligned}\tag{3.26}$$

Avec ces résultats, nous obtenons la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{x_1 + 10} (-3x_2^2 + v)\tag{3.27}$$

La transformation du système nous donne une loi de commande $v = \dot{x}_2$. Dans cet exemple simplifié, le nouveau vecteur d'état n'a qu'une seule dimension, ce qui signifie que le système est partiellement linéarisé, sujet sur lequel nous allons revenir :

$$\mathbf{z} = [h(\mathbf{x})] = [x_2] \quad (3.28)$$

Une autre façon d'obtenir le même résultat est à l'aide de la première dérivée de y ; nous trouvons un lien direct entre celle-ci et l'entrée u . L'équation suivante démontre un résultat qui est le même.

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = v = 3x_2^2 + (x_1 + 10)u \quad (3.29)$$

La synthèse d'un contrôleur de suivi de trajectoire pour ce seul intégrateur est maintenant simplifiée parce qu'une technique d'asservissement linéaire peut être utilisée (Slotine & Li, 1991, p. 217). En posant une erreur de suivi trajectoire avec l'équation suivante :

$$e = y - y_d \quad (3.30)$$

La nouvelle entrée v est alors choisie comme :

$$v = \dot{y}_d - k_1 e \quad (3.31)$$

pour laquelle la constante k_1 doit être positive. La dynamique de l'erreur de suivi de trajectoire du système en boucle fermée est alors définie avec :

$$\dot{e} + k_1 e = 0 \quad (3.32)$$

Cette dernière représente la dynamique de la différence entre la trajectoire désirée et actuelle qui est exponentiellement stable. Il est nécessaire d'affirmer que la loi de commande est définie partout sauf à $x_1 = -10$, et que la mesure du vecteur d'état en tout temps durant l'opération du système est une condition pour le calcul de l'entrée u .

Lors de l'élaboration de la loi de commande, une seule dérivation a été nécessaire pour obtenir la sortie. Ce nombre de dérivations est lié à une propriété qui s'appelle le degré relatif (r). Slotine et Li (1991, p. 218) démontre qu'un système contrôlable d'ordre n nécessite, au maximum n dérivations pour obtenir la variable d'entrée (u) dans la loi de commande. Le degré relatif doit respecter la règle présentée dans la relation ci-dessous :

$$r \leq n \quad (3.33)$$

Quand le degré relatif est égal à l'ordre du système, le système est entièrement linéarisé. Dans le cas contraire, le degré relatif est inférieur à l'ordre du système et une partie de la dynamique n'est plus observable à partir du signal de la variable de sortie. Une dynamique interne est alors induite à cause d'une linéarisation partielle. Pour faire une analogie à un système linéaire, les zéros de la fonction transfert correspondent à cette dynamique interne. À partir des connaissances déjà acquises des méthodes classiques d'asservissement, nous savons que la stabilité de ces zéros est cruciale pour assurer une stabilité en boucle fermée. Nous pouvons conclure que cet enjeu doit être pris en considération dans l'analyse de la performance d'un contrôleur basé sur l'inversion dynamique. Dans le cas étudié précédemment avec l'Équation 3.24, l'état interne est représenté par la variable x_1 et la dynamique interne est décrite avec :

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 + x_2 \quad (3.34)$$

La stabilité de cette dynamique est une nécessité afin d'obtenir un contrôleur adéquat. Pour la linéarisation du retour d'état, il est possible de s'inspirer de l'analyse des zéros qui est faite dans l'asservissement linéaire pour l'évaluation de celle-ci. Cette approche est appelée la dynamique-zéro.

3.2.4 Dynamique-zéro

Définie formellement, la dynamique-zéro est la dynamique interne du système lorsque la valeur de la variable de sortie de la représentation d'état est maintenue à zéro à l'aide de la valeur de la variable d'entrée. Son étude offre une technique simplifiée pour l'évaluation de la stabilité interne de la dynamique (Slotine & Li, 1991, p. 227).

Dans un contexte de suivi de trajectoire, aucun résultat global pour l'enveloppe opérationnelle ne peut être tiré sur la dynamique interne d'un système non-linéaire, et uniquement la stabilité locale est garantie (Slotine & Li, 1991, p. 227). Dans le cas d'une dynamique-zéro qui est asymptotiquement stable, nous l'appellerons alors un système à minimum de phase asymptotique, ce qui veut dire que les zéros du système sont négatifs. Il est nécessaire d'ajouter que cette stabilité de la dynamique-zéro est une propriété intrinsèque d'un système non-linéaire qui ne dépend pas du choix de la loi de commande, ni de la trajectoire désirée.

En reprenant l'exemple du sous-chapitre 3.2.3, en maintenant la sortie $y = x_2$ à zéro, nous obtenons alors l'équation suivante

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 \quad (3.35)$$

Seulement en observant cette équation différentielle, nous pouvons affirmer que pour n'importe quelle valeur initiale, x_1 converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Nous sommes donc en présence d'un système à minimum de phase asymptotique.

3.2.5 Entrées multiples – Sorties multiples

Tel que nous l'avons affirmé précédemment, un aéronef à voilure fixe est un système ayant six degrés de liberté, trois pour le mouvement linéaire, et trois pour le mouvement rotationnel. Jusqu'à présent, seulement le cas simplifié avec une entrée et une sortie a été abordé pour la méthode d'asservissement étudiée. En voulant effectuer un contrôle longitudinal et latéral d'un avion, il est nécessaire d'avoir une loi de commande pour quatre variables de sortie qui est liée

à la poussée des réacteurs et aux trois gouvernes de contrôle de vol primaires, c'est-à-dire, les ailerons, la gouverne de profondeur et de direction. Une description de chacune des gouvernes est présentée à l'annexe I. Nous devons alors introduire le cas universel de l'inversion dynamique, appelé *Multi-Input-Multi-Output* (MIMO).

Tiré de l'ouvrage de Dang Vu (1997, p. 106), un système non-linéaire MIMO est défini à partir de la représentation d'état suivante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.36)$$

Pour lesquelles $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, f , g et h sont des fonctions infiniment dérivables de \mathbf{x} . La solution passe alors par la recherche de m transformations de coordonnées et d'un vecteur de lois de commande qui prennent la forme de

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^i &= \Phi_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} &= \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{v}\end{aligned}\quad (3.37)$$

Où $\mathbf{z}^i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $i = 1, \dots, m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, r_i est le degré relatif associé à la sortie y_i , servant à transformer l'équation (3.36) en système linéaire contrôlable équivalent suivant

$$\dot{\mathbf{z}}^i = A_i \mathbf{z}^i + B_i \mathbf{v} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.38)$$

Nous définissons la matrice suivante qui doit être non singulière afin d'obtenir un résultat pour la loi de commande :

$$\Delta_{ij}(\mathbf{x}) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, m \quad (3.39)$$

Chaque nouvelle variable est déterminée avec

$$z_k^i = L_f^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, r_i \quad (3.40)$$

Nous obtenons donc les champs vectoriels de la loi de commande :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) &= -\Delta^{-1} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) &= \Delta^{-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pour lesquels les composantes de la matrice $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ sont égales à

$$b_i = L_f^{r_i} h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

Similaire au cas SISO, il est possible de définir un vecteur de lois de commande \mathbf{v} ayant des composantes qui s'écrivent avec

$$v_i = y_{d_i}^{(r_i)} - \sum_{k=0}^{r_i-1} c_k^i (z_{k+1}^i - y_{d_i}^{(k)}) \quad (3.43)$$

En utilisant cette technique, nous obtenons donc un contrôleur qui peut effectuer un suivi de trajectoire avec une commande y_{d_i} , et qui découple la dynamique entre chaque axe de contrôle. Maintenant que nous avons discuté de la théorie entourant l'inversion dynamique, nous pouvons maintenant dériver nos lois de commande.

3.3 Synthèse des lois de commande

Afin de trouver les équations qui serviront aux lois de commande, nous pouvons commencer notre exploration avec les équations des composantes de force et de moment. Le vecteur de contrôle de l'asservissement longitudinal est composé de la gouverne de profondeur et la poussée des réacteurs, et pour l'asservissement latéral, les ailerons et la gouverne de direction. Nous pouvons alors déduire que nous aurons deux lois de commande pour les axes

longitudinaux, et deux autres sorties pour les axes latéraux. Également, nous devons nous poser la question : quelles sont les variables qui présentent un intérêt dans la création d'un système de pilote automatique ? L'annexe D du document de Hanke et Nordwall (1970) présente le système de pilotage automatisé du Boeing 747 et les grandes lignes du fonctionnement sont décrites dans les prochains paragraphes.

Le maintien d'angle de tangage, d'altitude, de vitesse verticale et de vitesse, et le suivi d'alignement de descente sont différents modes longitudinaux disponibles pour le Boeing 747. Le maintien d'angle de tangage est la boucle interne (Figure 3.1) qui peut être contrôlée directement ou par une boucle externe (K_θ) d'un des modes du pilote automatique. En montée ou en descente, il est possible d'utiliser un régime de poussée fixe. Le maintien de la vitesse est alors effectué avec un ajustement de l'angle de tangage de référence pour corriger la vitesse de l'avion à la valeur de consigne (V_{ref}). Avec le mode de maintien de vitesse verticale, la déviation de la vitesse verticale commandée ($V_{V_{ref}}$) génère une variation de l'angle de tangage de référence. Dans ce cas-ci, la poussée des réacteurs contrôle la vitesse. Le suivi d'alignement de descente utilise l'erreur entre l'angle de descente de la procédure d'approche et l'angle formé à partir de la position actuelle de l'avion à l'aide de la réception du signal de l'ILS², ainsi que le taux de variation de la différence entre ces angles, pour générer une valeur d'angle de tangage à suivre (non représenté dans la Figure 3.1). Finalement, un mode de maintien d'altitude (h_{ref}) calcule l'écart entre l'altitude de référence et l'altitude de l'avion pour commander un angle de tangage de référence et ainsi accomplir sa tâche. Dans la Figure 3.1, le bloc K_θ représente n'importe quel de ces modes et un contrôleur PID peut générer des commandes adéquates d'angle de tangage pour tout l'enveloppe de vol. À la lumière de ces exemples, il est clair que l'asservissement d'un angle de tangage commandé est central à tous les modes longitudinaux du système de pilotage automatisé et sera la première variable de sortie que nous désirons contrôler.

² Système d'atterrissage aux instruments (*Instrument Landing System*)

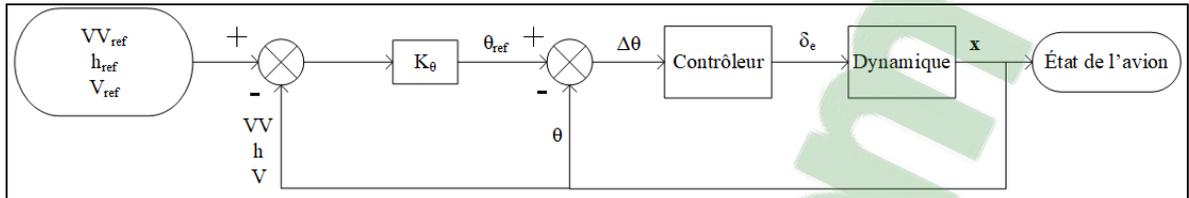


Figure 3.1 Superposition des boucles de commande longitudinale

Le deuxième système contribuant au contrôle longitudinal de l'avion est l'automanette. Ce système, sur le Boeing 747, contrôle l'angle des manettes de poussée pour modifier la vitesse. La valeur d'entrée de ce système commandée par le pilote peut-être la vitesse indiquée ou le nombre de Mach. Ces deux vitesses correspondent à la composante de vitesse qui est parallèle au vecteur de la vitesse totale de l'avion, un élément qui devra se refléter dans le choix de notre variable de sortie. Nous choisissons dans le cadre de notre loi de commande d'utiliser la vitesse propre, étant donné que cette variable représente la norme du vecteur vitesse au travers de la masse d'air, et que les deux variables qui sont choisies par le pilote à l'aide du système d'automanette peuvent être converties en vitesse propre avec les données de l'ordinateur qui recueille les mesures de l'écoulement de l'air, l'ADC³.

Pour les modes latéraux, les différentes sélections sont le maintien du cap, le suivi d'un faisceau d'un système de radionavigation, ou le suivi de trajectoire de système de navigation inertielle. À la Figure 3.2, nous pouvons voir que l'angle de roulis est la boucle interne de contrôle. Ce mode ne peut être activé manuellement par le pilote, et doit nécessairement recevoir sa consigne du contrôleur de la boucle externe (K_φ). Le maintien de cap (ψ_{ref}), par exemple, utilise l'erreur entre le cap actuel et la valeur commandée pour définir un angle de roulis de référence. Pour un suivi de faisceau d'un alignement de piste de système ILS ou une trajectoire présélectionnée d'une station VOR⁴, une commande d'angle de roulis est générée avec l'écart de l'angle du faisceau (η) et le taux de variation de cette erreur. Certains paramètres supplémentaires sont normalement utilisés pour répondre aux exigences particulières des outils de navigation, tels que des valeurs maximales pour l'angle de roulis et son taux de variation.

³ Air Data Computer

⁴ VHF Omnidirectional Range

Finalement, à l'aide d'une station de navigation inertielle, une commande d'angle de roulis est calculée à partir de la distance perpendiculaire de la déviation de trajectoire (μ). Pour l'asservissement latéral d'un avion, nous pouvons déduire que le maintien d'un angle de roulis commandé est essentiel pour l'activation de tous les modes.

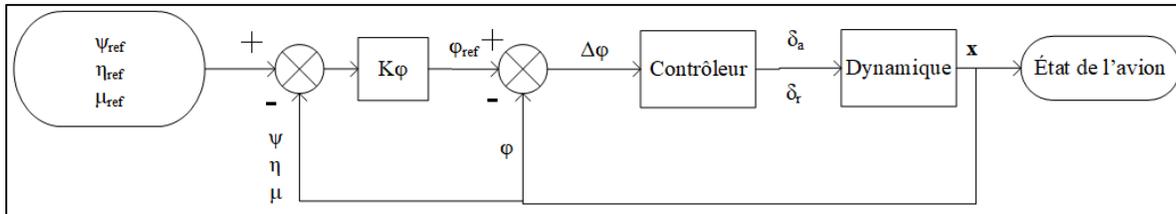


Figure 3.2 Superposition des boucles de commande latérale

Dans la dynamique latérale d'un avion, un des modes dominants crée une oscillation entre le roulis et lacet. Ce mode est communément appelé le roulis hollandais. Les avions de catégorie transport nécessitent généralement un amortisseur de lacet pour contrer ce mode. Le Boeing 747 utilise le taux de variation de lacet pour cette fonction du système de pilotage automatique (Hanke & Nordwall, 1970). Un coordonnateur de virage est également disponible lorsque les volets ne sont pas rentrés. Pour la synthèse de notre loi de commande, nous allons assurer la coordination de virage et l'amortissement de lacet avec la vitesse latérale (v), variable qui est intimement liée à l'angle de dérapage (β).

Ayant maintenant déterminé quelles variables de sortie seront nécessaires pour l'asservissement, il est maintenant possible de tenter la dérivation des équations à partir des composantes de force et de moment pour la synthèse d'une loi de commande.

3.3.1 Lois de commande longitudinale

Dans l'étude de la dynamique longitudinale, deux valeurs caractérisent le vecteur d'entrée du système : l'angle de déflexion de la gouverne de profondeur et la poussée des réacteurs. Deux sorties sont donc nécessaires pour la loi de commande : l'angle de tangage (θ) et la vitesse propre (V). Le développement devra alors reposer sur deux équations servant à modéliser le

vol d'un avion de ligne. En combinant le moment de tangage des équations (1.22) et (2.5), nous obtenons alors :

$$M = I_y \dot{q} + I_{xz}(p^2 - r^2) + (I_x - I_z)pr = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_m + T_{z_{eng}} \quad (3.44)$$

La partie de l'équation ayant l'accélération (\dot{q}) et les vitesses angulaires (p, r) nécessitent une élaboration, afin de trouver une simplification des différentes contributions. La présence des taux de variation de roulis et de lacet dans l'équation de moment longitudinal suggère qu'il y a un lien entre la dynamique latérale et longitudinale. Ce lien s'appelle le couplage inertiel (Nelson, 1998, p. 205). Il s'agit d'un effet d'inertie de l'aéronef dû à la conservation du moment cinétique, et ne possède aucun lien avec la force ou le moment aérodynamique. Afin de bien évaluer les contributions des termes, il est nécessaire d'aborder la dynamique lors de l'exécution d'un virage. Le pilote cherche normalement à garder l'aéronef en virage coordonné. Si le roulis est effectué autour de l'axe x_b précisément, l'angle d'attaque se transformerait immédiatement en angle de dérapage (β). Stevens et al. (2015, p. 316) affirme qu'afin de garder un angle de dérapage nul dans la mise en virage et ainsi utiliser l'angle d'attaque pour amorcer l'accélération du virage, le vecteur de rotation doit être aligné avec l'axe x_s . À l'amorce du virage, le taux de variation de lacet dans le repère-stabilité (r_s) est alors nul. Dans la manœuvre, le changement de cap ($\dot{\psi}$) entraîne une variation de la variable r_s donc le résultat n'est pas exact pour tout le virage, mais une approximation valable pour l'entrée et la sortie. Avec la supposition précédente et en utilisant une transformation du repère-stabilité au repère-avion, une relation entre le taux de roulis et de lacet dans le repère-avion peut être établie :

$$\begin{aligned} r_s = 0 &= -p \sin \alpha + r \cos \alpha \\ r &= p \tan \alpha \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nous pouvons prendre ce résultat et remplacer la variable r dans l'équation (3.44) :

$$M = I_y \dot{q} + I_{xz} p^2 (1 - \tan^2 \alpha) + (I_x - I_z) p^2 \tan \alpha \quad (3.46)$$

Le dernier terme, $(I_x - I_z) p^2 \tan \alpha$, est le résultat d'une force centrifuge qui agit sur la longueur du fuselage. Hurt (1965, p. 315) explique ce phénomène à l'aide d'une visualisation d'un problème analogue, soit deux masses situées à l'avant et à l'arrière de l'appareil (Figure 3.3). Étant donné que le centre de gravité est le foyer de la rotation, la force centrifuge tente d'éloigner ces deux masses le plus possible de l'axe de rotation, créant un moment à cabrer pour un angle d'attaque positif.

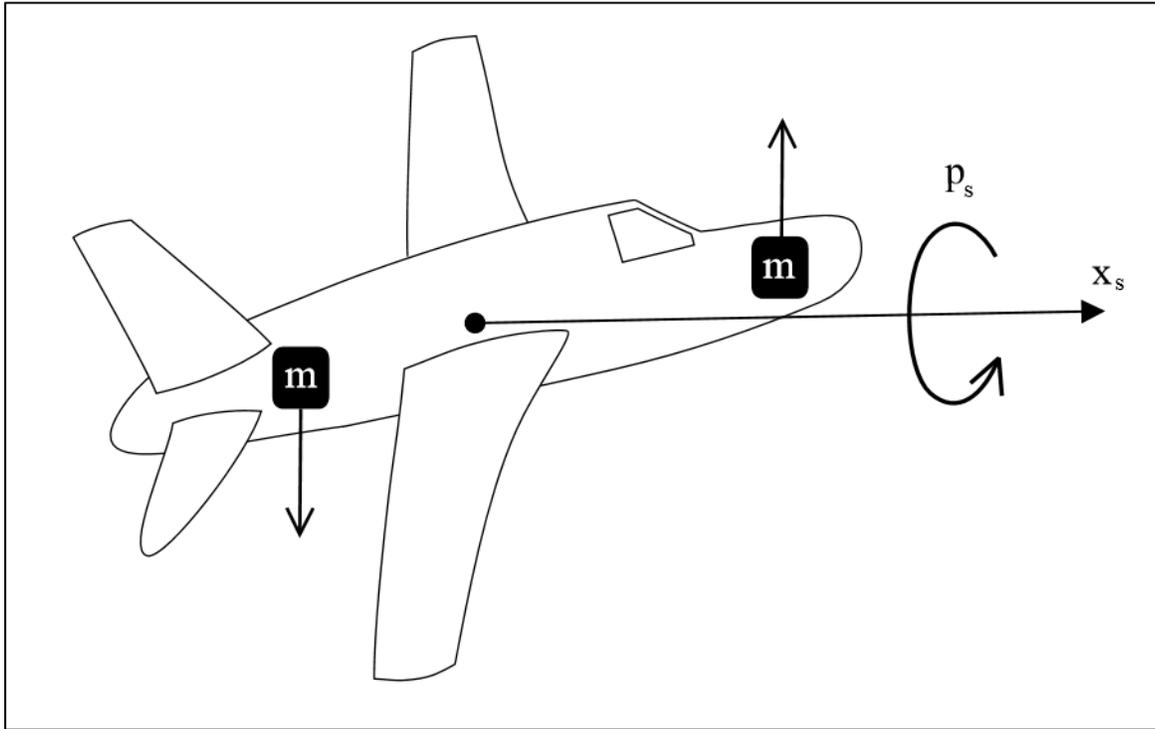


Figure 3.3 Force centrifuge due au taux de roulis

Le deuxième terme de couplage inertiel, $I_{xz} p^2 (1 - \tan^2 \alpha)$, est le résultat d'une asymétrie dans la distribution de la masse entre la partie supérieure et inférieure de l'aéronef. Par exemple, l'empennage vertical arrière se trouve au-dessus de ce plan horizontal, le train d'atterrissage et les réacteurs sont sous ce plan. La somme des bras de levier de ces deux derniers se trouve à l'avant du centre de masse. L'effet peut être simplifié avec une masse à

l'arrière de l'aéronef au-dessus de l'axe longitudinal, et une autre à l'avant de l'appareil sous ce même axe. La contribution de ce terme produit un moment piqueur pour l'aéronef.

Ces deux effets s'opposent lors d'un virage conventionnel. Stevens et al. (2015, p. 316) affirme que cet effet de couplage inertiel génère un moment de tangage important seulement à des vols d'angles d'attaque élevés et des taux de variation rapides de roulis. Les avions de chasse, avec des ailes plus courtes, vont également être plus prompts à cet effet. Étant donné que l'aéronef en question est de catégorie transport avec des manœuvres non brusques, ce couplage sera initialement ignoré dans la synthèse du contrôleur. Si un écart de l'angle de tangage commandé est observé lors des essais, une solution sera envisagée. En ignorant ce couplage inertiel, l'équation de moment longitudinal s'écrit alors

$$I_y \dot{q} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \Sigma C_m + T z_{eng} \quad (3.47)$$

Où la somme des coefficients aérodynamiques peut être décomposée de la façon suivante, dans le but de séparer l'influence des variables du vecteur d'état et les entrées du système :

$$\Sigma C_m = C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \quad (3.48)$$

Étant donné que nous considérons un découplage dans le contrôle longitudinal et latéral pour le moment, nous allons supposer un angle de roulis nul et ainsi obtenir une accélération angulaire \dot{q} qui est égale à l'accélération angulaire de l'angle de tangage. Prenant en compte de ces deux changements, l'équation (3.47) s'écrit maintenant

$$I_y \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} (C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e) + T z_{eng} \quad (3.49)$$

La majorité des termes de l'équation précédente est connue, en tant que paramètre propre à l'aéronef ou une variable du vecteur d'état. Le point d'interrogation demeure pour le coefficient du moment de tangage. Normalement, dans une synthèse d'un contrôleur

d'inversion dynamique, l'enveloppe opérationnelle est connue dans son entier et nous pouvons déterminer quelle est la valeur exacte du coefficient aérodynamique. Un des buts du présent projet de recherche est l'évaluation de la performance du contrôleur lorsqu'une modélisation simplifiée de ces coefficients est utilisée.

Dans la section décrivant le moment longitudinal du Boeing 747 du document de Hanke et Nordwall (1970), nous pouvons observer que les différentes contributions sont, entre autres, une fonction de l'angle d'attaque, de la vitesse sous différentes formes (vitesse équivalente et nombre de Mach), de l'altitude, de la vitesse angulaire (q), de la variation de l'angle d'attaque ($\dot{\alpha}$), de la position du centre de gravité, de la position des volets et du train d'atterrissage. L'observation des données graphiques permet d'affirmer que les deux plus grands facteurs influençant le coefficient $C_{m_{ac}}$ est la position des volets et l'angle d'attaque, ce dernier se rapprochant d'une relation linéaire. Nous allons alors émettre l'hypothèse qu'une relation linéaire du premier ordre peut être utilisée pour donner une approximation qui permettra la synthèse du contrôleur. De plus, nous allons poser que le produit d'une constante et de son angle peut représenter adéquatement l'effet de la déflexion de la gouverne de profondeur. Alors, les coefficients $C_{m_{ac}}$ et $C_{m_{\delta_e}}$ ⁵ correspondront aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} C_{m_{ac}} &= a_1 \alpha + a_0 \\ C_{m_{\delta_e}} &= \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nous devons également aborder le sujet des entrées du système. Les variables du vecteur d'entrée que nous allons observer dans les équations sont leurs valeurs actuelles. Les actionneurs ont un retard lors de la variation d'une commande. Un réacteur d'avion peut nécessiter au-delà de dix secondes pour une accélération de la poussée au ralenti à la poussée de décollage. Pour la gouverne de profondeur, l'étendue de la déflexion est de 40 degrés avec

⁵ La démarche expérimentale pour déterminer la valeur numérique des différents coefficients est présentée à l'Annexe V.

une limite du taux de variation à 37 degrés par seconde. Une commande effectuée par un contrôleur n'est pas instantanée et la dynamique doit être prise en considération. Nous allons introduire alors des équations du premier ordre pour décrire la variation de la valeur actuelle des actionneurs, présentées ci-dessous, et les variables d'entrée seront maintenant la valeur de poussée commandée (T_c) et l'angle commandé de déflexion de la gouverne de profondeur (δ_{e_c}). Il est nécessaire d'affirmer qu'une approximation du premier ordre ne réplique pas la dynamique parfaitement. À un régime ralenti de poussée, la variation est plus lente en comparaison à une poussée plus élevée. La discussion pour la sélection de la constante de temps pour les deux actionneurs se fera avec le choix des pôles du contrôleur. Étant donné que nous utilisons la poussée actuelle et commandée, pour l'implémentation, une base de données quantifiant la poussée des réacteurs en fonction de la vitesse de rotation du compresseur basse pression (N1), de la vitesse et de l'altitude-pression a été utilisée. La poussée commandée est alors convertie en vitesse de rotation de référence du compresseur basse pression.

$$\begin{aligned}\dot{T} &= \frac{1}{\tau_T} (T_c - T) \\ \dot{\delta}_e &= \frac{1}{\tau_{\delta_e}} (\delta_{e_c} - \delta_e)\end{aligned}\tag{3.51}$$

Avec un moyen d'asservir l'angle de tangage, l'automanette est l'addition naturelle pour la régulation de la vitesse. Nous pouvons utiliser la somme des forces dans l'axe longitudinal du repère-stabilité. Nous nous retrouvons alors avec la traînée produite, la composante de la force gravitationnelle et la composante de la poussée des réacteurs⁶ dans l'équation suivante :

$$m\dot{V} = -\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D - mg \sin(\theta - \alpha) \cos(\phi) + T \cos(\alpha + \varepsilon)\tag{3.52}$$

⁶ Le terme ε représente l'angle entre le vecteur de poussée des réacteurs et le plan horizontal du fuselage.

Afin de développer formellement un contrôleur en utilisant l'inversion dynamique, nous pouvons reprendre les équations (3.49) et (3.52) et les utiliser pour écrire une représentation d'état. La dynamique longitudinale d'un avion est normalement décrite à l'aide de quatre variables d'état : u , w , θ et q (Cook, 2013, p. 94). Il est possible de transformer les deux premières variables afin d'obtenir une représentation dans le repère-stabilité, soit la vitesse totale (V) et l'angle d'attaque (α). Nous pouvons alors écrire la représentation non-linéaire de l'avion avec la dynamique des actionneurs sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_e \\ \dot{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D - mg \sin(\theta - \alpha) + T \cos(\alpha + \varepsilon) \right) \\ f_\alpha(\mathbf{x}) \\ q \\ \frac{1}{I_y} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} (C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e) + T z_{eng} \right) \\ -\delta_e / \tau_{\delta_e} \\ -T / \tau_T \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/\tau_{\delta_e} & 0 \\ 0 & 1/\tau_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ec} \\ T_c \end{bmatrix}$$

Il est nécessaire de noter que l'équation de la vitesse angulaire de l'angle d'attaque ($\dot{\alpha} = f_\alpha(\mathbf{x})$) n'est pas définie à ce moment-ci. Semblable à la définition usuelle de \dot{w} , cette accélération dépendra principalement de la force de portance. Nous aborderons la représentation de cette équation dans la discussion de la dynamique zéro, étant donné que l'angle d'attaque est la variable qui a une dynamique interne non retraçable à l'aide des entrées et sorties choisies. La prochaine étape est de construire le vecteur de sortie. Les deux variables que nous voulons asservir sont l'angle de tangage (θ) et la vitesse totale (V).

$$h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La première dérivation permet d'écrire l'équation $\dot{\mathbf{y}}$

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D + T \cos(\alpha + \varepsilon) \right) - g \sin(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Les entrées désirées du système, T_c et δ_{e_c} , ne se retrouvent pas dans l'équation (3.55). Nous pouvons alors dériver une deuxième fois le résultat pour essayer de trouver une solution.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \frac{1}{m} \left(-\rho V \dot{V} S C_D + \dot{T} \cos(\alpha + \varepsilon) \right) - g \dot{\theta} \cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Il est nécessaire de préciser que dans ce résultat, nous avons considéré l'angle d'attaque comme étant indépendant du temps. Dans une manœuvre de changement d'angle de tangage, l'angle d'attaque varie à l'amorce de celle-ci, jusqu'au maintien d'un taux de variation de l'angle de tangage, ce dernier étant le terme ayant la plus grande influence au cours de la manœuvre. Une autre situation entraînant une variation de l'angle d'attaque est un changement de la vitesse totale commandée. Par exemple, avec une décélération, en gardant l'angle de tangage constant, l'avion amorcera une légère descente avec une augmentation de l'angle d'attaque due à l'équilibrage des forces. Cette variation est cependant lente et sera ignorée pour la loi de commande de la vitesse. Nous pouvons alors réécrire l'équation matricielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} (C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e) + T z_{eng} \right) \\ \frac{1}{m} \left(-\rho V \dot{V} S C_D - \frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{\tau_T} T \right) - g \dot{\theta} \cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{m \tau_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{e_c} \\ T_c \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (3.57)$$

L'équation visant à asservir la vitesse est complète et valide, étant donné que la valeur de la poussée commandée (T_c) est présente dans l'équation. Nous n'avons toujours pas la variable d'entrée pour la déflexion commandée de l'angle de tangage. En dérivant une autre fois la première équation, nous obtenons

$$I_y \ddot{\theta} = \rho \dot{V} V S \bar{c} (C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e) + \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} (\dot{C}_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \dot{\delta}_e) + \dot{T} z_{eng} \quad (3.58)$$

Dans cette nouvelle équation, deux termes nécessitent une étude plus approfondie afin de déterminer si les données des variables utilisées dans la synthèse du contrôleur sont calculables à l'aide des capteurs installés sur un avion de ligne :

$$\begin{aligned}
&\rho \dot{V} V S \bar{c} C_{m_{ac}} \\
&\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \dot{C}_{m_{ac}}
\end{aligned} \quad (3.59)$$

Nous pouvons développer le premier terme en remplaçant la représentation de l'accélération de la vitesse totale avec les composantes de vitesse et d'accélération dans le repère-avion, avec la supposition d'un vol coordonné ($\beta = 0$). Dans l'équation suivante, nous avons utilisé les composantes de vitesse u et w , et d'accélération \dot{u} et \dot{w} , provenant des stations de référence inertielle de l'avion ainsi que de l'équation (3.50) pour développer le terme.

$$\begin{aligned}
\rho \dot{V} V S \bar{c} C_{m_{ac}} &= \rho V S \bar{c} (a_1 \alpha + a_0) \frac{(u\dot{u} + w\dot{w})}{\sqrt{u^2 + w^2}} \\
&= \rho S \bar{c} (a_1 \alpha + a_0) (u\dot{u} + w\dot{w}) \\
&= \rho S \bar{c} \left(a_1 \operatorname{atan} \left(\frac{w}{u} \right) + a_0 \right) (u\dot{u} + w\dot{w})
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Comme présenté dans l'Annexe II, un résultat équivalent au taux de variation de l'angle d'attaque est exprimé en composantes de vitesse et d'accélération du repère-avion. Nous devons noter que $\dot{\alpha}$ dans la prochaine équation n'est pas ignoré, étant donnée la présence des accélérations \dot{u} et \dot{w} dans l'équation (3.60). Le deuxième terme est alors égal à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \dot{C}_{m_{ac}} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} a_1 \dot{\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} a_1 \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2 + w^2} \\
&= \frac{1}{2} \rho S \bar{c} a_1 (u\dot{w} - w\dot{u})
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Afin de simplifier la représentation dans les équations qui suivent, nous allons conserver la notation \dot{V} et $\dot{\alpha}$, tout en se rappelant qu'avec l'implémentation du contrôleur, les résultats des équations-A (II-2) et (II-4) seront utilisés. L'équation finale linéarisant la troisième dérivée de l'angle de tangage est alors

$$I_y \ddot{\theta} = \rho \dot{V} V S \bar{c} (C_{m_{ac}} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e) + \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} (a_1 \dot{\alpha} + C_{m_{\delta_e}} \dot{\delta}_e) + \dot{T} z_{eng} \tag{3.62}$$

En incluant la dynamique des actionneurs de l'équation (3.51), nous pouvons réécrire l'équation de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
I_y \ddot{\theta} &= \rho V S \bar{c} \left[\dot{V} (a_1 \alpha + a_0) + \frac{V a_1 \dot{\alpha}}{2} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \left(\dot{V} - \frac{V}{2\tau_{\delta_e}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{z_{eng}}{\tau_T} [T_c - T] + \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \frac{C_{m_{\delta_e}}}{\tau_{\delta_e}} \delta_{ec}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{bmatrix} \delta_{e_c} \\ T_c \end{bmatrix} = \Delta^{-1}(\mathbf{x}) \left(\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{V} \end{bmatrix} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.64)$$

avec

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\rho V S \bar{c}}{I_y} \left[\dot{V} (a_1 \alpha + a_0) + \frac{V a_1 \dot{\alpha}}{2} + C_{m_{\delta_e}} \delta_e \left(\dot{V} - \frac{V}{2\tau_{\delta_e}} \right) \right] - \frac{z_{eng}}{I_y \tau_T} T \\ \frac{1}{m} \left(-\rho V \dot{V} S C_D - \frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{\tau_T} T \right) - g \dot{\theta} \cos(\theta - \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

et

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_{m_{\delta_e}} (\tau_{\delta_e} I_y)^{-1} & z_{eng} (\tau_T I_y)^{-1} \\ 0 & \frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{m \tau_T} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La matrice Δ doit nécessairement être non-singulière, sans quoi, l'inversion dynamique ne pourra être utilisée avec cet ensemble d'équations. Cette affirmation est vraie à l'exception de $V = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, deux conditions de vol qui ne peuvent pas exister.

Avec cette transformation, les deux nouvelles variables linéarisées de contrôle sont $\ddot{\theta}$ et \ddot{V} . En pratique, si nous souhaitons mesurer ces valeurs, nous devrions installer des accéléromètres comme capteurs et dériver le signal en fonction du temps. Pour une application réelle, un bruit élevé serait présent dans les données calculées, les rendant inutilisables dans une loi de commande. Par contre, ces deux variables n'ont pas besoin d'être mesurées. Comme nous pouvons constater avec l'équation (3.64), ces deux variables permettent de calculer le vecteur de contrôle du système, δ_{e_c} et T_c . Au sous-chapitre 3.3.3, nous verrons que les contrôleurs linéaires servent à calculer $\ddot{\theta}$ et \ddot{V} . Une mesure directe de celles-ci n'est jamais nécessaire pour

la loi de commande ou le contrôleur linéaire. Pour compléter les calculs, nous devons mesurer l'angle de tangage et ses deux premières dérivées, et la vitesse propre (V) et sa première dérivée, tous disponibles avec une combinaison des données de la station inertielle et de l'ADC.

Avec cette loi de commande, le degré relatif du contrôleur est égal à cinq; trois pour l'axe de contrôle d'angle de tangage et deux pour celui de la vitesse. Avec l'équation (3.53), nous avons pu constater que ce système possède six dimensions en incluant la dynamique des actionneurs. Nous devons donc nous questionner sur l'effet de la dynamique interne sur la stabilité du système.

3.3.1.1 Dynamique-zéro longitudinale

Étant donné la différence entre le degré relatif de la loi de commande et le degré de liberté du système, nous devons déterminer si la dynamique interne est stable. Comme mentionné dans la section précédente, la variation de l'angle d'attaque est l'équation pour laquelle nous devons appliquer la technique de dynamique-zéro. Si nous isolons l'équation de celle-ci dans la matrice présentée avec l'équation (3.53), nous obtenons alors :

$$\dot{\alpha} = f_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (3.67)$$

Dans la définition de la technique de la dynamique-zéro, nous devons déterminer la stabilité lorsque nous gardons la valeur de la variable de sortie constante en effectuant les corrections avec les entrées du système. Maintenir cette valeur fixe équivaut à fixer les variables d'état suivantes :

$$\begin{aligned} q &= 0 \\ \theta &= \theta_{ref} \\ V &= V_{ref} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Avec la dynamique-zéro, la commande des variables d'entrée du système devra alors annuler toute déviation de l'équation (3.68), ce qui signifie que le taux de variation de l'angle d'attaque ne sera affecté que par un angle d'attaque qui n'est pas à l'équilibre. En reprenant la représentation d'état du sous-chapitre 1.6.2 et en supposant que $\alpha \ll 1$, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\dot{\alpha} = \frac{Z_w}{V} \Delta\alpha = Z_\alpha \Delta\alpha \quad (3.69)$$

Cette équation est valide uniquement à proximité du point d'équilibre pour lequel la dérivée aérodynamique de stabilité a été calculée. Cette dérivée représente la variation de la force de portance avec une variation de l'angle d'attaque. Dans ce cas-ci, la relation peut être établie sans aucun calcul. Lorsque nous augmentons l'angle d'attaque, la force de portance augmente également. Donc, la force Z est encore plus négative. Cette affirmation est vraie sur l'ensemble de l'enveloppe de vol sauf lorsque l'angle d'attaque dépasse largement la valeur de décrochage, une condition de vol qui n'a pas besoin d'être asservie par notre contrôleur. Cette relation signifie que $Z_\alpha < 0$. Par conséquent, la dynamique-zéro est exponentiellement stable dans l'enveloppe opérationnelle et nous avons un système à minimum de phase asymptotique.

L'inversion dynamique aurait pu être complétée avec d'autres variables pour éviter l'étude de la dynamique-zéro, cependant, celles choisies permettent une implantation simplifiée avec des modes du système de pilotage automatique qui existent déjà. Une dérivation additionnelle en fonction du temps aurait augmenté le degré relatif de la loi de commande et aurait égalé le degré de liberté du système. Par contre, le signal provenant des capteurs nécessiterait une dérivation supplémentaire, augmentant le bruit, et engendrerait des difficultés d'implantation. Avec les lois de commande déterminées pour le contrôle longitudinal et la confirmation de la stabilité locale de la dynamique-zéro sur l'ensemble de l'enveloppe de vol, nous pouvons maintenant nous concentrer sur la dérivation des lois de commande latérale.

3.3.2 Lois de commande latérale

La dynamique latérale comprend un couplage entre le roulis et le lacet qui doit être pris en charge dans la synthèse d'un contrôleur. Ce couplage crée, entre autres, du roulis hollandais qui peut rendre l'aéronef instable. Traditionnellement, un asservissement de l'angle de roulis est effectué avec la déflexion des ailerons, et la détérioration du vol due au roulis hollandais est mitigée à l'aide d'un amortisseur de lacet qui commande la gouverne de direction.

Pour la synthèse d'un contrôleur d'inversion dynamique dans le cadre de ce projet recherche, nous devons donc nous assurer que le couplage aérodynamique entre le mouvement de roulis et de lacet est asservi adéquatement pour donner des conditions de vol répondant au cahier des charges. Pour atteindre cet objectif, nous allons utiliser l'équation de roulis et d'accélération latérale du repère-avion, équations tirées de Cook (2013, pp. 78-79) :

$$\begin{aligned}
 m(\dot{v} + ru - pw) &= mg \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{1}{2} \rho V^2 S \sum C_Y \\
 I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) &= \frac{1}{2} \rho V^2 b S \sum C_{l_b}
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Tout d'abord, regardons l'équation (3.70) pour la force latérale. Le premier terme introduit l'accélération linéaire latérale (\dot{v}) ainsi que l'effet d'un mouvement non rectiligne dans le repère-avion ($ru - pw$). Le deuxième terme est la composante de la gravité dans l'axe y_b . Finalement, le troisième terme est la somme de la composante de force aérodynamique pour ce même axe, force qui est fonction des variables d'état et de contrôle.

En étudiant de plus près le coefficient de force latérale (C_Y), nous pouvons décomposer la somme des coefficients en deux, soit, une partie qui dépend de l'état de l'avion ($C_{Y_{acc}}$), et une partie qui dépend des entrées. Seul l'angle de déflexion de la gouverne de direction a un effet sur la force latérale. La déflexion des ailerons et des aérofreins ne génère pas d'accélération latérale.

$$C_Y = C_{Y_{ac}} + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r \quad (3.71)$$

De plus, le coefficient aérodynamique, qui est une fonction de l'état de l'aéronef ($C_{Y_{ac}}$), constituera l'estimation de la modélisation pour une configuration spécifique, c'est-à-dire la position des volets. Pour l'estimation du modèle, nous allons supposer que la contribution provenant de l'angle de dérapage ($C_{Y_{\beta}}$) et du taux de lacet (C_{Y_r}) sont chacune une constante, et la contribution du taux de variation de roulis (p_s) est une relation linéaire en fonction de l'angle d'attaque. Les coefficients de roulis et lacet sont également multipliés par un ratio de l'envergure et de la vitesse totale (voir Équation-A (V-6)). Les détails de l'estimation des coefficients sont présentés à l'Annexe V.

$$C_{Y_{ac}} = C_{Y_{\beta}} \beta + C_{Y_p} p_s + C_{Y_r} r_s \quad (3.72)$$

L'équation finale de l'accélération latérale (\dot{v}) se résume alors avec

$$\dot{v} = pw - ru + g \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{1}{2m} \rho V^2 S (C_{Y_{ac}} + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r) \quad (3.73)$$

Avec cette première équation en main, nous devons maintenant discuter de l'accélération angulaire de roulis de l'équation (3.70).

Le côté gauche de cette équation décrit la relation du couplage inertiel pour la dynamique de roulis. Le côté droit de l'équation représente la composante du moment aérodynamique autour de l'axe x_b . Nous devons mentionner que la représentation des coefficients aérodynamiques, traditionnellement, est liée aux composantes du moment dans le repère-stabilité, et non du repère-avion. Étant donné que l'équation (3.70) est dans le repère-avion, nous devons donc transformer les composantes du vecteur de moment aérodynamique du repère-stabilité au repère-avion. Pour le moment de roulis et de lacet, seuls les coefficients diffèrent dans l'expression. Nous allons donc transformer le repère des coefficients :

$$\begin{bmatrix} C_{l_b} \\ C_{m_b} \\ C_{n_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Nous pouvons maintenant remplacer C_{l_b} dans l'Équation (3.70) avec des termes pour lesquels nous avons les données dans l'ouvrage de Hanke et Nordwall (1970).

$$I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) = \frac{1}{2} \rho V^2 S b (C_l \cos \alpha - C_n \sin \alpha) \quad (3.75)$$

Dans une opération nominale, c'est-à-dire des virages coordonnés jusqu'à 30 degrés d'angle de roulis et d'angle d'attaque de 10 degrés, la valeur du coefficient C_l est plus grande d'au moins un ordre de grandeur comparé à C_n (Figure-A VI-1). De plus, avec un angle d'attaque maximum de 10 degrés, le terme $C_l \cos \alpha$ est beaucoup plus grand que $C_n \sin \alpha$. Alors, ce dernier peut être négligé.

$$I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_l \cos \alpha \quad (3.76)$$

Pour les termes représentant le couplage inertiel et l'accélération angulaire, étant donné que nous étudions l'asservissement de l'opération normale d'un avion de ligne, nous pouvons aborder le problème sous le même angle que la linéarisation de la dynamique. En supposant que les composantes de la vitesse angulaire soient $\ll 1$, nous pouvons alors ignorer le multiple de ces valeurs parce que le résultat ne sera pas significatif (Cook, 2013, p. 81). Nous simplifions alors l'équation précédente pour obtenir :

$$I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_l \cos \alpha \quad (3.77)$$

Toujours dans le contexte d'une opération d'un avion de ligne, la valeur du multiple de l'accélération angulaire \dot{r} est plus petite que celui de \dot{p} tout au long de la mise en virage. Une comparaison des ratios χ_1 et χ_3 de l'équation-A (VI-2) permet d'effectuer cette affirmation

dans un virage normal (voir Figure-A VI-2). Nous pouvons alors affirmer que le deuxième terme est négligeable également, et conservons uniquement le premier :

$$I_x \dot{p} = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_l \cos \alpha \quad (3.78)$$

Maintenant, il est nécessaire d'aborder le sujet de la modélisation du coefficient de moment de roulis (C_l). Tout d'abord, nous séparons la contribution des gouvernes agissant sur la dynamique latérale, soit l'angle de déflexion de la gouverne de direction (δ_r) et l'angle de déflexion du volant pour le contrôle latéral (δ_w). Ce dernier est relié à l'angle de déflexion des ailerons et des panneaux de destructeurs de portance (Tableau-A I-6). Finalement, le coefficient de moment de roulis pour le reste de l'avion ($C_{l_{ac}}$) représente la balance du moment aérodynamique de roulis.

$$C_l = C_{l_{ac}} + C_{l_{\delta_w}} \delta_w + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \quad (3.79)$$

Cette dernière équation requiert une estimation de la modélisation qui sera fonction des variables d'état. Nous utilisons, à nouveau, l'angle de dérapage (β), la vitesse angulaire de roulis (p_s) et de lacet (r_s) dans le repère-stabilité. Dans ce cas-ci, les coefficients C_{l_β} et C_{l_r} sont fonctions d'une relation linéaire avec l'angle d'attaque, et le coefficient C_{l_p} est une constante. Les deux coefficients qui représentent la vitesse angulaire en roulis et en lacet sont multipliés par un ratio qui comprend la vitesse totale de l'avion et l'envergure, tel que présenté avec l'équation-A (V-6).

$$C_{l_{ac}} = C_{l_\beta} \beta + C_{l_p} p_s + C_{l_r} r_s \quad (3.80)$$

Nous obtenons alors l'équation finale pour l'accélération angulaire (\dot{p}) :

$$I_x \dot{p} = \frac{1}{2} \rho V^2 S b \left(C_{l_{ac}} + C_{l_{\delta_w}} \delta_w + C_{l_{\delta_r}} \delta_r \right) \cos \alpha \quad (3.81)$$

Maintenant, avec les deux équations nécessaires à la résolution du problème, nous allons réécrire le système d'équations sous la forme usuelle de l'inversion dynamique :

$$\begin{bmatrix} \delta_w \\ \delta_r \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \left(\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} - \mathbf{b}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.82)$$

Premièrement, la fonction matricielle $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ est égale à

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\rho V^2 S b C_{l_{ac}} \cos \alpha}{2I_x} \\ pw - ru + g \cos(\theta) \sin(\phi) + \frac{\rho V^2 S C_{Y_{ac}}}{2m} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Et finalement, la matrice Δ est égale à

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\rho V^2 S b C_{l_{\delta_w}} \cos \alpha}{2I_x} & \frac{\rho V^2 S b C_{l_{\delta_r}} \cos \alpha}{2I_x} \\ 0 & \frac{\rho V^2 S C_{Y_{\delta_r}}}{2m} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Il est important de prendre note que la matrice Δ est non-singulière pour l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle, une condition nécessaire pour la synthèse du contrôleur d'inversion dynamique. Une valeur de $V = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ empêcherait l'inversion, deux conditions de vol qui ne peuvent être atteintes en opération normale. Également, les entrées ont été directement utilisées et la dynamique des actionneurs a été ignorée. En opposition au contrôle longitudinal, la dynamique des actionneurs est grandement plus rapide que la réponse de l'avion. Atteindre une pleine déflexion des gouvernes prend moins d'une seconde, alors que l'atteinte d'un angle de roulis commandé prendra environ cinq secondes. Il est raisonnable d'affirmer que la dynamique des actionneurs aura un effet négligeable sur l'induction d'une dynamique plus lente telle que l'angle de roulis. Cependant, nous devons garder à l'esprit que

si nous n'obtenons pas des résultats escomptés, cette supposition devra être revue afin de s'assurer qu'elle n'introduise pas d'écart significatif dans l'estimation du modèle.

Le degré relatif de la loi de commande latérale est égal à trois. Avec un total de quatre variables d'état pour décrire la dynamique, nous devons encore aborder le sujet de la dynamique interne à nouveau.

3.3.2.1 Dynamique-zéro latérale

Dans l'équation (3.84), nous avons défini le vecteur d'état représentant la dynamique latérale. Maintenir les variables de sortie à zéro équivaut à garder les valeurs du système d'équations ci-dessous constantes, si nous supposons que $p \approx \dot{\phi}$, supposition valable pour de faibles valeurs d'angle de tangage.

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ \phi &= \phi_{ref} \\ p &= 0 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Lorsque nous observons la représentation d'état pour la dynamique latérale (voir équation-A (II-13)), nous nous retrouvons à évaluer la relation

$$\dot{r} = N_r \Delta r \tag{3.86}$$

Pour un vol à angle d'attaque relativement petit, nous pouvons affirmer que la contribution du coefficient du moment de lacet pour un taux de variation de lacet (C_{n_r}) est proportionnelle au moment N_r . À partir de l'ouvrage de Hanke et Nordwall (1970), nous pouvons affirmer que le coefficient C_{n_r} est négatif pour tout l'ensemble de vol. Par conséquent, le moment N_r est également négatif pour toutes les conditions opérationnelles. Pour cette raison, la dynamique-zéro est alors globalement exponentiellement stable. Comme le contrôle longitudinal, nous aurions pu effectuer le développement avec un choix alternatif de variables ou une dérivation

supplémentaire. Cependant, afin d'avoir une familiarité avec des variables de contrôle normalement utilisées et limiter le degré de dérivation du signal des capteurs, le choix s'est arrêté sur le résultat que nous avons obtenu.

Avec les lois de commande définies pour les quatre axes de contrôle, nous devons maintenant définir les contrôleurs linéaires que nous allons utiliser pour accomplir la tâche de suivi.

3.3.3 Contrôleurs linéaires

Avec les quatre lois de commande trouvées précédemment, il est nécessaire d'intégrer des contrôleurs linéaires pour chaque axe de contrôle, nous permettant de prérégler la dynamique souhaitée. Pour une loi de commande v , la méthode préconisée dans le cadre de ce projet de recherche est celle présentée par Dang Vu (1997, p. 105) :

$$v = y_d^{(r)} - \sum_{k=0}^{r-1} c_k (z_{k+1} - y_d^{(k)}) \quad (3.87)$$

L'erreur de suivi correspond alors à

$$e = y - y_d \quad (3.88)$$

Et nous pouvons donc ajuster la dynamique à l'aide des coefficients de l'équation suivante :

$$e^{(r)} + c_{r-1}e^{(r-1)} + \dots + c_1e^{(1)} + c_0e = 0 \quad (3.89)$$

Si nous prenons en exemple l'axe de contrôle pour l'angle de tangage, nous obtenons alors

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d - c_2(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d) - c_1(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - c_0(\theta - \theta_d) \quad (3.90)$$

La valeur de la variable $\ddot{\theta}$ sera alors utilisée par la loi de commande pour générer une déflexion de la gouverne de profondeur et un ajustement de la poussée des réacteurs. Comme discuté au

sous-chapitre 3.3.1, pour ce contrôleur linéaire, la valeur de l'angle de tangage, sa vitesse et son accélération angulaire doivent être mesurées par des capteurs, dans ce cas-ci, les stations inertielles de l'avion. Les vitesses et accélérations angulaires mesurées par celles-ci sont dans le repère-avion. Nous pouvons donc utiliser l'équation (1.11) pour calculer le taux de variation de l'angle de tangage ($\dot{\theta}$), et dériver cette équation pour obtenir l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$. Une approche similaire nous permet de définir le contrôleur linéaire pour l'angle de roulis. Pour les axes de maintien de vitesse et d'amortissement de lacet, les vitesses et accélérations linéaires nous aideront à définir ces deux contrôleurs linéaires.

Nous devons maintenant définir les pôles que nous désirons voir dans la dynamique de chaque axe de contrôle (Tableau 3.1). Il est nécessaire de tenir compte de la nature de chaque axe pour choisir adéquatement des valeurs. Par exemple, l'asservissement de la vitesse ne peut être aussi rapide que l'angle de tangage.

Tableau 3.1 Réglages des pôles du contrôleur linéaire pour chaque axe de contrôle

Axe de contrôle	Pôles
Angle de tangage	Paire complexe : $\omega_n = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\zeta = 0,8$ Pôle d'accélération : $p_3 = 5 \text{ s}^{-1}$
Vitesse	Deux pôles : $p_1 = 0,1667 \text{ s}^{-1}$ et $p_2 = 2 \text{ s}^{-1}$
Angle de roulis	Paire complexe : $\omega_n = 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\zeta = 0,6$
Amortissement de lacet et coordination de virage	Pôle unique : $p_1 = 2 \text{ s}^{-1}$

Ces choix ont été faits en considérant la performance requise pour satisfaire les qualités de vol de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997). Également, nous devons définir les constantes de temps pour la dynamique des actionneurs.

Tableau 3.2 Constantes de temps pour les actionneurs de la dynamique longitudinale

Actionneur	Constante de temps (s)
Réacteur	$\tau_T = 5s$
Gouverne de profondeur	$\tau_{\delta_e} = 0,1s$

Avec les lois de commande entièrement définies et des contrôleurs linéaires pour assurer le suivi, nous pouvons maintenant aborder la phase des essais en simulateur.

CHAPITRE 4

ESSAIS SIMULÉS ET ANALYSE

Le moment de vérité lors d'une synthèse d'un contrôleur est la validation de la performance de celui-ci. Les caractéristiques de la dynamique de vol ont été étudiées abondamment depuis les débuts de l'aviation. Elles se sont précisées et ont évolué avec la mise sur le marché d'avions qui repoussaient les limites de leurs prédécesseurs. Des essais en vol sont normalement effectués pour recueillir ces informations. Dans le cadre de ce projet de recherche, nous devons utiliser des essais en simulateur pour confirmer la performance.

Afin de poser un jugement objectif sur l'interaction entre notre contrôleur et une simulation du Boeing 747, nous devons tout d'abord définir une enveloppe de vol qui sera l'objectif pour les paramètres mesurés, qualifiant la réponse des variables de sorties. Par la suite, nous devons établir des procédures d'essais en simulation qui permettront la mesure de ces paramètres. Les résultats seront finalement présentés, et une analyse mettra en lumière les points forts et les points faibles de nos lois de commande.

4.1 Caractéristiques de manœuvrabilité

Une étape révélatrice de la synthèse d'un contrôleur est la mise en ligne et les essais qui s'en suivent, dans le but de comparer la performance actuelle avec celle désirée. Normalement, un cahier des charges définit des limites pour lesquelles l'asservissement sera adéquat ou non, limites qui sont posées au début du projet. Afin de se baser sur des données ayant fait leurs preuves, des spécifications publiées par le Département de la Défense du gouvernement américain définissent des qualités de vol applicables à différentes catégories d'avion, et à différentes phases de vol. Cette évaluation nous donne les outils pour évaluer si un niveau de performance minimal a été atteint.

4.1.1 Ouvrages de référence

Dans l'étude de l'asservissement d'un avion, l'enveloppe de vol varie grandement en vitesse et en altitude. Pour faciliter le travail des pilotes et maximiser le niveau de sécurité d'un aéronef, une dynamique stable qui présente des caractéristiques semblables pour l'ensemble des conditions de vol est primordiale. Nous pouvons même généraliser que des valeurs souhaitables caractérisant les modes de la dynamique d'un avion en particulier peuvent se transposer comme prérequis pour la même catégorie d'avion et pour une même phase de vol. Une approche systémique pour cette évaluation est disponible avec l'échelle Cooper-Harper qui compte sur l'opinion du pilote aux commandes (Stevens et al., 2015, p. 275). Cette notation portant sur la manœuvrabilité a été grandement utilisée pour établir une corrélation entre des paramètres décrivant la dynamique d'un aéronef et l'expérience de pilotage au début du développement de ce champ d'études.

Avec l'expérience de la conception et des essais en vol des nouveaux aéronefs, le Département de la Défense des États-Unis a développé un guide qui permet aux avionneurs d'avoir des critères de base pour le design des aéronefs. Cette spécification nommée MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980) sert de référence également pour les avions civils. Ce guide est utile tout au long du processus de la conception, incluant les essais et l'analyse des résultats. Tous les systèmes d'augmentation de stabilité et de contrôle doivent être inclus dans l'évaluation. Les avions sont divisés en plusieurs classes, selon leur poids et leur niveau de manœuvrabilité. Il y a une différenciation au niveau de la précision et de la rapidité de la réponse d'une commande en fonction de la phase de vol (Tableau-A VII-1). Ce document définit donc des spécifications pour la combinaison de ces conditions, pour les différents paramètres de la dynamique longitudinale, latérale et directionnelle.

Réédité en 1997, *Flying Qualities of Piloted Aircraft* (Department of Defense, 1997) reprend les paramètres d'évaluation qui ont été présentés en premier par le document de référence précédent et une revue littéraire est effectuée pour juger de la pertinence des différentes approches. Ce guide aborde également le thème de l'exécution des essais simulés et en vol

pour uniformiser la marche à suivre. Étant donné que certains paramètres peuvent être mesurés de différentes façons, l'évaluation de chaque technique est faite pour juger de la pertinence et le domaine d'applicabilité. Entre autres, cette spécification prescrit des caractéristiques de la réponse pour l'angle de tangage et de roulis, ainsi que le roulis hollandais. Par conséquent, ce document sera la référence primaire pour notre évaluation des paramètres, mais aussi dans la création des procédures pour l'exécution et la collecte de données.

Un autre ouvrage pertinent dans le cadre de notre projet de recherche se nomme *General Specification for Flight Control Systems* (Department of Defense, 2008). Ce document définit la performance générale, le design, le développement ainsi que le contrôle de qualité requis pour le développement d'un système de pilotage automatique. Utilisés conjointement avec *Flying Qualities of Piloted Aircraft* (Department of Defense, 1997), certains prérequis sont dupliqués et avec l'ajout d'exigences supplémentaires reliées spécifiquement aux modes d'un système de pilotage automatique. Nous allons donc devoir nous assurer que ceux-ci sont respectés lors de nos essais et répondent à un niveau de performance approprié. Finalement, une description de performance pour les boucles de commande qui s'ajouteront à l'extérieur de notre contrôleur, telles que le suivi de cap, d'altitude et de vitesse, est présentée et nous guidera dans la sélection des valeurs de référence pour les limites de taux de variation que notre système devra répondre dans une opération normale.

Avant d'amorcer la création de nos procédures d'essais, nous devons définir l'approche de système équivalent nécessaire pour le calcul des quantités que nous désirons évaluer.

4.1.2 Systèmes équivalents

Afin d'obtenir une méthode d'évaluation objective pour les caractéristiques de vol, nous devons développer une façon de mesurer les paramètres des modes de la dynamique. Si nous considérons que la réponse temporelle est comparable à un signal d'un système linéaire, nous pouvons calculer ces paramètres en posant une équation de réponse linéaire et ajuster la courbe pour minimiser la différence entre les données collectées et l'équation posée. Cette méthode

est le principe fondamental dans l'approche de système équivalent, approche que nous utiliserons pour déterminer plusieurs types de données caractérisant la dynamique de notre système.

L'utilisation d'un système équivalent ayant un plus petit degré de liberté nous permet de généraliser les limites bien établies pour la description classique de la dynamique, à des systèmes ayant un ordre plus élevé (Department of Defense, 1997, p. 179). Dans l'approche classique de la dynamique longitudinale d'un avion, les deux modes dominants se nomment la phugoïde et le mode courte période, tels que définis au Chapitre 2. Pour l'intégration de notre contrôleur, l'asservissement d'un angle de tangage commandé correspond au mode courte période. La norme MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997, p. 179) définit la fonction de transfert du mode courte période pour une entrée échelon comme étant

$$\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{M_{\delta_e} \left(s + \frac{1}{T_{\theta_2}} \right) e^{-\tau_{\theta} s}}{s \left(s^2 + 2\zeta_{cp} \omega_{ncp} s + \omega_{ncp}^2 \right)} \quad (4.1)$$

En observant plus attentivement cette équation, nous pouvons voir qu'il y a une paire de pôles complexe avec la dynamique que nous désirons induire avec notre contrôleur, un zéro et un retard. Le zéro de ce système provient du retard de la variation de l'angle de la trajectoire de vol et modifie la réponse de l'angle de tangage avec une entrée échelon pour la gouverne de profondeur (Department of Defense, 1997). Si nous supposons que notre contrôleur induit une dynamique en neutralisant l'effet de ce zéro et que le retard est négligeable par rapport à la dynamique imposée, nous devrions observer alors une réponse idéalisée d'un système du deuxième ordre :

$$\frac{\theta(s)}{\theta_c(s)} = \frac{\omega_{ncp}^2}{s^2 + 2\zeta_{cp} \omega_{ncp} s + \omega_{ncp}^2} \quad (4.2)$$

Similairement pour une commande de variation de tangage, nous pouvons affirmer que

$$\frac{q(s)}{q_c(s)} = \frac{\omega_{n_{cp}}^2}{s^2 + 2\zeta_{cp}\omega_{n_{cp}}s + \omega_{n_{cp}}^2} \quad (4.3)$$

Étant donné que nous avons affirmé que le zéro de la dynamique courte période affectera minimalement la réponse de notre contrôleur, nous devons utiliser une autre approximation afin de déterminer ce paramètre (tiré de Department of Defense, 1997, p. 180) :

$$\frac{\gamma(s)}{\theta(s)} = \frac{1}{T_{\theta_2}s + 1} \quad (4.4)$$

Avec la transformée inverse de Laplace de l'équation (4.4), nous pouvons calculer le paramètre T_{θ_2} avec l'ajustement de courbe après la stabilisation de l'angle de tangage. L'équation décrit la relation entre la trajectoire de vol (γ) et l'angle de tangage.

Dans le cas de la dynamique latérale, la fonction de transfert représentant les modes, telle que définie dans le manuel MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997, p. 396), s'écrit

$$\frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{K_\phi (s^2 + 2\zeta_\phi \omega_\phi s + \omega_\phi^2) e^{-\tau_p s}}{(T_S s + 1)(T_R s + 1)(s^2 + 2\zeta_{rh} \omega_{rh} s + \omega_{rh}^2)} \quad (4.5)$$

Nous pouvons observer un pôle correspondant au mode spiral, un pôle pour l'amortissement de roulis et une paire complexe pour le roulis hollandais. Dans le contexte de la synthèse de notre contrôleur, le mode spiral peut être ignoré avec sa constante de temps qui est largement plus élevée que les deux autres, et parce qu'il est activement neutralisé par le suivi de l'angle de roulis. De plus, nous séparerons la commande de l'angle de roulis et l'amortisseur de lacet. Si le contrôleur performe adéquatement, nous devrions assister à un découplage entre le roulis hollandais et l'amortissement de roulis. Par conséquent, afin d'évaluer la performance pour les deux modes, nous allons utiliser la réponse de l'angle de roulis (ϕ) et son taux de variation ($\dot{\phi}$) pour le mode d'amortissement de roulis, et l'angle de dérapage pour le roulis hollandais. Il est nécessaire de préciser que pour la synthèse du contrôle de l'angle de roulis, la relation de

l'angle commandé et l'entrée linéarisée est du deuxième ordre, donc la dynamique induite sera une relation du deuxième ordre également. Pour l'évaluation de T_R , il est possible d'utiliser l'amortissement exponentiel de la réponse temporelle du deuxième ordre qui est représentée avec la relation suivante :

$$\frac{1}{T_R} = \zeta_R \omega_{n_R} \quad (4.6)$$

Adapter pour notre collecte de données, la fonction de transfert que nous allons utiliser pour la commande d'angle de roulis et du taux de roulis est

$$\begin{aligned} \frac{\phi(s)}{\phi_c(s)} &= \frac{\omega_{n_R}^2}{s^2 + 2\zeta_R \omega_{n_R} s + \omega_{n_R}^2} \\ \frac{\dot{\phi}(s)}{\dot{\phi}_c(s)} &= \frac{\omega_{n_R}^2}{s^2 + 2\zeta_R \omega_{n_R} s + \omega_{n_R}^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour les paramètres du roulis hollandais, l'équation ci-dessous sera également une représentation d'un système équivalent du deuxième ordre, mais la valeur de référence pour l'angle de dérapage est nulle, voulant dire que β_c est une impulsion. La dynamique observée correspondra alors à la réponse temporelle d'une impulsion et sera mesurée après la stabilisation de l'angle de roulis.

$$\frac{\beta(s)}{\beta_c(s)} = \frac{\omega_{n_{rh}}^2}{s^2 + 2\zeta_{rh} \omega_{n_{rh}} s + \omega_{n_{rh}}^2} \quad (4.8)$$

Avec la possibilité d'utiliser une approche quantitative pour l'évaluation de la dynamique, nous pouvons maintenant aborder la définition des différents paramètres que nous allons mesurer au cours des simulations.

4.1.3 Définition des paramètres mesurés

Au cours d'un vol, l'avion passe par différentes phases, par exemple la montée et l'atterrissage, et en fonction de l'objectif à accomplir, le niveau de performance requis diffère. Dans une phase terminale, telle que l'approche ou l'atterrissage, un niveau plus élevé de précision est nécessaire, avec une plus grande rapidité pour corriger une déviation. Dans des phases de vol non terminales, le suivi serré n'est pas une nécessité. En revanche, l'enveloppe opérationnelle de vol est élargie et l'avion doit opérer jusqu'à l'altitude plafond et sur toute la plage de vitesse autorisée. Pour chaque phase de vol, des seuils de performance pour certains paramètres forment trois niveaux distincts de qualités de vol. Dans la présentation des résultats, ceux qui sont liés à un niveau de performance seront présentés en premier et auront généralement une plus grande importance dans l'évaluation. Les paramètres additionnels qui ne possèdent qu'une valeur extrême seront présentés en second. Certains résultats ne seront pas représentés graphiquement, mais une confirmation dans le texte confirmera que la valeur a été mesurée lors des essais et que les extremums n'ont pas été dépassés lors de la simulation.

4.1.3.1 Dynamique longitudinale

Pour la dynamique longitudinale, le manuel MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997) définit trois exigences qui sont applicables dans le cadre d'une évaluation de performance de notre contrôleur : exigences générales pour la dynamique courte période, pour la fréquence de ce mode et pour la réponse d'un contrôleur en tangage.

Dans l'évaluation générale de la dynamique courte période, nous comparons l'amortissement de ce mode (ζ_{cp}) avec le paramètre CAP (*Control Anticipation Parameter*). Ce paramètre relie l'accélération angulaire initiale en tangage au facteur de charge lorsque l'aéronef est établi à une vitesse angulaire constante lors d'une commande de cette dernière (Department of Defense, 1997). Bien que cette valeur dépende grandement de l'aérodynamisme et qu'un contrôleur n'ait qu'une influence limitée sur cette valeur, nous allons nous assurer que des qualités de vol de niveau 1 soient atteintes (Tableau-A VII-2), et que l'amortissement du mode

courte période respecte ce niveau également. Les limites des différents niveaux de performance sont incluses dans la Figure-A VII-1.

Le deuxième critère d'évaluation de performance se rapporte à la fréquence du mode courte période. Des limites sont définies pour la fréquence propre de ce mode ($\omega_{n_{cp}}$) et le paramètre n/α , qui est le facteur de charge en régime permanent divisé par la variation de l'angle d'attaque à vitesse constante (Department of Defense, 1997). Ce dernier paramètre sert donc indirectement à déterminer la fréquence minimale $\omega_{n_{cp}}$ pour rencontrer le plus haut niveau de performance. Ces limites sont encore une fois présentées à l'Annexe VII avec la Figure-A VII-2.

Le troisième critère de performance est une validation directe de la réponse courte période avec un contrôleur en tangage. Des valeurs limites sont définies pour l'amortissement de ce mode et le produit de la fréquence propre ($\omega_{n_{cp}}$) et du paramètre T_{θ_2} , le zéro de la fonction de transfert de l'équation (4.1) (Figure-A VII-3). Ce produit représente le retard de la phase entre la réponse de l'angle de tangage (θ) et l'angle de trajectoire de vol (γ) (Department of Defense, 1997).

En plus des critères mentionnés précédemment, les ouvrages de référence contiennent des limitations pour un certain nombre de paramètres. Par exemple, le manuel MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997) nous présente des valeurs telles que le ratio des extremums en régime transitoire (Tableau-A VII-5), le retard équivalent (Tableau-A VII-4) et le temps de réaction (Tableau-A VII-6), ce dernier variant avec la vitesse propre.

De façon plus générale, la référence MIL-DTL-9490E (Department of Defense, 2008) spécifie des prérequis supplémentaires pour un système de pilotage automatique. Par exemple, à moins d'être défini spécifiquement, tout mode oscillatoire nécessite un amortissement supérieur à $\zeta > 0,3$. Également, une erreur en régime permanent pour la commande d'un angle de tangage doit être inférieure à $0,5^\circ$. Finalement, lors une manœuvre pour laquelle le maintien de la

vitesse est possible avec les limites de performance de l'avion, l'automanette doit maintenir une tolérance de plus ou moins 5 nœuds pour la vitesse indiquée.

4.1.3.2 Dynamique latérale

Précédemment, pour la dynamique longitudinale, nous avons présenté de nouveaux paramètres qui sont le résultat d'une opération mathématique de valeurs directement mesurées lors de la collecte de données. Pour la dynamique latérale, aucune nouvelle variable n'est introduite et les qualités de vol de l'avion sont entièrement définies avec des mesures directes des variables de sortie.

Un des modes que nous devons asservir avec notre contrôleur est le roulis hollandais. Dans notre conception, nous adressons cette oscillation avec une commande d'angle de dérapage remplissant le rôle d'amortisseur de lacet et de coordonnateur de virage. Le manuel MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997) définit des valeurs minimums pour l'amortissement de ce mode (ζ_{rh}), sa fréquence propre ($\omega_{n_{rh}}$) et un produit des deux paramètres (Figure-A VII-4). Il est aussi mentionné que l'amortissement maximal requis est $\zeta_{rh} = 0,7$. La valeur n'est pas une limite, mais bien la cible maximale nécessaire pour un avion de ligne. La spécification MIL-DTL-9490E (Department of Defense, 2008) définit également des maxima pour l'angle de dérapage, l'accélération linéaire latérale lors d'un mouvement de roulis et en régime permanent.

Finalement pour la commande d'angle de roulis, le paramètre principal à évaluer est la constante de temps pour l'amortissement de roulis (T_R). Comme présenté au Chapitre 4.1.2, ce mode est normalement représenté par une dynamique du premier ordre. Cependant, avec l'équation de moment utilisée, nous devons déterminer deux pôles pour la réponse de la commande. Donc, afin d'évaluer ce paramètre, nous devons utiliser la relation de l'équation (4.6). Étant donné que le taux d'amortissement n'est pas spécifié, nous pouvons utiliser la valeur par défaut minimal de 0,3.

4.2 Essais en simulateur

Avec les définitions des paramètres à mesurer et à calculer en main, nous pouvons maintenant aborder le développement de différentes procédures d'essais afin de recueillir ces données et valider le contrôleur. Nous allons nous concentrer sur deux essais pour la dynamique longitudinale et deux autres pour la dynamique latérale. La phase de vol pour laquelle nous allons nous concentrer est la catégorie B. Cette catégorie comprend, entre autres, la montée, la croisière et la descente (Tableau-A VII-1). La raison pour laquelle nous ciblons cette catégorie est que nous désirons obtenir une validation pour toute l'enveloppe opérationnelle de vol, incluant des conditions où la compressibilité de l'air et l'aéroélasticité ne peuvent pas être négligées. Par conséquent, tous les essais seront effectués avec les volets et le train rentrés.

Afin de déterminer l'étendue nécessaire de l'altitude et la vitesse des tests, il est nécessaire de citer quelques définitions tirées du manuel MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980). Tout d'abord, une définition pour chaque niveau de qualités de vol est présentée (Tableau-A VII-2). Les limites de l'enveloppe de vol opérationnelle et de service sont également définies. L'enveloppe opérationnelle correspond à des limites de vitesse, d'altitude et de facteur de charge pour lesquels l'aéronef est capable d'accomplir la mission opérationnelle et une performance de niveau 1 est nécessaire (Tableau-A VII-3). L'enveloppe de service possède des frontières un peu plus étendues pour atteindre des conditions pour lesquelles le vol est toujours possible, mais non souhaitables, telles que des vitesses avoisinantes au décrochage. Une performance de niveau 2, au minimum, pour cette enveloppe est requise. Dans le cadre des essais, nous nous concentrerons uniquement sur le côté opérationnel.

Ayant défini l'enveloppe de conditions pour les essais et le niveau minimal de qualités de vol requis, il est maintenant possible d'établir une procédure pour chaque test et de spécifier les paramètres pour évaluer la performance.

4.2.1 Engagement du mode de commande d'angle

Lors de l'activation du système de pilotage automatique ou d'un de ces modes, les angles commandés ne sont pas nécessairement synchronisés avec les angles actuels d'Euler. La

spécification MIL-DTL-9490E (Department of Defense, 2008) stipule qu'à l'engagement d'un mode avec une déviation de 5 degrés de la valeur commandée, une précision de $\pm 0,5^\circ$ en tangage et $\pm 1,0^\circ$ en roulis doit être atteinte et maintenue en moins de 5 secondes. De plus, dans la turbulence spécifiée dans cette même spécification, la moyenne quadratique de la déviation ne doit pas dépasser 5 degrés en tangage, et 10 degrés en roulis. Avec ces critères nécessaires, nous pouvons définir une procédure de test pour la dynamique longitudinale et latérale.

4.2.1.1 Réponse longitudinale

Pour l'engagement d'un mode longitudinal, le test doit permettre une évaluation de la commande d'angle de tangage et du maintien de vitesse. Une différence de 5 degrés de l'angle de tangage à partir d'un vol en palier ne garantit pas la possibilité du maintien de la vitesse pour l'ensemble de l'enveloppe et une saturation de la poussée des réacteurs peut arriver. Une descente avec un angle de trajectoire de vol à ce point prononcée peut provoquer une accélération de la vitesse qui ne peut être corrigée par une poussée au ralenti. Afin de minimiser les situations pour lesquelles la commande des réacteurs sera saturée, une déviation de 2 degrés de la position d'équilibre, opposée au sens désiré pour le test, marquera l'angle de tangage initial. Une fois que l'aéronef est stabilisé à cet angle, la variation de 5 degrés sera ensuite envoyée au contrôleur. Nous pouvons alors collecter la réponse temporelle des variables d'état et de sortie. Le calcul des paramètres pour l'évaluation de la performance peut alors être complété. Le test est effectué pour chaque condition de vol, pour une variation positive et négative. En plus des délimitations graphiques des niveaux de qualités de vol présentées à l'Annexe VII, les exigences du Tableau 4.1 seront également surveillées.

Tableau 4.1 Prérequis de performance pour la réponse longitudinale

Paramètre	Limitation
Temps de stabilisation	$t_s \leq 5s$
Erreur en régime permanent	$\Delta\theta_{rp} \leq 0,5^\circ$
Déviations maximale de la vitesse	$\Delta V_{max} \leq 5kts$

4.2.1.2 Réponse latérale

La procédure pour le test en roulis est similaire à celui que nous venons de décrire pour la réponse longitudinale. Précédemment, nous avons cité l'exigence pour la moyenne quadratique maximale permise pour une déviation due à des turbulences normalisées, soit 10 degrés pour l'angle de roulis. Bien qu'une déviation de 5 degrés soit l'exigence lors d'un engagement, nous allons simuler une perturbation de 10 degrés pour le test, afin d'observer la réponse temporelle à une possible déviation de cette valeur. De cette façon, l'exigence pour le suivi d'une déviation de 5 degrés à l'engagement sera respectée. Pour la procédure de l'essai, l'aéronef débutera en vol rectiligne en palier. Lorsque l'avion sera stabilisé, l'angle actuel de tangage deviendra l'angle de référence pour la manœuvre, pour éviter l'interaction du maintien d'altitude et évaluer la déviation de l'angle de tangage. Une commande de roulis de 10 degrés est ensuite envoyée au contrôleur pour simuler la réponse à une perturbation. Après la stabilisation, une commande pour rétablir le vol rectiligne est générée. La réponse temporelle des différentes variables sera collectée pour la génération des deux commandes. En plus des valeurs limitrophes des niveaux de qualités de vol présentées avec la Figure-A VII-4, les paramètres du Tableau 4.2 sont également des exigences qui seront surveillées lors des essais.

Tableau 4.2 Exigences de performance pour la réponse latérale

Paramètre	Limitation
Temps de stabilisation	$t_s \leq 5 \text{ s}$
Amortissement de l'angle de roulis	$\zeta_\phi > 0,3$
Erreur en régime permanent	$\Delta\phi_{rp} \leq 1,0^\circ$
Déviations maximale de la vitesse	$\Delta V_{max} \leq 5 \text{ kts}$
Déviations maximale de l'angle de tangage	$\Delta\theta_{max} \leq 0,5^\circ$
Accélération latérale maximale en virage	$\dot{v} \leq 0,1g$
Accélération latérale résiduelle	$\dot{v} \leq 0,02g$

Angle de dérapage en vol rectiligne	$\beta < 1,0^\circ$
Angle de dérapage en virage	$\beta < 2,0^\circ$

4.2.2 Commande de vitesse angulaire

Avec le test d'engagement d'un mode de suivi d'angle, nous avons répondu à une exigence décrite dans le document MIL-DTL-9490E (Department of Defense, 2008). Il est nécessaire de rappeler que le suivi d'angle de tangage et de roulis est une boucle intermédiaire de l'asservissement d'un avion. Une boucle externe est normalement présente, par exemple, pour maintenir une altitude, le suivi d'une vitesse verticale, le suivi de cap ou le suivi d'une trajectoire. Tous ces modes génèrent des angles commandés pour le tangage et le roulis. Étant donné que notre contrôleur utilise des valeurs de référence pour l'angle, la vitesse et l'accélération angulaire, un test qui commande une vitesse angulaire constante en générant des valeurs de référence pour l'angle et ces dérivés nous permettra d'évaluer la performance globale du contrôleur en tant que boucle intermédiaire.

Pour générer ces commandes et éviter toute discontinuité dans celles-ci, nous allons utiliser une fonction sinusoïdale pour lier l'échelon entre l'état initial et la vitesse angulaire désirée. En intégrant cette fonction, nous obtiendrons alors la commande pour l'angle de référence, et en la dérivant, l'accélération angulaire de référence. La Figure 4.1 représente la génération de commande pour le test de la dynamique latérale.

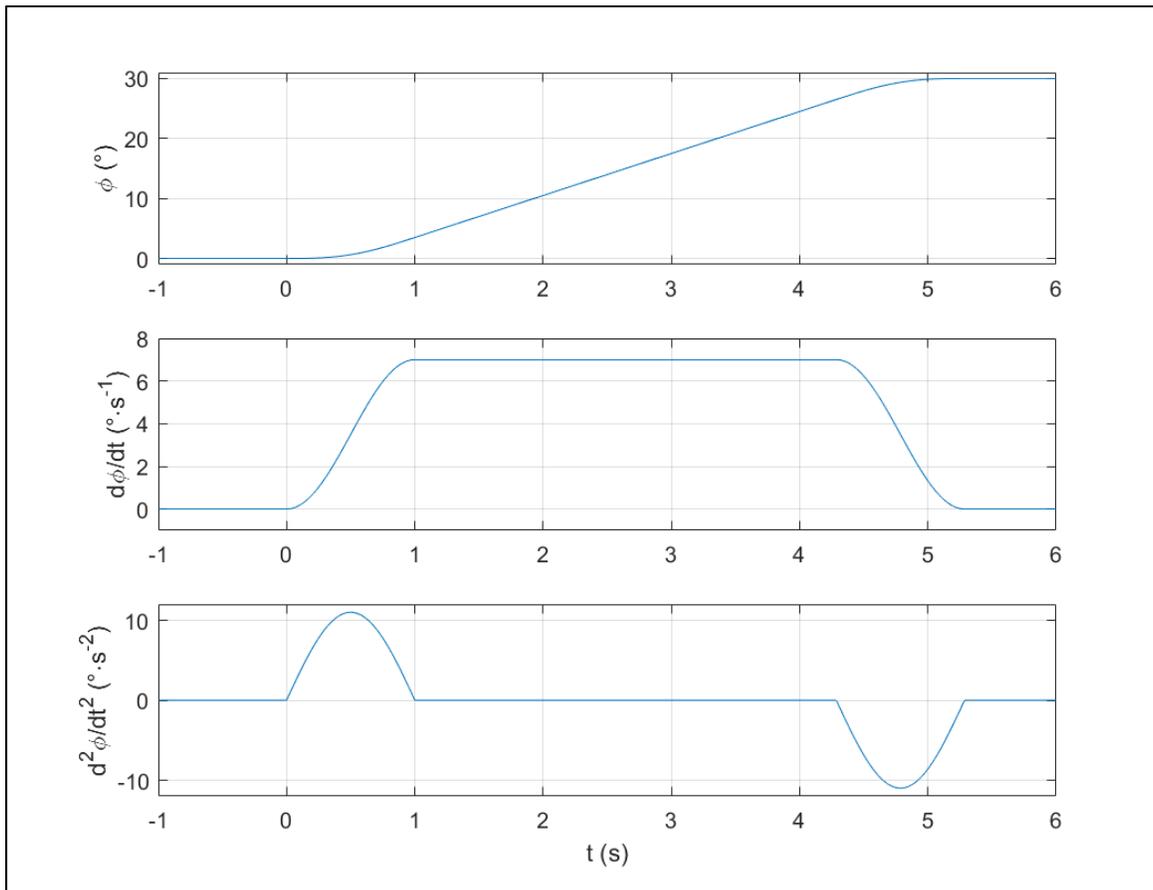


Figure 4.1 Exemple de génération de commande avec fonction sinusoïdale

4.2.2.1 Commande de tangage

Pour la génération d'une commande longitudinale, il est nécessaire de choisir une vitesse angulaire respectant les performances anticipées dans une opération normale, et permettant la mesure adéquate des données pour l'évaluation. Compte tenu de la catégorie de phase de vol étudiée, le choix pour la vitesse angulaire de référence s'est arrêté sur $\dot{\theta}_c = 1^\circ s^{-1}$. Le facteur de charge engendré par cette manœuvre est approximativement de $\Delta n_z = \pm 0,2g$, une accélération qui est raisonnable pour l'opération normale d'un avion de ligne. L'aéronef amorcera la manœuvre à partir d'un vol en palier. Une accélération jusqu'à la vitesse angulaire de référence est initiée pour une période de $t_{acc} = 0,2 s$, jusqu'à un angle de tangage final de $\theta_f = \theta_i + 8^\circ$. La réponse temporelle de la vitesse angulaire est utilisée pour l'approximation

d'une réponse linéaire du deuxième ordre, et pour calculer ainsi les paramètres de la dynamique. Avec les trois délimitations des Figures-A VII-1, VII-2 et VII-3, les paramètres des Tableaux-A VII-4, VII-5 et VII-6 formeront les exigences pour une validation de notre contrôleur, toutes tirées de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997).

4.2.2.2 Commande de roulis

Pour l'essai avec une génération de commande d'un taux de variation de roulis, les signaux de référence pour l'angle de roulis, sa vitesse angulaire et son accélération angulaire ont été présentés précédemment avec la Figure 4.1. La variation totale de l'angle de roulis amène l'aéronef à la limite de l'inclinaison en opération normale, c'est-à-dire $\phi = 30^\circ$. Pour établir la vitesse angulaire de référence pour l'essai, nous avons consulté l'ouvrage de Hanke et Nordwall (1970) et les différents modes du système de pilotage automatique du Boeing 747 sont présentés à l'Annexe D. Tel que discuté précédemment, notre contrôleur est un remplacement de la boucle intermédiaire servant à asservir l'angle de roulis commandé. Pour chaque mode, des limites pour la vitesse angulaire sont imposées afin d'obtenir une réponse appropriée pour la phase de vol. La vitesse angulaire maximale permise se fait avec le mode de suivi de faisceau d'alignement de piste (ILS) et une valeur de $\dot{\phi}_{max} = 7^\circ s^{-1}$. Bien que ce mode soit pour une phase terminale¹, cette cible sera quand même utilisée pour valider le contrôleur. Nous aurons donc une manœuvre plus abrupte qui assurera une marge de sécurité supérieure. Pour effectuer le test, la simulation est initiée en vol rectiligne en palier. Une génération de commande est ensuite envoyée au contrôleur pour l'amorce du virage jusqu'à un angle de roulis de 30° . L'assiette est maintenue pour 15 secondes avant de sortir du virage avec des commandes opposées à l'entrée. Le mode maintien d'altitude du logiciel FlightSIM est activé et envoie des commandes au contrôleur longitudinal pour le suivi d'altitude. Pour évaluer la performance du contrôleur, les paramètres mesurés avec la réponse temporelle des variables d'état seront comparés aux limites définies de Figure-A VII-4, ainsi qu'à celles

¹ Catégorie C selon la spécification MIL-STD-8785C (Department of Defense, 1980)

décrites dans les Tableaux 4.2 et 4.3, tirées de la spécification MIL-DTL-9490E (Department of Defense, 2008).

Tableau 4.3 Exigences pour la performance d'une commande de roulis

Paramètre	Limitation
Déviaton de l'altitude commandée	$ h - h_c \leq 30'$
Déviaton de la vitesse commandée	$ V - V_c \leq 5 \text{ KTAS}$

4.3 Résultats des essais de simulation

Pour chaque test proposé, des essais sont menés à des multiples de 4000 pieds d'altitude jusqu'à 36 000 pieds. Pour chaque niveau de vol, la vitesse d'initialisation varie de 220 KIAS à 320 KIAS, avec des incréments de 20 KIAS, à l'exception de l'altitude de 36 000 pieds où les vitesses de 300 et 320 KIAS sont ignorées. Cette enveloppe donne une couverture adéquate des conditions présentées au Tableau-A VII-3. Aucune influence de la masse et du centrage n'est anticipée dans notre cas, étant donné que la masse et le tenseur d'inertie sont inclus dans la loi de commande. Les écarts dans la performance du contrôleur sont attendus pour des régimes transsoniques, dus à la modélisation simplifiée qui ne prend pas en compte l'aéroélasticité. Les données sont donc compilées pour chaque test, et rassemblées en un seul graphique, pour toutes les conditions d'initialisation.

4.3.1 Engagement du mode d'angle commandé

4.3.1.1 Réponse longitudinale

Un exemple d'une réponse temporelle typique des variables d'état et de contrôle est présenté à l'annexe VIII (voir Figure-A VIII-1). Nous pouvons observer les résultats mesurés pour le mode courte période (Figure 4.2). Pour toutes les conditions de vol, avec un changement positif et négatif, le niveau 1 est atteint pour les qualités de vol. De plus, on constate que le choix

d'amortissement $\zeta_{cp} = 0,8$ se traduit par une valeur qui est sensiblement identique avec l'analyse temporelle.

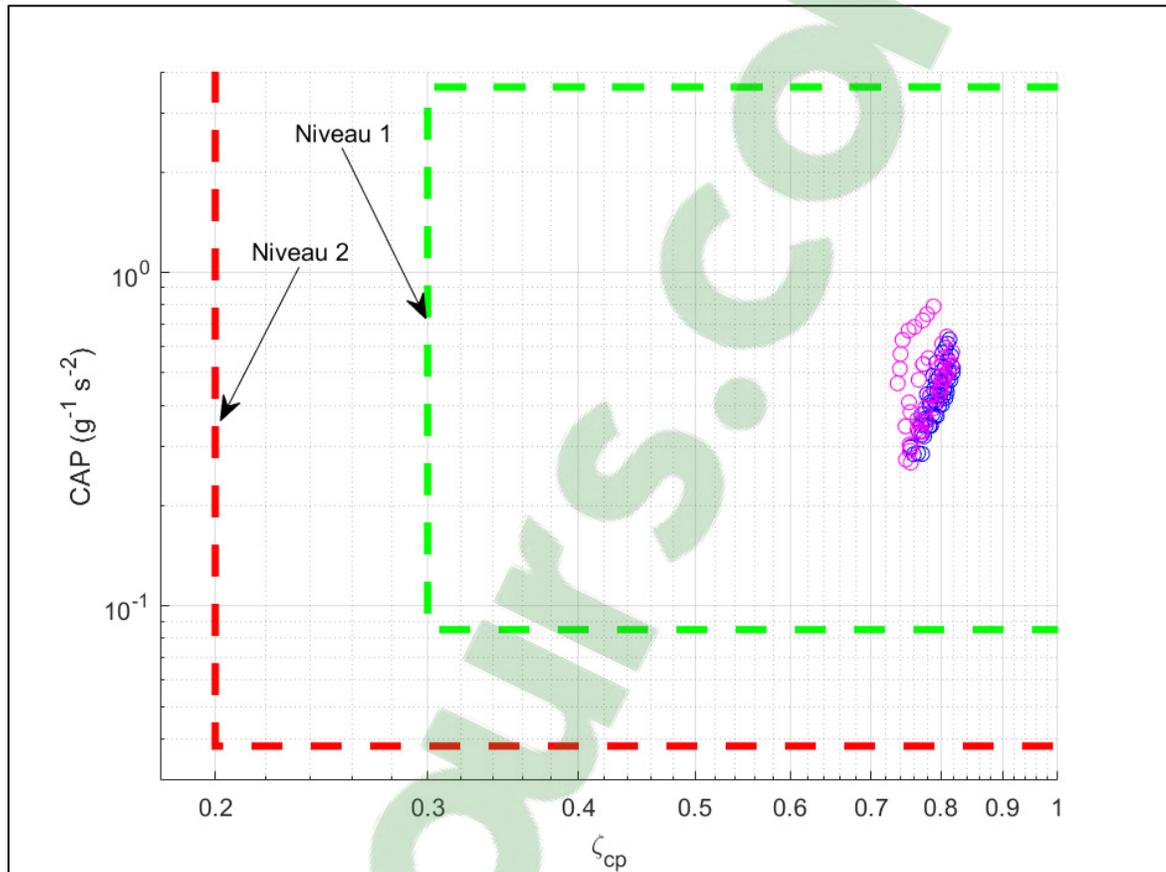


Figure 4.2 Performance du mode courte période pour l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage

Quant aux critères se rapportant à la fréquence de la réponse temporelle, encore une fois, le niveau 1 pour les qualités de vol est atteint, autant pour la variation positive que négative de l'angle de tangage (Figure 4.3). Dans la sélection des pôles du contrôleur, nous avons choisi une fréquence propre de $\omega_{ncp} = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le graphique montre que la dynamique induite par le contrôleur donne une réponse pour ce paramètre qui se rapproche de la référence.

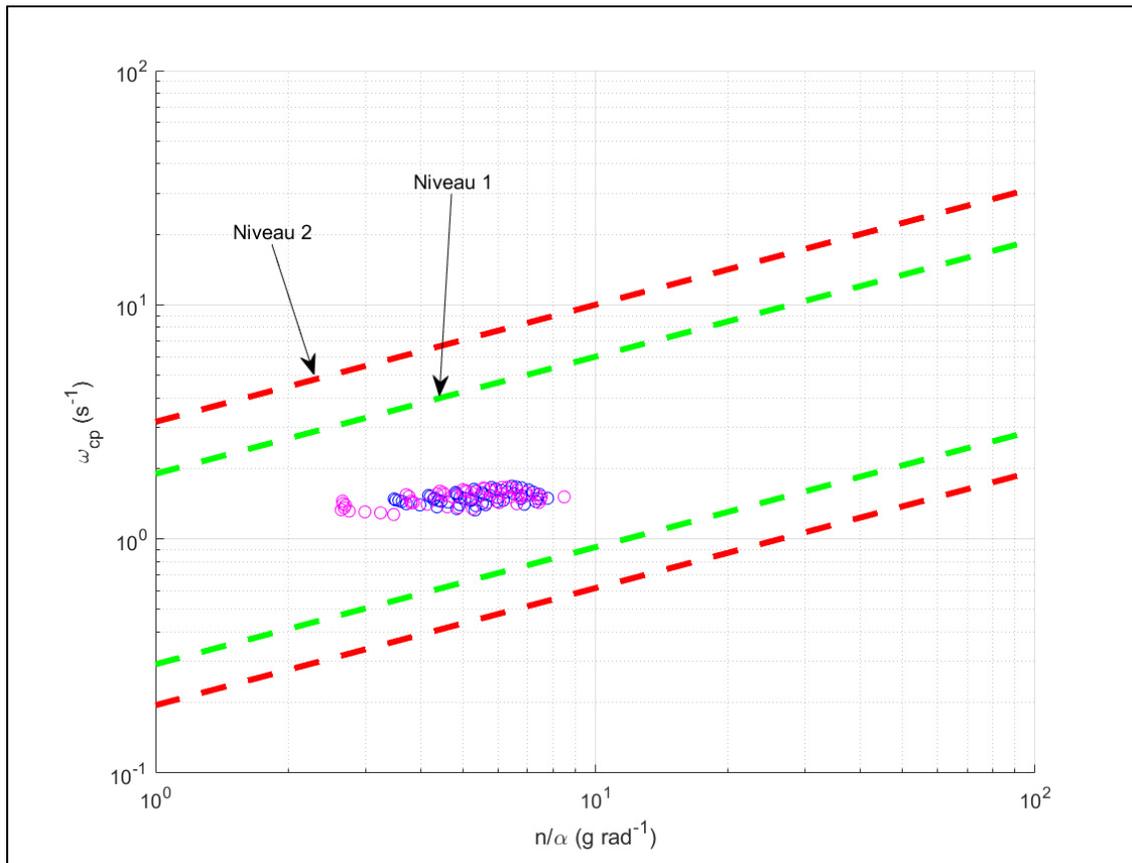


Figure 4.3 Critères de performance en fréquence pour l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage

Finalement, la dernière exigence vise directement les contrôleurs longitudinaux et met en relation la fréquence propre, l'amortissement et le zéro haute-fréquence (T_{θ_2}). Nous pouvons constater que les échantillons rencontrent le niveau 1 pour l'ensemble de l'enveloppe de vol (Figure 4.4).

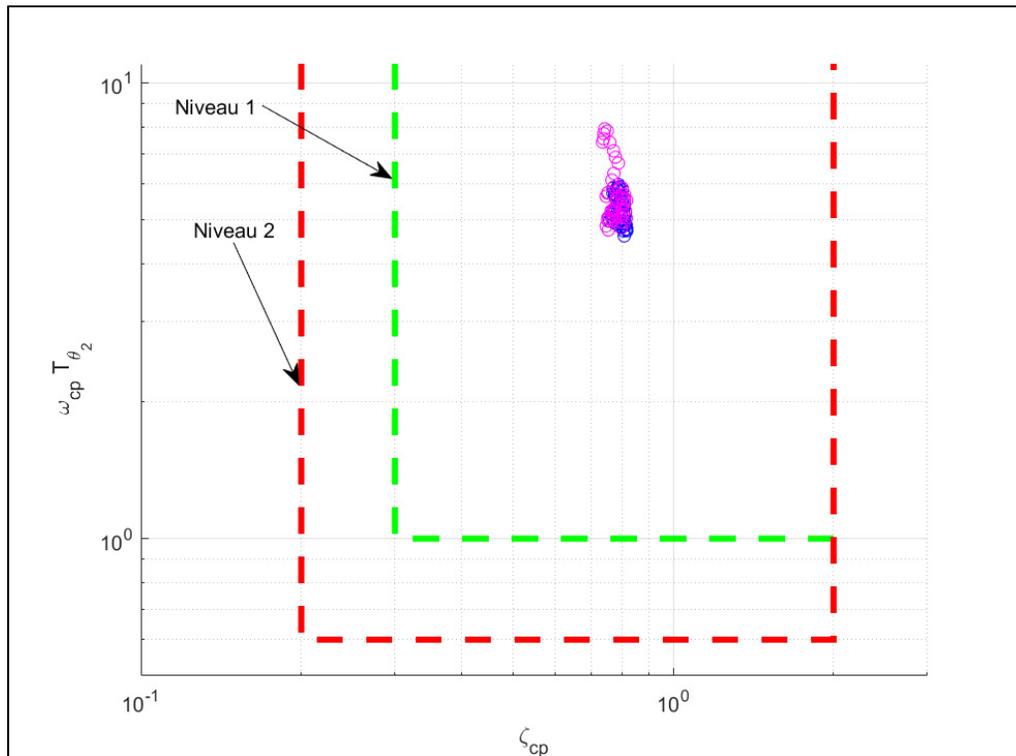


Figure 4.4 Critères de performance pour un contrôleur longitudinal avec un engagement du mode de suivi d'angle de tangage

Les paramètres supplémentaires pour lesquels nous avons porté notre attention lors des essais étaient le temps de stabilisation, la performance du maintien de la vitesse et l'erreur en régime permanent de l'angle de tangage. Pour ce dernier, l'erreur en régime permanent maximale ($\Delta\theta_{rp}$) est inférieure à $0,01^\circ$. Pour le maintien de la vitesse, la tolérance n'a pas été respectée pour tous les essais. En utilisant la même procédure sur tout le domaine de vol, la poussée disponible n'était pas toujours suffisante pour maintenir la vitesse. Cet aspect sera développé en profondeur dans l'analyse de la performance de ce mode. Finalement, l'angle de tangage était stabilisé à $\pm 0,5^\circ$ de la valeur de référence en moins de 5 secondes pour tous les essais.

4.3.1.2 Réponse latérale

Afin de faciliter la visualisation de ce test, la réponse temporelle d'une des simulations est fournie avec la Figure-A VIII-2. Deux volets distincts de la dynamique nécessitent une

évaluation séparée dans ce cas-ci. Un de ces modes est le roulis hollandais. Nous pouvons observer que ce mode répond bien à des qualités de vol de niveau 1 pour l'ensemble de l'enveloppe de vol (Figure 4.5). Dans ce cas-ci, les paramètres sont mesurés à partir du maxima de l'angle de dérapage avec un ajustement de courbe pour une réponse linéaire du deuxième ordre.

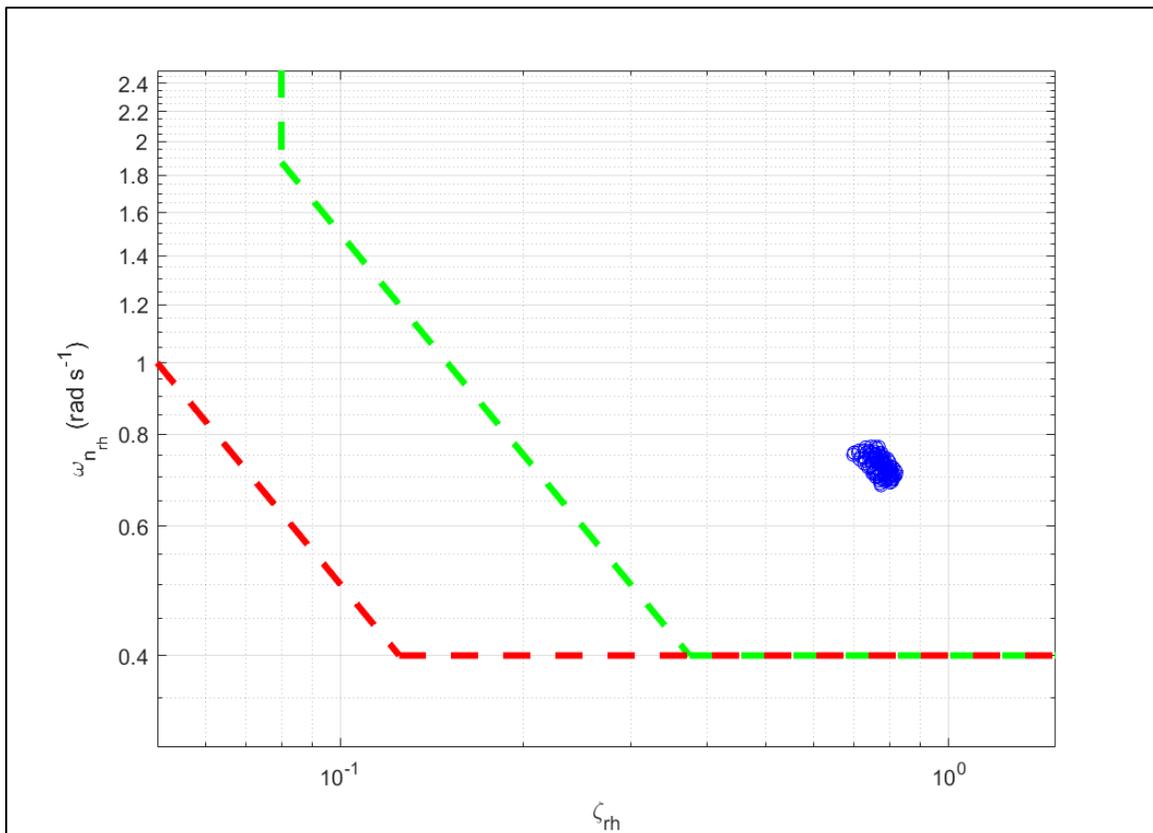


Figure 4.5 Paramètres de la dynamique du mode roulis hollandais

Les deux critères additionnels de performance pour l'amortissement de lacet et la coordination de virage sont l'accélération latérale maximale (\dot{v}) et l'angle de dérapage maximal (β) dans l'exécution de la manœuvre (Figure 4.6). La limite maximale recommandée pour les deux paramètres est respectée.

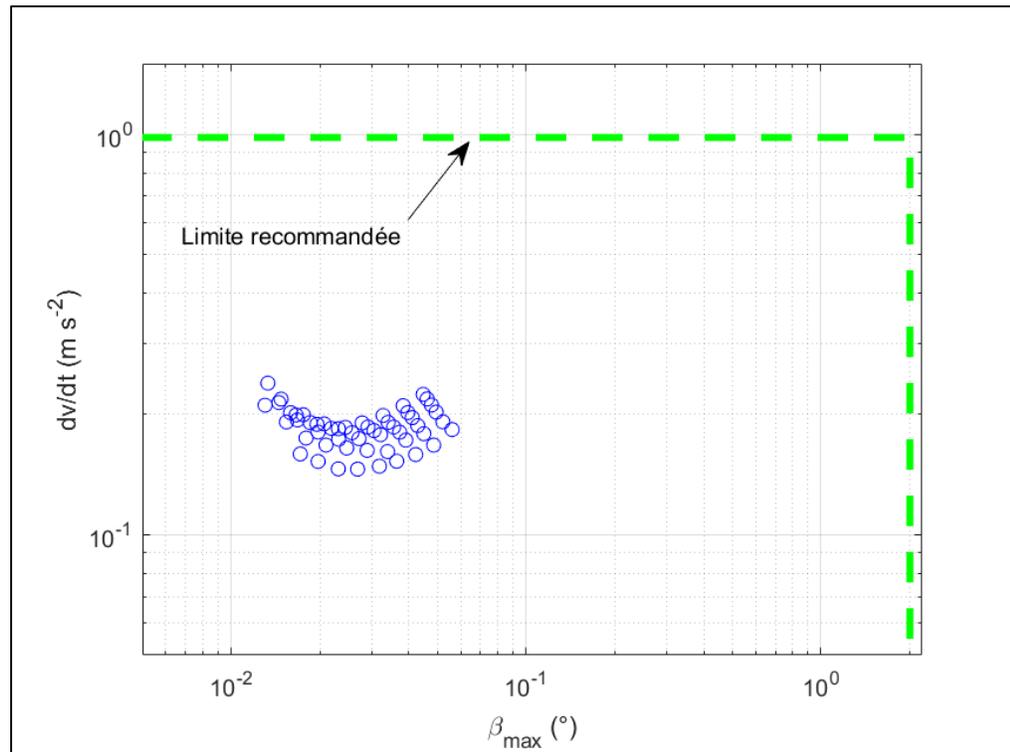


Figure 4.6 Niveau de performance requis pour l'amortissement de lacet

Finalement, la Figure 4.7 permet la visualisation de la fréquence propre et du taux d'amortissement pour le mode roulis. Avec le contrôleur linéaire, nous avons défini les pôles avec une fréquence propre désirée de $\omega_{n_R} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et un ratio d'amortissement de $\zeta_R = 0,6$. Les pôles complexes mesurés dans le graphique ne correspondent pas exactement aux pôles présélectionnés. Cependant, avec l'équation suivante nous pouvons calculer la constante de temps équivalente, le résultat donne approximativement la même valeur que les résultats de simulation,. Cet écart observé sera abordé en profondeur dans l'analyse de cet axe de contrôle.

$$T_R = \frac{1}{\zeta_R \omega_{n_R}} = 1,667 \text{ s} \quad (4.9)$$

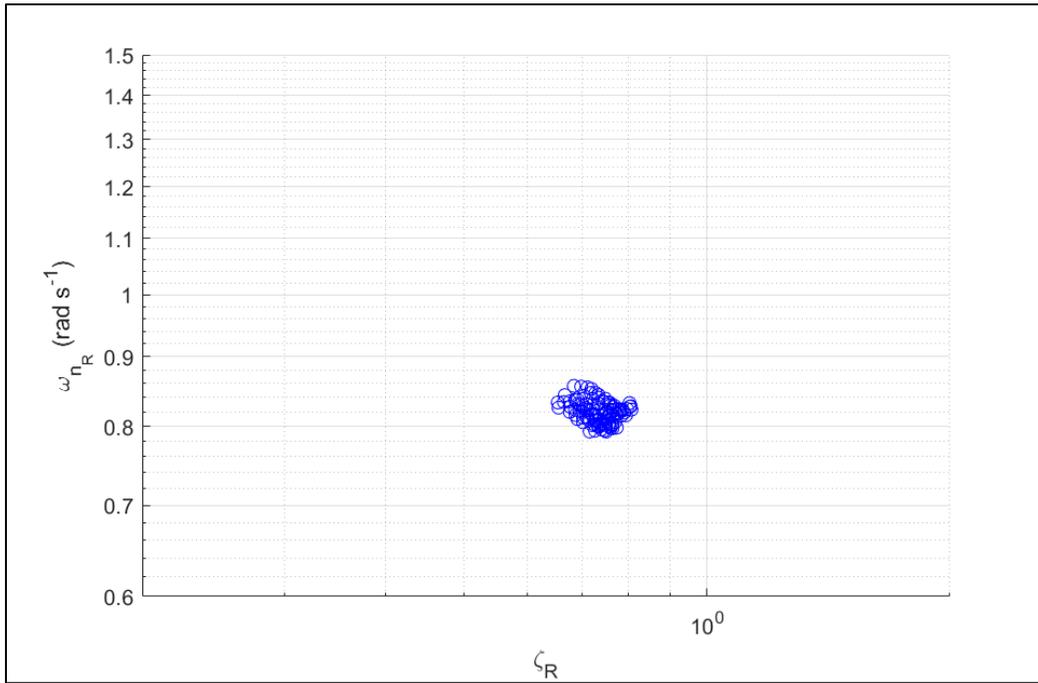


Figure 4.7 Paramètres de la dynamique du mode roulis

Parmi les paramètres additionnels qui n'ont pas été intégrés dans les graphiques précédents et qui sont tirés du Tableau 4.2, pour le maintien de vitesse, la déviation maximale moyenne observée est de $\Delta V = 0,32 \text{ KTAS}$. À l'exception d'une condition de vol, la déviation est maintenue à moins de 1 nœud, répondant à l'exigence de $\Delta V = \pm 5 \text{ KTAS}$. L'erreur en régime permanent de l'angle de roulis est inférieure à $\Delta\phi = 0,15^\circ$ pour toutes les conditions de vol. La déviation maximale de l'angle de tangage est inférieure à $|\Delta\theta| \leq 0,05^\circ$ et l'accélération résiduelle est nettement sous la limite prescrite. Donc, nous pouvons affirmer que les exigences du Tableau 4.2 ont été rencontrées lors de l'exécution de la manœuvre, pour tous les points de vol.

4.3.2 Commande de vitesse angulaire

4.3.2.1 Mouvement de tangage

Toujours dans l'optique de faciliter la compréhension de la procédure de test, un exemple de la réponse temporelle d'une simulation est présenté avec la Figure-A VIII-3. Au lieu d'effectuer l'ajustement de courbe pour l'angle de tangage, la vitesse angulaire (q) est utilisée pour déterminer les paramètres pour cette procédure. La Figure 4.8 présente les données mesurées pour le paramètre d'anticipation de contrôle (CAP) et le taux d'amortissement. Nous pouvons observer qu'une seule condition de vol ne rencontre pas une spécification de niveau 1 pour le CAP. Également, le ratio d'amortissement est moindre que la valeur prédéterminée avec le contrôleur linéaire, c'est-à-dire $\zeta_{cp} = 0,8$. Ces deux observations seront discutées dans l'analyse des résultats.

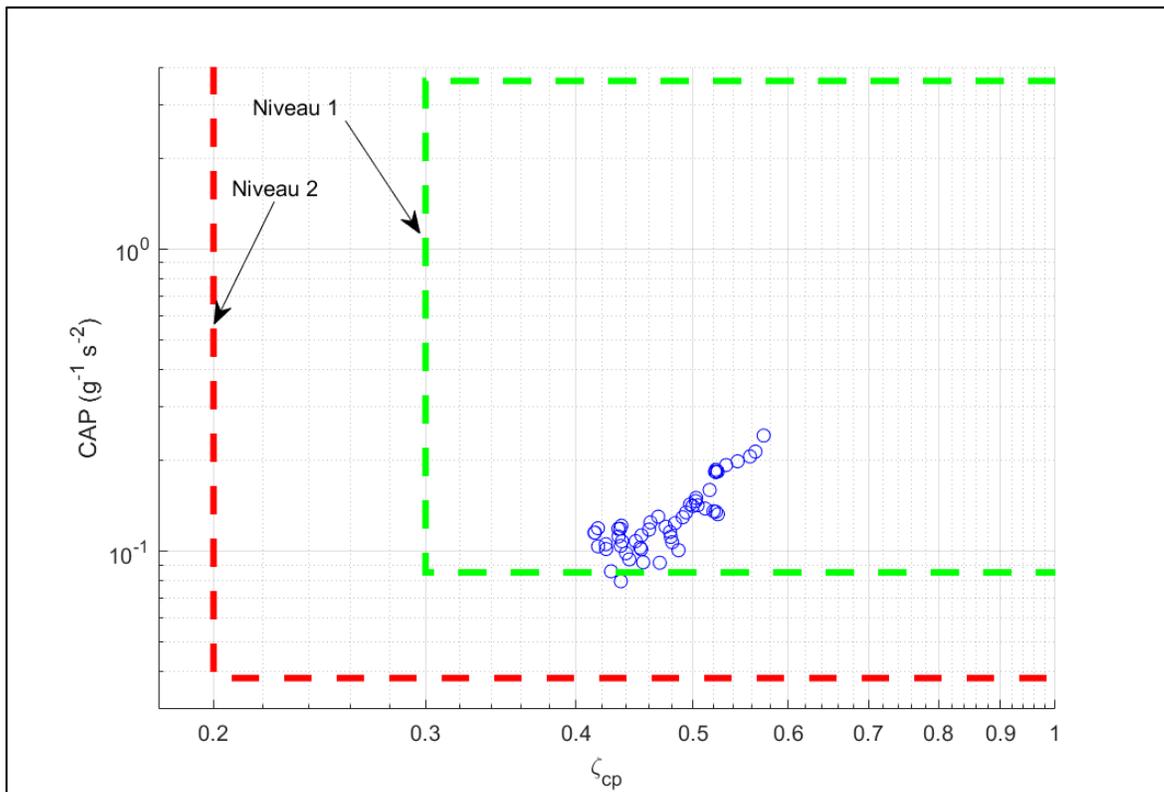


Figure 4.8 Critères de performance du mode courte période pour l'asservissement d'une vitesse angulaire

La prochaine évaluation de la réponse globale du contrôleur est la fréquence de la réponse temporelle (Figure 4.9). Nous observons que la fréquence propre mesurée se compare adéquatement à celle choisie pour le contrôleur linéaire ($\omega_{n_{cp}} = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Un point se retrouve également à l'extérieur de la limite représentant des qualités de vol de niveau 1. Ce point représente l'échantillon pour lequel nous avons eu le même constat avec la Figure 4.8.

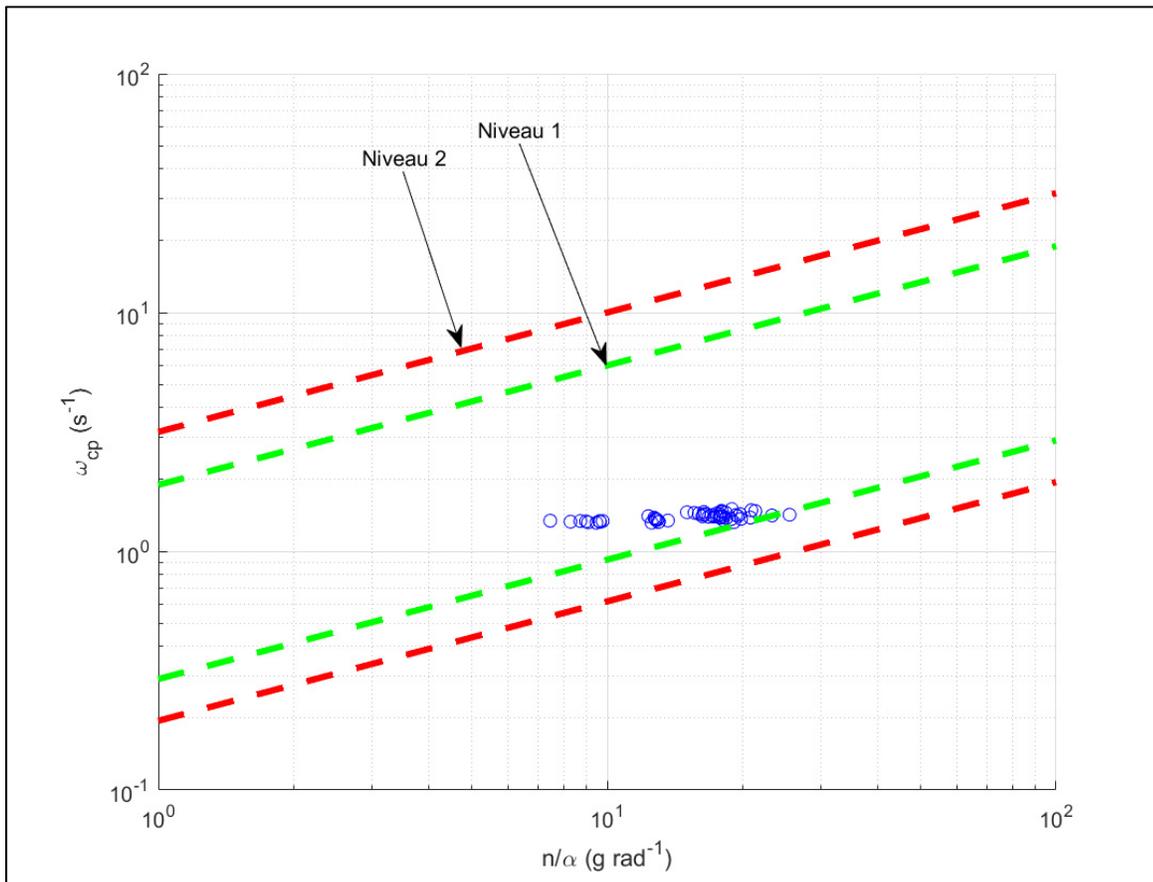


Figure 4.9 Réponse fréquentielle des essais pour une vitesse angulaire commandée

De plus, une autre évaluation porte spécifiquement sur les critères de performance d'un contrôleur longitudinal (Figure 4.10). Nous pouvons observer que les spécifications de niveau 1 sont atteintes pour toute l'enveloppe de vol.

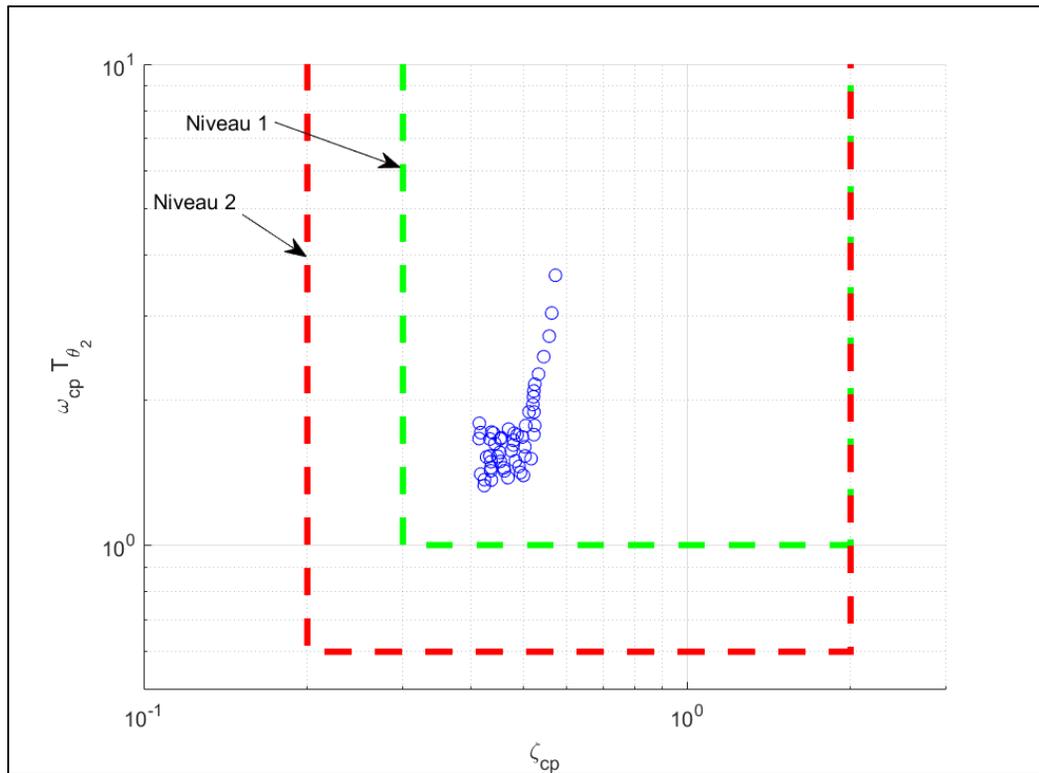


Figure 4.10 Critères de performance d'un contrôleur longitudinal pour une vitesse angulaire commandée

Trois paramètres s'ajoutent à la validation pour ce test en particulier. Le ratio des extremums en régime transitoire, le délai équivalent et le temps de montée permettent une évaluation complémentaire pour assurer une performance adéquate et qui est propre à une commande d'un taux de variation d'angle de tangage. En observant la Figure 4.11, nous pouvons constater que les qualités de vol de niveau 1 sont rencontrées pour l'ensemble de l'enveloppe de vol.

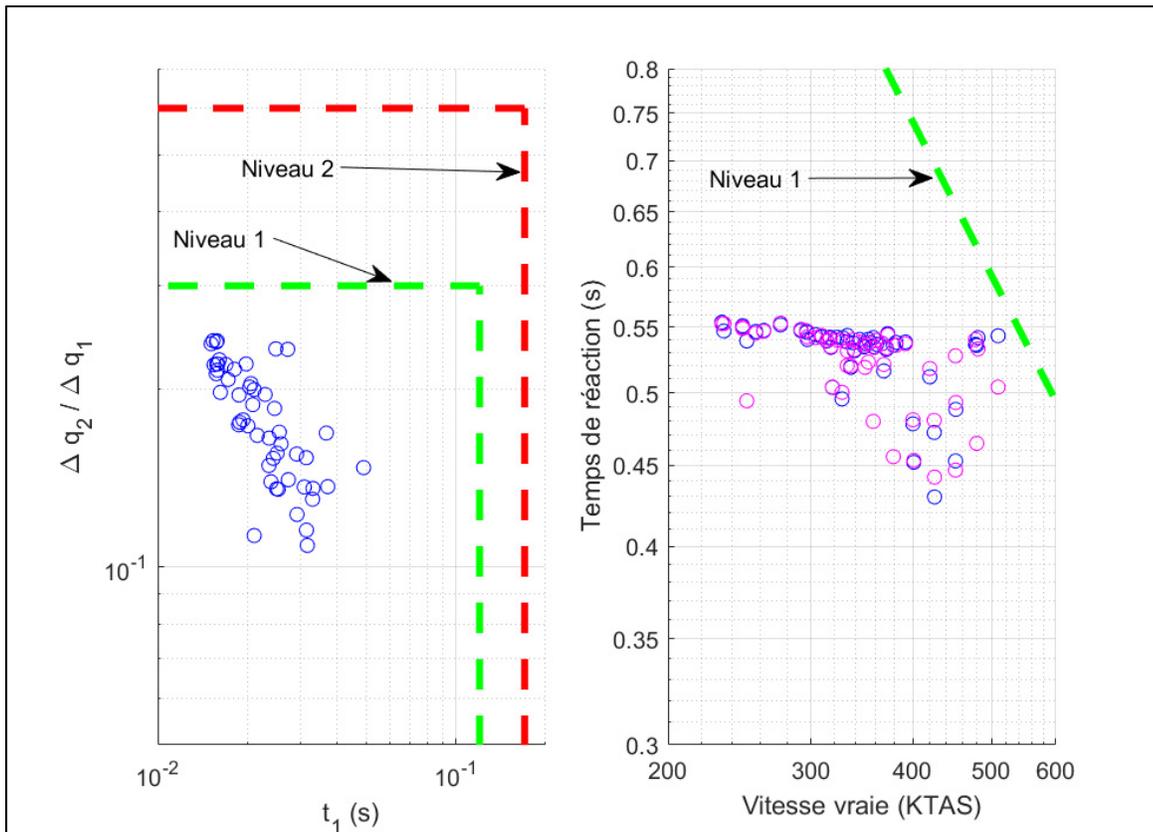


Figure 4.11 Critères de performance du régime transitoire pour la commande d'une vitesse angulaire

Quant au maintien de la vitesse, avec une variation de 8 degrés de l'angle de tangage, la poussée disponible des réacteurs ne permet pas de maintenir la valeur de référence. L'échantillon présenté à la Figure-A VIII-3 est un exemple parfait de ce manque de poussée disponible. Nous pouvons donc ne tirer aucune conclusion sur la performance du maintien de la vitesse due à la saturation de la commande des réacteurs avec ce test. Néanmoins, le moment à cabrer généré par le bras de levier des réacteurs est compensé adéquatement. Cette constatation a été faite avec la réponse temporelle qui se rapproche d'un comportement linéaire pour l'angle de tangage et sa première dérivée. Pour clore la discussion sur ce test, une fois la commande de vitesse angulaire neutralisée, l'angle de tangage en régime permanent se maintenait bien à l'intérieur de la tolérance de $\Delta\theta = \pm 0,5^\circ$, pour toutes les conditions de vol.

4.3.2.2 Mouvement de roulis

Le résultat du test final, dans l'évaluation globale de notre contrôleur, se rapporte à la commande d'un taux de variation de roulis. Une réponse temporelle typique est présentée avec la Figure-A VIII-4. Tout d'abord, nous allons regarder les résultats du mode roulis hollandais. Avec la Figure 4.12, nous pouvons constater que le niveau 1 pour les qualités de vol est atteint sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. La valeur maximale requise de $\zeta_{dr} = 0,7$ est atteinte pour approximativement la moitié des conditions de vol. Cette cible n'est pas un prérequis, mais un seuil maximal à atteindre ne nécessitant plus d'amélioration. Nous pouvons donc considérer ces critères de performance comme étant satisfaisants.

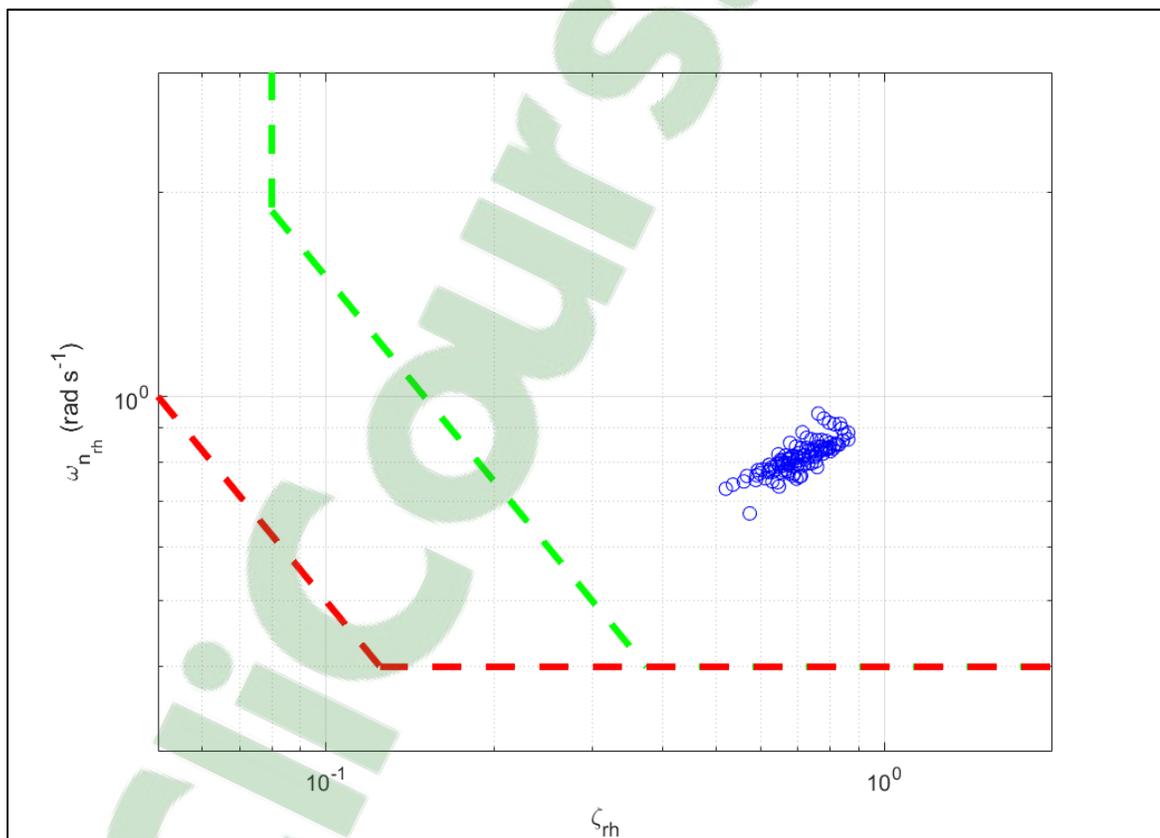


Figure 4.12 Performance de la réponse temporelle du mode roulis hollandais

Deux paramètres supplémentaires pour lesquels nous avons porté une attention spéciale sont l'accélération latérale maximale (\dot{v}) et l'angle de dérapage maximale, dans l'exécution de la

manœuvre. Comme nous pouvons le constater avec la Figure 4.13, la limite recommandée est respectée pour tous les échantillons.

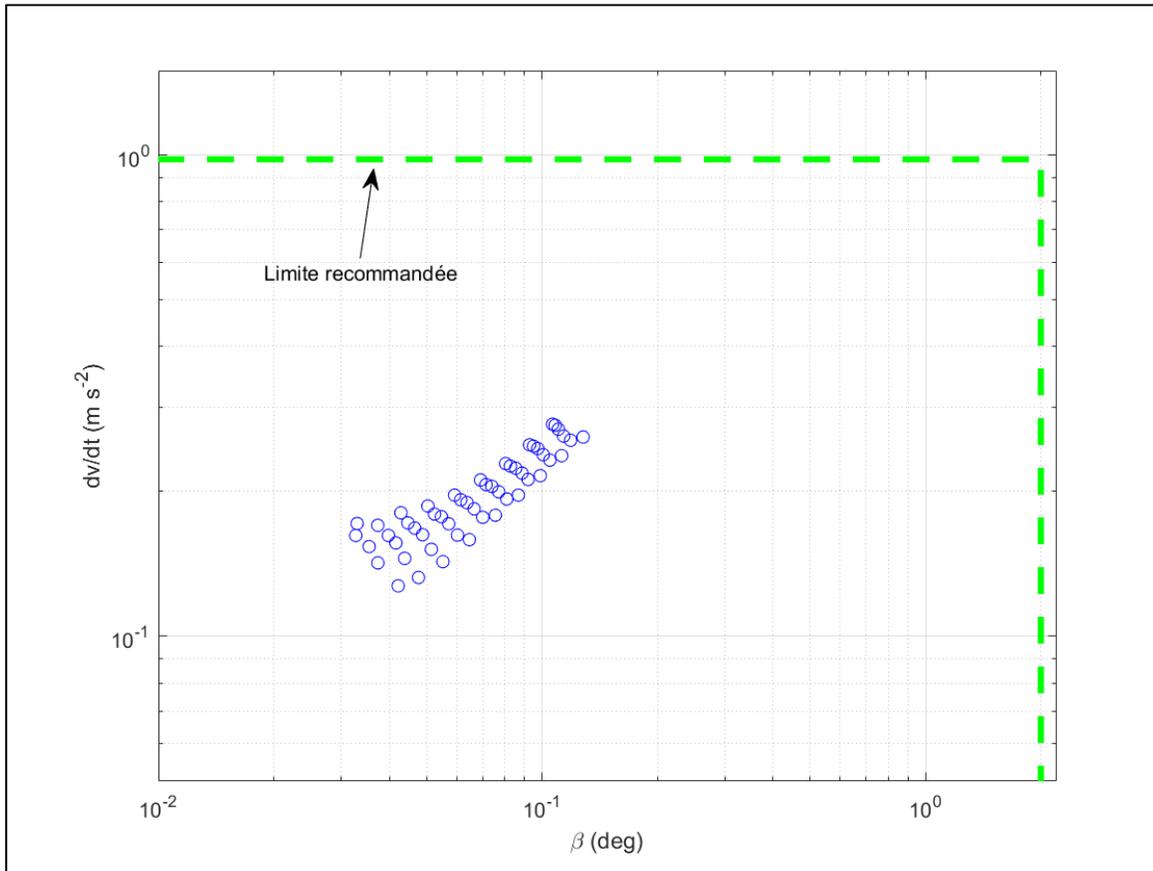


Figure 4.13 Critères additionnels de performance pour l'amortissement de lacet

Quant au mode se rapportant au roulis, les données calculées pour la stabilisation de la vitesse angulaire de roulis sont présentées avec la Figure 4.14. Nous pouvons observer que certaines valeurs ne rencontrent pas le minimum pour des qualités de vol de niveau 1, limites qui ont été déterminées avec les valeurs maximales de constante de temps pour ce mode présentées dans la spécification MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980). Cette délimitation a été conçue à partir d'un paramètre pour une réponse temporelle du premier ordre (voir équation (4.6)), et non d'une réponse du deuxième ordre pour nos simulations. Cette observation sera discutée lors de l'analyse de la performance globale du contrôleur.

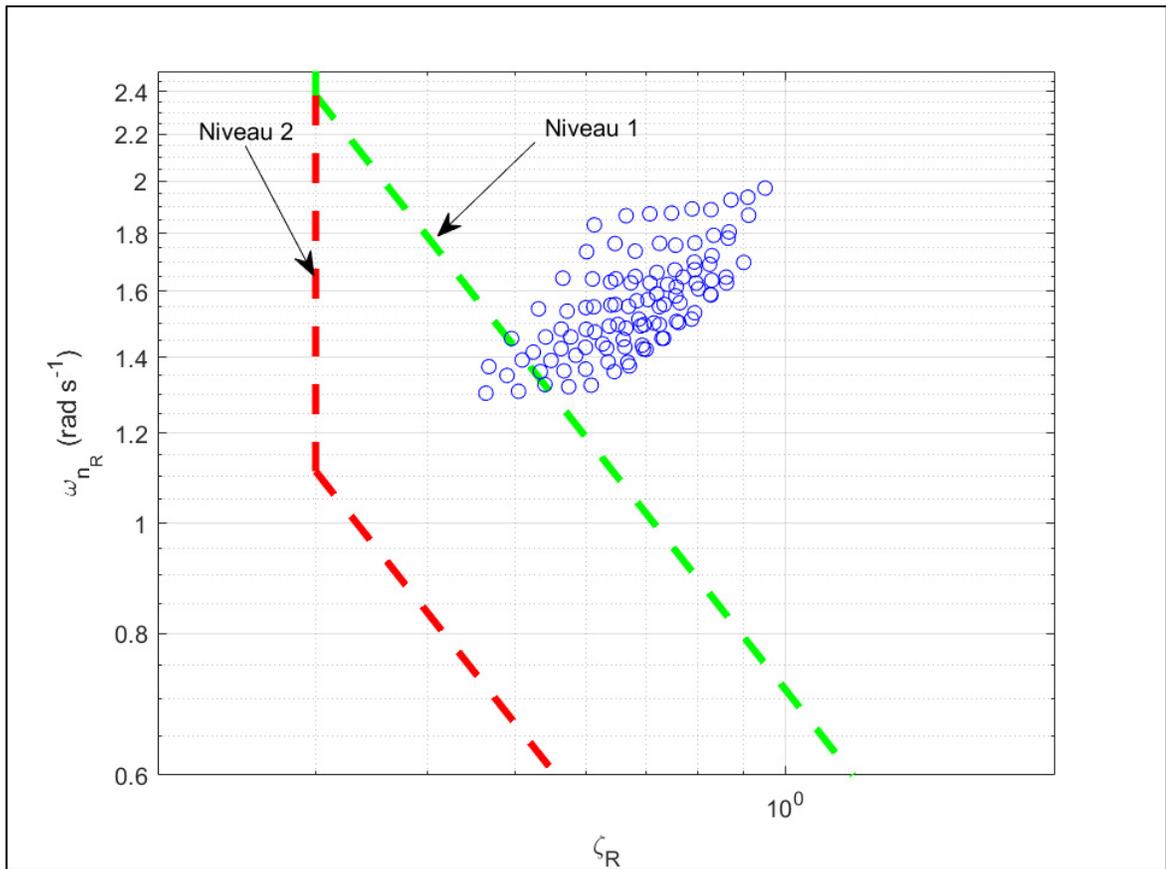


Figure 4.14 Performance du mode roulis pour la réponse temporelle du taux de variation de l'angle de roulis

Lors de l'exécution de ce test, un contexte plus appliqué a été utilisé. Nous avons engagé le mode suivi d'altitude pour permettre d'évaluer la robustesse de ce mode lors du suivi de génération de commande par notre contrôleur longitudinal, et du maintien de la vitesse. Lors de la manœuvre, l'écart maximal de l'altitude de référence était de 16,3 pieds, à l'exigence de 30 pieds. Cette déviation avait une tendance décroissante avec l'augmentation de la vitesse calibrée. Pour le maintien de la vitesse, l'écart maximal de 5 nœuds a été respecté pour tous les échantillons. À l'exception de trois résultats qui combinent un vol en haute altitude et une vitesse lente, cette déviation maximale a toujours été inférieure à $|\Delta V| = 0,8 \text{ KTAS}$. Ces trois résultats répondent quand même à l'exigence spécifiée, et seront abordés lors de l'analyse. Finalement, l'erreur en régime permanent pour l'angle de roulis était inférieure à $1,0^\circ$ pour

l'ensemble des essais, et la limite supérieure de l'accélération latérale résiduelle a été respectée également.

4.4 Analyse de la performance

Avec la présentation des résultats pour les quatre tests que nous avons développés, nous pouvons maintenant analyser la performance globale des quatre axes de contrôle. Pour chaque axe, nous avons au moins deux tests qui permettent de porter un jugement sur une mise en ligne possible du contrôleur. Nous allons donc analyser initialement la dynamique longitudinale, avec la commande d'angle de tangage et de vitesse, et puis la dynamique latérale, avec la commande d'angle de roulis, l'amortissement de lacet et la coordination de virage.

4.4.1 Angle de tangage

Lors de la collecte des données pour l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage, les résultats obtenus sur la dynamique induite par notre contrôleur répondaient adéquatement aux spécifications de niveau 1. Nous avons utilisé un ajustement de courbe pour comparer la réponse temporelle de l'angle de tangage lors de la simulation avec un système linéaire du deuxième ordre pour le mode courte période. Le coefficient de détermination est la mesure statistique qui quantifie la correspondance entre la réponse temporelle et la représentation estimée. Pour chacun des ajustements, il se rapprochait de la valeur nominale ($R^2 \rightarrow 1$), suggérant que le contrôleur génère une dynamique qui tend vers une réponse linéaire et les pôles prédéfinis avec le contrôleur linéaire. Cette observation permet d'affirmer que, dans le contexte de notre procédure de test, l'inversion dynamique linéarise adéquatement la variable d'entrée issue de la transformation que nous avons déterminée.

Lors des essais avec une commande de taux de variation de l'angle de tangage, un traitement similaire pour l'ajustement de courbe avec la réponse temporelle de la vitesse angulaire en tangage permet de porter un verdict suggérant que la dynamique longitudinale s'apparente également à un système linéaire. L'intervalle observé pour la fréquence propre correspond à

$\omega_{n_{cp}} = [1,27; 1,67]$, avec une valeur moyenne de $\omega_{n_{cp}} = 1,49s^{-1}$. Ces données recueillies démontrent un léger biais avec une diminution de ce paramètre dans ce contexte. Les ratios d'amortissement mesurés sont nettement inférieurs à la référence utilisée pour le contrôleur linéaire, mais se maintiennent au-dessus de la valeur minimum ($\zeta > 0,3$). Une des raisons possibles de cette déviation provient de la génération de la commande. Cette commande génère, entre autres, un taux de variation commandé de l'angle de tangage ($\dot{\theta}_c$) et un angle de tangage commandé (θ_c). À l'amorce de la manœuvre, il y a une déviation plus marquée de l'angle de tangage de référence, générant une réponse amplifiée en comparaison à un contrôleur qui ferait le suivi unique de cette dernière, sans angle de tangage. Malgré tout, le niveau 1 est atteint pour toutes les conditions de vol, à l'exception d'un résultat.

L'essai présentant cet écart correspond à la combinaison d'une altitude de 32 000 pieds et d'une vitesse calibrée de 320 nœuds. Il est pertinent de noter que cet essai possède le nombre de Mach le plus élevé ($M_a = 0,87$) de tous les échantillons. La spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997) cite un rapport rédigé par Meyer, Knox, et Tingas (1983) affirmant que le plancher limite de la Figure 4.9 devrait être diminué pour les avions gros porteurs, et devrait être basé sur la marge statique pour la condition de vol. Cette recommandation a été formulée avec des données d'essais en vol d'avion d'un gabarit similaire que le Boeing 747, tel que le Concorde, le C-5A et le Lockheed 1011. Il est nécessaire de préciser que ce plancher correspond à une valeur du paramètre d'anticipation de contrôle. Donc, en diminuant ce paramètre, nous réduisons également le plancher de la Figure 4.8, nous donnant alors des caractéristiques de manœuvrabilité de niveau 1 pour ce graphique également. L'évaluation qui est la plus pertinente pour ce test est présentée avec les résultats de la Figure 4.11, suggérant un niveau satisfaisant.

Ces derniers résultats reposent sur le ratio des extremums transitoires, le temps de réaction effectif et le retard effectif, et permettent de travailler avec des critères qui correspondent spécifiquement à la réponse temporelle d'une commande de vitesse angulaire. Les données observées répondent au niveau 1 pour tout le domaine de vol. Nous pouvons donc affirmer que notre contrôleur performe adéquatement pour l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle. Il est

aussi raisonnable d'affirmer que des boucles externes pourraient être greffées à notre loi de commande sans trop de difficulté, pour former tous les modes longitudinaux du système de pilotage automatisé.

4.4.2 **Maintien de vitesse**

Dans l'exécution des essais pour les modes longitudinaux, nous avons également collecté les données nécessaires pour évaluer la performance du mode de suivi de vitesse, communément appelé l'automanette. Le design des procédures de test ne mettait pas ce mode en premier plan, et la seule spécification que nous avions pour celui-ci était une déviation maximale de 5 nœuds. Nous n'avons pas suffisamment de données pour porter un jugement final et décisif sur ce système, étant donné que la majorité des manœuvres créait une saturation des réacteurs et l'accent était sur l'angle de tangage. Il y a quand même certains constats qui peuvent être faits avec ces tests.

Lors des essais de l'engagement du mode d'angle de tangage commandé, avec la variation rapide de l'assiette et par le fait même, de la trajectoire de vol, les réacteurs ne parvenaient pas à corriger aussi rapidement la variation de vitesse parce que la dynamique de ceux-ci est plus lente que la réponse temporelle de l'angle de tangage. La simulation de la Figure-A VIII-1 nous montre un exemple typique. À l'initiation de la manœuvre, la vitesse de rotation des réacteurs (N_1) amorce déjà son accélération avant même que la vitesse dévie de la valeur de référence, suggérant que la loi de commande réagit adéquatement. Cependant, approximativement dix secondes sont nécessaires avant qu'une poussée excédentaire rétablisse la vitesse vraie à la valeur commandée. Malgré tout, dans ce cas-ci, l'écart maximal est inférieur à notre limite de 5 nœuds. Donc, notre critère de performance est respecté. Si nous ignorons les essais de 20 000 pieds et plus haut, pour lesquels la poussée excédentaire est grandement réduite, la déviation maximale est inférieure à 7 nœuds, et la vitesse est stabilisée à $\Delta V = \pm 1$ KTAS en moins de vingt secondes après la commande du moment à cabrer. Dans le cas du test avec une variation négative de l'angle de tangage, l'assiette et la trajectoire de vol ne dépassent pas la capacité de correction des réacteurs. Aucun des essais n'a dépassé la

déviations maximale permise de 5 nœuds, et l'automanette corrigeait la vitesse adéquatement vers la valeur de référence.

Tel que souligné dans le sous-chapitre 4.3.2.1, avec la génération de commande de vitesse angulaire, la poussée disponible des réacteurs ne permet pas le maintien de la vitesse avec une variation de 8 degrés en tangage. La seule observation qui peut être faite sur la commande des réacteurs est la compensation adéquate de la gouverne de profondeur pour le moment généré lors d'un changement de poussée. Pour les deux tests longitudinaux, nous avons obtenu des réponses temporelles de l'angle de tangage et son taux de variation qui avaient une corrélation forte avec la réponse typique d'un système linéaire du deuxième ordre. De plus, aucune oscillation résiduelle n'a été observée qui aurait pu être causée par une compensation inadéquate du vecteur de poussée. Ces deux constatations suggèrent que le retour d'état est linéarisé adéquatement pour l'angle de tangage quant à la neutralisation d'un changement du vecteur de poussée.

La dernière évaluation de l'automanette a été menée avec la commande du taux de variation de l'angle de roulis. Avec le mode du maintien d'altitude activé, la valeur de l'angle de tangage doit augmenter, afin d'accroître l'angle d'attaque et la portance pour compenser la diminution de la composante s'opposant à la force gravitationnelle. Cette variation de l'angle d'attaque influence le coefficient de traînée. La poussée des réacteurs doit être ajustée pour contrecarrer l'accélération due au changement de l'angle d'attaque. L'automanette a maintenu la vitesse à moins de 1 nœud tout au long de l'amorce et la sortie de virage lors de ce test, à l'exception de trois conditions de vol. Ces trois cas combinent haute altitude et vol lent. Néanmoins, le contrôleur a maintenu quand même la valeur ΔV à moins de 5 nœuds. Dans un contexte qui est typique d'un vol opérationnel, nous pouvons affirmer que l'axe de contrôle pour le maintien de la vitesse accomplit la tâche qui lui est confiée.

4.4.3 Angle de roulis

Le premier test pour lequel nous avons amassé des données pour l'analyse est l'engagement du mode d'angle de roulis commandé. Les résultats reposent entièrement sur la réponse temporelle de l'angle de roulis. On a pu constater un biais entre les pôles que nous avons définis avec notre contrôleur et ceux mesurés à partir des simulations. Cependant, comme nous l'avons souligné avec l'équation (4.6), il y a une certaine relation entre les constantes de temps (T_R) provenant des essais et celle pré-réglée avec le contrôleur. Si nous prenons la transformée inverse de Laplace d'un système du deuxième ordre, la réponse temporelle varie de part et d'autre d'une valeur qui correspond à une fonction exponentielle ayant une constante de temps T_R . Pour le contrôleur, la constante équivalente de temps est égale à $\tau_R = 1,667s$. En observant la Figure 4.7, nous pouvons constater que tous les points sont rapprochés, avec des valeurs moyennes de $\bar{\zeta}_R = 0,727$ et $\bar{\omega}_{nR} = 0,811$, nous donnant une constante équivalente de temps $\tau_R = 1,696s$. Il y a une constance observée dans ce paramètre avec les réglages du contrôleur et les données collectées. Étant donné que l'amortissement est plus grand, le temps de montée est plus lent. En revanche, le temps de stabilisation requis pour atteindre un angle de roulis de référence ($|\Delta\phi| \leq 1^\circ$) est sous la limite de 5 secondes pour l'ensemble de l'enveloppe.

Normalement, le paramètre usuel pour la validation du mode roulis est la constante de temps (τ_R). Avec son utilisation, nous assumons que la réponse du taux de variation de l'angle de roulis est du premier ordre. Cependant, dans la synthèse de notre contrôleur, la variable de sortie linéarisée est la deuxième dérivée de l'angle de roulis. Précédemment, nous avons calculé une constante de temps équivalente qui ne rencontre pas le maximum alloué pour des qualités de vol de niveau 1, c'est-à-dire $\tau_R \leq 1,4s$, avec l'équation (4.6). L'intérêt de cette mesure est l'évaluation du temps de réaction, et un système sous-amorti peut réagir plus rapidement avec son ratio d'amortissement. Si nous comparons le temps de réaction d'un système linéaire du premier ordre avec la limite supérieure pour la constante de temps ($t_r < 3,08s$) et la réponse d'un système linéaire du deuxième ordre avec les valeurs calculées, la moyenne du temps de réaction est plus rapide de 0,35s. Quand nous regardons ce paramètre pour les 104 échantillons récoltés, tous les temps de réaction mesurés sont moindres que celui

d'un système linéaire du premier ordre avec $\tau_R = 1,4s$. Malgré le manque d'information dans les ouvrages de référence pour le traitement d'une réponse temporelle sous-amortie du deuxième ordre, la comparaison des temps de montée (t_r) permet d'évaluer la performance observée lors des essais, avec les spécifications globalement acceptées, pourvu que le dépassement de la réponse soit raisonnablement faible. Dans nos simulations, le dépassement maximum observé était de 6,52%.

Avec le deuxième test, nous cherchions à évaluer la réponse temporelle pour une commande de la vitesse angulaire de l'angle de roulis. Nous avons constaté avec la Figure 4.14 que certaines valeurs étaient à l'extérieur des limites pour des caractéristiques de manœuvrabilité de niveau 1. Tel que discuté au paragraphe précédent, les ouvrages de référence n'ont pas une adaptation pour une réponse sous-amortie du deuxième ordre. Ces limites ne sont donc pas prescrites par ceux-ci, mais le résultat d'une équivalence calculée à l'aide de l'équation (4.6). En mesurant manuellement le temps de montée pour chaque échantillon, nous obtenons une moyenne de $\bar{t}_r = 1,097s$, qui est suffisamment en deçà de la valeur calculée au paragraphe précédent ($t_r < 3,08s$). Pour la génération de commande du maintien de la vitesse angulaire, une période d'accélération $t_{acc} = 1s$ a été utilisée pour les valeurs de référence, ce qui suggère que la dynamique induite par le contrôleur se rapproche des commandes qui lui sont envoyées. Également, avec un temps de stabilisation moyen de $\bar{t}_s = 2,366s$, nous pouvons conclure que la réponse temporelle dépasse l'exigence minimale de niveau 1 d'une constante de temps de $\tau_R = 1,4s$, telle que démontrée au paragraphe précédent.

Bien que nous puissions conclure que le contrôleur permet d'atteindre des qualités de vol de niveau 1, il y a une certaine disparité dans les données de la Figure 4.14. Les réglages de notre contrôleur devraient donner une dynamique avec une fréquence $\omega_{n_R} = 1s^{-1}$ et un amortissement $\zeta_R = 0,6$. Or, le calcul de la moyenne des deux paramètres mesurés lors des essais nous donne $\bar{\zeta}_R = 0,713$ et $\bar{\omega}_{n_R} = 1,592$. En plus de ce biais, l'écart-type des données recueillies nous laisse croire que l'inversion dynamique du contrôleur contient certaines estimations qui pourraient être améliorées. Par exemple, la dérivée aérodynamique qui a été utilisée pour la modélisation de l'effet d'une entrée de roulis au manche de contrôle (δ_w) ne

comprenait que les ailerons. Les déporteurs ne sont sollicités qu'à partir d'un angle de δ_w et pourraient sensiblement modifier la linéarisation de l'entrée, surtout pour une manœuvre abrupte telle que nous l'exigeons dans ce test. Malgré cette différence, nous avons réussi à ajuster le contrôleur pour obtenir des qualités de vol de niveau 1 et obtenir un comportement général satisfaisant.

4.4.4 Amortissement de lacet et coordination de virage

Finalemment, le dernier axe de notre contrôleur à analyser est lié à la commande de la gouverne de direction pour l'amortissement de lacet et la coordination de virage. Notre approche a été différente de celle qui est traditionnellement utilisée et les résultats suggèrent que la méthode semble robuste et adéquate. Nous avons introduit au chapitre 2 une définition pour le roulis hollandais comme étant une oscillation entre un mouvement de lacet et de roulis. D'un point de vue de l'étude de la dynamique, nous abordons habituellement le problème avec les variables d'état p et r . Au lieu de cette approche classique, nous avons développé le contrôleur à partir de l'accélération linéaire latérale (\dot{v}). En utilisant l'équation de la force latérale, nous réussissons à linéariser cette accélération afin de l'utiliser comme entrée du système. Le suivi effectué à l'aide de cette entrée se rapporte à la vitesse linéaire latérale (v). Cette vitesse est liée étroitement à l'angle de dérapage. Si l'asservissement satisfait les exigences citées au sous-chapitre 4.2, nous aurons alors un contrôleur qui amortit le roulis hollandais et assure un vol coordonné.

Les paramètres mesurés du test avec la perturbation de l'angle de roulis commandé (Figure 4.5) nous démontrent qu'une spécification de niveau 1 est atteinte pour l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle de vol. L'échantillon de ces données est centré autour des valeurs moyennes de $\bar{\zeta}_{dr} = 0,773$ et de $\bar{\omega}_{n_{dr}} = 0,724s^{-1}$. La proximité des points sur la figure précédente nous mène à affirmer que la performance du contrôleur est indépendante de la vitesse et de l'altitude. Concernant les données mesurées pour la commande de vitesse angulaire et présentées à la Figure 4.12, nous pouvons observer que la dynamique se rapproche du test précédent, avec des moyennes calculées de $\bar{\zeta}_{dr} = 0,712$ et de $\bar{\omega}_{n_{dr}} = 0,814s^{-1}$. La

variance est un peu plus élevée dans ce deuxième test, mais nous avons une marge adéquate avec les limites de niveau 1 pour le roulis hollandais qui nous assure que ces qualités de vol seront maintenues. Cependant, il est nécessaire de rappeler que la constante de temps que nous avons utilisée pour le contrôleur linéaire de cette entrée au système est égale à $\tau_{\dot{\psi}} = 0,5s$. Bien que nous observions cette normalisation de la réponse, il nous est difficile de tirer un lien entre cette valeur et la dynamique observée du système. Il semblerait qu'il y a une linéarisation du système avec un écart dans l'estimation du modèle, et que le contrôleur linéaire agit comme un simple contrôleur proportionnel. Néanmoins, la performance globale est satisfaisante et une implémentation est envisageable.

Avec les paramètres restants qui ont été mesurés et pour lesquels nous avons prescrit un intervalle où les caractéristiques de manœuvrabilité sont satisfaisantes, nous pouvons conclure que l'amortissement de lacet et la coordination de virage rencontrent des spécifications de niveau 1 pour l'ensemble de l'enveloppe de vol opérationnelle. En tenant compte de la dernière observation entre l'écart de la dynamique observée et avec les pôles choisis pour ce contrôleur linéaire, il est possible de se demander quel ajustement permettrait possiblement un rapprochement entre ces deux valeurs.

4.4.5 Comparaison entre le contrôleur longitudinal et latéral

Dans les résultats de l'axe d'amortissement de lacet et de coordination de virage, malgré des caractéristiques de vol qui étaient satisfaisantes, il y a une certaine disparité qui a été notée entre les pôles que nous avons choisis pour le contrôleur et la dynamique observée. Les données collectées pour l'axe de contrôle de l'angle de roulis montrent également un certain biais dans les mesures. En revanche, avec le contrôleur d'angle de tangage, la dynamique observée représentait généralement mieux la dynamique imposée avec le choix des pôles lors de la synthèse du contrôleur linéaire, à l'exception d'un paramètre dans un seul des deux tests. Nous pouvons nous questionner si ce dernier génère une réponse qui possède une corrélation plus forte avec les pôles prédéfinis. Il est possible que la réponse se trouve cachée dans la nature des équations.

Dans le cas du contrôleur longitudinal, la décision a été prise d'intégrer la dynamique des actionneurs. Pour permettre cette intégration, l'équation de moment longitudinal nécessitait une dérivation supplémentaire afin d'obtenir l'entrée du système pour permettre l'inversion dynamique, et nous donnant une sortie linéarisée représentée par $\ddot{\theta}$. Si nous prenons la première ligne de l'équation matricielle (3.64) et isolons la variable d'entrée du système (δ_{e_c}), nous obtenons :

$$\delta_{e_c} = \delta_e + \frac{2\tau_{\delta_e}}{\rho V^2 S \bar{c} C_{m_{\delta_e}}} \left[I_{yy} \ddot{\theta} - \frac{\partial}{\partial t} M \right] \quad (4.10)$$

Où l'expression $\frac{\partial}{\partial t} M$ représente la dérivée du temps du moment longitudinal de l'avion telle que nous avons calculée précédemment, et excluant l'effet de la gouverne de profondeur. En observant de plus près l'équation sous cette forme, la valeur actuelle de la gouverne est additionnée à une correction qui est déterminée à l'aide de l'entrée linéarisée et l'état actuel de l'avion, pour donner une déflection commandée de cette gouverne. Donc, si l'aéronef est à l'équilibre, la variable $\ddot{\theta}$ calculée par le contrôleur linéaire est égale à zéro, ainsi que la dérivée du temps du moment longitudinal (\dot{M}), et aucune correction pour la déflection de la gouverne n'est nécessaire. Cependant, si le contrôleur linéaire apporte un changement, le deuxième terme à droite de l'équation n'est plus nul et apporte une correction à la valeur actuelle δ_e .

En opposition, si nous prenons l'axe de contrôle de l'angle de roulis, la dynamique de l'actionneur a été ignorée, parce que la gouverne de direction et les ailerons répondent sensiblement avec la même rapidité. En observant de plus près l'équation, la différence pour la loi de commande est, qu'au lieu de calculer une correction de la déflection actuelle de la gouverne pour obtenir la dynamique voulue ou une valeur de référence désirée, la nouvelle entrée linéarisée et les variables d'état sont utilisées pour calculer quelle déflection exacte des ailerons (δ_w) est nécessaire pour obtenir cette dynamique ou cette sortie. Avec l'estimation utilisée pour le modèle, nous introduisons un biais dans la réponse du système. Par exemple, si une différence entre l'angle de roulis actuel et commandé est observée en régime permanent,

le contrôleur a possiblement sous-estimé la dérivée aérodynamique de stabilité des ailerons et génère une dynamique plus lente à cause de l'écart dans la modélisation. Toutefois, avec le contrôleur longitudinal, l'erreur de suivi génère une correction pour la déflexion de la gouverne de profondeur afin d'obtenir la réponse appropriée. Dans ce cas-ci, l'estimation de la modélisation contribue à cibler l'ajustement nécessaire pour obtenir cette réponse appropriée. Si les actionneurs étaient inclus pour les deux axes du contrôleur latéral, le biais de la réponse temporelle de la dynamique observée et définie par le contrôleur linéaire serait probablement éliminé ou, du moins, minimisé.

Cette constatation suscite un intérêt pour la poursuite de la recherche avec cette technique, autant pour améliorer le contrôleur de tangage, mais aussi pour tester la faisabilité de la synthèse d'un contrôleur latéral, et possiblement généraliser son application à des systèmes qui ne sont pas un avion de ligne.

CONCLUSION

L'objectif principal de ce projet de recherche était de déterminer si un contrôleur d'inversion dynamique conçu à l'aide d'une estimation de la modélisation livrait une performance adéquate sur l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle.

Afin d'étudier la question, nous avons initialement créé une plateforme de simulation à partir des données recueillies par Boeing. Un de nos sous-problèmes était la validation de la modélisation. Ce processus a permis d'affirmer que la dynamique longitudinale observée pour notre modélisation était conforme aux données de vol présentées par la NASA dans l'ouvrage de référence. Pour la dynamique latérale, les mesures statiques des termes qui s'additionnent pour former les coefficients étaient représentatives des données du document de référence. Cependant, lors des essais dynamiques, nous avons pu observer un léger biais pour le roulis hollandais suggérant une modélisation qui était un peu plus amortie par rapport à l'avion réel.

Cette plateforme de simulation a permis la mise en ligne et l'ajustement initial des lois de commande d'inversion dynamique que nous avons dérivées. Lorsque cet ajustement a été complété et que la performance observée sous MATLAB® était satisfaisante, le contrôleur a été ensuite implémenté sur le logiciel FlightSIM pour vérifier les résultats sur une plateforme indépendante, assurant ainsi une certaine reproductibilité des résultats. Ce logiciel nous a permis d'effectuer des essais simulés sur l'ensemble de vol pour recueillir les données nécessaires à l'analyse.

Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que les lois de commande des quatre axes de contrôle ont rempli l'objectif principal de ce projet, c'est-à-dire, l'asservissement adéquat d'un Boeing 747 sur l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle en répondant aux critères des qualités de vol présentés dans l'ouvrage du Département de la Défense des États-Unis. Une analyse plus approfondie des paramètres d'évaluation nous a permis d'observer une différence dans l'interaction des lois de commande latérales et longitudinales. Cette dissimilitude nous a fait découvrir que les contrôleurs longitudinaux commandaient une correction aux actionneurs du

système, contrairement aux contrôleurs latéraux qui calculaient la déflexion nécessaire des gouvernes pour atteindre la dynamique souhaitée. Avec une estimation de la modélisation pour l'inversion dynamique, la technique développée pour les lois de commande longitudinale donnait des résultats qui se rapprochaient plus de la dynamique définie avec les pôles choisis lors de la synthèse du contrôleur, et minimisait l'erreur en régime permanent.

Lorsque nous comparons avec différentes méthodes d'asservissement, les résultats que nous obtenons sont plus globaux parce que nos lois de commande permettent le contrôle sur l'ensemble de l'enveloppe de vol. La technique présentée par Abd Elwahab et al. (2017) pour l'amortisseur de lacet est limitée au niveau de la correction de la fréquence propre et de l'amortissement du roulis hollandais. Seul un gain peut être ajusté pour changer cette dynamique. En comparaison, nous avons plus de latitude pour choisir les pôles que nous désirons avec le contrôleur linéaire du sous-chapitre 3.3.3. Richardson et al. (2011) ont étudié une méthode qui leur permettent de présélectionner des pôles pour la dynamique longitudinale. Leurs résultats démontrent que le contrôleur performe tel qu'il le doit pour le point de vol en question. Lorsqu'il diverge du point d'équilibre utilisé pour la synthèse, l'avion tend plus à osciller. Pour la commande d'un angle de tangage, notre contrôleur induit une dynamique qui représente bien les pôles présélectionnés, et ce, pour l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Les procédures de test ont été développées en essayant de garder une approche pouvant être recréée en vol et pertinente pour l'utilisation courante d'un avion, tout en obtenant des résultats qui peuvent être comparés à des normes préétablies. Nous avons donc limité les scénarios couverts pour essayer d'obtenir les résultats significatifs. Par exemple, malgré les essais évaluant la réponse à une perturbation, des tests avec turbulence n'ont pas été effectués. La phase de vol a été limitée à la catégorie B afin d'évaluer la performance dans un régime transsonique et en haute altitude. Une validation pour la phase terminale et une configuration avec volets sortis doivent être complétées pour la certification du système de pilotage automatique. Quoique nous croyions que l'effet est compensé avec les lois de commande, les essais ont été effectués pour une seule combinaison de masse et de centrage.

RECOMMANDATIONS

Avec une performance adéquate observée pour l'ensemble de l'enveloppe de vol, nous pouvons maintenant viser la prochaine étape pour l'amélioration de notre technique de contrôle. Malgré le résultat positif, l'analyse des données nous a permis d'observer une différence dans la réponse des lois de commande longitudinales et latérales qui suscite un intérêt particulier pour de futurs projets de recherche.

- L'ajout des boucles externes permettrait d'évaluer la possibilité d'intégrer le contrôleur à un système de pilotage automatisé. Par exemple, l'intégration d'un mode de capture d'altitude et de suivi de trajectoire latérale permettrait de créer des procédures de test qui s'apparentent à un vol opérationnel.
- Les lois de commande latérales pourraient être retravaillées afin d'inclure la dynamique des actionneurs. Cette correction améliorerait potentiellement la réponse globale en roulis et en lacet, par rapport à la dynamique prééglée avec le contrôleur linéaire.
- La technique utilisée pour le contrôle longitudinal pourrait potentiellement faire l'objet d'une généralisation, afin d'être appliquée à différents domaines. Le développement de ce cadre de travail doit possiblement répondre à des questions telles que :
 - Quelle est la relation entre la dynamique désirée et l'échantillonnage de l'état du système? Entre la constante de temps de l'actionneur et l'échantillonnage?
 - Quel est l'effet d'un retard venant des capteurs?
 - Est-ce que la technique est robuste et précise?
 - Dans le cadre d'une application réelle, quel est l'effet du bruit sur la réponse temporelle?
 - Quelle est l'influence de l'écart entre la modélisation et le système?

ANNEXE I

CARACTÉRISTIQUES DE LA MODÉLISATION DU BOEING 747

Cette annexe est un complément pour le Chapitre 2 sur la modélisation du Boeing 747. Une description générale de l'avion, des surfaces de contrôle et du réacteur est présentée. La modélisation a été créée à partir du document publié par la NASA et préparé par Hanke (1971). Il décrit qualitativement le modèle mathématique de l'aéronef. Le document suivant, également publié par la NASA et préparé par Hanke et Nordwall (1970), comprend toutes les données de modélisation qui ont été fournies par Boeing. Cette annexe dans son entier est tirée de ces deux publications. Les sections correspondent à différents aspects de la modélisation : les généralités, les coefficients aérodynamiques, les surfaces de contrôle et la propulsion. Afin d'alléger la lecture, les références ne seront pas écrites après chaque référence, cependant, le lecteur peut assumer que toute information provient de l'un des deux documents, à moins d'indication contraire. Il est nécessaire de spécifier que ce modèle représente la variante B747-100.

Description générale

Le Boeing 747 est un avion long-courrier servant principalement au transport de passagers qui est muni de 4 turboréacteurs. Pour les manœuvres à basse vitesse, les dispositifs hypersustentateurs comprennent des volets de bord de fuite à triple fente, et des volets Krueger au bord d'attaque. Le contrôle longitudinal est effectué à l'aide de quatre panneaux formant la gouverne de profondeur et un stabilisateur horizontal ajustable. Cinq panneaux de destructeurs de portance, deux ailerons intérieurs et deux ailerons extérieurs servent au contrôle latéral. Également, conjointement avec une paire de panneaux additionnels, les douze panneaux de destructeurs de portance peuvent être utilisés symétriquement comme aérofreins. Le contrôle directionnel s'effectue à l'aide de deux segments sur l'empennage vertical. L'aéronef est aussi équipé d'un train d'atterrissage escamotable.

Le Tableau-A I-1, ci-dessous, présente un certain nombre de paramètres qui décrivent la dimension de l'aéronef, ainsi que la masse et le centrage. En plus de la masse, quatre moments d'inertie doivent être définis afin d'obtenir une relation entre les composantes du vecteur de moment et l'accélération angulaire. Cette relation, dans le cadre de la modélisation, est une fonction de la masse actuelle de l'avion pour définir les quatre composantes du tenseur d'inertie. Les relations entre la masse et chaque moment d'inertie sont fournies dans le document de référence et intégrées à la modélisation. Ces valeurs seront nécessaires pour la synthèse du contrôleur afin d'obtenir les composantes appropriées du moment d'inertie.

Tableau-A I-1 Paramètres généraux du Boeing 747

Paramètre	Valeur
Aire des ailes	$S = 510,97m$
Longueur de corde moyenne	$MAC = 8,324m$
Envergure	$b = 59,64m$
Bras de moment – Réacteur intérieur	$z_{e_i} = 4,45m$ $y_{e_i} = 12,07m$
Bras de moment – Réacteur extérieur	$z_{e_o} = 1,65m$ $y_{e_o} = 21,15m$
Masse maximale au décollage	$MTOW = 322,05t$
Masse maximale à l'atterrissage	$MLW = 255,83t$
Enveloppe du centre de gravité avec volets et train rentrés	$\%MAC = [0,14 ; 0,32]$

Coefficients aérodynamiques

Connaissant la valeur des composantes d'inertie de l'aéronef, nous pouvons maintenant utiliser les équations aérodynamiques pour trouver les composantes d'accélération linéaire et angulaire. Nous devons rappeler que chaque coefficient aérodynamique est associé à la composante de force ou de moment dans le repère-stabilité. Par exemple, la composante de la

force aérodynamique dans l'axe x_s , possède une relation qui se rapporte au coefficient de portance (C_L). Cette composante de force aérodynamique est appelée force de portance (F_L), dans ce cas-ci, et est définie par

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \quad (\text{I-1})$$

Les deux autres composantes du vecteur force sont représentées par la force de traînée (F_D) et la force latérale (F_Y). Les trois composantes du vecteur moment dans le repère-stabilité sont fonction de la pression dynamique, d'une grandeur caractéristique, et des coefficients aérodynamiques de moment (C_l, C_m, C_n). Ces coefficients aérodynamiques dépendent des variables d'état et de la valeur des surfaces de contrôle. Avant d'embarquer dans le calcul de chacun des coefficients, nous devons définir la portée des valeurs d'opération pour chaque surface de contrôle (Tableau-A I-2).

Tableau-A I-2 Portée des valeurs d'opération des surfaces de contrôle

Surface de contrôle	Intervalle d'opération
Gouverne de profondeur	$\delta_e = [-23^\circ; 17^\circ]$
Ailerons intérieurs	$\delta_{a_i} = [-20^\circ; 20^\circ]$
Ailerons extérieurs	$\delta_{a_o} = [-25^\circ; 15^\circ]$
Déporteurs, panneaux 1 à 4 et 9 à 12	$\delta_{sp} = [0^\circ; 45^\circ]$
Déporteurs, panneaux 5 à 8	$\delta_{sp} = [0^\circ; 20^\circ]$
Gouverne de direction	$\delta_r = [-25^\circ; 25^\circ]$

Avec une limitation sur les valeurs des différentes surfaces de contrôle, nous pouvons maintenant aborder les contributions qui forment le coefficient aérodynamique. En considérant tout d'abord le coefficient de portance (C_L), nous pouvons écrire que celui-ci est égal à la somme de toutes les contributions (voir équation-A (I-2)). Dans le Tableau-A I-3, tous les différents effets contribuant à cette somme sont décrits avec leur abréviation, et les variables

d'état ou les paramètres desquels ils dépendent. Dans la création de la modélisation, les données de toutes les contributions ont été transformées d'un graphique à un tableau pour lequel le logiciel de simulation peut interpoler selon la méthode décrite au Chapitre 2, en temps réel et à l'aide de la valeur du vecteur d'état et du vecteur d'entrées. Il est nécessaire de préciser que la variable K_α du tableau suivant est une fonction de l'angle d'attaque

$$C_L = \sum C_{L_i} \quad (I-2)$$

Tableau-A I-3 Contributions au coefficient de portance

Contribution (C_{L_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$C_{L_{basic}}$	Coefficient de base, avion rigide	M, α	∂_F, α
$(\Delta C_L)_{\alpha_{wdp}=0}$	Effet d'aéroélasticité à $\alpha_{wdp} = 0$	h, M	∂_F, V_e
$\Delta \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right) \alpha_{wdp}$	Effet d'aéroélasticité sur la courbe de base	h, M	∂_F, V_e
$\frac{\partial C_L}{\partial \hat{\alpha}} \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V} \right)$	Effet d'un taux de variation d'angle d'attaque	M	M
$\frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}} \left(\frac{q \bar{c}}{2V} \right)$	Effet d'un taux de variation d'angle de tangage	h, M, CG	h, M, CG
$\frac{\partial C_L}{\partial n_z} n_z$	Effet d'inertie aéroélastique dû au facteur de charge	h, M	∂_F, V_e
$K_\alpha \frac{\partial C_L}{\partial \delta_s} \delta_s$	Changement dû à un angle de stabilisateur non nul	h, M, α	h, M, α
$K_\alpha \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{e_i}} \delta_{e_i}$	Changement dû à un angle de gouverne de profondeur intérieure non nul	h, M, α	h, M, α
$K_\alpha \frac{\partial C_L}{\partial \delta_{e_o}} \delta_{e_o}$	Changement dû à un angle de gouverne de profondeur extérieure non-nul	h, M, α	h, M, α
$\Delta C_{L_{spoilers}}$	Changement dû à la sortie des déporteurs	$\alpha, h, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{L_{outboard}} \text{ ailerons}$	Changement dû à la déflexion des ailerons extérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_o}$	
$\Delta C_{L_{landing gear}}$	Effet de la position du train d'atterrissage	α, ∂_F, M	
$\Delta C_{L_{ground effect}}$	Variation dû à l'effet-sol	$\alpha, \partial_F, h_{AGL}$	

Dans le cas du coefficient de traînée (Tableau-A I-4), les différentes relations sont moins nombreuses, principalement dû au fait que la plus grande contribution dépend de la somme des 6 premiers termes du coefficient de portance (Tableau-A I-3) pour une configuration avec les volets rentrés.

Tableau-A I-4 Contributions au coefficient de traînée

Contribution (C_{D_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$C_{D_{basic}}$	Coefficient de base, avion rigide et volets sortis	N/A	∂_F, α
$\frac{\partial C_D}{\partial \delta_s} \delta_s$	Changement dû à la déflexion du stabilisateur horizontal, applicable seulement pour $\partial_F = 0$	N/A	∂_F, α
$[C_D]_M$	Coefficient de base, volets rentrés, fonction des 6 premiers termes de C_L du Tableau-A I-1	$C_{L,M}$	N/A
$\Delta C_{D_{spoilers}}$	Changement dû à l'extension des déporteurs	$\alpha, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{D_{landing\ gear}}$	Effet de la position du train d'atterrissage	α, ∂_F, M	
$\Delta C_{D_{ground\ effect}}$	Variation dû à l'effet-sol	$\alpha, \partial_F, h_{AGL}$	
$\Delta C_{D_{sideslip}}$	Changement dû à un angle de dérapage non nul	∂_F, β	
$\Delta C_{D_{rudder}}$	Changement dû à la déflexion de la gouverne de direction	$\partial_F, \beta, \partial_r$	

Dans le cas du coefficient de moment de tangage, la somme est calculée similairement aux exemples précédents (Tableau-A I-5). Nous devons préciser que les données de ce coefficient ont été récoltées pour un centre de gravité à 25% de la corde moyenne. Afin de tenir compte de cette variation, un des termes sert à ajuster le coefficient de moment de tangage lorsque le centre de gravité diffère de cette valeur à l'aide de la somme du coefficient de portance.

Tableau-A I-5 Contributions au coefficient de moment de tangage

Contribution (C_{m_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$C_{m_{basic}}$	Coefficient de base, avion rigide	M, α	∂_F, α
$(\Delta C_m)_{\alpha_{wdp}=0}$	Effet d'aéroélasticité à $\alpha_{wdp} = 0$	h, M	∂_F, V_e
$\Delta \left(\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \right)_{\alpha_{wdp}}$	Effet d'aéroélasticité sur la courbe de base	h, M	∂_F, V_e
$C_L(CG - 0,25)$	Variation dû à $CG \neq 0,25$	C_L, CG	
$\frac{\partial C_m}{\partial \hat{\alpha}} \left(\frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2V} \right)$	Effet d'un taux de variation d'angle d'attaque	h, M, CG	h, M, CG
$\frac{\partial C_m}{\partial \hat{q}} \left(\frac{q \bar{c}}{2V} \right)$	Effet d'un taux de variation d'angle de tangage	h, M	h, M
$\frac{\partial C_m}{\partial n_z} n_z$	Effet d'inertie aéroélastique dû au facteur de charge	h, M	∂_F, V_e
$K_\alpha \frac{\partial C_m}{\partial \delta_s} \delta_s$	Changement dû à un angle de stabilisateur non nul	h, M, α	h, M, α
$K_\alpha \frac{\partial C_m}{\partial \delta_{e_i}} \delta_{e_i}$	Changement dû à un angle de gouverne de profondeur intérieure non-nul	h, M, α	h, M, α
$K_\alpha \frac{\partial C_m}{\partial \delta_{e_o}} \delta_{e_o}$	Changement dû à un angle de gouverne de profondeur extérieure non-nul	h, M, α	h, M, α
$\Delta C_{m_{spoilers}}$	Changement dû à la sortie des déporteurs	$\alpha, h, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{m_{inboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons intérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_i}, M$	
$\Delta C_{m_{outboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons extérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_o}$	
$\Delta C_{m_{landing gear}}$	Effet de la position du train d'atterrissage	α, ∂_F, M	
$\Delta C_{m_{ground effect}}$	Variation dû à l'effet-sol	$\alpha, \partial_F, h_{AGL}$	
$\Delta C_{m_{sideslip}}$	Changement dû à un angle de dérapage non nul	∂_F, β	

Contribution (C_{m_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$\Delta C_{m_{rudder}}$	Changement dû à la déflexion de la gouverne de direction	$\partial_F, \beta, \partial_r$	

Les coefficients de moment de roulis et de lacet sont influencés par les mêmes phénomènes et variables d'état et d'entrée (Tableaux-A I-6 et I-7). Les deux seules particularités pour la dynamique du lacet est une influence ajoutée du taux de variation de l'angle de dérapage, et l'effet d'un centre de gravité n'égalant pas à 25% de la corde aérodynamique moyenne combiné avec un angle de dérapage non nul.

Tableau-A I-6 Contributions au coefficient de moment de roulis

Contribution (C_{l_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$\frac{\partial C_{l_i}}{\partial \beta} \beta$	Effet dû à l'angle de dérapage	M, α, h	∂_F, α, h
$\frac{\partial C_{l_i} p_s b}{\partial \dot{p} 2V}$	Influence du taux de variation de roulis	h, ∂_F, α, M	
$\frac{\partial C_{l_i} r_s b}{\partial \dot{r} 2V}$	Influence du taux de variation de lacet	h, ∂_F, α, M	
$\Delta C_{l_{spoilers}}$	Changement dû à la sortie des déporteurs	$\alpha, h, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{l_{inboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons intérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_i}, M, h$	
$\Delta C_{l_{outboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons extérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_o}, V_e$	
$\Delta C_{l_{rudder}}$	Changement dû à la déflexion de la gouverne de direction	α, h, M, δ_r	

Tableau-A I-7 Contributions au coefficient de moment de lacet

Contribution (C_{n_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$\frac{\partial C_n}{\partial \beta} \beta$	Effet dû à l'angle de dérapage	M, α, h, CG	$\partial_F, \alpha, h, CG$
$\frac{\partial C_n}{\partial \hat{\beta}} \frac{\dot{\beta} b}{2V}$	Effet dû au taux de variation de l'angle de dérapage	M, α, h	
$\frac{\partial C_n}{\partial \hat{p}} \frac{p_s b}{2V}$	Influence du taux de variation de roulis	α, M	∂_F, α
$\frac{\partial C_n}{\partial \hat{r}} \frac{r_s b}{2V}$	Influence du taux de variation de lacet	$h, \partial_F, \alpha, M, CG$	
$\Delta C_{n_{spoilers}}$	Changement dû à la sortie des déporteurs	$\alpha, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{n_{inboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons intérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_i}, M$	
$\Delta C_{n_{outboard ailerons}}$	Changement dû à la déflexion des ailerons extérieurs	$\alpha, \partial_F, \partial_{a_o}$	
$\Delta C_{n_{rudder}}$	Changement dû à la déflexion de la gouverne de direction	α, h, M, δ_r	

Finalement, le dernier coefficient aérodynamique est la force latérale. Un nombre limité de variables d'état et seulement deux surfaces de contrôle influencent cette valeur. Le tout est présenté dans le Tableau-A I-8.

Tableau-A I-8 Contributions au coefficient de force latérale

Contribution (C_{Y_i})	Description	Variables	
		$\delta_F = 0$	$\delta_F \neq 0$
$\frac{\partial C_Y}{\partial \beta} \beta$	Effet dû à l'angle de dérapage	$M, \alpha, h, \partial_F, \partial_{LG}$	
$\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{p}} \frac{p_s b}{2V}$	Influence du taux de variation de roulis	α, M	∂_F, α
$\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{r}} \frac{r_s b}{2V}$	Influence du taux de variation de lacet	∂_F, α, h, M	
$\Delta C_{Y_{spoilers}}$	Changement dû à la sortie des déporteurs	$\alpha, M, \partial_F, \partial_{sp}$	
$\Delta C_{Y_{rudder}}$	Changement dû à la déflexion de la gouverne de direction	α, h, M, δ_r	

Surfaces de contrôle

Les surfaces de contrôle comprennent la gouverne profondeur, la gouverne de direction, les ailerons, les déporteurs, les volets hypersustentateurs, et le stabilisateur horizontal. Quand le pilote effectue une manœuvre, la commande est une certaine déflexion sur le manche de contrôle, et qui correspond à une valeur de déflexion de la gouverne. Un axe de commande active généralement plus qu'une surface de contrôle, et ne défléchit pas nécessairement de façon linéaire. Avec une simulation temporelle, nous devons également aborder l'aspect de la dynamique pour chaque surface. Dans les prochains paragraphes, nous allons discuter des données provenant de Boeing en assumant qu'elles modélisent un Boeing 747 le plus fidèlement possible, et l'intégration dans notre modélisation.

La gouverne de profondeur comporte quatre panneaux distincts, deux intérieurs et deux extérieurs, de part et d'autre du stabilisateur horizontal. La déflexion de celle-ci est représentée avec le symbole δ_e . Ces quatre panneaux sont commandés à l'aide du manche de contrôle dans le poste de pilotage et le relais se fait à l'aide de câbles et de poulies. La position neutre du manche de contrôle correspond à une valeur de déflexion de 2 degrés vers le bas ($\delta_e = 2$) de la position carénée. Dans un système comprenant des câbles, la tension dans ceux-ci crée un

allongement qui modifie légèrement le rapport entre le manche de contrôle et la déflexion de la gouverne. Cet effet est ignoré dans notre modélisation et nous assumons qu'une valeur commandée précise peut être envoyée et exécutée par les actionneurs hydrauliques de la gouverne, semblable à la réponse d'un système Fly-By-Wire. Également dans la modélisation de Boeing, une portée de la gouverne réduite avec la vitesse, c'est-à-dire, avec une vitesse équivalente plus élevée, la force aérodynamique diminue limite la valeur maximale de déflexion. Cet effet n'est pas modélisé dans notre simulation étant donné que l'objectif de la synthèse de notre contrôleur est pour la conception d'un système de pilotage automatique, ce qui veut dire qu'il y a une restriction dans l'enveloppe opérationnelle et la manœuvrabilité. La seule description de la dynamique de la gouverne est qu'il y a un taux de variation maximale de l'angle de déflexion de 37 degrés par seconde, et cette limite a été intégrée dans notre modélisation.

Les quatre panneaux d'ailerons, intérieurs et extérieurs, et dix des douze panneaux de déporteurs sont activés lors d'une commande de déflexion de roulis du manche de contrôle (δ_w). Ce signal de déflexion du manche se transmet aux actionneurs également à l'aide de câbles et de poulies, ce qui signifie que la tension du câble modifie légèrement la relation entre la déflexion du manche et des panneaux. Cet effet est ignoré encore une fois dans notre simulation. À partir de l'angle de déflexion du manche (δ_w), nous déterminons l'angle de déflexion pour chaque gouverne individuellement (Figure-A I-1). Ces relations sont présentées dans des graphiques dans le document de référence. Pour la dynamique de chaque panneau, la seule description fournie est la limite sur le taux de variation pour chaque panneau (Tableau-A I-9).

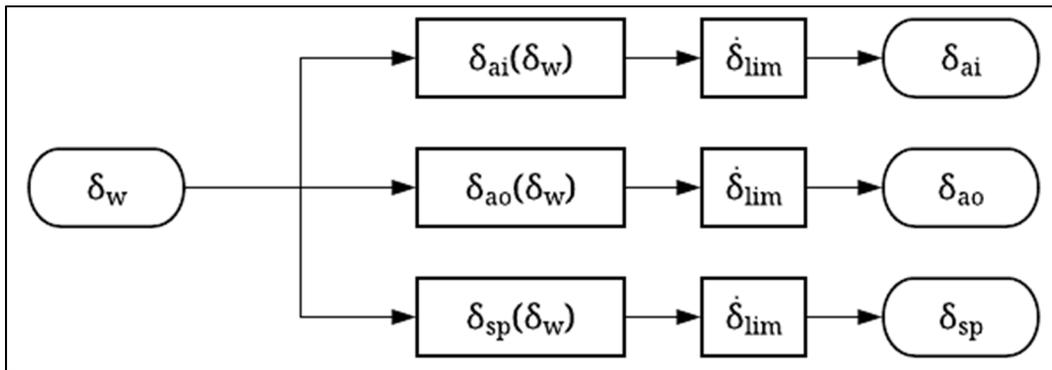


Figure-A I-1 Relation entre le manche de contrôle et les différentes surfaces de contrôle

Tableau-A I-9 Valeur limite du taux de variation des surfaces de contrôle de roulis

Surface de contrôle	Limite du taux de variation ($\dot{\delta}_{lim}$)
Ailerons intérieurs	Positif : $45^{\circ}s^{-1}$ Négatif : $40^{\circ}s^{-1}$
Ailerons extérieurs	Positif : $55^{\circ}s^{-1}$ Négatif : $45^{\circ}s^{-1}$
Déporteurs	$75^{\circ}s^{-1}$

La gouverne de direction du Boeing 747 est commandée par le palonnier des pilotes et actionne deux panneaux sur le stabilisateur vertical. Sa déflexion est représentée avec la variable d'entrée δ_r . La commande est transmise à l'aide de câbles et de poulies également, et cet effet est également ignoré dans notre modélisation. Nous prenons pour acquis qu'une valeur commandée d'angle de déflexion peut être envoyée à l'actionneur hydraulique et exécutée avec précision par celui-ci. La déflexion maximale des panneaux est mécaniquement restreinte avec une augmentation de la vitesse calibrée, partant de 25 degrés à 140 nœuds et diminuant à 2,6 degrés à 385 nœuds. Cette restriction est prise en considération dans notre simulation. Pour la dynamique de l'actionneur, seule la limite du taux de variation ($\dot{\delta} = 50^{\circ}s^{-1}$) est détaillée et incluse dans la modélisation. Le document de référence décrit également un amortisseur de lacet et un coordonnateur de virage. Deux des objectifs de notre contrôleur sont notamment ces deux fonctions. Une portée plus limitée de la déflexion de la gouverne de direction est

intégrée dans ces deux commandes du système de pilotage automatique, et cette portée limitée est conservée dans la synthèse du contrôleur ($\delta_r = \pm 3,6^\circ$).

L'angle de déflexion du stabilisateur horizontal (δ_s) est variable et peut être commandé par le pilote ou par le système de pilotage automatique. Pour le pilote, l'ajustement de l'angle est le compensateur longitudinal qui permet de relâcher la force sur le manche de contrôle. Le système de pilotage automatique commande des variations pour une raison similaire, c'est-à-dire ramener le manche de contrôle au neutre. Lors de l'activation du système, un taux de variation fixe est commandé et varie en fonction de la vitesse calibrée. Dans notre modélisation, l'angle du stabilisateur horizontal est initialisé à la valeur à l'équilibre pour les conditions de vol en question et est gardé fixe pour cette simulation. En d'autres mots, aucune dynamique d'actionneur n'est intégrée.

Finalement, les volets hypersustentateurs sont actionnés dans le poste de pilotage avec la sélection d'une valeur précise via le levier des volets (δ_F). La sélection est alors reçue par un ordinateur qui contrôle le déploiement et la rétraction des volets Kruger et de bord de fuite. Cet ordinateur envoie des commandes d'activation pour les ailerons extérieurs lorsque les volets ne sont pas rentrés. Le taux de variation lors d'une sélection est préprogrammé lors de la conception du système. Dans le cadre de notre modélisation, la dynamique des volets n'est pas simulée. Au moment de l'initialisation d'une simulation, les volets sont réglés à une valeur fixe ne variant pas.

Propulsion

Un aspect qui génère une des quatre forces principales, la poussée, provient des quatre réacteurs de l'aéronef. En créant une modélisation du Boeing 747, nous devons aborder le sujet de la propulsion. L'entrée contrôlant la poussée dans le poste de pilotage est la manette de poussée. L'angle du levier de cette manette (δ_{th}) correspond à un ratio de la pression du réacteur (EPR), qui est le paramètre principal du moteur (Figure-A I-2). Ce ratio est réduit avec une augmentation de la vitesse, créant une correction diminuant ce ratio qui est fonction de la

vitesse et de l'altitude ($\Delta EPR(M, h)$). Nous pouvons finalement calculer la poussée nette des réacteurs à l'aide de la valeur finale du ratio de la pression du réacteur et du nombre de Mach.

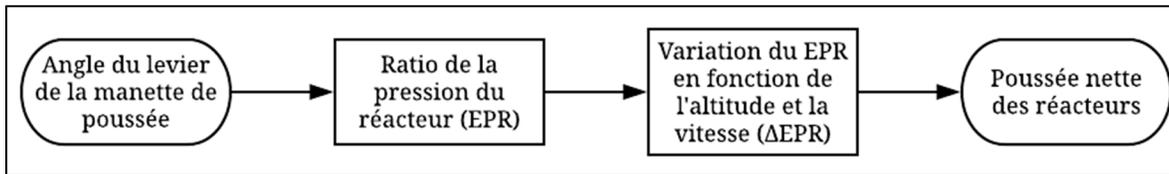


Figure-A I-2 Relation entre la position de la manette de poussée et la poussée générée

Les données de modélisation fournies par Boeing sont limitées à quelques exemples d'accélération et de décélération. Les conditions atmosphériques, de vitesse et d'altitude sont précisées, avec un point initial et final de la manette de poussée, et l'indication du ratio de la pression du réacteur.

Dans la création de notre modélisation, nous assumons qu'à l'initialisation, l'avion évoluera autour de l'état initial. Nous pouvons donc considérer qu'il y a une relation monotone croissante entre l'angle de la manette et la poussée nette. Nous allons alors uniquement se concentrer sur la valeur de la force de poussée dans notre modélisation. Avec l'information limitée sur le réacteur, nous utilisons une relation du premier ordre pour définir la dynamique de l'actionneur.

ANNEXE II

DÉRIVATION DES VARIABLES POUR LA MODÉLISATION

Équation pour la vitesse propre de l'avion (tiré de Vepa, 2015, p. 123) :

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (\text{II-1})$$

Dérivation de l'accélération de la vitesse vraie :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right] \\ &= \frac{2u\dot{u} + 2v\dot{v} + 2w\dot{w}}{2\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \\ &= \frac{u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \\ &= \frac{u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}}{V} \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

Équation pour l'angle d'attaque (tiré de Vepa, 2015, p. 123) :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u} \quad (\text{II-3})$$

Dérivation du taux de variation de l'angle d'attaque :

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\tan^{-1} \frac{w}{u} \right] \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{w}{u} \right] \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2} \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2} \\
&= \frac{u\dot{w} - w\dot{u}}{u^2 + w^2}
\end{aligned} \tag{II-4}$$

Équation de l'angle de dérapage (tiré de Vepa, 2015, p. 123) :

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{V} = \tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} \tag{II-5}$$

Dérivation pour le taux de variation de l'angle de dérapage :

$$\begin{aligned}
\dot{\beta} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} \right] \\
&= \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2 + w^2}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} \right] \\
&= \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2 + w^2}} \frac{\dot{v}\sqrt{u^2 + w^2} - v \frac{2u\dot{u} + 2w\dot{w}}{2\sqrt{u^2 + w^2}}}{u^2 + w^2} \\
&= \frac{\dot{v}[u^2 + w^2] - v[u\dot{u} + w\dot{w}]}{[u^2 + v^2 + w^2]\sqrt{u^2 + w^2}} \\
&= \frac{\dot{v}[u^2 + w^2] - v[u\dot{u} + w\dot{w}]}{V\sqrt{u^2 + w^2}}
\end{aligned} \tag{II-6}$$

Équation de l'angle de trajectoire de vol (γ) :

$$\gamma = \theta - \alpha \tag{II-7}$$

Le facteur de charge (n_z) tel que présenté par Hanke et Nordwall (1970) :

$$n_z = \frac{F_L \cos \alpha + F_D \sin \alpha + T \sin \varepsilon}{mg} \quad (\text{II-8})$$

Tableau-A II-1 Atmosphère type internationale
Adapté de Ahrens (2009, p. A16)

Altitude (m)	Altitude (')	Pression (hPa)	Température (°C)	Densité (kg/m ³)
0	0	1013,25	15,0	1,225
1000	3280	898,76	8,5	1,112
2000	6562	795,01	2,0	1,007
3000	9842	701,21	-4,5	0,909
4000	13 123	616,60	-11,0	0,819
5000	16 404	540,48	-17,5	0,736
6000	19 685	472,17	-24,0	0,660
7000	22 965	411,05	-30,4	0,590
8000	26 247	356,51	-36,9	0,526
9000	29 528	308,00	-43,4	0,467
10 000	32 808	264,99	-49,9	0,413
11 000	36 089	226,99	-56,4	0,365
12 000	39 370	193,99	-56,5	0,312

Il existe quatre différentes façons de présenter la vitesse d'un avion. Tout d'abord, la vitesse indiquée (V_i) représente la valeur indiquée de l'anémomètre sans correction pour l'erreur de mesure et de position. Avec ces rectifications, ces ajustements permettent d'obtenir la vitesse calibrée. L'écart est normalement minime entre ceux-ci et, dans le cadre de ce projet de recherche, nous allons supposer que la vitesse indiquée et calibrée sont égales. Dans des conditions atmosphériques types au niveau de la mer, la vitesse indiquée est égale à la vitesse propre (V) (Gracey, 1980). Avec une augmentation de l'altitude, la densité de l'air diminue. La vitesse équivalente (V_e) représente la vitesse pour laquelle la même valeur de la pression dynamique ($\frac{1}{2}\rho V^2$) serait ressentie sur le fuselage au niveau de la mer. La vitesse propre (V)

est la vitesse totale de l'avion. Lorsque le nombre de Mach augmente, l'écoulement d'air ne peut plus être considéré incompressible. La température de l'air augmente et sa densité augmente. Il est donc nécessaire d'utiliser un facteur de compressibilité pour obtenir la vitesse indiquée. Le tube Pitot et la prise statique doivent être utilisés pour calculer la vitesse. Les deux mesures recueillies sont la pression d'impact (p_d) et la pression statique (p_s). L'équation suivante nous permet de calculer la vitesse indiquée à l'aide de ces mesures (adapté de Gracey, 1980, p. 15) :

$$V_i = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p_d}{p_0} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (\text{II-9})$$

Dans cette équation, les constantes suivantes sont égales à : $\gamma = 1,4$, $p_0 = 101\,325\text{Pa}$ et $\rho_0 = 1,225\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Avec une mesure de la densité de l'air, la vitesse propre est alors calculée avec (adapté de Gracey, 1980, p. 16) :

$$V = V_i \frac{f}{f_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \quad (\text{II-10})$$

Dans laquelle f et f_0 sont des facteurs de compressibilité pour l'écoulement à l'altitude de vol et au niveau de la mer et correspond à (adapté de Gracey, 1980, p. 16) :

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_s}{p_d} \left[\left(\frac{p_d}{p_s} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (\text{II-11})$$

$$f_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{p_a} \left[\left(\frac{p_a}{p_0} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}$$

Finalement, la vitesse équivalente peut être estimée avec (adapté de Gracey, 1980, p. 16) :

$$V_e = V \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \quad (\text{II-12})$$

Nous présentons la représentation d'état normalement retrouvée pour la dynamique latérale et directionnelle (adapté de Cook, 2013, p.103) :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p + W_0 & Y_r - U_0 & g \cos \theta_0 & g \sin \theta_0 \\ L_v & L_p & L_r & 0 & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (\text{II-13})$$

Et finalement, le facteur de charge est défini comme étant le ratio entre la portance et le poids de l'avion (Hurt, 1965, p. 37) :

$$n_z = \frac{F_L}{mg} \quad (\text{II-14})$$

ANNEXE III

DÉRIVÉES AÉRODYNAMIQUES DE STABILITÉ

Au sous-chapitre 2.1.4.1, nous avons discuté une méthodologie afin d'effectuer une dérivation formelle des dérivées de stabilité, afin de permettre la linéarisation de la dynamique longitudinale. Cette annexe présente l'entièreté des équations nécessaires pour le calcul de toutes les dérivées de stabilité de la matrice d'état de l'équation (1.30). Tout d'abord, reprenons l'accélération linéaire de l'axe x_b :

$$\dot{u} = \frac{1}{m} (-F_D \cos \alpha + F_L \sin \alpha + T \cos \epsilon_v \cos \epsilon_h - g \sin \theta) - qw + rv \quad (\text{III-1})$$

Nous devons calculer la dérivée pour la variable u et w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (\dot{u}) &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \\ &= \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial F_D}{\partial u} \cos \alpha + F_D \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial F_L}{\partial u} \sin \alpha + F_L \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial w} (\dot{u}) &= \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial w} \\ &= \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial F_D}{\partial w} \cos \alpha + F_D \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} + \frac{\partial F_L}{\partial w} \sin \alpha + F_L \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

Pour l'accélération linéaire verticale, nous pouvons effectuer le calcul de façon similaire :

$$\dot{w} = \frac{1}{m} (-F_D \sin \alpha - F_L \cos \alpha - T \sin \epsilon_v \cos \epsilon_h - g \cos \theta) + qu - pv \quad (\text{III-3})$$

Avec la dérivation pour la variable u et w :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(\dot{w}) &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial u} \\
&= \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial F_D}{\partial u} \sin \alpha - F_D \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \frac{\partial F_L}{\partial u} \cos \alpha + F_L \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \\
\frac{\partial}{\partial w}(\dot{w}) &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial w} \\
&= \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial F_D}{\partial w} \sin \alpha - F_D \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} - \frac{\partial F_L}{\partial w} \cos \alpha + F_L \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)
\end{aligned} \tag{III-4}$$

Pour les dérivées partielles avec l'angle d'attaque, nous pouvons utiliser la formule mathématique pour le développement :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tan^{-1} \frac{w}{u} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial u} &= -\frac{w}{u^2 + w^2} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial w} &= \frac{u}{u^2 + w^2}
\end{aligned} \tag{III-5}$$

Maintenant, pour le moment de tangage, nous pouvons utiliser l'équation (1.22), en ignorant les effets de couplage inertiel :

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} (M) \tag{III-6}$$

Les dérivées partielles sont alors égales à

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u}(\dot{q}) &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial u} \\
 \frac{\partial}{\partial w}(\dot{q}) &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial w} \\
 \frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}) &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial q} \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{w}}(\dot{q}) &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}
 \end{aligned}
 \tag{III-7}$$

Nous pouvons maintenant calculer la dérivée des deux forces et du moment en fonction des variables d'état :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_D}{\partial u} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_D}{\partial u} + \frac{1}{2} \rho u S C_D \\
 \frac{\partial F_D}{\partial w} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_D}{\partial w} + \frac{1}{2} \rho w S C_D
 \end{aligned}
 \tag{III-8}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_L}{\partial u} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial u} + \frac{1}{2} \rho u S C_L \\
 \frac{\partial F_L}{\partial w} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{\partial C_L}{\partial w} + \frac{1}{2} \rho w S C_L
 \end{aligned}
 \tag{III-9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \frac{\partial C_m}{\partial u} + \frac{1}{2} \rho u S \bar{c} C_m \\
 \frac{\partial M}{\partial w} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \frac{\partial C_m}{\partial w} + \frac{1}{2} \rho w S \bar{c} C_m \\
 \frac{\partial M}{\partial q} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \frac{\partial C_m}{\partial q} \\
 \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} &= \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \frac{\partial C_m}{\partial \dot{w}}
 \end{aligned}
 \tag{III-10}$$

Les coefficients C_L , C_D et C_m sont des fonctions de la vitesse équivalente (V_e), de l'angle d'attaque (α) et du nombre de Mach (M_a). La vitesse équivalente a été introduite avec l'équation (2.12). Nous pouvons donc calculer les dérivées partielles pour chaque coefficient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_L}{\partial u} &= \frac{\partial C_L}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial u} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial u} \\ \frac{\partial C_L}{\partial w} &= \frac{\partial C_L}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial w} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w} + \frac{\partial C_L}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial w}\end{aligned}\quad (\text{III-11})$$

Similairement pour le coefficient de traînée et de moment longitudinal :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_D}{\partial u} &= \frac{\partial C_D}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial u} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial C_D}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial u} \\ \frac{\partial C_D}{\partial w} &= \frac{\partial C_D}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial w} + \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w} + \frac{\partial C_D}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial w} \\ \frac{\partial C_m}{\partial u} &= \frac{\partial C_m}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial u} + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial C_m}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial u} \\ \frac{\partial C_m}{\partial w} &= \frac{\partial C_m}{\partial V_e} \frac{\partial V_e}{\partial w} + \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial w} + \frac{\partial C_m}{\partial M_a} \frac{\partial M_a}{\partial w}\end{aligned}\quad (\text{III-12})$$

Les dérivées partielles avec le coefficient et une des trois variables mentionnées au dernier paragraphe sont calculées à partir des graphiques. Certains résultats dépendent de la pente de la courbe dans le document de Hanke et Nordwall (1970), et d'autres équivalent à la valeur de l'ordonnée du graphique, étant donné que cette valeur est multipliée par l'angle d'attaque. Pour finaliser le calcul pour la portance et la traînée, les dérivées partielles avec la vitesse équivalente sont égales à

$$\frac{\partial V_e}{\partial u} = \frac{u}{V} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial w} = \frac{w}{V} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$
(III-13)

Les dérivées partielles avec le nombre de Mach sont égales à

$$\frac{\partial M_a}{\partial u} = \frac{u}{aV}$$

$$\frac{\partial M_a}{\partial w} = \frac{w}{aV}$$
(III-14)

Pour la dérivée partielle $\frac{\partial C_m}{\partial q}$, dans la modélisation du Boeing 747, il y a un terme de la somme du coefficient qui dépend du taux de variation de tangage. La valeur est donc calculée directement à partir de la lecture du graphique. Finalement, pour la dérivée $\frac{\partial C_m}{\partial \dot{w}}$, nous pouvons transformer l'accélération linéaire en taux de variation d'angle d'attaque en affirmant que :

$$\frac{\partial C_m}{\partial \dot{w}} = \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{w}}$$
(III-15)

La relation entre le taux de variation de l'angle d'attaque et l'accélération linéaire verticale a été présentée avec l'équation-A (II-4). Nous pouvons calculer alors la dérivée partielle :

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \dot{w}} = \frac{u}{u^2 + w^2}$$
(III-16)

Avec toutes les équations présentées dans cette annexe, nous avons donc tous les termes nécessaires pour calculer les dérivées de stabilité pour permettre la linéarisation du système selon la méthode du sous-chapitre 2.1.4.1.

ANNEXE IV

RÉSULTATS DES ESSAIS LONGITUDINAUX ET LATÉRAUX

Au chapitre 2, des résultats d'essais pour la dynamique longitudinale et latérale sont présentés. Cette annexe présente les résultats bruts pour chaque situation de vol. Les données provenant des essais en régime permanent, des essais dynamiques et des techniques de linéarisation sont présentées sous forme de tableau. De plus, pour les essais dynamiques, les réponses temporelles de certaines variables d'état sont présentées sous forme graphique pour la comparaison qualitative.

Premièrement, des données ont été collectées pour les essais en régime permanent. Quarante différentes situations de vol ont pu être reproduites pour ce test, toutes provenant de l'ouvrage de Hanke et Nordwall (1970). Ces conditions sont recopiées dans le Tableau-A IV-1. La colonne de vitesse donne la vitesse Mach pour les situations 1 à 8, la vitesse indiquée en nœuds pour les situations 9 à 21, et la vitesse équivalente pour les situations 22 à 40. La colonne « Train » représente la position du train d'atterrissage avec la lettre R (rentré) ou la lettre S (sorti).

Tableau-A IV-1 Conditions de vol pour les essais
en régime permanent

Situation	Altitude (000')	Vitesse	Poids (000 lbs)	Centre de gravité (%)	Train	Volets
1	20	0,8	650	12	R	0
2	20	0,8	650	32	R	0
3	20	0,8	500	14	R	0
4	20	0,6	500	14	R	0
5	35	0,75	500	14	R	0
6	35	0,86	500	14	R	0
7	35	0,75	500	32	R	0
8	35	0,86	500	32	R	0
9	5	167	550	15	R	10
10	5	159	550	15	R	20
11	5	155	550	15	S	25
12	5	135	550	15	S	25
13	5	150	550	15	S	30
14	5	190	710	11	R	10
15	5	190	710	32	R	10
16	0,2	142	564	15	S	30
17	0,2	142	564	33	S	30
18	10	142	564	15	S	30
19	10	180	564	15	S	30
20	10	180	564	15	S	25
21	0,2	120	400	15	S	30
22	5	300	400	32	R	0
23	5	250	400	32	R	0
24	30	250	400	32	R	0
25	30	300	400	32	R	0
26	40	200	400	32	R	0
27	40	250	400	32	R	0
28	30	275	680	12,5	R	0
29	30	300	680	12,5	R	0
30	20	291	564	14	R	0
31	20	291	564	32	R	0
32	20	358	564	32	R	0
33	20	225	564	25	R	0
34	20	325	564	25	R	0
35	35	225	564	25	R	0

Situation	Altitude (000')	Vitesse	Poids (000 lbs)	Centre de gravité (%)	Train	Volets
36	35	275	564	25	R	0
37	0,2	180	564	25	R	30
38	0,2	142	564	25	R	30
39	0,2	142	564	25	S	30
40	5	250	564	25	R	0

Les trois variables utilisées pour la comparaison sont l'angle de déflexion du stabilisateur horizontal (δ_s), l'angle d'attaque mesurée avec la corde des ailes (α_{wdp}) et la force de poussée (T). Cette dernière est uniquement disponible pour 21 conditions de vol. Les données sont transformées dans la forme requise pour calculer la différence. Les résultats sont présentés dans le Tableau-A IV-2.

Tableau-A IV-2 Comparaison des données de la modélisation
et des essais en vol de Boeing

Situation	Modélisation			Essais en vol		
	δ_s (°)	α_{wdp} (°)	T (N)	δ_s (°)	α_{wdp} (°)	T (N)
1	-0,737	2,274	1,95E+05	-0,6	2,3	1,91E+05
2	0,415	2,078	1,92E+05	0,6	2,1	1,88E+05
3	-0,216	1,381	1,81E+05	-0,1	1,3	1,77E+05
4	-1,239	3,934	1,30E+05	-1,3	4	1,28E+05
5	-1,941	4,266	1,17E+05	-1,8	4,4	1,22E+05
6	-1,264	2,736	1,37E+05	-1,3	2,7	1,38E+05
7	-0,230	4,060	1,21E+05	-0,1	4,1	1,17E+05
8	-0,066	2,546	1,35E+05	-0,1	2,5	1,33E+05
9	-4,881	10,061	2,07E+05	-4,8	10,1	2,08E+05
10	-5,571	8,499	2,25E+05	-5,5	8,5	2,26E+05
11	-5,670	7,976	2,90E+05	-5,6	7,9	2,87E+05
12	-8,115	11,858	3,13E+05	-7,9	11,7	3,11E+05
13	-6,320	5,916	3,55E+05	-6,2	5,8	3,50E+05
14	-5,452	10,399	2,78E+05	-5,6	10,4	2,79E+05
15	-0,976	9,787	2,68E+05	-0,9	9,8	2,69E+05
16	-7,539	7,721	3,65E+05	-7,5	7,7	3,64E+05
17	-1,961	6,973	3,40E+05	-1,9	7	3,40E+05
18	-7,672	7,808	3,66E+05	-7,6	7,7	3,64E+05
19	-3,864	2,201	3,90E+05	-3,7	2,2	3,97E+05
20	-3,957	5,244	3,11E+05	-3,8	5,1	3,06E+05
21	-7,474	7,280	2,52E+05	-7,4	7,3	2,51E+05
22	0,836	2,698	N/D	0,68	2,64	N/D
23	0,378	4,266	N/D	0,34	4,07	N/D
24	0,266	2,812	N/D	0,17	2,9	N/D
25	0,312	1,312	N/D	0,47	1,26	N/D
26	-0,687	5,042	N/D	-0,48	4,96	N/D
27	-0,064	2,284	N/D	-0,112	2,19	N/D
28	-2,030	4,263	N/D	-1,98	4,8	N/D
29	-1,644	3,268	N/D	-1,47	3,55	N/D
30	-1,040	3,536	N/D	-1,13	3,66	N/D
31	0,400	3,309	N/D	0,27	3,44	N/D
32	0,510	1,616	N/D	0,65	1,61	N/D
33	-1,622	6,998	N/D	-1,53	7,08	N/D
34	0,138	2,393	N/D	0,113	2,41	N/D
35	-1,633	5,820	N/D	-1,38	5,96	N/D

Situation	Modélisation			Essais en vol		
	δ_s (°)	α_{wdp} (°)	T (N)	δ_s (°)	α_{wdp} (°)	T (N)
36	-0,770	3,236	N/D	-0,68	3,09	N/D
37	-1,446	1,533	N/D	-1,37	1,62	N/D
38	-4,097	6,970	N/D	-4,01	6,99	N/D
39	-4,442	7,299	N/D	-4,36	7,31	N/D
40	-0,803	6,185	N/D	-0,8	6,01	N/D

La linéarisation et les essais dynamiques se concentrent sur les modes longitudinaux. Huit essais en vol sont présentés dans le document de Hanke et Nordwall (1970). Ces conditions de vol sont présentées dans le Tableau-A IV-3. Les situations 1 à 4 sont représentées par la vitesse indiquée, et les situations 5 à 8, par la vitesse Mach.

Tableau-A IV-3 Conditions initiales des situations pour les essais dynamiques longitudinaux et les techniques de linéarisation

Situation	Altitude (000')	Vitesse	Poids (000 lbs)	Centre de gravité (%)	Train	Volets
1	5	180	710	25	R	10
2	5	210	710	25	R	10
3	5	153	564	33	S	30
4	5	153	564	15	S	30
5	20	0,65	564	14	R	0
6	20	0,65	564	32	R	0
7	35	0,75	564	32	R	0
8	35	0,87	564	32	R	0

La première comparaison qui a été présentée dans chapitre 2 avec ces conditions de vol est avec la technique de linéarisation utilisant une mesure expérimentale à la suite d'une légère déviation autour du point d'équilibre (Tableaux-A IV-4 et IV-5). Les résultats comparant la modélisation avec la dérivation formelle sont présentés dans les Tableaux-A IV-6 et IV-7. La fréquence naturelle (ω_n) et le taux d'amortissement (ζ) sont calculés pour le mode phugoïde et le mode courte période.

Tableau-A IV-4 Résultats des modes longitudinaux pour la modélisation non-linéaire et la linéarisation utilisant la technique de mesures expérimentales

Situation	Modélisation				Mesures expérimentales			
	Courte période		Phugoïde		Courte période		Phugoïde	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	0,9844	0,6798	0,1190	0,0324	1,2245	0,5548	0,1209	0,0414
2	1,4355	0,4692	0,1067	0,0385	1,4055	0,5330	0,1083	0,0461
3	0,9702	0,7820	0,1188	0,0865	1,0530	0,6155	0,1243	0,0758
4	1,2749	0,5793	0,1370	0,0851	1,3499	0,5079	0,1384	0,0862
5	1,9731	0,7186	0,0760	0,0294	2,2153	0,4237	0,0736	0,0318
6	1,3467	0,8867	0,0775	0,0249	1,7130	0,5276	0,0779	0,0275
7	0,5819	0,5065	0,0630	0,0260	1,3451	0,4609	0,0661	0,0373
8	1,0255	0,9792	0,0440	0,0461	1,1961	0,6903	0,0640	0,1336

Tableau-A IV-5 Écarts des modes longitudinaux pour la modélisation non-linéaire et la linéarisation utilisant la technique de mesures expérimentales

Situation	Courte période		Phugoïde	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	-0,2401	0,125	-0,0019	-0,009
2	0,03	-0,0638	-0,0016	-0,0076
3	-0,0828	0,1665	-0,0055	0,0107
4	-0,075	0,0714	-0,0014	-0,0011
5	-0,2422	0,2949	0,0024	-0,0024
6	-0,3663	0,3591	-0,0004	-0,0026
7	-0,7632	0,0456	-0,0031	-0,0113
8	-0,1706	0,2889	-0,02	-0,0875

Tableau-A IV-6 Résultats des modes longitudinaux pour la modélisation non-linéaire et la linéarisation utilisant la technique de dérivation formelle

Situation	Modélisation				Dérivation formelle			
	Courte période		Phugoïde		Courte période		Phugoïde	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	0,9844	0,6798	0,1190	0,0324	1,1939	0,2941	0,1369	0,0361
2	1,4355	0,4692	0,1067	0,0385	1,3808	0,2605	0,1175	0,0411
3	0,9702	0,7820	0,1188	0,0865	0,9358	0,3567	0,1597	0,0462
4	1,2749	0,5793	0,1370	0,0851	1,2952	0,2740	0,1618	0,0775
5	1,9731	0,7186	0,0760	0,0294	1,8385	0,2757	0,0208	1,0000
6	1,3467	0,8867	0,0775	0,0249	1,1210	0,1621	0,0139	1,0000
7	0,5819	0,5065	0,0630	0,0260	1,6150	1,0000	0,0059	-0,1044
8	1,0255	0,9792	0,0440	0,0461	1,5466	0,1379	0,0086	1,0000

Tableau-A IV-7 Écarts des modes longitudinaux pour la modélisation non-linéaire et la linéarisation utilisant la technique de dérivation formelle

Situation	Courte période		Phugoïde	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	-0,2095	0,3857	-0,0179	-0,0037
2	0,0547	0,2087	-0,0108	-0,0026
3	0,0344	0,4253	-0,0409	0,0403
4	-0,0203	0,3053	-0,0248	0,0076
5	0,1346	0,4429	0,0552	-0,9706
6	0,2257	0,7246	0,0636	-0,9751
7	-1,0331	-0,4935	0,0571	0,1304
8	-0,5211	0,8413	0,0354	-0,9539

Dans le sous-chapitre 2.3.2, les paramètres du mode phugoïde calculés à l'aide de la réponse temporelle de l'angle de tangage de la modélisation non-linéaire sont comparés avec les paramètres extraits des graphiques représentant les essais en vol de Boeing. La fréquence naturelle et le taux d'amortissement sont présentés pour les deux sources (Tableau-A IV-8).

Tableau-A IV-8 Résultats pour le mode phugoïde de la modélisation et des essais en vol Boeing

Situation	Modélisation		Essais en vol		Écart	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	0,119	0,032	0,120	0,012	-0,001	0,02
2	0,107	0,039	0,101	0,045	0,006	-0,006
3	0,119	0,086	0,117	0,066	0,002	0,02
4	0,137	0,085	0,145	0,078	-0,008	0,007
5	0,076	0,029	0,072	0,064	0,004	-0,035
6	0,078	0,025	0,067	0,028	0,011	-0,003
7	0,063	0,026	0,064	0,002	-0,001	0,024
8	0,044	0,046	0,035	0,063	0,009	-0,017

Neuf autres situations de vol sont utilisées pour les essais de dynamique latérale. Le Tableau-A IV-9 montre les conditions initiales. Tous les cas sont initialisés avec la vitesse indiquée. Le Tableau-A IV-10 donne le résultat des paramètres du mode roulis hollandais pour la modélisation non-linéaire et la valeur extraite des graphiques des essais en vol.

Tableau-A IV-9 Données d'initialisation pour les essais en vol de la dynamique latérale

Situation	Altitude (000')	Vitesse	Poids (000')	Centre de gravité (%)	Train	Volets
1	20	325	564	25	R	0
2	20	225	564	25	R	0
3	5	250	564	25	R	0
4	0,2	142	564	25	R	30
5	35	275	564	25	R	0
6	0,2	180	710	25	R	10
7	0,2	180	564	25	R	30
8	35	225	564	25	R	0
9	0,2	142	564	25	S	30

Tableau-A IV-10 Résultats des paramètres du mode roulis hollandais pour la modélisation et les essais en vol

Situation	Modélisation		Essais en vol		Écart	
	ω_n	ζ	ω_n	ζ	ω_n	ζ
1	1,681	0,143	1,254	0,086	0,427	0,057
2	1,259	0,152	0,932	0,076	0,327	0,076
3	1,339	0,195	0,997	0,119	0,342	0,076
4	0,966	0,203	0,738	0,083	0,228	0,12
5	1,608	0,110	1,182	0,053	0,426	0,057
6	1,070	0,167	0,796	0,072	0,274	0,095
7	1,010	0,191	0,773	0,088	0,237	0,103
8	1,294	0,114	0,943	0,053	0,351	0,061
9	0,991	0,204	0,750	0,081	0,241	0,123

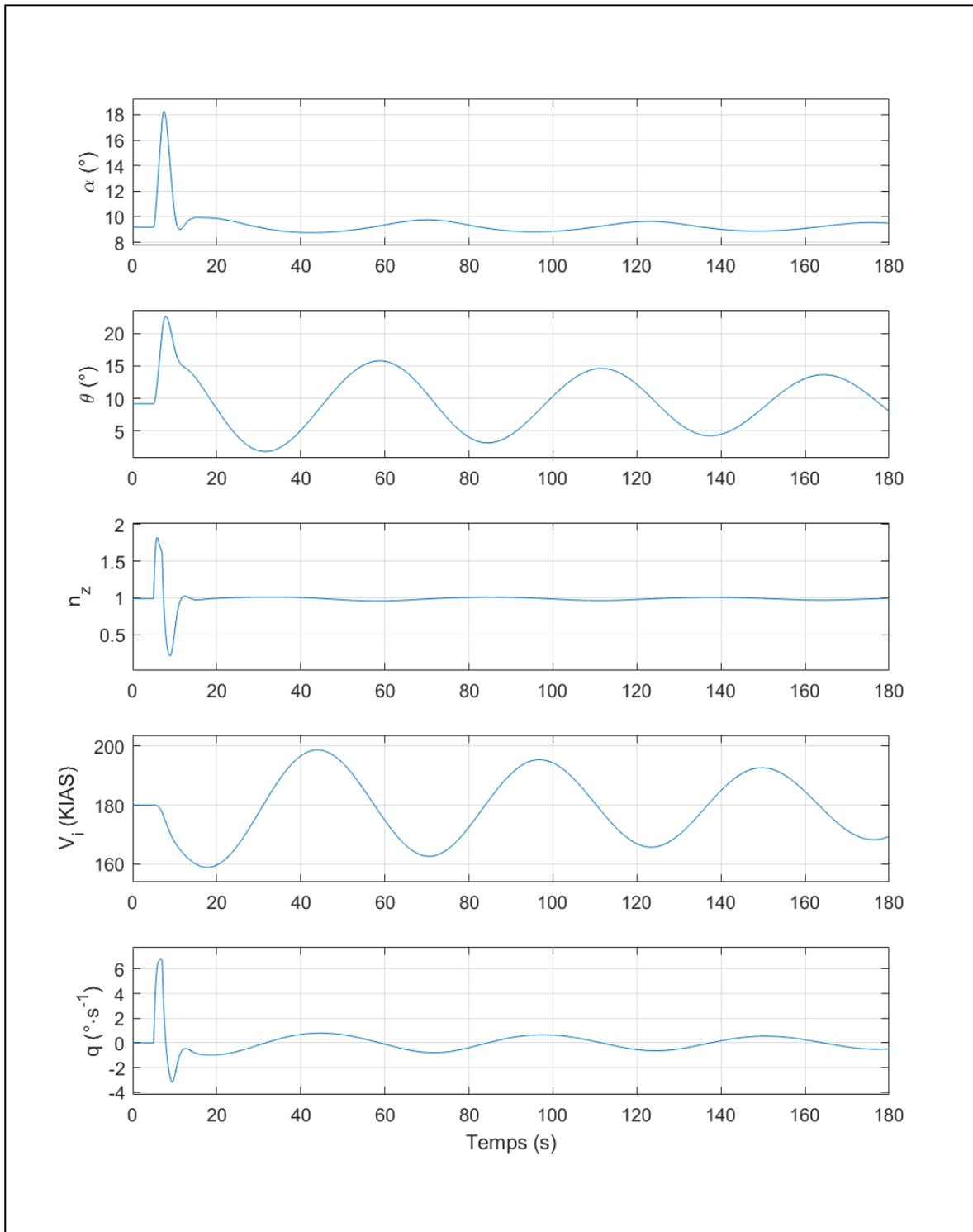


Figure-A IV-1 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 1

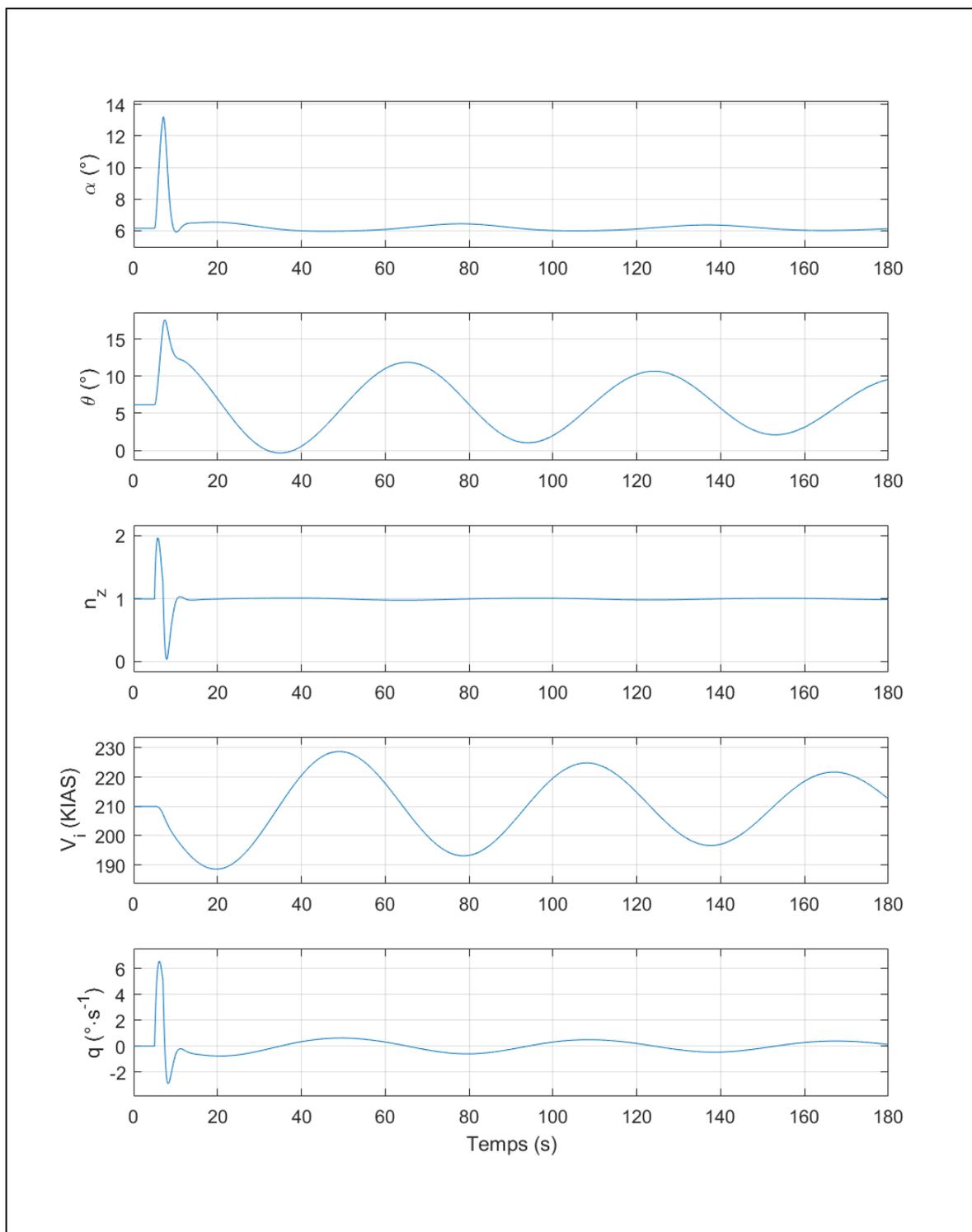


Figure-A IV-2 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 2

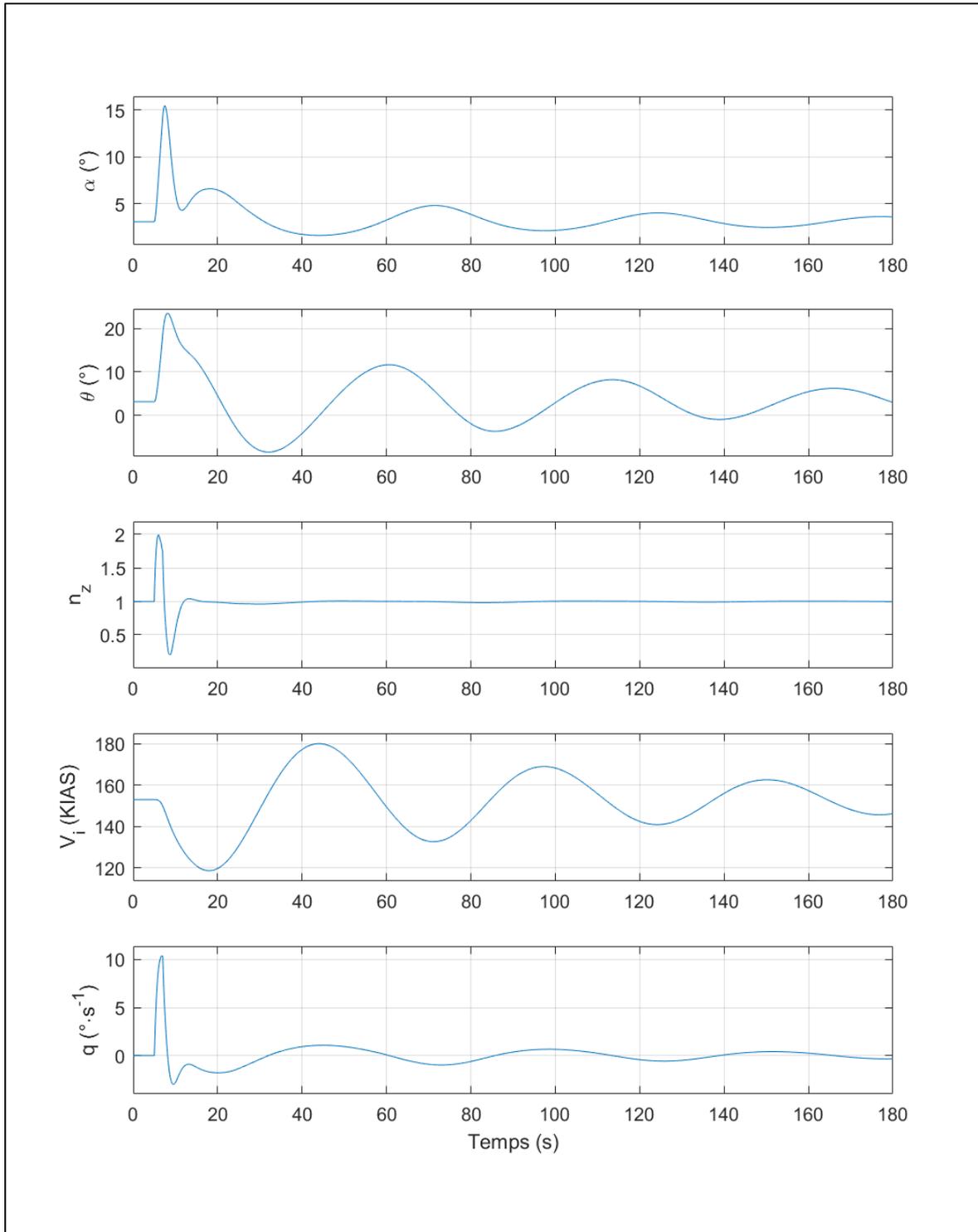


Figure-A IV-3 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 3

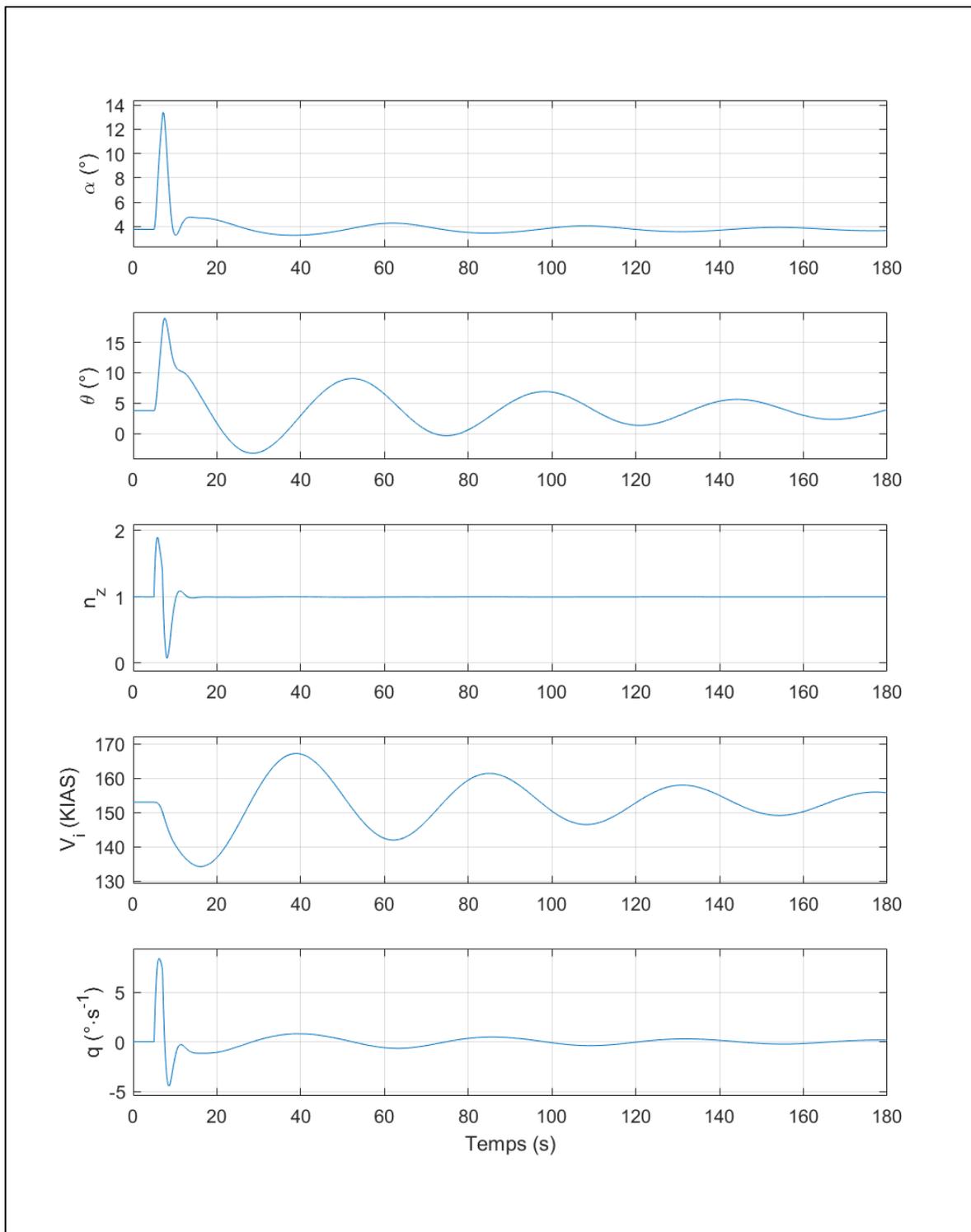


Figure-A IV-4 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 4

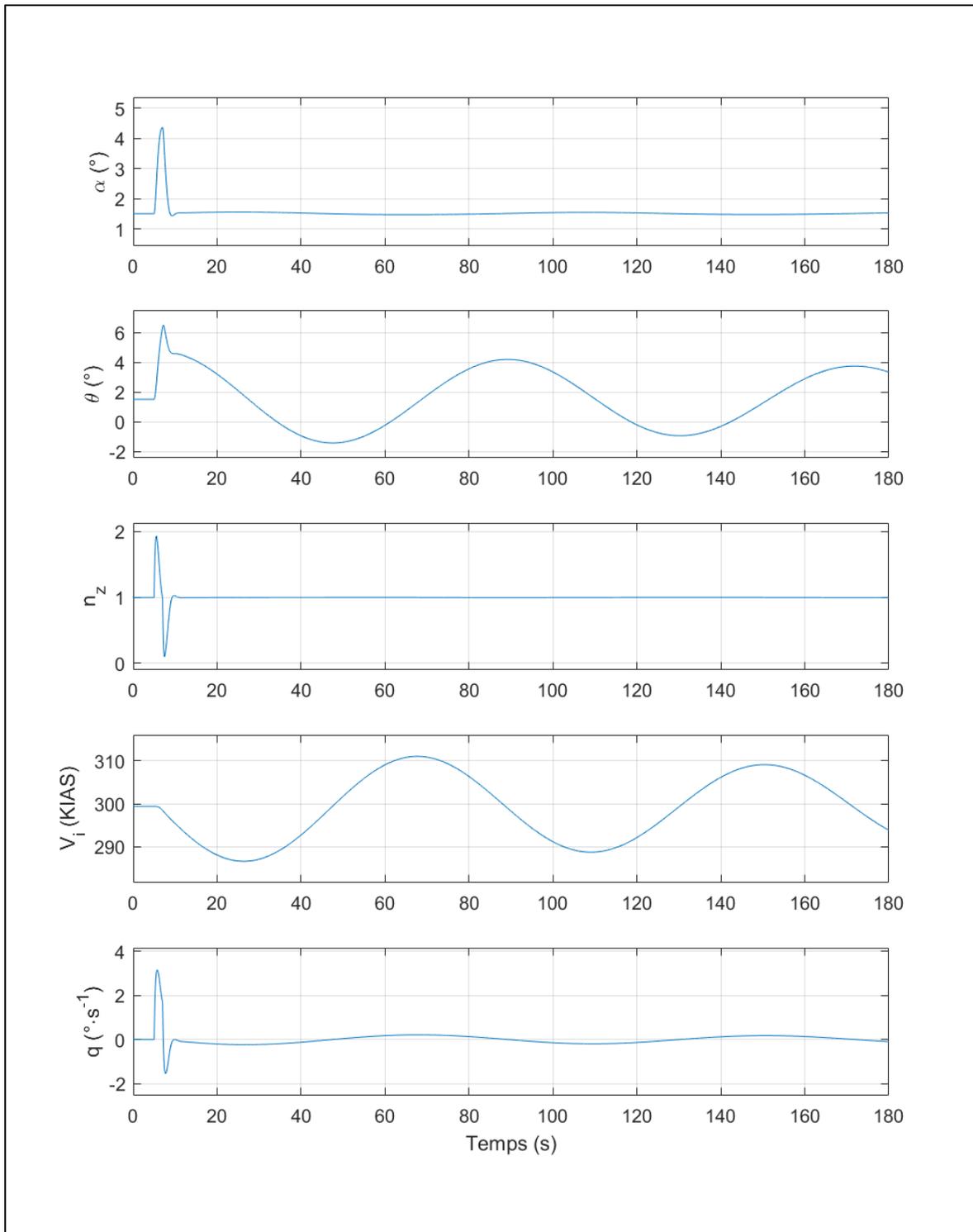


Figure-A IV-5 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 5

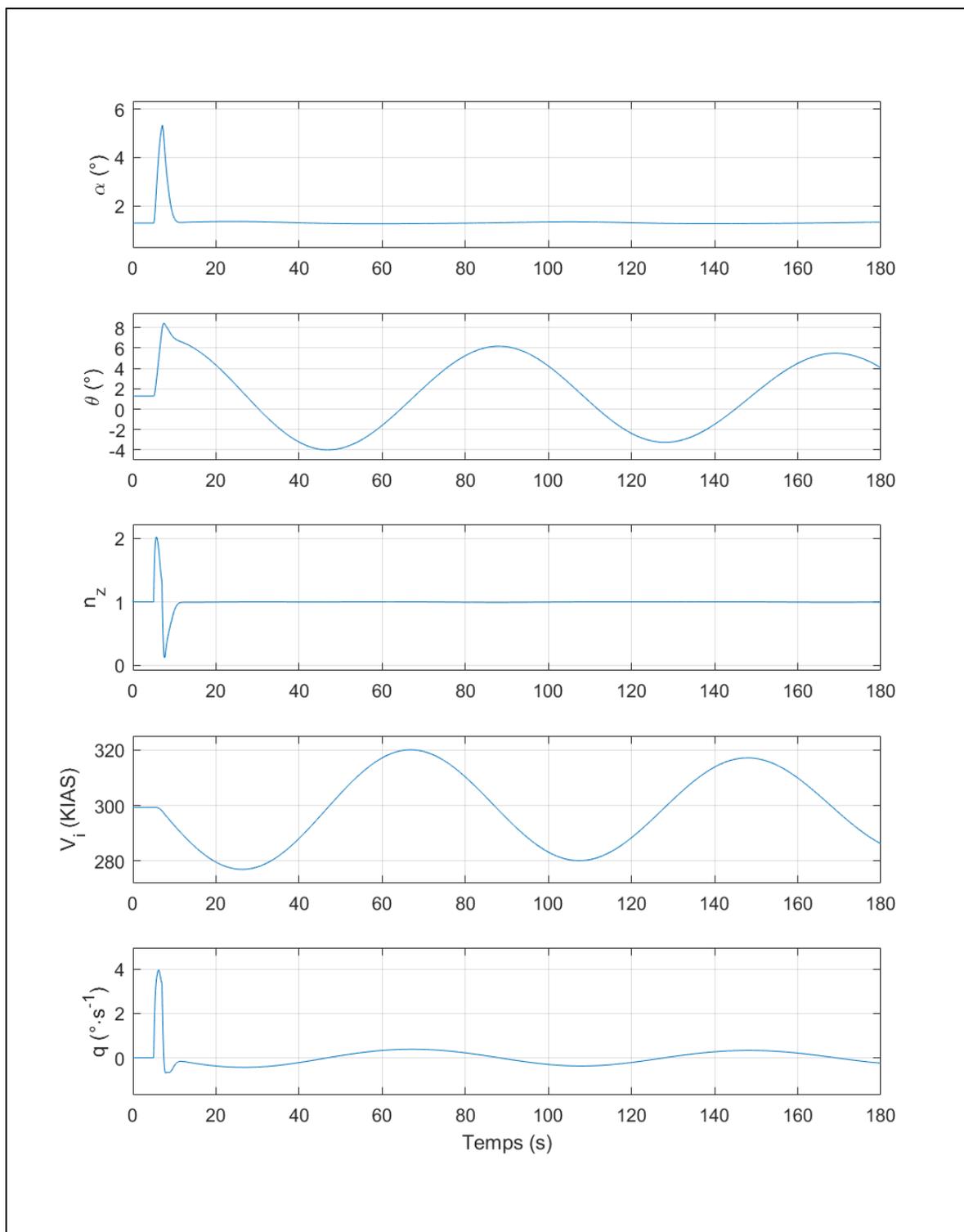


Figure-A IV-6 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 6

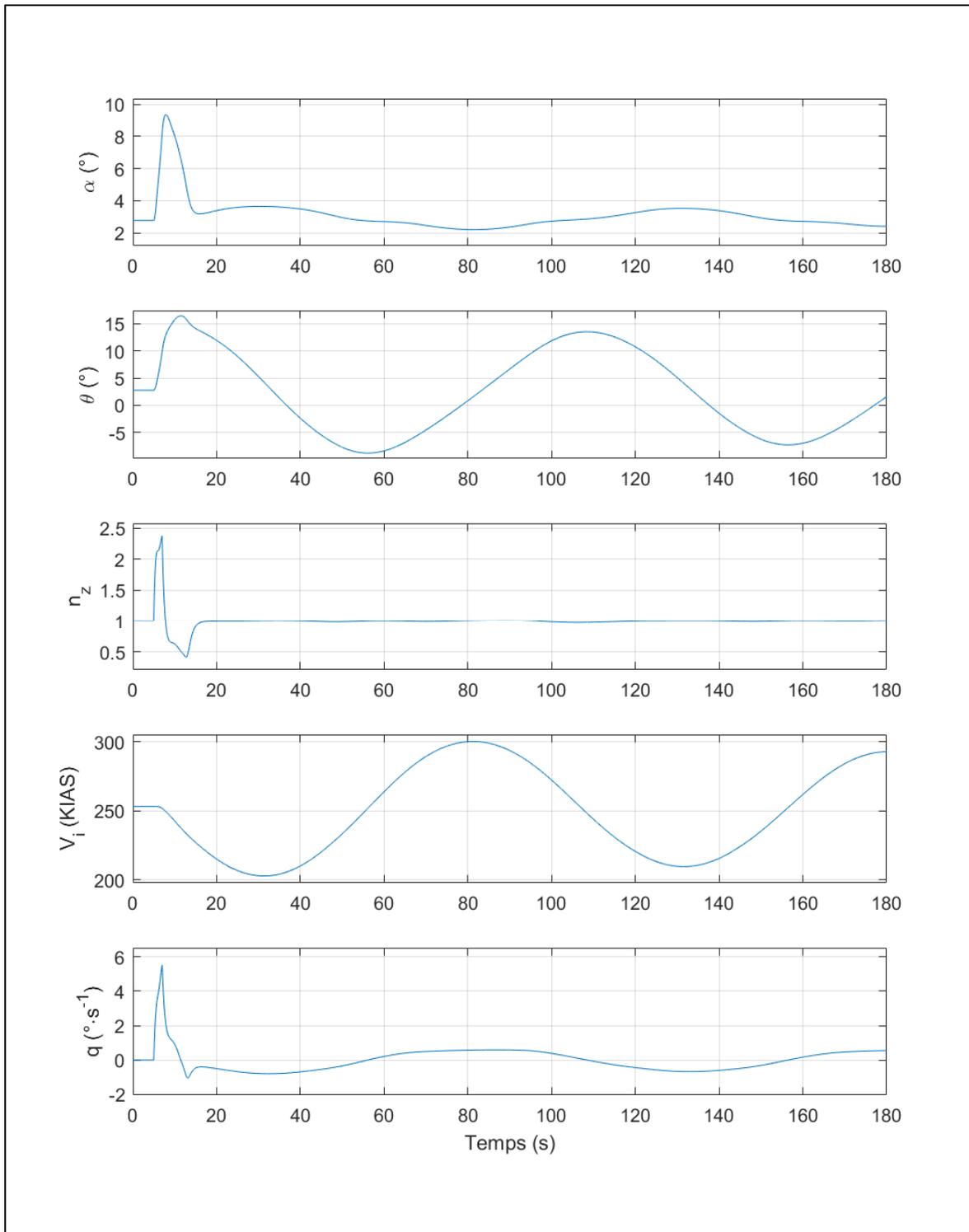


Figure-A IV-7 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 8

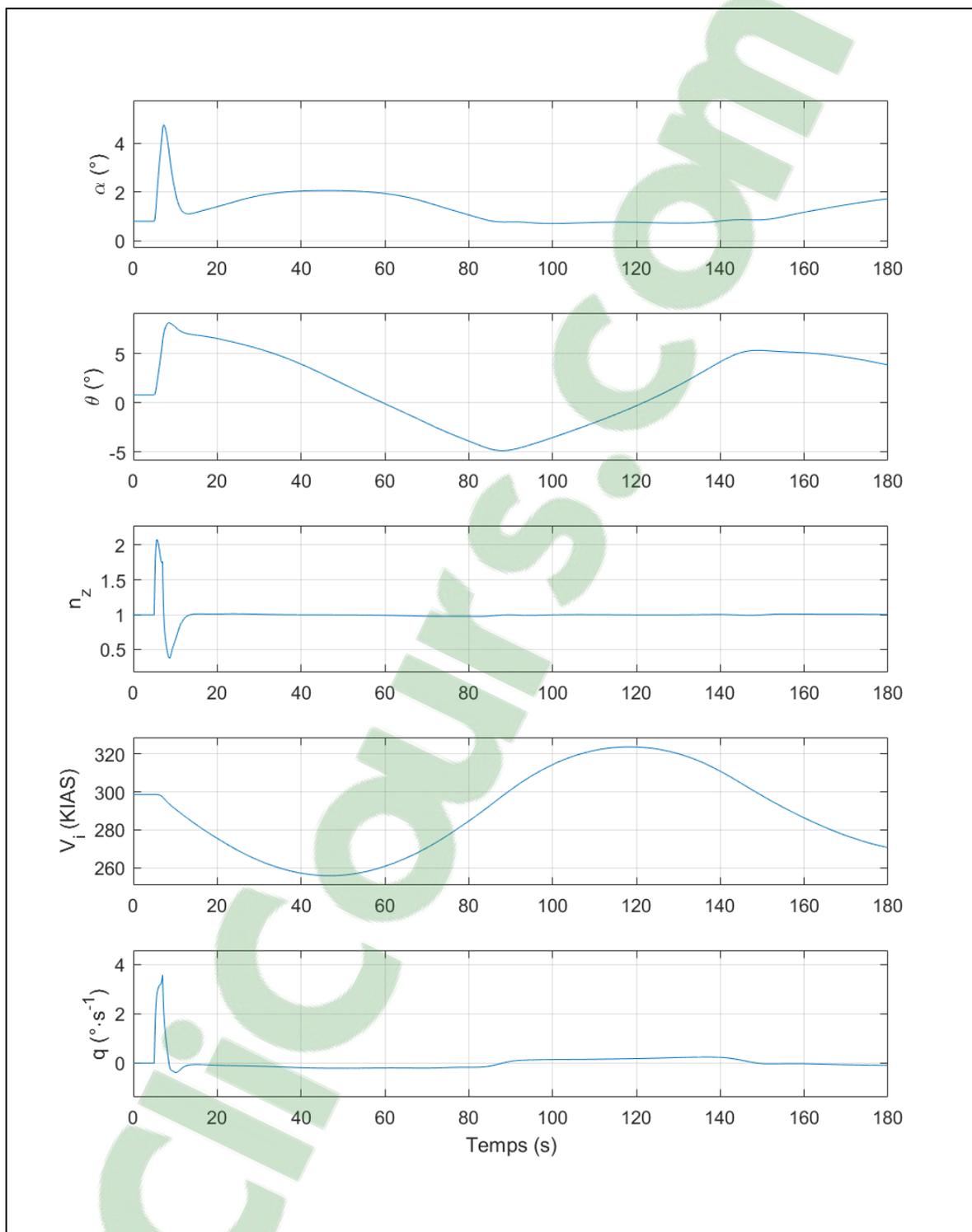


Figure-A IV-8 Réponse temporelle longitudinale pour la situation 8

ANNEXE V

ESTIMATION DU MODÈLE DU BOEING 747

Dans le cadre de la synthèse du contrôleur en utilisant la méthode d'inversion dynamique, un modèle représentant l'aéronef est nécessaire pour les calculs des variables d'entrée. Dans le cadre de ce projet de recherche, la modélisation est réalisée en établissant une relation entre des coefficients aérodynamiques de force et de moment, et les variables d'état. Également, étant donné que la valeur en Newtons de la poussée des réacteurs n'est pas une entrée que nous pouvons directement asservir, nous utiliserons une base de données pour la performance des réacteurs. Nous allons nous limiter à la synthèse du contrôleur pour une seule configuration, avec volets et train d'atterrissage rentrés. Dans cette configuration, le domaine opérationnel d'intérêt se situe à un angle d'attaque de 10 degrés et moins, étant donné qu'il y a une activation du système de prévention de décrochage à cet angle.

Lorsque l'asservissement longitudinale a été abordé (Chapitre 3.3.1), nous avons introduit une relation linéaire pour le coefficient de moment de l'avion en fonction de l'angle d'attaque, et un coefficient de traînée. Ce coefficient, dans une modélisation complète, dépend d'une somme de sept différentes contributions, chacune étant une fonction des variables d'état et de ses dérivées. De plus, huit surfaces de contrôle influencent la somme de ce coefficient. Étant donné que nous séparons les surfaces de contrôle du reste de l'aéronef, nous ne parlerons pas de celles-ci à ce moment. Tel que discuté dans le chapitre 4, nous suspectons qu'avec l'équation de notre contrôleur longitudinal, seulement la dérivée aérodynamique du coefficient de moment en fonction de l'angle d'attaque influence la performance du contrôleur. Afin de minimiser les irrégularités du domaine de vol compressible, nous effectuons l'estimation du coefficient pour un de vol subsonique ($Mach \leq 0,5$). Avec le document de Hanke et Nordwall (1970), nous pouvons utiliser la régression linéaire simple pour calculer cette relation linéaire pour une variation en fonction de l'angle d'attaque. La Figure-A V-1 présente le coefficient $C_{m_{basic}}$, tel que défini dans l'Annexe I. Pour l'ajustement de la courbe à l'aide de la régression

linéaire, uniquement les données pour un angle d'attaque de 10 degrés et moins ont été prises en considération. L'équation représentant cet ajustement est :

$$C_{m_{ac}} = -0,0237 \alpha + 0,1218 \quad (V-1)$$

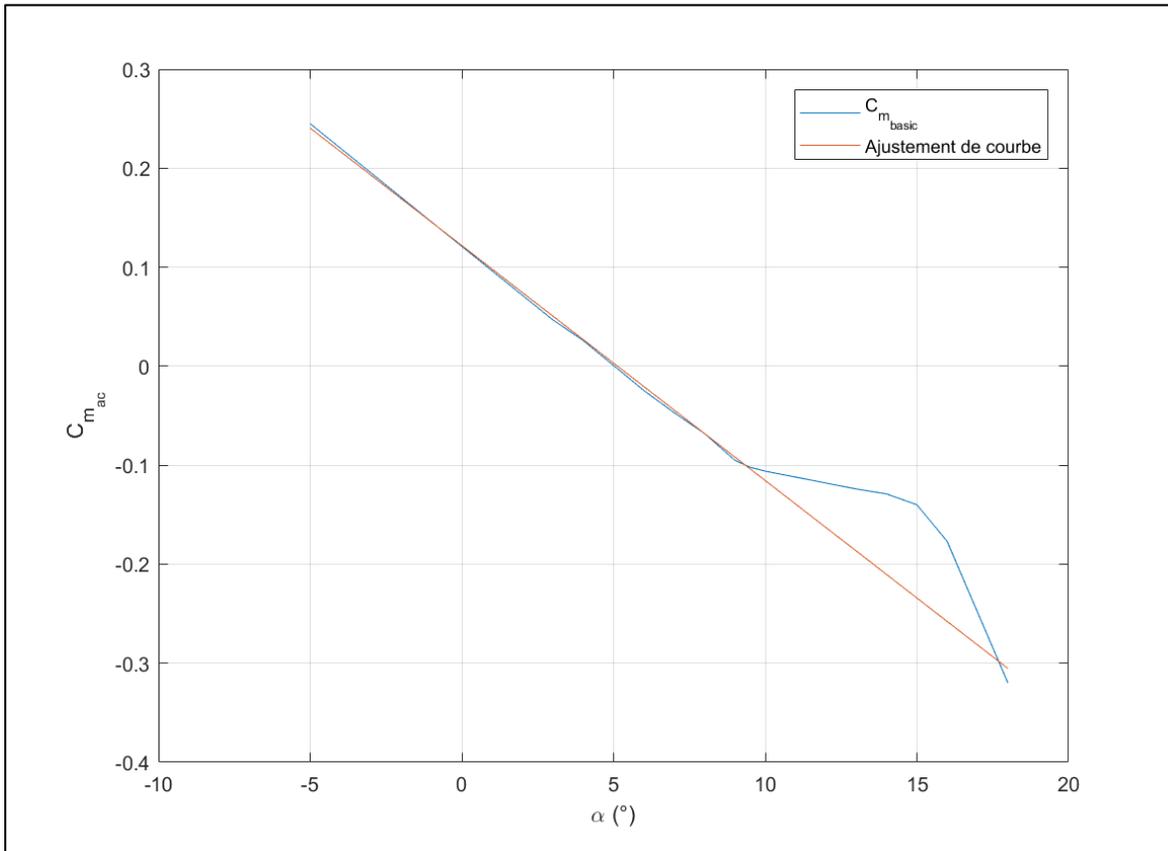


Figure-A V-1 Estimation pour la modélisation du coefficient de moment longitudinal

Un autre paramètre relié au moment longitudinal de l'avion qui nécessite une approximation de la modélisation est le coefficient de moment longitudinal pour une déflexion de la gouverne de profondeur. Dans la modélisation présentée par (Hanke & Nordwall, 1970), les panneaux intérieurs et extérieurs de la gouverne de profondeur sont séparés. Pour chacun, le coefficient de moment est un produit d'un facteur d'efficacité, une dérivée aérodynamique et de la déflexion de la gouverne de profondeur.

Dans l'équation de d'accélération longitudinale, la force aérodynamique s'opposant au mouvement de l'avion est la traînée. Dans l'expression qui représente cette force, la pression dynamique, la superficie de l'aile, et le coefficient de traînée (C_D) sont les trois paramètres de cette équation. Dans la modélisation présentée par Hanke et Nordwall (1970), la contribution la plus significative du coefficient de traînée est le coefficient de portance (C_L). Dans un régime de vol incompressible, ce coefficient de portance dépend principalement de l'angle d'attaque (α). Cette relation est celle privilégiée pour l'approximation de la modélisation de l'équation de traînée

Pour obtenir cette relation entre l'angle d'attaque et le coefficient de traînée, nous avons utilisé la modélisation pour extraire cette donnée. En utilisant des conditions initiales pour un vol à bas niveau et à basse vitesse¹, le simulateur nous donne un coefficient de traînée pour un angle d'attaque précis. Il est nécessaire de noter que dans la technique expérimentale d'acquisition de données, l'aéronef n'a pas été mis à l'équilibre avant. La raison étant qu'un seul angle d'attaque aurait répondu à l'état à l'équilibre pour ces conditions initiales. Le seul biais introduit dans cette démarche est la contribution au coefficient de portance du stabilisateur horizontal, qui est négligeable dans les circonstances. La simulation est alors initialisée à l'angle d'attaque pour lequel nous désirons obtenir le coefficient de traînée. La valeur de ce coefficient est notée au moment zéro, nous donnant alors une estimation pour l'angle correspondant. À partir de cette technique, nous obtenons les données présentées dans la Figure-A V-2.

¹ Altitude de 5000 pieds au-dessus du niveau de la mer et nombre de Mach inférieur à 0,4.

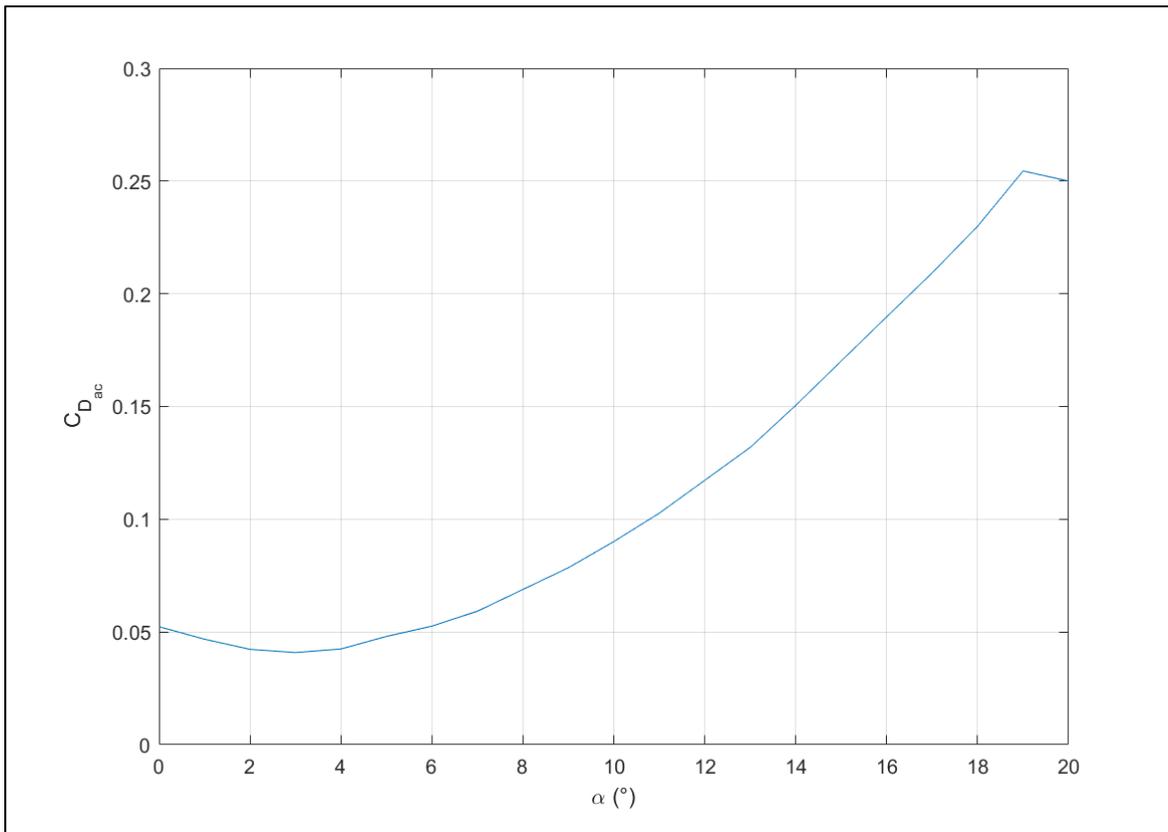


Figure-A V-2 Estimation de la modélisation du coefficient de traînée

Ce graphique a été généré à partir d'un tableau de données. Le contrôleur utilisera donc ce tableau pour interpoler la valeur du coefficient de traînée à l'angle d'attaque actuel, lors de la mise en opération. Une simple interpolation linéaire sera utilisée.

Pour la synthèse du contrôleur, la dynamique latérale nécessite également une modélisation pour intégrer des valeurs de coefficients aérodynamiques. Les deux équations pour lesquelles l'inversion dynamique a été appliquée sont l'accélération angulaire du roulis dans le repère-avion et l'accélération linéaire latérale. Dans le premier cas, le coefficient aérodynamique nécessaire au calcul est le coefficient de moment de roulis dans le repère-stabilité (C_l).

Stevens et al. (2015, p. 127) affirme qu'une modélisation linéaire de la dynamique latérale peut être représentée avec les variables d'état suivantes : l'angle de dérapage (β), l'angle d'Euler

de roulis (ϕ), les vitesses angulaires de roulis et de lacet dans le repère-stabilité (p_s et r_s). L'angle de roulis affecte uniquement la force latérale en ajoutant une composante d'accélération gravitationnelle, qui est normalement nulle dans cet axe lors d'un vol rectiligne. Étant donné que la dynamique d'un Boeing 747 en opération normale est relativement lente, autrement dit qui est représentée adéquatement de façon linéaire, nous pouvons en déduire que les trois contributions plus significatives aux coefficients de moment de roulis et de force latérale proviennent d'une variation de l'angle de dérapage, et d'une vitesse angulaire de roulis et de lacet. Alors, nous pouvons assumer que la modélisation des deux coefficients s'écrira sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} C_{l_{ac}} &= C_{l_{\beta}} + C_{l_p} + C_{l_r} \\ C_{Y_{ac}} &= C_{Y_{\beta}} + C_{Y_p} + C_{Y_r} \end{aligned} \quad (\text{V-2})$$

Dans la présentation de la modélisation par Hanke et Nordwall (1970), ce sont bien les contributions qui forment exclusivement la somme des deux coefficients aérodynamiques, en ignorant la contribution des surfaces de contrôle. Nous devons souligner que la relation est non-linéaire et est influencée entre autres par des effets d'aéroélasticité. Cependant, le but de notre projet recherche est en autre de substituer le modèle exact par une approximation linéaire afin de voir la robustesse du contrôleur. L'approximation sera effectuée pour un régime de vol incompressible et à basse altitude, mais une validation de la performance se fera sur toute l'enveloppe de vol.

Pour les deux contributions qui sont fonctions de l'angle de dérapage, l'approximation sera une relation linéaire qui multipliera une dérivée de stabilité avec la valeur de cet angle. Les deux équations peuvent alors écrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_{l_{\beta}} &= \frac{\partial C_l}{\partial \beta} \beta \\ C_{Y_{\beta}} &= \frac{\partial C_Y}{\partial \beta} \beta \end{aligned} \quad (\text{V-3})$$

Dans la Figure-A V-3, nous reprenons les données de modélisation tirées du document de référence de Hanke et Nordwall (1970), et correspondent au coefficient C_{l_β} qui introduit dans l'Annexe I. Nous pouvons utiliser une régression linéaire de premier ordre pour les résultats à moins de 10 degrés d'angle d'attaque pour obtenir une approximation de la modélisation. En comparaison au modèle complet, dans une opération normale, jusqu'à une vitesse de Mach 0,86, nous pouvons observer une différence d'environ 10%, au maximum, avec les coefficients suivants :

$$C_{l_\beta} = (a_1 \alpha_{wdp} + a_0) \beta = (-0,0049 \alpha_{wdp} - 0,1544) \beta \quad (V-4)$$

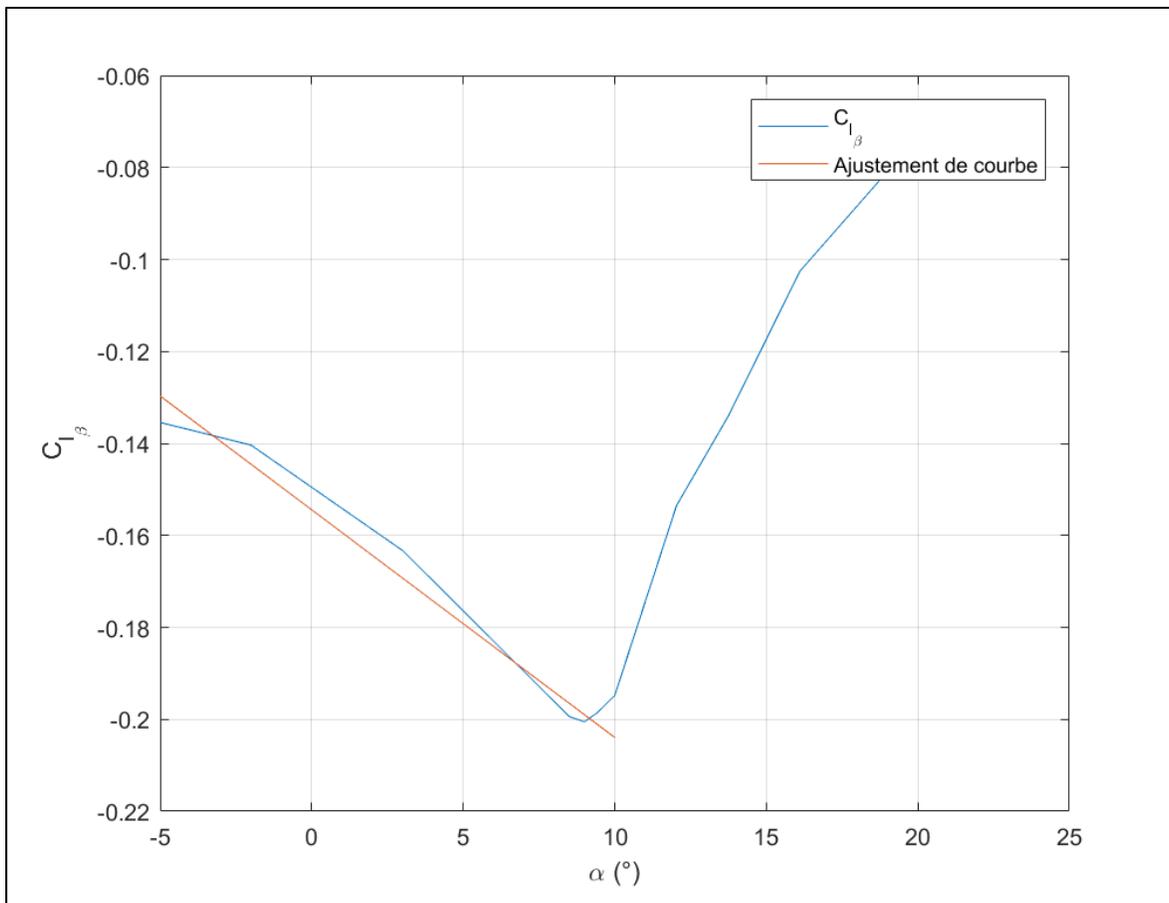


Figure-A V-3 Estimation de la modélisation de la dérivée de stabilité C_{l_β}

Similairement pour le coefficient de force latérale, la Figure-A V-4 présente les résultats prénommé $C_{Y\beta}$ à l'Annexe I. Uniquement les données inférieures à 10° d'angle d'attaque ont été utilisées pour l'estimation et la dérivée de stabilité équivaut alors à une constante :

$$C_{Y\beta} = a_0\beta = -0,0160\beta \quad (\text{V-5})$$

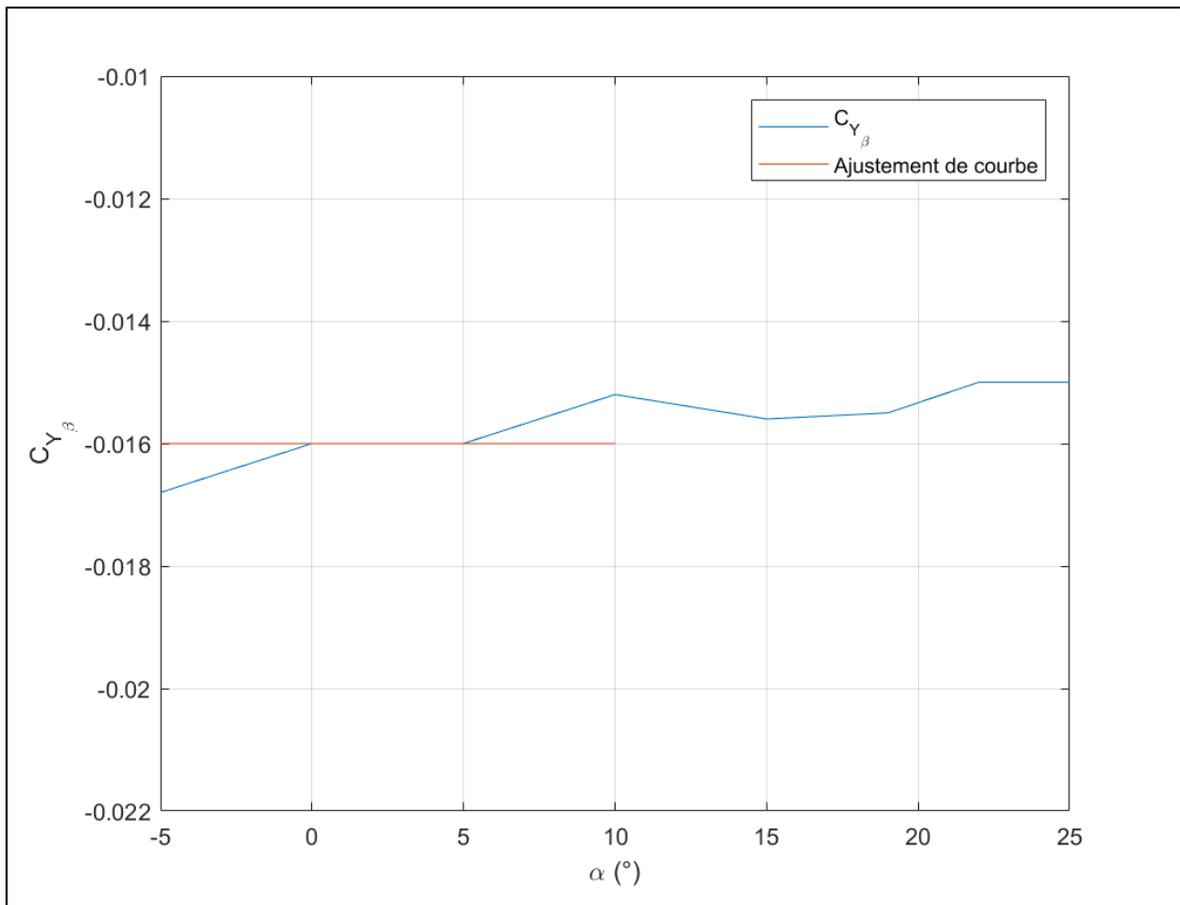


Figure-A V-4 Estimation de la modélisation de la dérivée $C_{Y\beta}$

Pour les contributions qui dépendent du taux de variation de roulis ou de lacet, une normalisation à l'aide de deux valeurs caractéristiques nous permet d'obtenir les dérivées de stabilité qui se rapportent à ces variations, telles que présentées ci-dessous. Nous devons souligner que les vitesses angulaires sont exprimées dans le repère-stabilité et non dans le repère-avion.

$$\begin{aligned}
 C_{l_p} &= \frac{\partial C_l}{\partial \hat{p}} \frac{b}{2V} p_s \\
 C_{l_r} &= \frac{\partial C_l}{\partial \hat{r}} \frac{b}{2V} r_s \\
 C_{Y_p} &= \frac{\partial C_Y}{\partial \hat{p}} \frac{b}{2V} p_s \\
 C_{Y_r} &= \frac{\partial C_Y}{\partial \hat{r}} \frac{b}{2V} r_s
 \end{aligned}
 \tag{V-6}$$

Pour la dérivée de stabilité du coefficient de moment de roulis dû au taux de variation de roulis, nous pouvons observer que la relation est approximativement constante (Figure-A V-5). Pour un angle d'attaque inférieur à 10 degrés, la déviation de l'approximation est d'au maximum 10%. Nous pouvons écrire l'équation comme étant :

$$\frac{\partial C_l}{\partial \hat{p}} = a_0 = 0,4
 \tag{V-7}$$

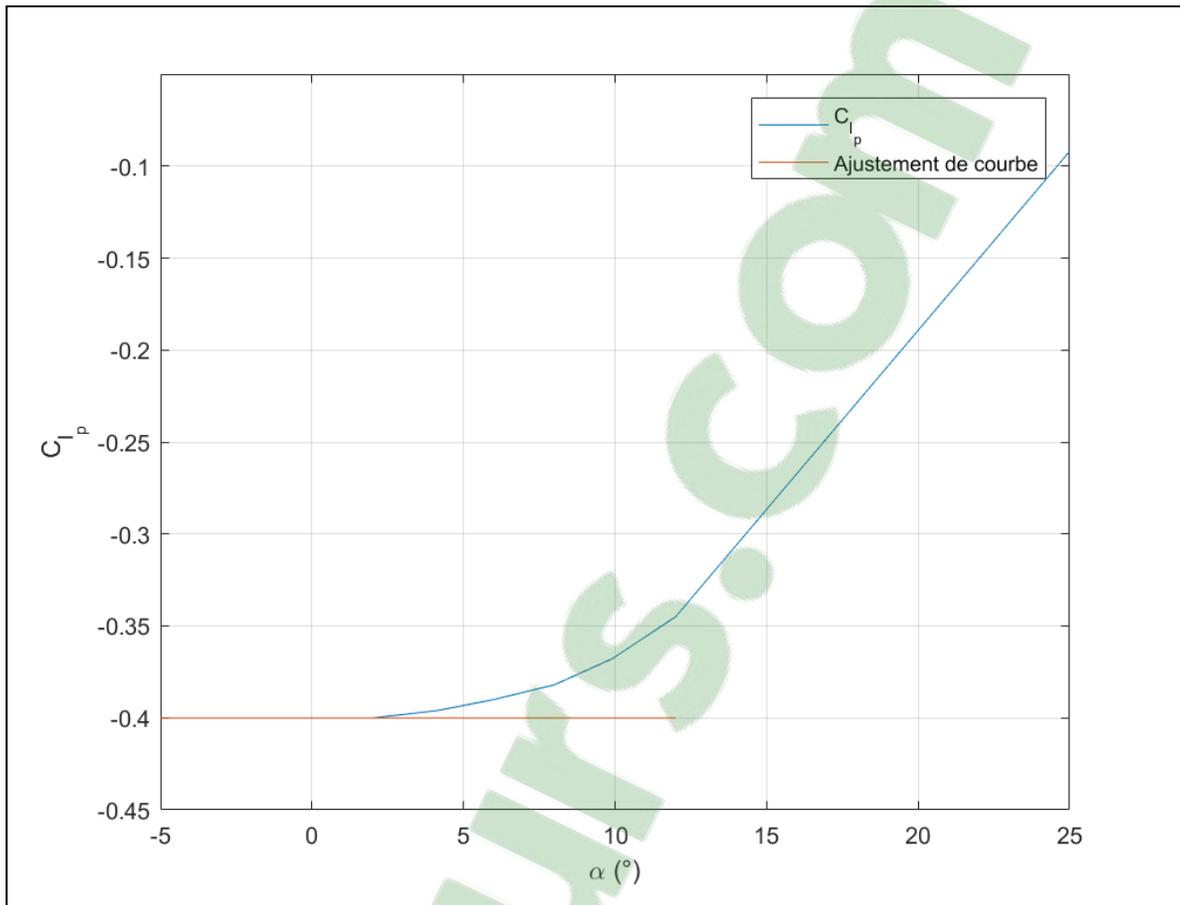


Figure-A V-5 Estimation de la modélisation de la dérivée de stabilité C_{l_p}

Pour la dérivée de stabilité se rapportant au moment de roulis en fonction du taux de variation de lacet, la Figure V-6 nous montre clairement une relation linéaire en fonction de l'angle d'attaque. En effectuant une régression linéaire pour les valeurs d'angle d'attaque inférieures à 10 degrés, nous trouvons la relation suivante :

$$\frac{\partial C_l}{\partial \dot{\beta}} = a_1 \alpha_{wdp} + a_0 = 0,0171 \alpha_{wdp} + 0,0610 \quad (\text{V-8})$$

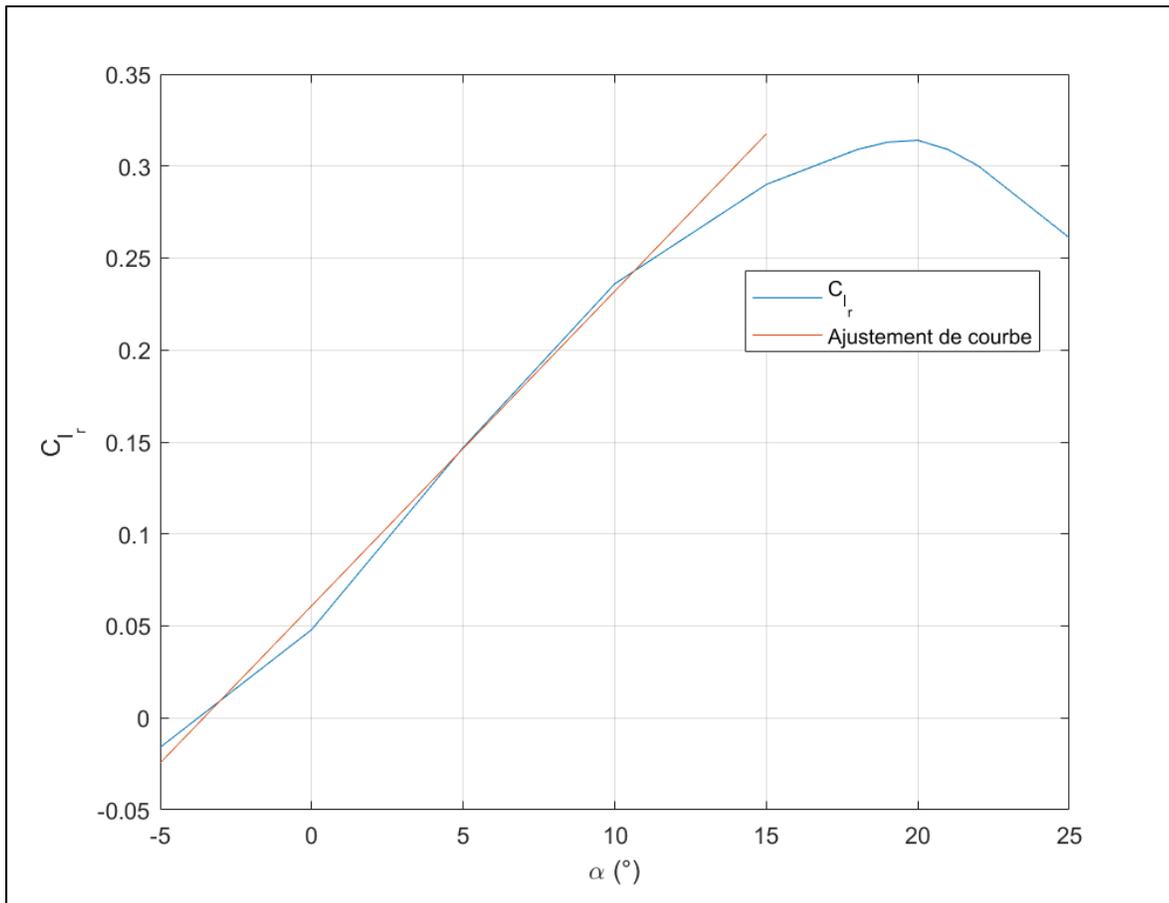


Figure-A V-6 Estimation de la modélisation de la dérivée C_{l_r}

Pour le coefficient de force latérale dû au moment de roulis, nous pouvons déduire qu'une relation linéaire représentera adéquatement cette dérivée (Figure-A V-7). Toujours en utilisant une régression linéaire polynomiale du premier ordre, nous obtenons

$$\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{p}} = a_1 \alpha_{wdp} + a_0 = 0,0475 \alpha_{wdp} - 0,1498 \quad (V-9)$$

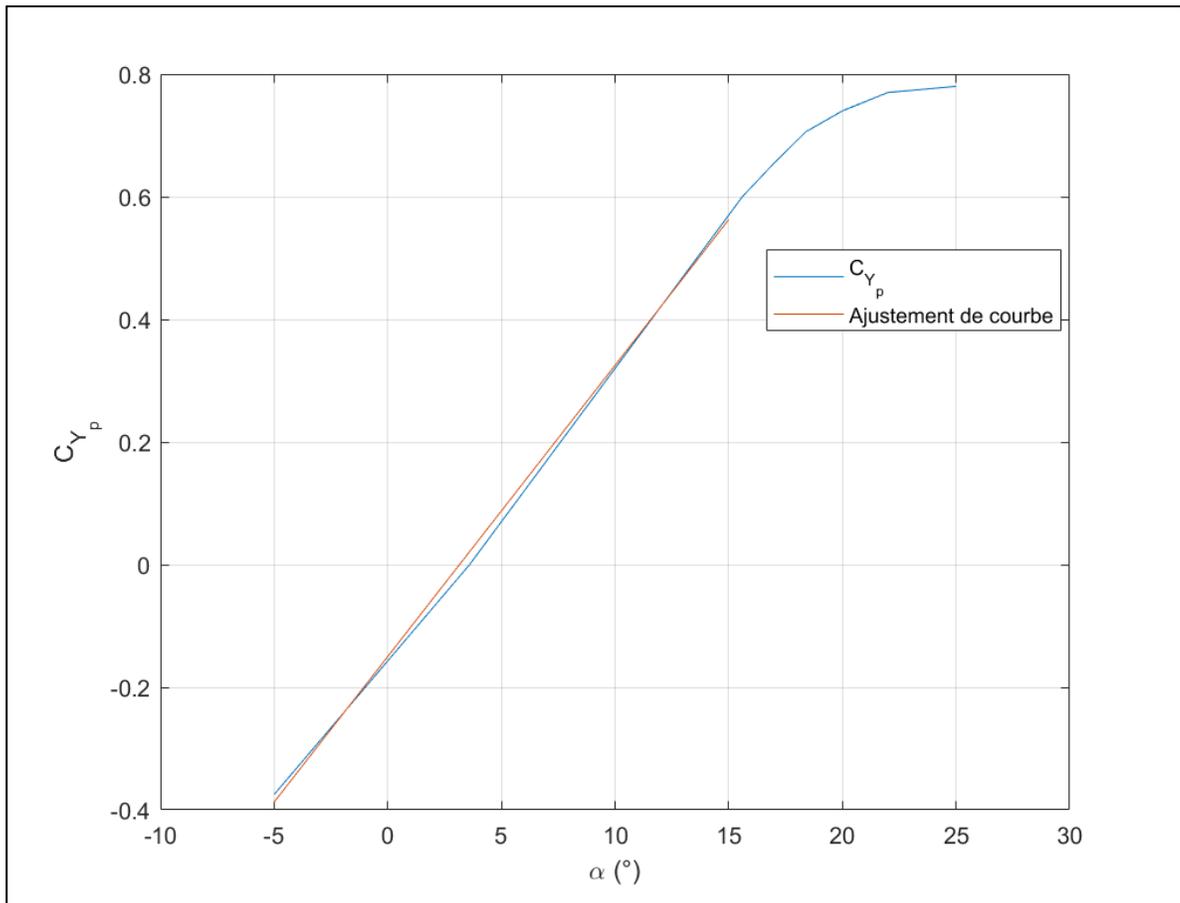


Figure-A V-7 Estimation de la modélisation de la dérivée C_{Y_p}

Et finalement, l'estimation de la dérivée de la force latérale pour un mouvement de lacet est présentée à la Figure-A V-7.

$$\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{r}} = a_0 = 0,3046 \quad (\text{V-10})$$

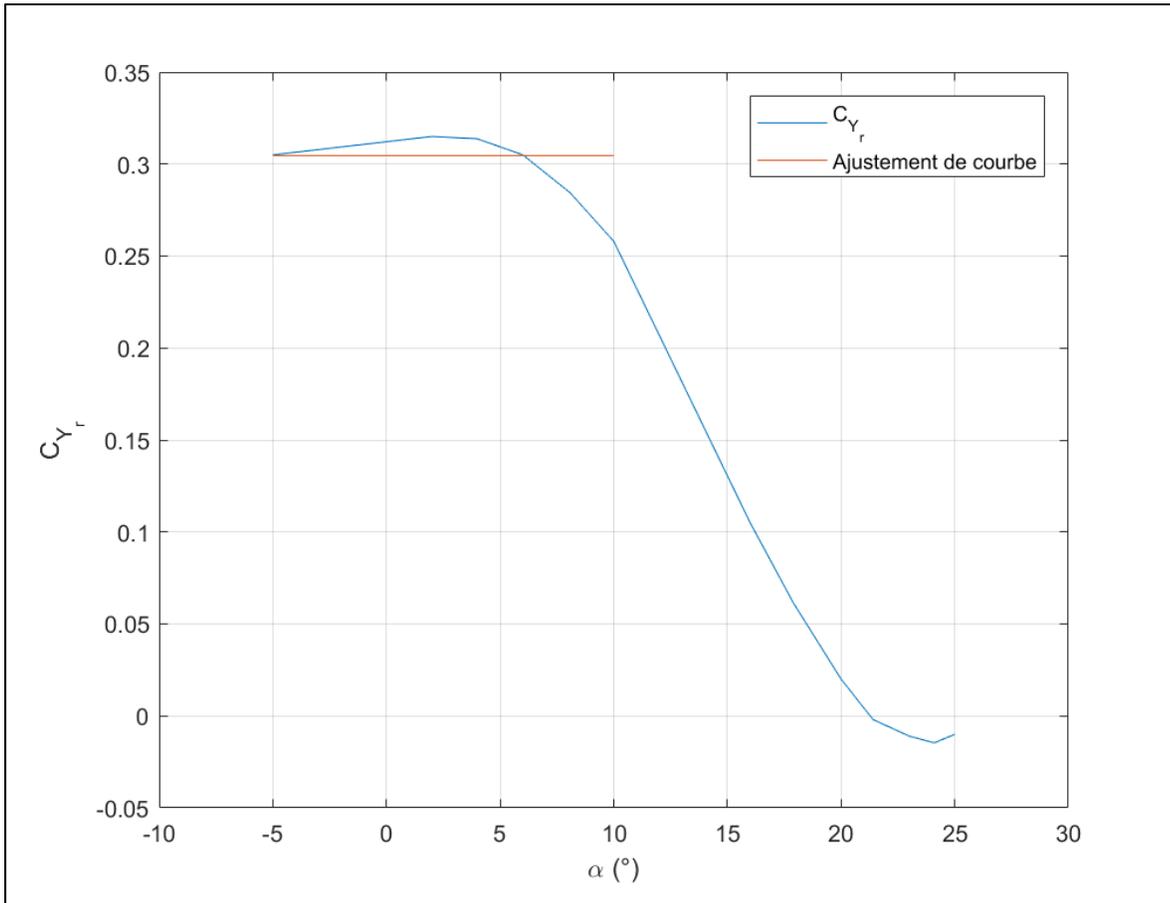


Figure-A V-8 Estimation de la modélisation pour la dérivée C_{Y_r}

ANNEXE VI

SIMPLIFICATION DE LA DYNAMIQUE LATÉRALE

Dans cette annexe, nous allons prouver la simplification mentionnée au sous-chapitre 3.3.2. La première équation pour laquelle nous avons réduit la complexité de l'interaction est l'équation (3.74). Nous avons affirmé que le moment aérodynamique de roulis dans le repère-avion est représenté approximativement par :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho V^2 S b (C_l \cos \alpha - C_n \sin \alpha) \\ &\approx \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_l \cos \alpha \end{aligned} \tag{VI-1}$$

Afin de valider cette estimation, il est possible de comparer la valeur des deux termes avec des données expérimentales. Si nous prenons la condition de vol qui maximise l'angle d'attaque et le coefficient de moment de lacet, nous pourrions alors généraliser que la déviation du modèle exact ne sera que plus petite, comparée à cet exemple. Nous savons que l'angle d'attaque tend à être plus grand lors d'un vol lent. Pour un même angle de roulis, le taux de variation de cap (ψ) est plus élevé pour vitesse vraie plus basse. Par conséquent, en effectuant le test à basse altitude et à basse vitesse, nous aurons donc le cas extrême. Si nous complétons l'essai à 4000' et 220 KIAS, nous pouvons comparer les deux termes de l'équation-A (VI-1) (voir Figure-A VI-1). Le ratio (ξ) représentant la valeur absolue entre les deux termes met en évidence leur ordre de grandeur relatif :

$$\xi = \left| \frac{C_l \cos \alpha}{C_n \sin \alpha} \right| \tag{VI-2}$$

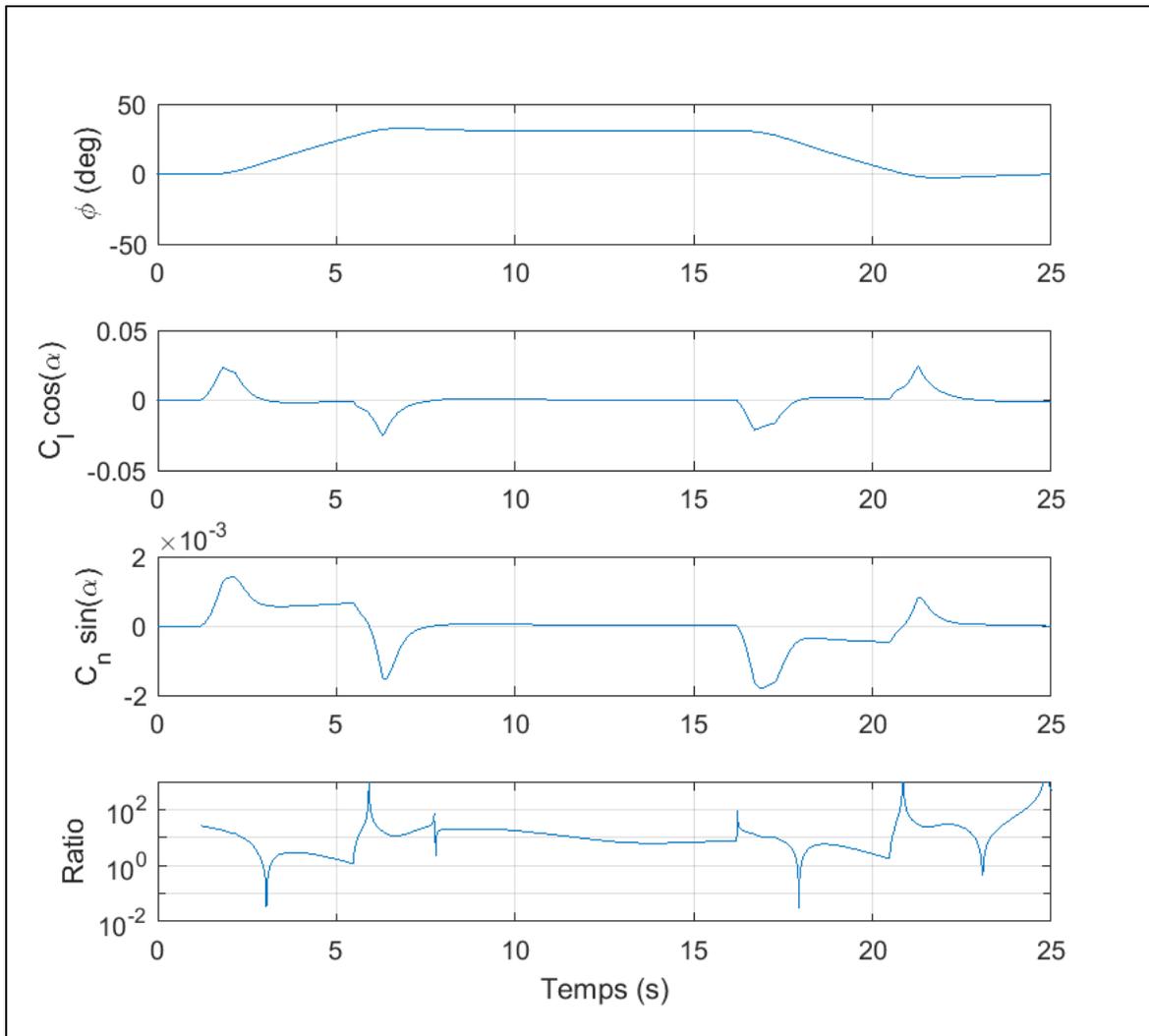


Figure-A VI-1 Comparaison de l'ordre de grandeur des termes du moment aérodynamique de roulis

Nous pouvons observer que durant l'accélération angulaire, le terme $C_l \cos \alpha$ est nettement plus significatif. Lors du maintien de la vitesse angulaire, entre 2,5s et 5,5s, la valeur de ce terme est encore supérieure, mais avec un ratio qui se rapproche de l'unité. Ce rapprochement est aussi noté lors de la sortie du virage, dans le maintien de la vitesse angulaire, entre 17,5s et 20,5s. Lorsque C_l passe par une valeur nulle, son terme devient momentanément plus petit que l'autre terme, pour se stabiliser à une valeur supérieure. Avec un ratio $\xi > 10$ pour presque l'entièreté de la manœuvre, le reste de l'essai nous démontre que l'approximation que nous avons posée est valable. De plus, le calcul de la moyenne du ratio ξ de toutes les mesures nous

donne une valeur de $\bar{\xi} = 47,8$. Compte tenu que l'inversion dynamique nous amène à calculer l'accélération angulaire, avec l'observation des résultats, nous pouvons déduire que notre simplification est adéquate et justifiée.

Quant aux effets de couplage inertiel et l'estimation que nous avons utilisée avec l'équation (3.80), nous désirons valider les deux termes simplifiés à partir des suppositions que nous avons faites. En calculant les termes de l'équation (3.70) lors de la manœuvre avec un roulis de 30 degrés, à 4000' et 220 KIAS,

$$\begin{aligned}\chi_1 &= I_{xx}\dot{p} \\ \chi_2 &= (I_{yy} - I_{zz})qr \\ \chi_3 &= I_{xz}(pq + \dot{r})\end{aligned}\tag{VI-2}$$

Tel qu'effectué précédemment, nous pouvons comparer la valeur lors de l'exécution pour confirmer si la supposition modélise adéquatement la dynamique (Figure-A VI-2).

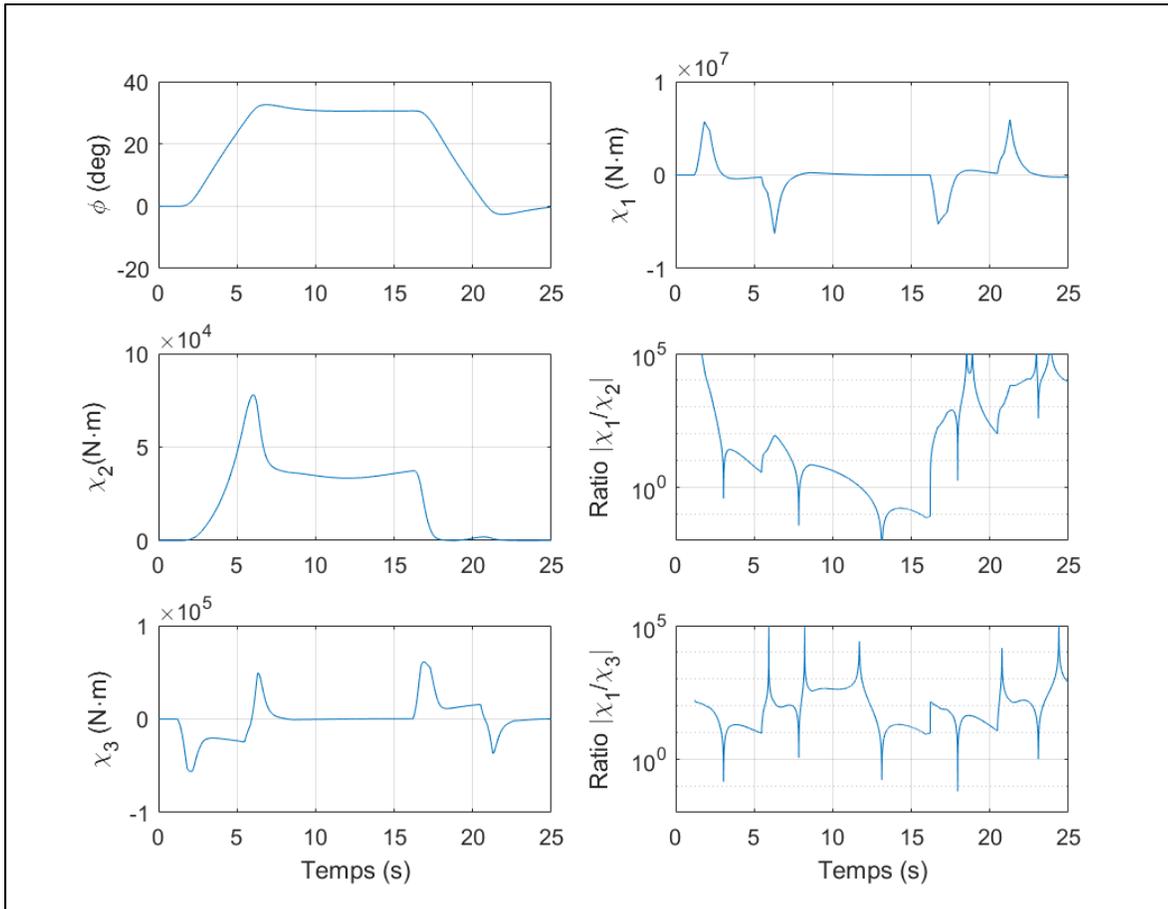


Figure-A VI-2 Comparaison de l'ordre de grandeur des termes de couplage inertiel et de l'accélération angulaire

L'observation la plus marquante est le ratio $\left| \frac{\chi_1}{\chi_3} \right| > 10$, à l'exception d'un court intervalle de temps lors du changement de signe de \dot{p} . L'ordre de grandeur supérieur de l'accélération angulaire de roulis suggère que le terme χ_1 est nettement plus significatif que χ_3 . Pour le ratio $\left| \frac{\chi_1}{\chi_2} \right|$, lors de l'accélération et le maintien de la vitesse angulaire, une valeur supérieure à 10 est maintenue tout au long de la manœuvre, à l'exception de la période où l'angle de roulis est stabilisé à la valeur commandée de 30 degrés. À ce moment précis, il pourrait y avoir un biais introduit dû à cette déviation. Cependant, l'angle de roulis se stabilise à la valeur commandée, confirmant que cette différence n'affecte pas la performance du contrôleur. Avec ces deux constatations, nous pouvons donc affirmer que le terme qui représente l'inertie adéquatement

dans cette modélisation est celui avec l'accélération angulaire \dot{p} . Nous confirmons alors l'équation (3.80), c'est-à-dire :

$$I_{xx}\dot{p} = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l \cos \alpha \quad (\text{VI-3})$$

ANNEXE VII

CRITÈRES POUR LES NIVEAUX DE QUALITÉS DE VOL

Cette annexe porte spécifiquement sur les critères de performance se rapportant aux niveaux des qualités de vol, tirés de la spécification MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980) et de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997). Premièrement, trois catégories décrivent la manœuvrabilité et la rapidité nécessaires pour accomplir la mission (Tableau-A VII-1). Pour chaque catégorie, trois niveaux nous permettent de déterminer si la mission est adéquatement accomplie en fonction de la manœuvre et de la phase de vol (Tableau-A VII-2). Le niveau 1 est requis pour l'ensemble de l'enveloppe opérationnelle pour un vol sans défaillance mécanique.

Tableau-A VII-1 Définitions des catégories de phases de vol

Catégorie	Définition	Phase de vol
A	Phases de vol non terminales qui requièrent un niveau de rapidité et de précision élevé pour le contrôle de la trajectoire de vol	<ul style="list-style-type: none">• Combat aérien• Reconnaissance• Suivi de terrain• Vol en formation
B	Phases de vol non terminales qui sont normalement accomplies en utilisant une manœuvrabilité plus graduelle et ne nécessitant pas un suivi avec une précision élevé	<ul style="list-style-type: none">• Montée• Croisière• Descente• Descente d'urgence
C	Phases de vol terminales nécessitant une manœuvrabilité graduelle et un contrôle précis de la trajectoire de vol	<ul style="list-style-type: none">• Décollage• Approche• Remise des gaz• Atterrissage

Tableau-A VII-2 Niveaux de performance des qualités de vol

Niveau de performance	Définition
Niveau 1	Qualités de vol nettement adéquates pour la mission et sa phase de vol.
Niveau 2	Qualités de vol adéquates pour accomplir la mission et la phase de vol, avec une augmentation de la charge de travail du pilote ou une dégradation dans l'efficacité de la mission.
Niveau 3	Qualités de vol pour lesquelles l'avion peut être contrôlé sécuritairement, avec une charge de travail excessive pour le pilote ou une efficacité pour la mission inadéquate. Les phases de vol de catégorie A peuvent être terminées sécuritairement, et de catégorie B et C peuvent être complétées.

Les enveloppes opérationnelles de vol définissent les conditions limitrophes pour la vitesse, l'altitude et le facteur de charge pour lesquels l'aéronef doit être capable d'accomplir sa mission. Ces enveloppes pour la catégorie et les phases de vol étudiées sont décrites dans le Tableau-A VII-3. Ces limites peuvent être modifiées par les autorités qui supervisent la certification de l'appareil.

Tableau-A VII-3 Enveloppes opérationnelles de vol
Adapté de la spécification MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980, p. 7)

Phase de vol	Vitesse		Altitude		Facteur de charge	
	$V_{o_{min}}$	$V_{o_{max}}$	$h_{o_{min}}$	$h_{o_{max}}$	$n_{o_{min}}$	$n_{o_{max}}$
Montée	$0,85V_{R/C}$	$1,3V_{R/C}$	MSL	Plafond de croisière	$0,5g$	$2,0g$
Croisière	V_{range}	V_{NRT}	MSL	Plafond de croisière	$0,5g$	$2,0g$
Descente	$1,4V_S$	V_{MAT}	MSL	Plafond de croisière	$0,5g$	$2,0g$

Les figures suivantes (VII-1 à VII-4) décrivent les conditions limitrophes des paramètres de chacun des axes. Les valeurs limites sont tirées des spécifications MIL-F-8785C (Department of Defense, 1980) et MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997).

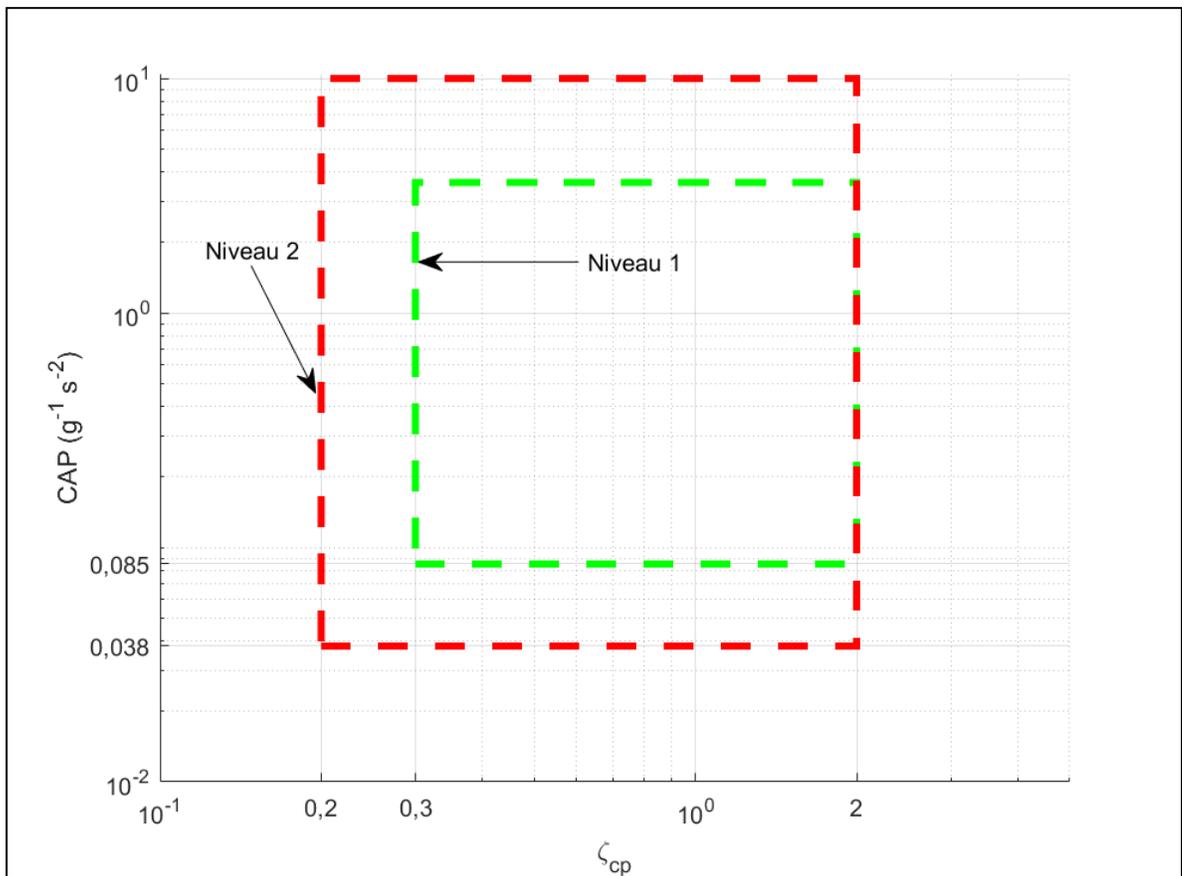


Figure-A VII-1 Conditions limitrophes pour la performance du mode courte période
Adaptée de Department of Defense (1997, p. 178)

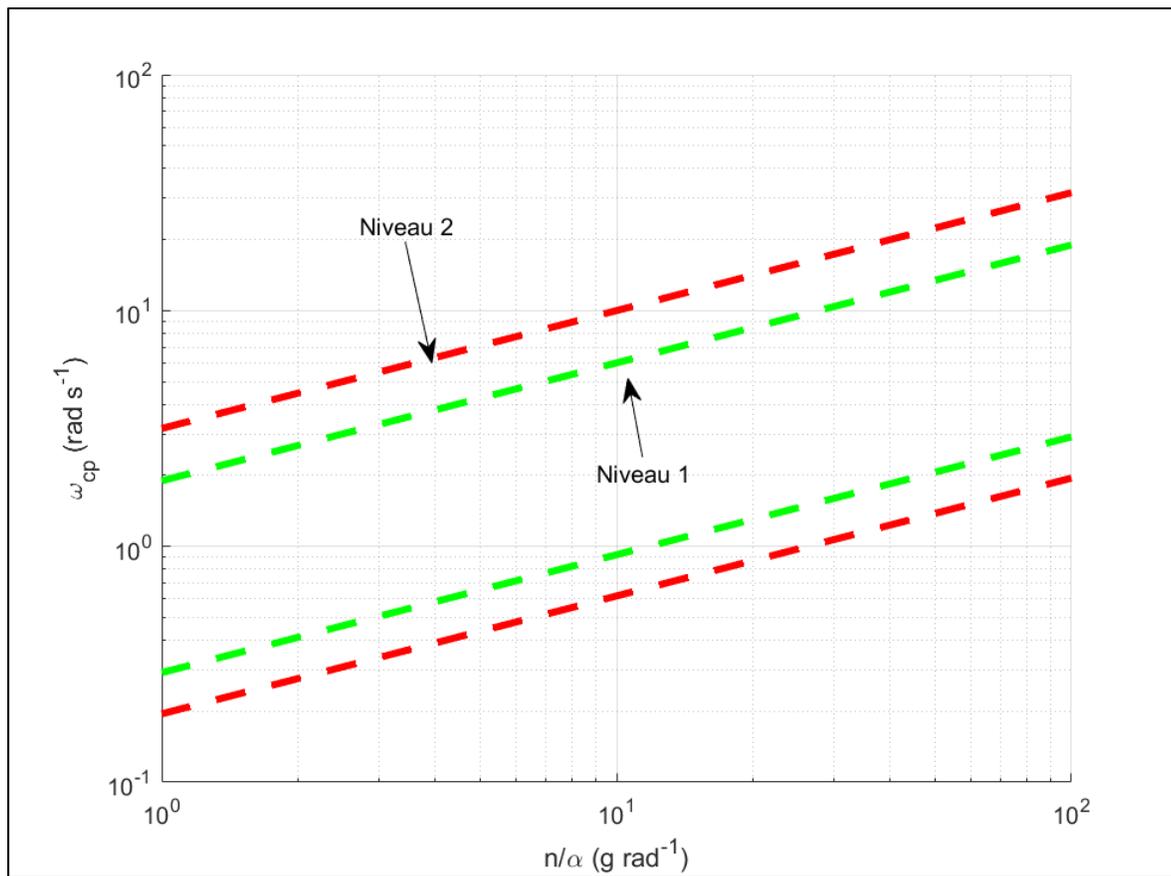


Figure-A VII-2 Conditions limitrophes pour la fréquence du mode courte période
Adaptée de Department of Defense (1980, p. 15)

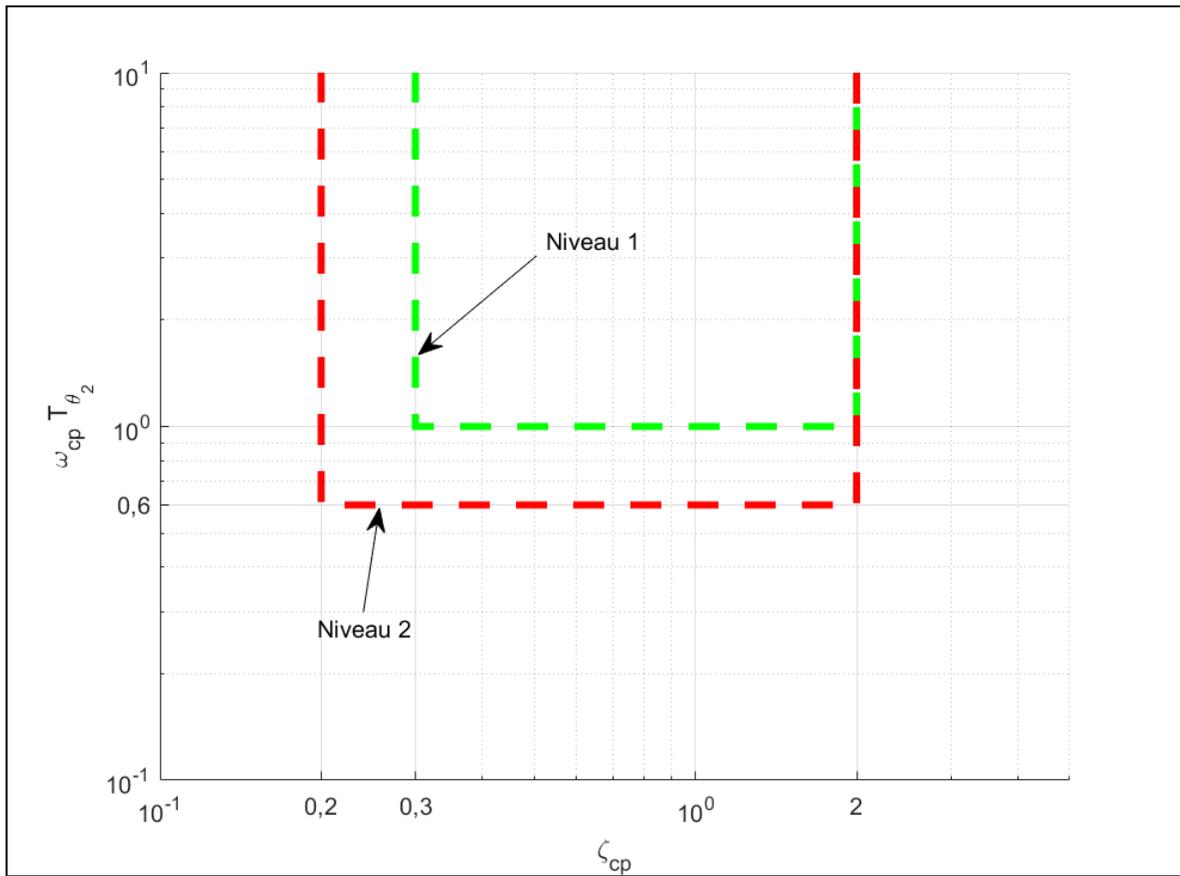


Figure-A VII-3 Conditions limitrophes pour la réponse d'un contrôleur longitudinal
Adaptée de Department of Defense (1997, p. 196)

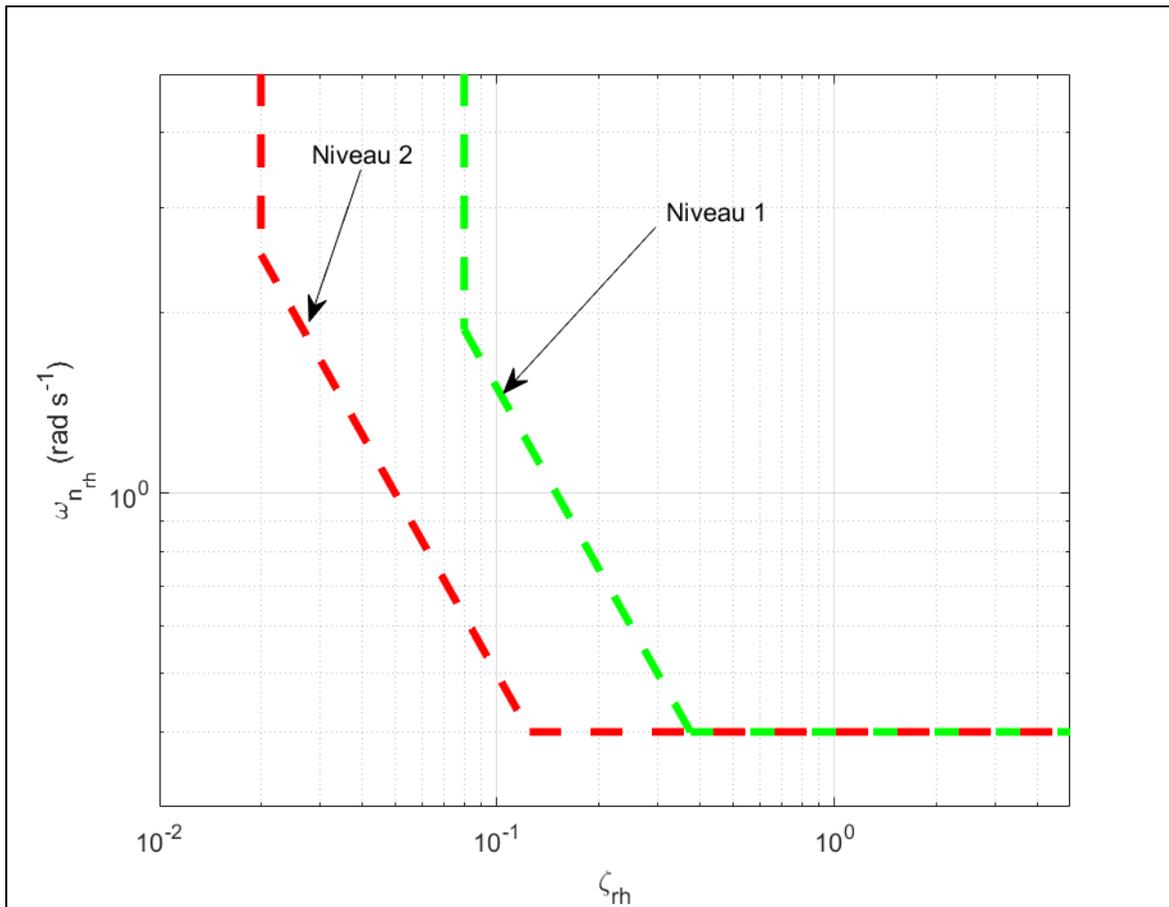


Figure-A VII-4 Conditions limitrophes pour la réponse du mode roulis hollandais

Les critères additionnels pour la réponse à une vitesse angulaire commandée en tangage sont présentés dans les trois tableaux suivants (Tableaux-A VII-4 à VII-6). Ces mesures pour le délai équivalent (t_1), le ratio des extremums transitoires ($\Delta q_2/\Delta q_1$) et le temps de réaction (Δt) sont tirées de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997) et calculées selon la technique présentée par celle-ci. L'unité de la vitesse vraie (V) du Tableau-A VII-6 est le nœud.

Tableau-A VII-4 Limites pour le délai équivalent
Tiré de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997, p. 226)

Niveau	Délai équivalent (s)
1	$t_1 \leq 0,12$
2	$t_1 \leq 0,17$
3	$t_1 \leq 0,21$

Tableau-A VII-5 Limites pour ratio des extremums transitoires
Tiré de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997, p.226)

Niveau	Ratio des extremums transitoires
1	$\Delta q_2/\Delta q_1 \leq 0,30$
2	$\Delta q_2/\Delta q_1 \leq 0,60$
3	$\Delta q_2/\Delta q_1 \leq 0,85$

Tableau-A VII-6 Limites pour le temps de réaction
Adapté de la spécification MIL-HDBK-1797 (Department of Defense, 1997, p.227)

Niveau	Temps de réaction (s)	
	Δt_{min}	Δt_{max}
1	$5,33/V_T$	$296,24/V_T$
2	$1,90/V_T$	$947,97/V_T$

ANNEXE VIII

EXEMPLES DE RÉPONSE TEMPORELLE À UN ESSAI

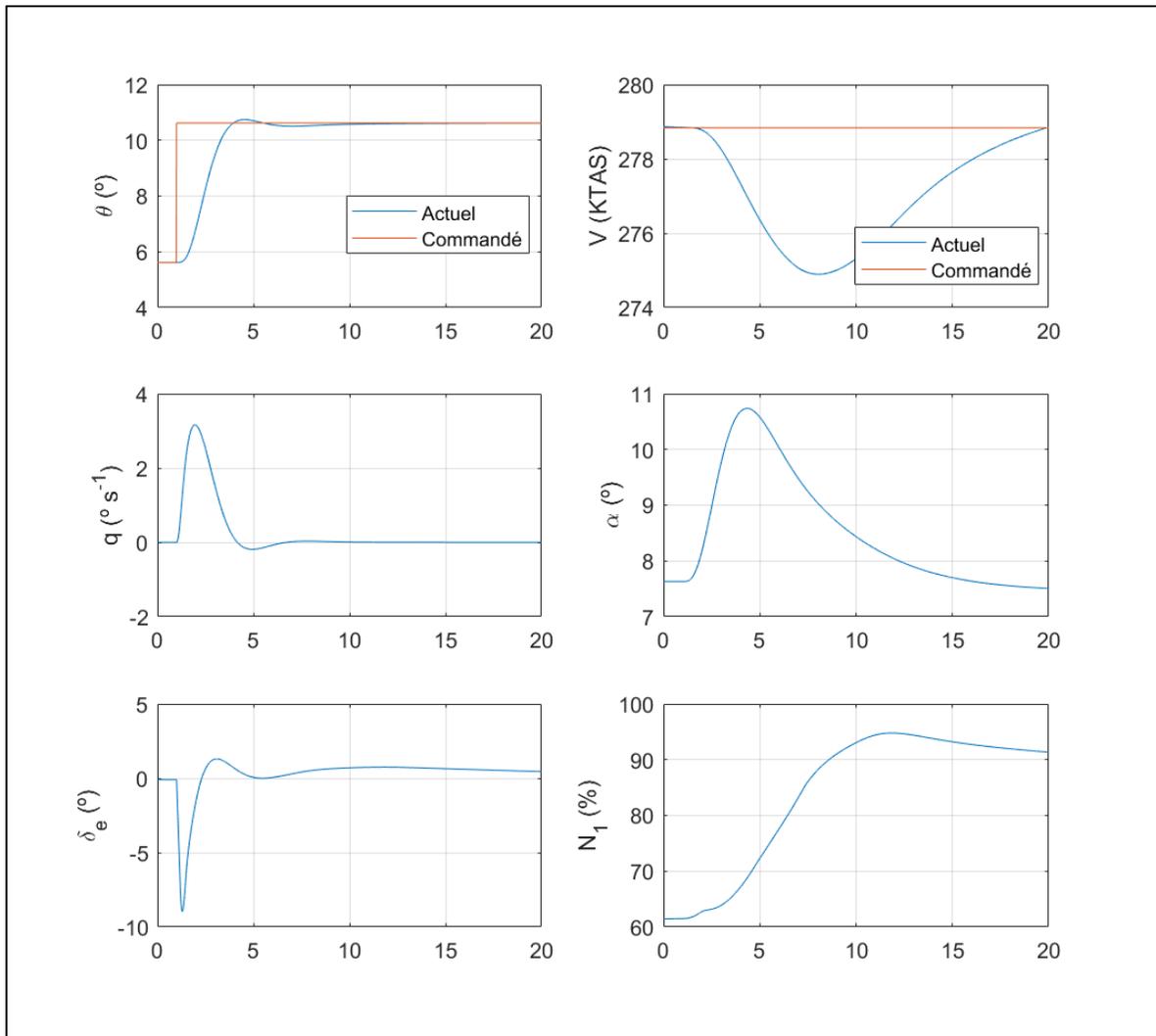


Figure-A VIII-1 Réponse temporelle à l'engagement du mode de suivi d'angle de tangage à 16 000 pieds et 220 KIAS

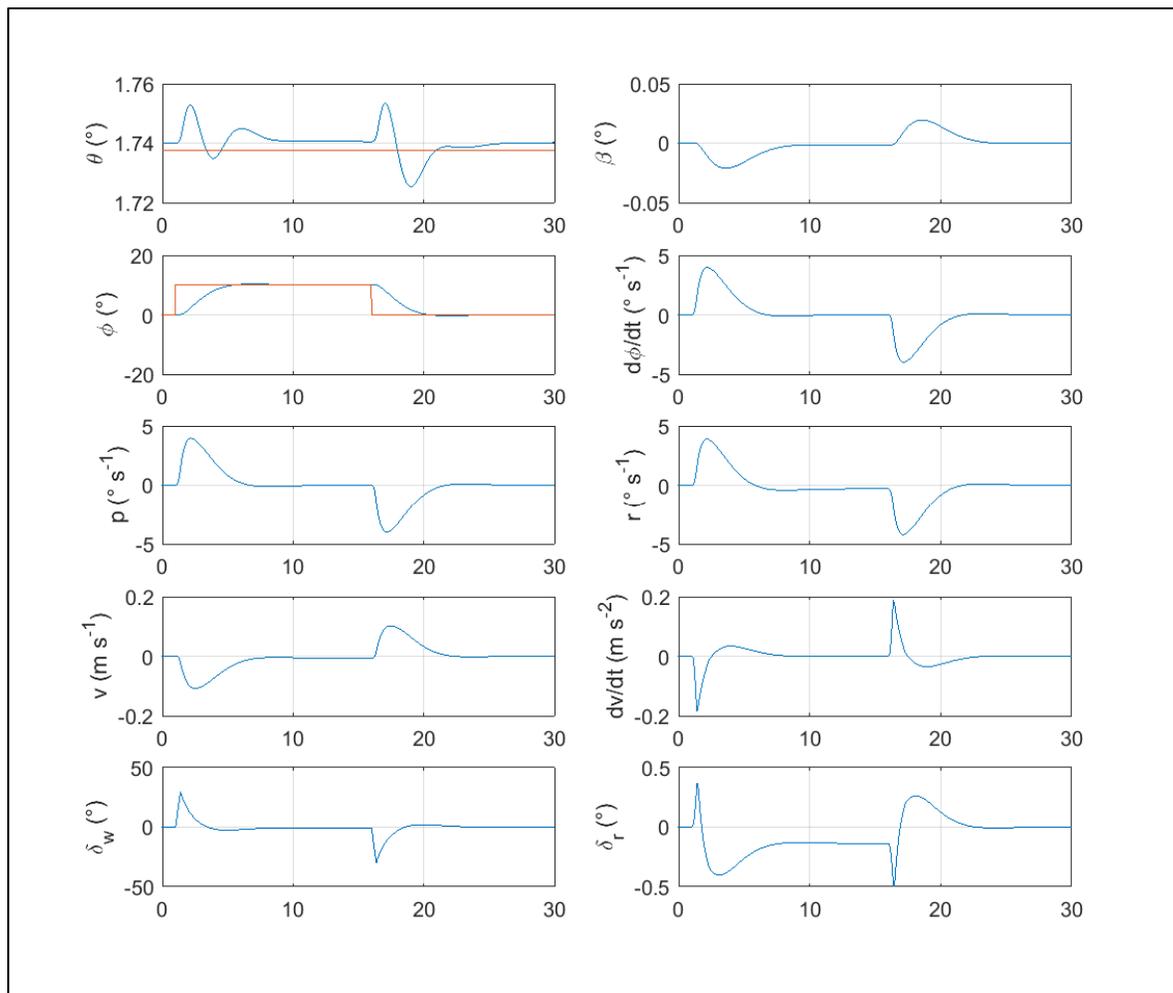


Figure-A VIII-2 Réponse temporelle à l'engagement du mode de suivi
d'angle de roulis à 24 000 pieds et 320 KIAS

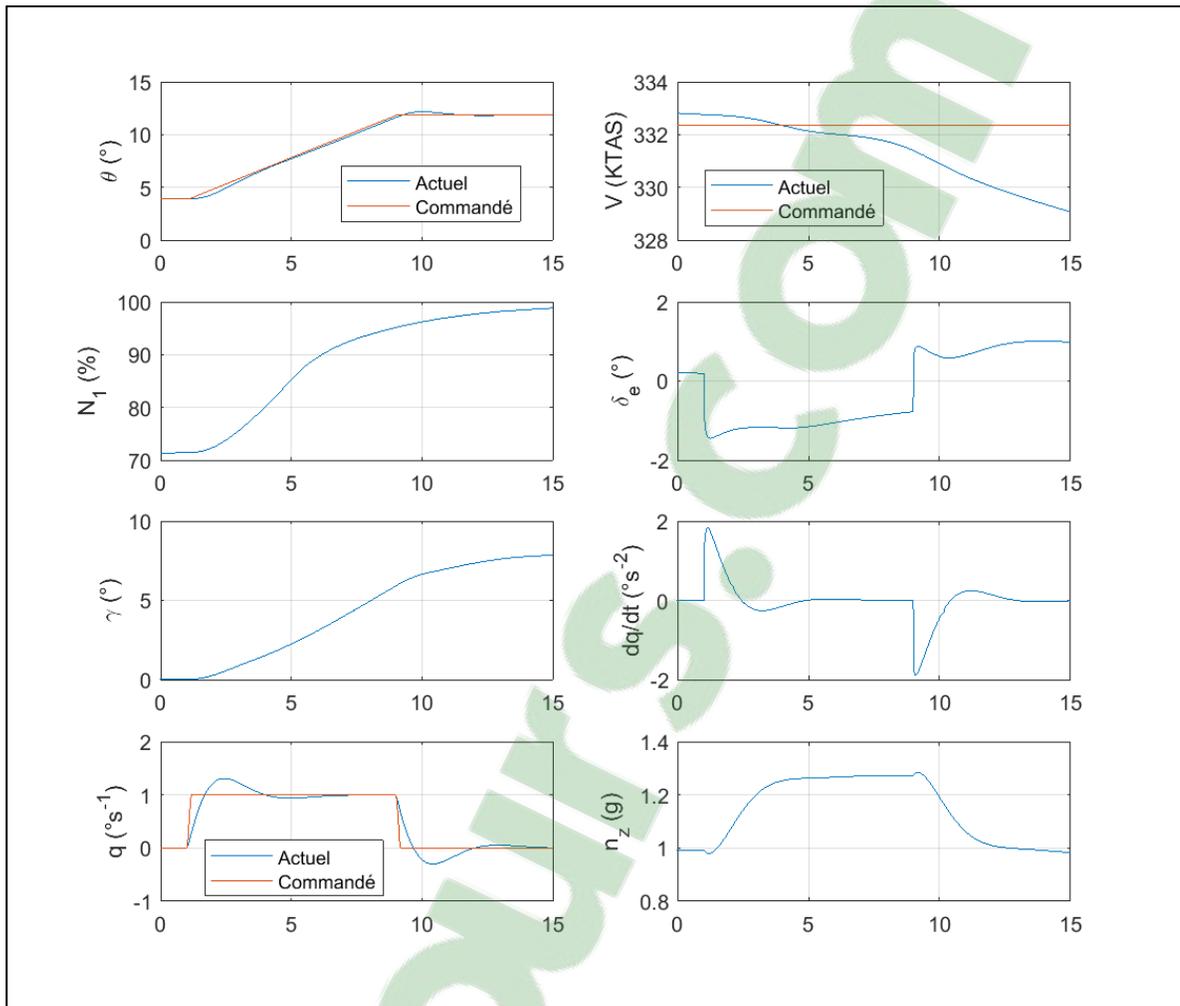


Figure-A VIII-3 Réponse temporelle du mode de suivi de vitesse angulaire en tangage à 12 000 pieds et 280 KIAS

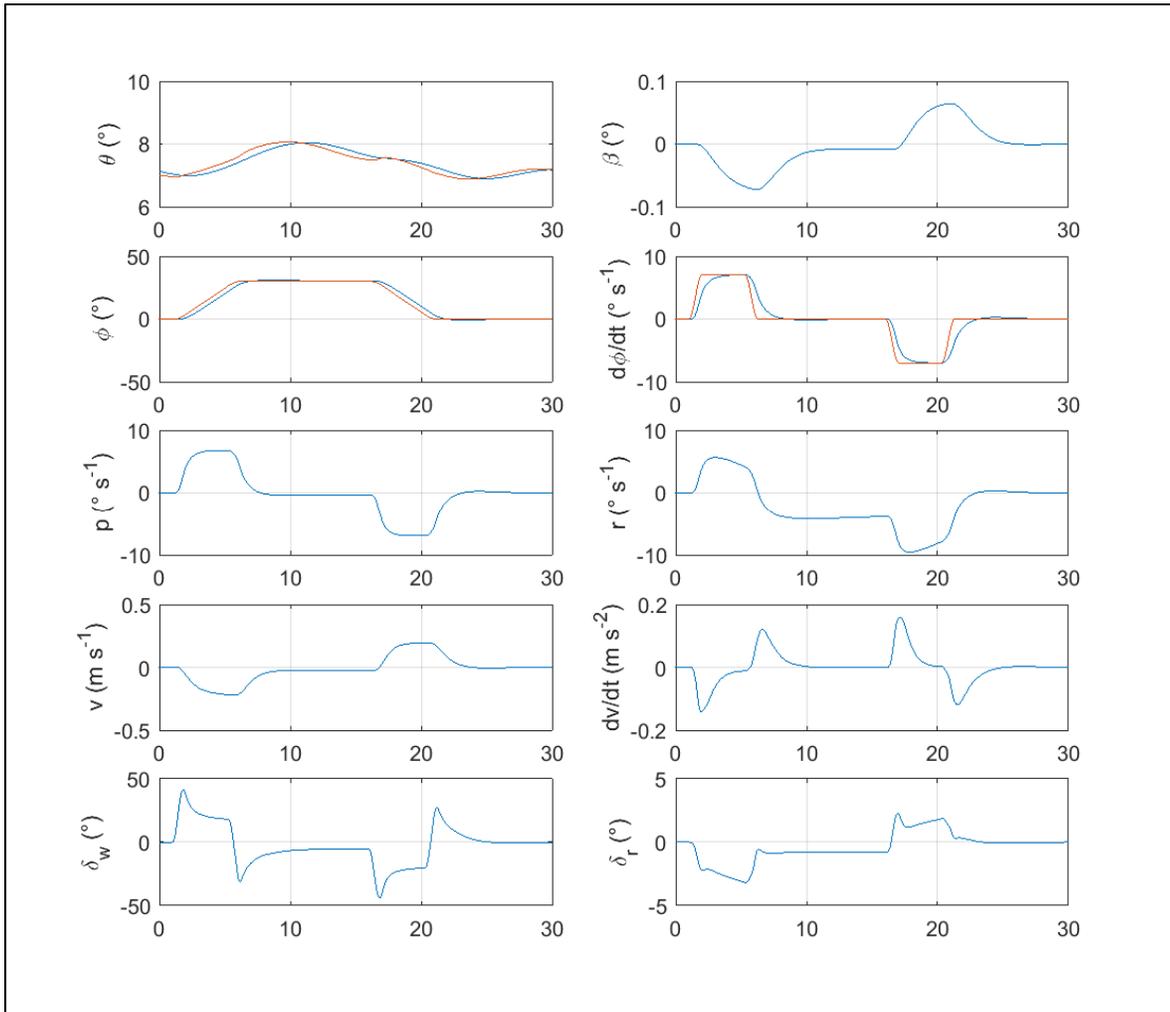


Figure-A VIII-4 Réponse temporelle du mode de suivi de vitesse angulaire en roulis à 24 000 pieds et 220 KIAS

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abd Elwahab, S., Elden, S. N., Imam, O. M., & Al Amin, R. (2017). Evaluation of Boeing 747-E lateral autopilot using flying and handling qualities specifications. Dans *2017 International Conference on Communication, Control, Computing and Electronics Engineering (ICCCCEE), 16-18 Jan. 2017*. Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- Ahrens, C. D. (2009). *Meteorology Today : An Introduction to Weather, Climate, and the Environment* (9e éd.). Belmont, CA: Brooks/Cole, CengageLearning.
- Atkinson, K. E., Han, W., & Stewart, D. (2009). *Numerical solution of ordinary differential equations*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Cook, M. V. (2013). *Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control* (3 éd.). Boston, MA: Elsevier.
- Dang Vu, B. (1997). Nonlinear Dynamic Inversion Control. Dans J.-F. Magni, S. Bennani & J. Terlouw (Éds.), *Robust Flight Control: A Design Challenge* (pp. 102-111). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Department of Defense. (1980). *Military Specification: Flying Qualities of Piloted Airplanes*. MIL-F-8785C. Washington, DC: US Military Specs/Standards/Handbooks.
- Department of Defense. (1997). *Department of Defense Handbook: Flying Qualities of Piloted Aircraft*. MIL-HDBK-1797. Washington, DC: US Military Specs/Standards/Handbooks.
- Department of Defense. (2008). *General Specification for Flight Control Systems - Design, Installation and Test of Piloted Aircraft*. MIL-DTL-9490E. Washington, DC: US Military Specs/Standards/Handbooks.
- Ganguli, S., Marcos, A., & Balas, G. (2002). Reconfigurable LPV control design for Boeing 747-100/200 longitudinal axis. Dans *Proceedings of 2002 American Control Conference, 8-10 May 2002* (Vol. 5, pp. 3612-3617). American Automatic Control Council.
- Gracey, W. (1980). *Measurement of Aircraft Speed and Altitude* (n° 19800015804). Hampton, VA: NASA Langley Research Center.
- Hanke, C. R. (1971). *The Simulation of a Large Jet Transport Aircraft. Volume 1 - Mathematical Model* (n° 19710009764). Washington, United States: NASA.

- Hanke, C. R., & Nordwall, D. R. (1970). *The Simulation of a Jumbo Jet Transport Aircraft. Volume 2: Modeling Data* (n° 19730001300). Washington, United States: NASA.
- Hurt, H. H. (1965). *Aerodynamics for Naval Aviators*. U.S. Navy.
- Marquez, H. J. (2003). *Nonlinear Control Systems : Analysis and Design*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Meyer, R. T., Knox, J. R., & Tingas, S. A. (1983). *Suggested Revision to MIL-F-8785C for Large (Class III) Aircraft* (n° AFWAL-TR-83-3015). Air Force Wright Aeronautical Laboratories.
- Nelson, R. C. (1998). *Flight stability and automatic control* (2e éd.). Boston, MA: McGraw Hill.
- Nise, N. S. (2011). *Control systems engineering* (6e éd.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Queijo, M. J. (1971). Methods of Obtaining Stability Derivatives. Dans Langley Research Center (Éd.), *Performance and dynamics of aerospace vehicles* (pp. 71-102). Washington, DC: NASA.
- Richardson, T. S., Beaverstock, C., Isikveren, A., Meheri, A., Badcock, K., & Da Ronch, A. (2011). Analysis of the Boeing 747-100 using CEASIOM. *Progress in Aerospace Sciences*, 47(8), 660-673.
- Slotine, J.-J. E., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Stevens, B. L., Lewis, F. L., & Johnson, E. N. (2015). *Aircraft control and simulation : dynamics, controls design, and autonomous systems* (3e éd.). Hoboken, New Jersey: Wiley.
- Tewari, A. (2011). *Automatic Control of Atmospheric and Space Flight Vehicles: Design and Analysis with MATLAB® and Simulink®*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Basel.
- Vepa, R. (2015). *Flight dynamics, simulation, and control : for rigid and flexible aircraft*. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Wackerly, D. D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Mathematical statistics with applications*. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole.

- Wang, J., Bierling, T., Höcht, L., Holzapfel, F., Klose, S., & Knoll, A. (2011). Novel Dynamic Inversion Architecture Design for Quadcopter Control. Dans F. Holzapfel & S. Theil (Éds.), *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control. Selected Papers of the 1st CEAS Specialist Conference on Guidance, Navigation and Control*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Yang, W.-Y., Cao, W., Chung, T.-S., & Morris, J. (2005). *Applied numerical methods using MATLAB*. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience.

BIBLIOGRAPHIE

- Al-Hiddabi, S. A., & McClamroch, N. H. (2001). Aggressive Longitudinal Aircraft Path Tracking Using Nonlinear Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1), 26-32.
- Bacon, B. J., & Ostroff, A. J. (2000). *Reconfigurable Flight Control Using Nonlinear Dynamic Inversion with a Special Accelerometer Implementation* présentée à AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Denver, CO.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Chen, H. B., & Zhang, S. G. (2008). *Robust Dynamic Inversion Flight Control Law Design* présentée à 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, Shenzhen, China.
- Enns, D., Bugajski, D., Hendrick, R., & Stein, G. (1994). Dynamic inversion: an evolving methodology for flight control design. *International Journal of Control*, 59(1), 71-91.
- Federal Aviation Administration. (2006). *Approval of Flight Guidance Systems*. Norme AC25.1329-1B. Washington, DC: Federal Aviation Administration.
- Gibson, J. C. (1995). *The definition, understanding and design of aircraft handling qualities* (Rapport n° LR-756). Delft, The Netherlands: Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering.
- Gibson, J. C. (1999). *Development of a methodology for excellence in handling qualities design for fly by wire aircraft* (Thèse de doctorat, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands).
- Hameduddin, I., & Bajodah, A. H. (2012). Nonlinear generalised dynamic inversion for aircraft manoeuvring control. *International Journal of Control*, 85(4), 437-450.
- Hylton, R. J., Kettering, C. W., Valery, H. A., McCarty, J. M., & Jordan, W. E. (1977). *Validation of MIL-F-9490D. General Specification for Flight Control System for Piloted Military Aircraft. Volume III. C-5A Heavy Logistics Transport Validation* (Rapport n° AFFDL-TR-77-7). Marietta, GA: Lockheed-Georgia Company.
- Isidori, A. (1985). *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Lane, S. H., & Stengel, R. F. (1988). Flight control design using non-linear inverse dynamics. *Automatica*, 24(4), 471-483.

- Moorhouse, D. J., & Woodcock, R. J. (1982). *Background Information and User Guide for MIL-F-8785C, Military Specification - Flying Qualities of Piloted Airplanes* (Rapport n° AFWAL-TR-81-3109). Wright-Patterson AFB, Ohio: Air Force Wright Aeronautical Laboratories.
- Sieberling, S., Chu, Q. P., & Mulder, J. A. (2010). Robust Flight Control Using Incremental Nonlinear Dynamic Inversion and Angular Acceleration Prediction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(6), 1732-1742.
- Simon, J. D., & Mitter, S. (1968). A Theory of Modal Control. *Information and Control*, 13(4), 316-353.
- Tang, Y., & Patton, R. J. (2013). Reconfigurable flight control using feedback linearization with online Neural Network adaption. Dans *2013 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)* (pp. 324-329).
- Tou, K., & Yang, J. (2013). A Study on Dynamic Inversion of UAV. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 373-375, pp. 158-162.