

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 ÉTAT DE L'ART	5
1.1 Introduction.....	5
1.2 État de l'art des drones.....	5
1.3 La classification des drones	8
1.4 Les drones à voilure tournante.....	10
1.4.1.1 Les hélicoptères classiques	11
1.4.1.2 Les rotors coaxiaux	11
1.4.1.3 Les rotors coaxiaux carénés	13
1.4.1.4 Les rotors multiples.....	14
1.5 Les technologies de capteurs utilisées par les drones	15
1.5.1 Les centrales inertielles	15
1.5.2 Les télémètres	16
1.5.3 Système de géolocalisation	16
1.5.4 Les altimètres barométriques	17
1.5.5 Les caméras.....	17
1.5.6 La Kinect.....	17
1.6 La littérature sur les observateurs et les filtres d'estimation de la vitesse linéaire	18
1.7 La littérature sur les différentes stratégies de commande des quadrotors	20
1.7.1 La littérature concernant les commandes linéaires	21
1.7.2 La littérature concernant les commandes non linéaires	22
1.7.2.1 La linéarisation entrée sortie.....	22
1.7.2.2 La commande par backstepping.....	23
1.7.2.3 La commande par mode glissant.....	24
1.7.2.4 La commande hiérarchique.....	25
1.8 Conclusion	25
CHAPITRE 2 MODÉLISATION DYNAMIQUE DU QUADROTOR	27
2.1 Introduction.....	27
2.2 Le système d'axes	27
2.3 Définition des vecteurs de position et de moment	28
2.4 La représentation de la matrice de rotation.....	29
2.5 Les vitesses angulaires.....	32
2.6 Le modèle cinématique du quadrotor	33
2.6.1 La cinématique de translation	33
2.6.2 La cinématique de rotation.....	33
2.7 Analyse des forces et des moments agissants sur le quadrotor.....	35
2.7.1 Les Forces	36
2.7.1.1 La force de gravitation	36
2.7.1.2 La force de poussée.....	36

2.7.2	Les moments	37
2.7.2.1	Le moment de trainée.....	37
2.7.2.2	Les couples liés au mouvement du quadrotor.....	37
	Le couple de roulis.....	37
	Le couple de tangage	38
	Le couple de lacet	39
2.7.2.3	L'effet gyroscopique.....	40
2.8	La dynamique de quadrotor	42
2.8.1	La dynamique de translation	42
2.8.2	La dynamique de rotation	44
2.9	Dynamique générale du quadrotor.....	46
2.10	La matrice de transformation entre forces /moments et vitesses des moteurs.....	46
2.11	La dynamique des moteurs	47
2.12	Conclusion	48
CHAPITRE 3 CONCEPTION DU CONTRÔLEUR.....		49
3.1	Introduction.....	49
3.2	Le modèle de contrôle du quadrotor	49
3.3	Énoncé de problème de contrôle.....	50
3.4	La stratégie du contrôleur	50
3.5	Le contrôle de position.....	52
3.5.1	L'introduction d'un filtre pour l'estimation de la vitesse linéaire	52
3.5.1.1	Principe du filtre	52
3.5.1.2	Simulation de fonctionnement du filtre	55
3.5.2	Le choix de la commande intermédiaire.....	56
3.5.3	Étude de sous système de position en boucle fermée	57
3.5.4	Calcul de la force de poussée et l'orientation désirée.....	63
3.6	Le contrôle d'attitude.....	66
3.6.1	Les étapes de conception.....	68
	Étape 1 : Calcul des commandes virtuelles.....	68
	Étape 2 : Calcul du contrôleur de couple.....	70
3.7	Étude de robustesse de la commande suite à une action intégrale.....	74
3.7.1	Commande en position.....	74
3.7.2	Commande en attitude	77
3.8	Conclusion	80
CHAPITRE 4 VALIDATION DU CONTRÔLEUR HIÉRARCHIQUE		83
4.1	Introduction.....	83
4.2	Présentation du modèle.....	83
4.3	Simulation du contrôleur hiérarchique.....	85
4.3.1	Vol stationnaire	87
4.3.2	Trajectoire agressive	89
4.3.3	Trajectoire hélicoïdale.....	92
4.4	Comparaison du contrôleur hiérarchique avec la commande par mode glissant.....	95
4.5	L'analyse de la robustesse du contrôleur vis à vis aux perturbations externes.....	100

4.5.1	Comportement du contrôleur simple.....	100
4.5.2	L'effet de l'action intégrale.....	103
4.6	Conclusion	108
CONCLUSION GÉNÉRALE.....		111
RECOMMANDATIONS		113
ANNEXE I LES INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES		115
	Définition	115
ANNEXE II NOTIONS DE STABILITÉ		117
	La stabilité au sens du Lyapunov	117
	Méthode directe de Lyapunov	118
	Lemme de Barbalat	119
ANNEXE III LA FONCTION BARRIÈRE DE LYAPUNOV		121
	Présentation de la fonction barrière de Lyapunov	121
	Comparaison entre la fonction barrière et la fonction quadratique.....	123
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		127

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 4.1	Les valeurs des paramètres de quadrotor85
Tableau 4.2	Les paramètres du Matlab/Simulink86
Tableau 4.3	Gains du contrôleur hiérarchique.....86
Tableau 4.4	Scénario de vol.....89
Tableau 4.5	Gains du contrôleur hiérarchique avec effet intégrale104

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 0.1	Système de décision et de commande pour un drone	2
Figure 1.1	Bréguet-Richet gyroplane N°1	6
Figure 1.2	Quadrotor conçu par George de Bothezat le 21 février 1923	7
Figure 1.3	Quadrotor d'Oehmichen	7
Figure 1.4	Drone RQ-1 Predator tirant un missile Hellfire	9
Figure 1.5	Drone RQ-4 Global Hawk	9
Figure 1.6	Classification des drones selon leur taille et leur endurance	10
Figure 1.7	Exemple d'hélicoptères à rotor anti-couple de queue	11
Figure 1.8	Exemple d'hélicoptère à rotors coaxiaux	12
Figure 1.9	Exemple de drones à rotors coaxiaux à usage interne	12
Figure 1.10	Le drone à rotors coaxiaux Ka-137 à usage externe	13
Figure 1.11	Le Sikorsky Cypher I et Cypher II	14
Figure 1.12	Exemple de drone à rotors multiples	15
Figure 1.13	Un satellite GPS	16
Figure 1.14	La kinect et ses capteurs	18
Figure 2.1	Le système de coordonnées inertiel et le repère lié au quadrotor	28
Figure 2.2	Définition des axes	29
Figure 2.3	Rotations successives définissant les pseudos angles d'Euler	30
Figure 2.4	Illustration du mouvement de roulis	38
Figure 2.5 I	Illustration du mouvement de tangage	39
Figure 2.6	Illustration du mouvement de lacet	40
Figure 2.7	Le modèle du moteur à courant continu	47

Figure 3.1	L'architecture de contrôleur.....	51
Figure 3.2	Courbe d'estimation de la vitesse linéaire	55
Figure 3.3	Courbe de variable auxiliaire q	55
Figure 3.4	La poursuite d'accélération.....	56
Figure 4.1	Le schéma du modèle de simulation.....	84
Figure 4.2	Simulation des positions linéaires en vol stationnaire	87
Figure 4.3	Simulation des positions angulaires en vol stationnaire	88
Figure 4.4	Erreur de suivi en vol stationnaire	88
Figure 4.5	Poursuite des positions linéaires pour une trajectoire agressive.....	89
Figure 4.6	Simulation tridimensionnelle pour une trajectoire agressive.....	90
Figure 4.7	Poursuite des positions angulaires pour une trajectoire agressive	90
Figure 4.8	Estimation des vitesses linéaires pour une trajectoire agressive.....	91
Figure 4.9	Poursuite des positions linéaires en vol hélicoïdale.....	92
Figure 4.10	Représentation tridimensionnelle des positions linéaires en vol hélicoïdale	93
Figure 4.11	Estimation de la vitesse linéaire en vol hélicoïdale	93
Figure 4.12	Poursuite des positions angulaires en vol hélicoïdale.....	94
Figure 4.13	Le schéma du modèle de simulation de la commande par mode glissant .	95
Figure 4.14	Poursuite des positions linéaires pour la commande par mode glissant	96
Figure 4.15	Poursuite des positions angulaires pour la commande par mode glissant .	96
Figure 4.16	La force de poussée et les couples de la commande par mode glissant.....	97
Figure 4.17	La force de poussée et les couples de la commande hiérarchique.....	98
Figure 4.18	La force de poussée et les couples de la commande par mode glissant en régime transitoire	99
Figure 4.19	La force de poussée et les couples de la commande hiérarchique en régime transitoire	99

Figure 4.20	Poursuite de l'angle de roulis sous l'effet de perturbation	100
Figure 4.21	Poursuite de l'angle de tangage sous l'effet de perturbation	101
Figure 4.22	Poursuite de l'angle de lacet sous l'effet de perturbation	101
Figure 4.23	Poursuite la position linéaire x sous l'effet de perturbation	102
Figure 4.24	Poursuite la position linéaire y sous l'effet de perturbation	102
Figure 4.25	Poursuite la position linéaire z sous l'effet de perturbation	103
Figure 4.26	Simulation de l'angle de roulis en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	105
Figure 4.27	Simulation de l'angle de tangage en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	105
Figure 4.28	Simulation de l'angle de lacet en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	106
Figure 4.29	Simulation de la position x en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	107
Figure 4.30	Simulation de la position y en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	107
Figure 4.31	Simulation de la position z en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale	108
Figure A II-1	Interprétation géométrique de Lyapunov	118
Figure A III-1	Illustration schématique de la fonction barrière de Lyapunov	121
Figure A III-2	Commande Backstepping conçue avec une fonction quadratique du Lyapunov	124
Figure A III-3	Commande Backstepping conçue avec une fonction barrière du Lyapunov	124

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

UAV	Unmanned Aerial Vehicule
GPS	Global Positioning System
DGPS	Differential Global Positioning System
BLF	Barrier Lyapunov Function
MALE	Moyenne Altitude Longue Endurance
HALE	Haute Altitude Longue Endurance
UCAV	Unmanned Combat Aerial Vehicule
IMU	Inertial Measurment Unit
SONAR	Sound Navigation And Ranging
DSP	Digital Signal Processing
VTOL	Vertical Take Off and Landing
PID	Proportionnel Intégrateur Dérivateur
LQR	Linear Quadratic Regulator
BLDC	Brushless Direct Curent
LMI	Linear Matrix Inequality

LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

F_i	Référentiel terrestre
O_i	Origine du référentiel terrestre
X	Axe x du référentiel terrestre
Y	Axes y du référentiel terrestre
Z	Axe z du référentiel terrestre
F_b	Référentiel lié au quadrotor
O_b	Origine du référentiel lié au quadrotor
x_b	Axe x du référentiel lié au quadrotor
y_b	Axe y du référentiel lié au quadrotor
z_b	Axe z du référentiel lié au quadrotor
e_z	Vecteur unitaire $[0 \ 0 \ 1]^T$
I_3	Matrice identité de 3 lignes et 3 colonnes
η	Vecteur de la position exprimé dans F_i (m)
x	Position du quadrotor suivant l'axe X (m)
y	Position du quadrotor suivant l'axe Y (m)
z	Position du quadrotor suivant l'axe Z (m)
T	Matrice de transformation homogène de F_b à F_i
${}^I_b R, R$	Matrice de rotation de F_b à F_i
Θ	Vecteur des angles d'Euler (rad)
ϕ	Angle de roulis (rad)
θ	Angle de tangage (rad)
ψ	Angle de lacet (rad)
$v, v^I, \dot{\eta}$	Vecteur de la vitesse linéaire exprimée dans F_i (m/s)
v^B	Vecteur de la vitesse linéaire exprimée dans F_b (m/s)
u	Vitesse selon l'axe x_b (m/s)

v	Vitesse selon l'axe y_b (m/s)
w	Vitesse selon l'axe z_b (m/s)
Ω	Vecteur des vitesses angulaires du F_b par rapport F_i exprimées dans F_b . (rad/s)
p	Vitesse angulaire autour de l'axe x_b (rad/s)
q	Vitesse angulaire autour de l'axe y_b (rad/s)
r	Vitesse angulaire autour de l'axe z_b (rad/s)
I'	Tenseur d'inertie du quadrotor exprimé dans F_i ($kg \cdot m^2$)
I	Tenseur d'inertie du quadrotor exprimé dans F_b ($kg \cdot m^2$)
I_{xx}	Moment d'inertie autour de l'axe x ($kg \cdot m^2$)
I_{yy}	Moment d'inertie autour de l'axe y ($kg \cdot m^2$)
I_{zz}	Moment d'inertie autour de l'axe z ($kg \cdot m^2$)
τ_a	Vecteur de couple lié au mouvement du quadrotor (roulis, tangage, lacet) (N. m)
τ_ϕ	Couple de roulis (N. m)
τ_θ	Couple de tangage (N. m)
τ_ψ	Couple de lacet (N. m)
τ_{Mi}	Couple de réaction de chaque moteur (N. m)
G_a	Vecteur de précession gyroscopique exprimé dans F_b
m	Masse du quadrotor (Kg)
g	Accélération gravitationnelle (m/s^2)
T	Vecteur de la force de poussée totale produit par les moteurs (N)
T_i	Force de poussée générée par chaque moteur i (N)
M_a	Moment de traînée totale produit par les moteurs (N. m)
ω_i	Vitesse de rotation du moteur i (rad/s)
J_r	Moment d'inertie du moteur ($kg \cdot m^2$)
b	Coefficient de poussée ($N \cdot s^2$)
d	Coefficient de traînée ($N \cdot s^2$)
l	Distance entre le centre de gravité du quadrotor et le centre de

	chaque moteur (m)
$S(.)$	Matrice antisymétrique
$\lambda_{min} (.)$	Symbole de la plus petite valeur propre d'une matrice
$\lambda_{max} (.)$	Symbole de la plus grande valeur propre d'une matrice
Σ_1	Sous-système représente la dynamique de position
Σ_2	Sous-système représente la dynamique de rotation
η_d	Vecteur des positions linéaires désirées (m)
x_d	Position x désirée (m)
y_d	Position y désirée (m)
z_d	Position z désirée (m)
ψ_d	Angle de lacet désiré (m)
η_e	Erreur de poursuite des positions linéaires (m)
Θ_e	Vecteur de l'erreur des positions angulaires (rad)
e_ϕ	Erreur de poursuite de l'angle de roulis (rad)
e_θ	Erreur de poursuite de l'angle de tangage (rad)
e_ψ	Erreur de poursuite de l'angle de lacet (rad)
Ω_e	Vecteur de l'erreur des vitesses angulaires (rad/s)
ω_{1e}	Erreur de poursuite de vitesse angulaire autour de l'axe x_b (rad/s)
ω_{2e}	Erreur de poursuite de vitesse angulaire autour de l'axe y_b (rad/s)
r_e	Erreur de poursuite de vitesse angulaire autour de l'axe z_b (rad/s)
α_Ω	Vecteur des commandes virtuelles de la vitesse angulaire (rad/s)
α_p	Commande virtuelle de vitesse angulaire autour de l'axe x_b (rad/s)
α_q	Commande virtuelle de vitesse angulaire autour de l'axe y_b (rad/s)
α_r	Commande virtuelle de vitesse angulaire autour de l'axe z_b

	(rad/s)
A, B, k_p, k_d	Vecteurs de gains constitués d'une colonne qui contient trois éléments positifs pour chacune des positions x, y et z
q	Variable auxiliaire sans unité utilisée pour faire l'estimation de la vitesse linéaire
U	Vecteur de commande intermédiaire pour les positions linéaires (rad. N/kg)
U_x	Commande intermédiaire pour la position x (rad. N /kg)
U_y	Commande intermédiaire pour la position y (rad. N /kg)
U_z	Commande intermédiaire pour la position z (rad. N/kg)
V_i	Fonction de Lyapunov i

INTRODUCTION

Au cours de ces dernières décennies, l'intérêt porté par la communauté scientifique à la thématique des véhicules aériens autonomes (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) n'a cessé de s'accroître. Ces engins volants, aussi appelés drone (faux bourdons), ont été utilisés principalement au début dans le domaine militaire, comme des sentinelles et pour l'évaluation des zones sensibles. Récemment, le domaine d'application de ces engins volants est devenu très varié ; ils peuvent être utilisés dans le secteur industriel, civil et dans des situations d'urgence. En effet, le recours à ces robots volants autonomes présente des grands avantages par rapport à des véhicules avec pilote : les êtres humains peuvent être préservés de certaines opérations à risques tout en minimisant le coût de plusieurs tâches (le coût du carburant, de fabrication et de la maintenance). Il existe désormais une grande diversité de drones qui se différencient selon leur domaine d'application. Le quadrotor dont le contrôle fait l'objet dans ce mémoire appartient à la catégorie des drones à voilure tournante. Ils offrent une grande maniabilité et agilité à effectuer des vols dans des espaces limités, contrairement aux drones à voilure fixe qui exigent des pistes spéciales pour l'atterrissage et le décollage. Néanmoins cet hélicoptère à quatre rotors est un système très sensible aux perturbations extérieures et sa dynamique est fortement non linéaire. Cette propriété est due au fort couplage entre les variables d'états du système et ses entrées de commande, ce qui fait que tout changement dans une entrée de commande affecte non seulement la variable d'intérêt, mais également les autres variables (Drouot, 2013). En plus, la dynamique du quadrotor est de nature sous actionnée tel que le nombre de commandes d'entrées est inférieur au nombre de degrés de liberté. Alors l'étude de ce système complexe nécessite une connaissance approfondie de plusieurs domaines tels que : la modélisation des systèmes physiques, la théorie de contrôle, les systèmes embarqués. Ces derniers sont souvent trouvés dans les branches de l'ingénierie (planification, guidage, pilotage, navigation) qui étudient le mouvement des systèmes autonomes tels que les quadrotors. Les définitions de chacun de ces termes sont comme suit :

- La planification de trajectoire : consiste à définir un itinéraire ou simplement des points de passage à suivre par le quadrotor.

- Le guidage : est un algorithme de commande dédié à la stabilisation de la dynamique de position du drone.
- Le pilotage : est un algorithme de commande qui a pour fonction d'asservir la dynamique d'orientation du véhicule sur les valeurs de référence déterminées par le module de guidage.
- La navigation : consiste à déterminer à chaque instant la localisation et l'orientation du véhicule aérien par un ensemble des capteurs.

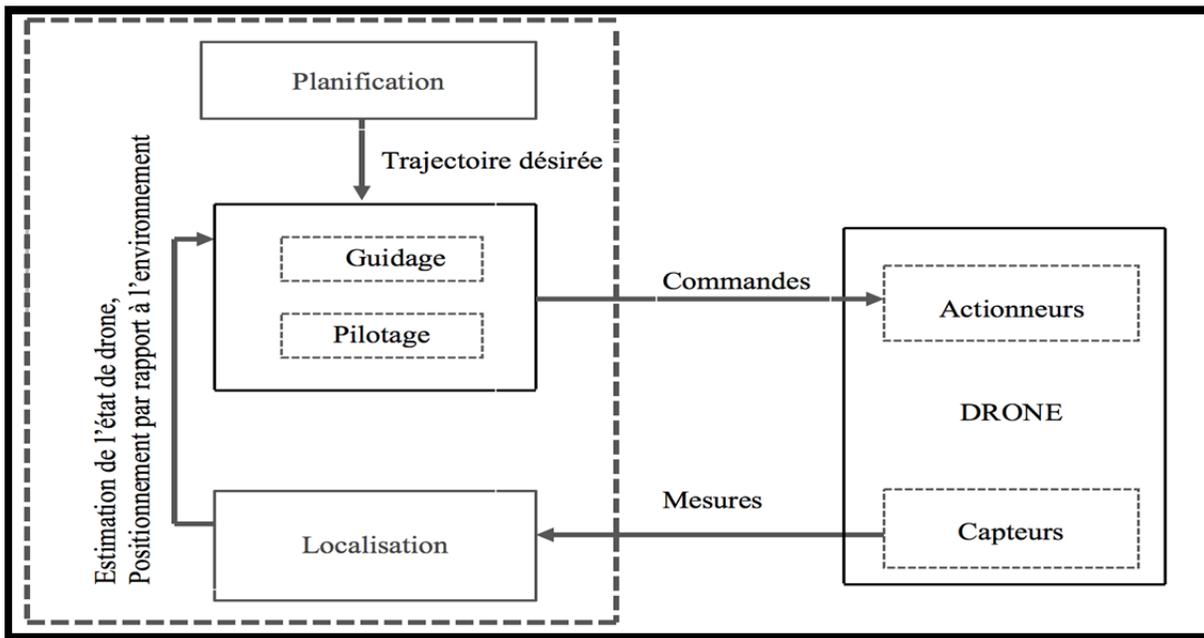


Figure 0.1 Système de décision et de commande pour un drone
(Bertrand, 2007)

Les algorithmes de guidage et de pilotage constituent alors la partie commande de notre système, il est clair d'après la figure 0.1 que ces algorithmes nécessitent des informations en temps réel sur les états du système à savoir (les positions linéaires, les vitesses linéaires, les positions angulaires, les vitesses angulaires) afin de stabiliser et contrôler le quadrotor le long de sa mission en vol. Mais ceci n'est pas toujours possible à cause de l'inaccessibilité de la mesure d'un état où dans le cas d'une défaillance ou manque d'un certain capteur. La vitesse linéaire est une information vitale de l'état du véhicule et qui n'est pas directement mesurable. Elle peut être généralement calculée à partir d'une centrale inertielle, par une

intégration des signaux de l'accéléromètre, ou à travers d'un module GPS en effectuant des dérivations successives dans le temps des positions linéaires (Abdessameud et Tayebi, 2010). Il existe aussi une autre méthode qui consiste à intégrer la valeur d'accélération fournie par l'accéléromètre et à coupler ce résultat avec la dérivée des mesures du GPS. Toutefois, ces capteurs sont souvent entachés de bruit et peuvent fournir des informations erronées ; ce qui limite les performances de la boucle de commande.

Objectif

L'objectif principal de ce travail est de concevoir et développer une commande non linéaire basée sur l'estimation de la vitesse linéaire permettant à un quadrotor de maintenir un positionnement autonome et stable dans l'espace. Dans ce cadre d'idée, le contrôleur choisi est de type hiérarchique : il s'agit d'un contrôleur moderne et bien adapté aux opérations de pilotage et de guidage. Grâce à sa structure modulaire, il est possible de décomposer la dynamique du système considéré en deux sous-systèmes de position et d'attitude, et de concevoir de lois de commande séparées pour chacun d'entre eux. Nous choisissons ainsi, d'impliquer un filtre non linéaire dans le contrôleur de position pour l'estimation de la vitesse linéaire, alors que pour le sous-système d'attitude, nous choisissons un contrôleur backstepping qui sera conçu avec des fonctions barrières de Lyapunov (BLF) permettant de créer des limites pour éviter l'excursion des angles de rotation (roulis et tangage) vers des points de singularité.

Les grandes étapes à suivre dans ce projet pour atteindre cet objectif sont les suivantes :

- Modélisation cinématique et dynamique décrivant le comportement du quadrotor;
- Synthèse d'un filtre non linéaire pour l'estimation de la vitesse linéaire;
- Conception d'une commande non linéaire de type hiérarchique;
- Ajout d'une action intégrale à la commande hiérarchique pour minimiser l'effet des perturbations externes;
- Validation de loi de commande par simulation Matlab /Simulink.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres :

- **Dans le premier chapitre** : nous définissons dans un premier temps ce qu'est un drone, puis nous donnons un aperçu général sur les types des drones à voilures tournantes, les différentes technologies de capteurs permettant de les localiser, et nous terminons par une présentation des méthodes d'estimations de vitesse linéaire et les approches de commande existantes dans la littérature.

- **Dans le second chapitre** : nous présentons les équations cinématiques et dynamiques permettant de décrire le comportement du quadrotor. Ces équations seront exprimées par la suite dans une représentation plus simple et appropriée à la conception de loi de commande.

- **Dans le troisième chapitre** : nous détaillons le processus de conception de la commande hiérarchique. Nous commençons alors par la conception de contrôleur de position, y compris une explication sur le principe adopté par un filtre non linéaire pour l'estimation de la vitesse linéaire. Dans une seconde partie, nous choisissons un contrôleur backstepping pour le sous-système d'attitude qui se base sur un algorithme itératif permettant de créer des commandes virtuelles pour les vitesses angulaires et aboutir finalement aux valeurs des couples.

- **Dans le quatrième chapitre** : nous montrons tout d'abord les résultats de simulation obtenus par le contrôleur hiérarchique pour plusieurs scénarios, ensuite, nous testons la performance de la commande vis à vis des perturbations externes, d'où provient l'idée d'ajouter une action intégrale à l'ensemble de la commande pour améliorer sa robustesse.

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART

1.1 Introduction

Un drone ou UAV (Unmanned Aerial Vehicle) est un engin volant motorisé, qui ne transporte pas d'opérateur humain. Il est capable d'effectuer des tâches spécifiques pendant sa durée de vol de façon plus au moins autonome. Sa taille varie en fonction de ses capacités et les missions à réaliser. Ce chapitre commence par l'historique et les différentes catégories des drones, en mettant l'accent sur les drones à voilures tournantes en particulier les quadrotors. Ensuite, nous étudions les différentes technologies de capteurs permettant au drone de se localiser dans l'espace. Enfin, une dernière partie est consacrée aux différentes méthodes d'estimation de la vitesse linéaire et les stratégies de commande présentées dans la littérature.

1.2 État de l'art des drones

Un drone est un aéronef piloté à distance, semi-autonome ou autonome. Il utilise un système de navigation pour programmer des vols dans des environnements intérieurs ou extérieurs. Il peut aussi transporter des charges utiles.

Grâce aux progrès de l'électronique à la fois, la capacité de traitement et de la miniaturisation, les drones présentent un concept multidisciplinaire qui combine plusieurs domaines d'ingénierie tels que le génie électrique, le génie mécanique et l'automatique. Ils sont donc aptes à effectuer des applications importantes, en particulier la télédétection. En fait, les drones sont équipés de caméras infrarouges très sophistiquées et d'une liaison de données permettant de transférer des vidéos instantanées en hautes résolutions vers des stations de contrôle, ils peuvent être liés par de relais de communications à des milliers de kilomètres de distance.

Les drones sont subdivisés en deux catégories générales, les drones à voilure fixe et les drones à voilure tournante. Les quadrotors appartiennent aux familles des drones à voilure tournante qui possèdent plus de degrés de liberté ayant l'aptitude de faire des vols stationnaires et à basse vitesse. Son premier concept a commencé au début du vingtième siècle par le professeur Richet et les frères Breguet qui ont construit en 1907 le premier quadrotor nommé Breguet-Richet Gyroplane N°1. Ils ont fait des essais de vol entre les mois d'août et de septembre 1907, mais l'appareil ne s'élèvera pas au-dessus de 1.5 mètres (Brito Domingues, 2009).

La Figure 1.1 montre l'énorme quadrotor avec doubles hélices en phase de préparation pour son premier vol.

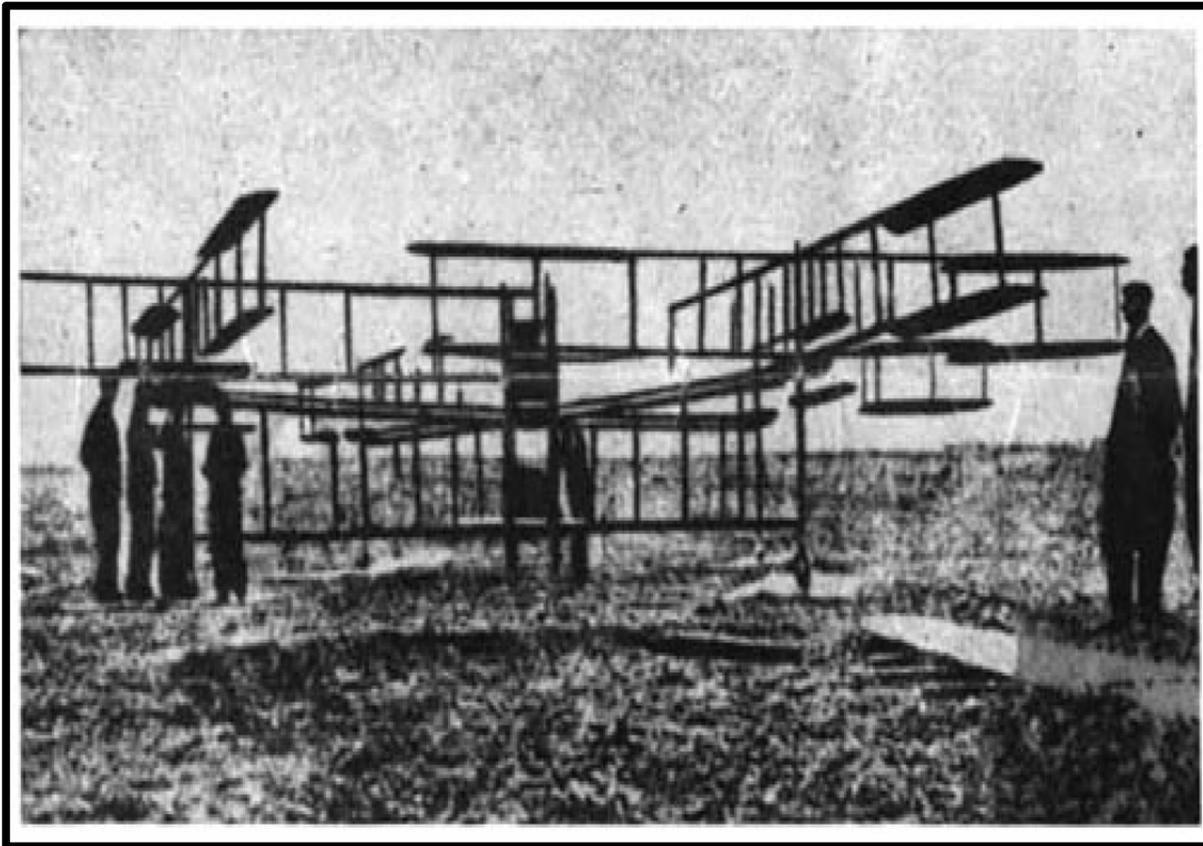


Figure 1.1 Bréguet-Richet gyroplane N°1

Tirée de (Stepaniak, 2008)

Plus tard, deux conceptions supplémentaires ont été élaborées et des tests expérimentaux ont été réalisés. La première est conçue par Georges de Bothezat et Ivan Jérôme en 1922, avait quatre rotors à six pales placées à la fin d'une structure en forme de X, comme le montre la figure 1.2

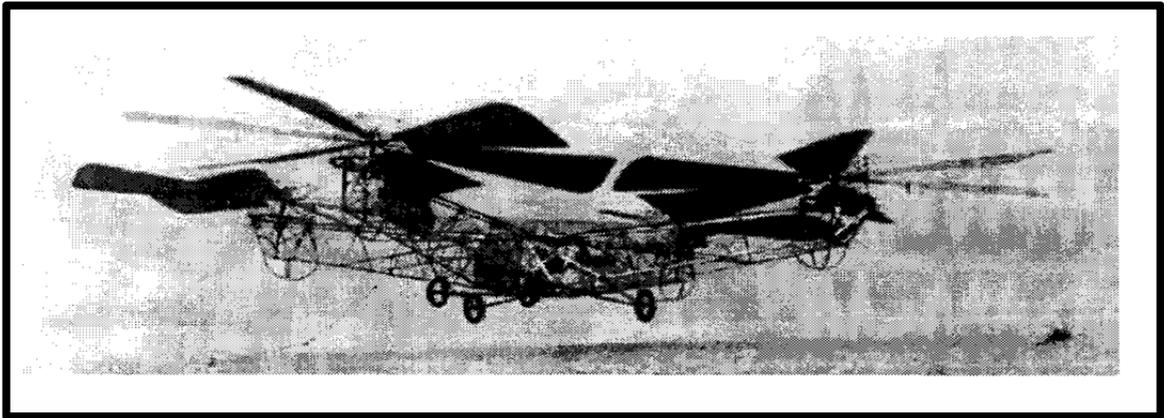


Figure 1.2 Quadrotor conçu par George de Bothezat le 21 février 1923
Tirée de (Raza, 2010)

Le deuxième quadrotor illustré dans la figure 1.3 a été construit par Etienne Oehmichen en 1924, a réussi à monter plus que dix mètres d'altitude et effectuer une boucle complète sur un kilomètre en sept minutes et quarante secondes.

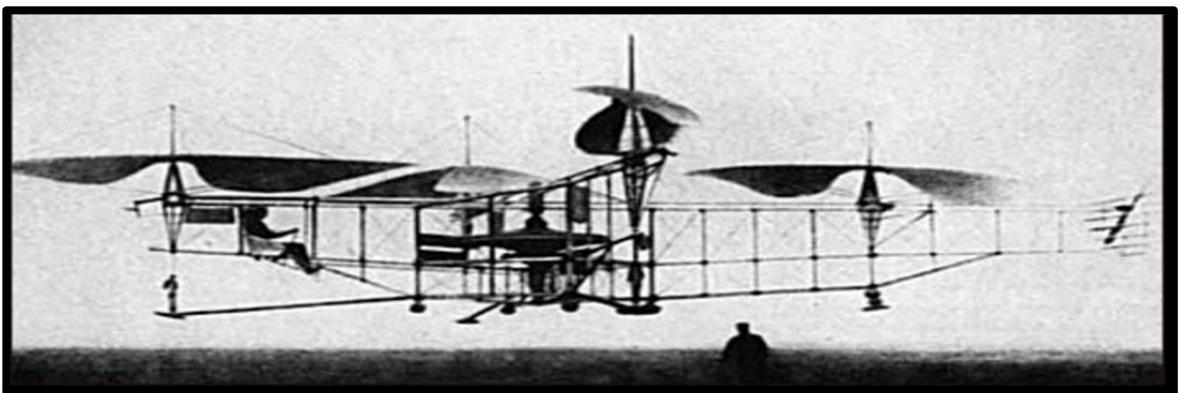


Figure 1.3 Quadrotor d'Oehmichen
Tirée de (Raza, 2010)

Après ces premières tentatives, les efforts des scientifiques et des ingénieurs ont été consacrés à donner plus d'autonomie, d'endurance et de stabilité dans les créations des nouveaux drones. Ils sont maintenant capables d'effectuer des tâches plus spécifiques dans des domaines variés tels qu'au profit des forces armées ou de la sécurité d'un état (militaire, police, douane, etc.) ou pour des applications civiles comme la surveillance du trafic routier, le contrôle des voies maritimes, la récolte de données météorologiques ou bien encore l'inspection d'infrastructures tels que les ponts, les viaducs, les barrages. Quel que soit le domaine d'application, les drones sont destinés à remplacer les êtres humains pour effectuer des missions dangereuses et accéder à des endroits difficilement accessibles.

1.3 La classification des drones

Les drones offrent une grande variété de types. Ils peuvent être classés selon la taille, l'endurance et l'autonomie (voir figure 1.6) ou peuvent également être caractérisés par leur fonction: drones stratégiques, drones tactiques ou drones de combats (Hattenberger, 2008). Ces catégories sont résumées ci-après :

- Les petits et les micro-drones (de dimensions très réduites et emportant une charge très légère) généralement peu autonomes, mais qui jouent souvent le rôle de « jumelles déportées » (Wikipédia, 2004), par exemple pour observer au-dessus d'un obstacle ou dans une zone à risque.

- Les drones stratégiques à « haute endurance »: les plus importants en taille. Ceux-ci se subdivisent en drones MALE et HALE. Des appareils de cette catégorie peuvent emporter des charges qui dépassent les 100 kg, atteindre des altitudes de 7 000 m et rester dans les airs plus d'une journée (Michel Asencio, 2010).

- Les drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance) dont l'altitude de croisière varie entre 5000 et 15000 mètres (Koehl, 2012). La figure 1.4 présente le drone MALE RQ-1 ayant un rayon d'action de 740 kilomètres, il peut aussi voler jusqu'à 7600 mètres d'altitude.



Figure 1.4 Drone RQ-1 Predator tirant un missile Hellfire
Tirée de (Koehl, 2012)

- Les drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance) dont le plafond de vol se situe au-delà de 20000 mètres (Koehl, 2012). La figure 1.5 présente le drone HALE RQ-4 Global Hawk américain, d'une portée de 1 500 à 3 000 km, capable de voler à une altitude de vol de 15 000 à 20 000 m avec une endurance de 24 à 36 heures, il est consacré à des missions de reconnaissance stratégique ou de désignation de cibles.



Figure 1.5 Drone RQ-4 Global Hawk
Tirée de (Koehl, 2012)

- Les drones tactiques: concernent une très large gamme d'engins, allant des mini ou micro drones aux drones MALE. Ils sont conçus pour effectuer un panel très large de missions.

- Les drones de combats UCAV : ils possèdent des caractéristiques techniques très différentes avec une endurance plus faible et une grande masse de décollage (soit environ 10 tonnes).

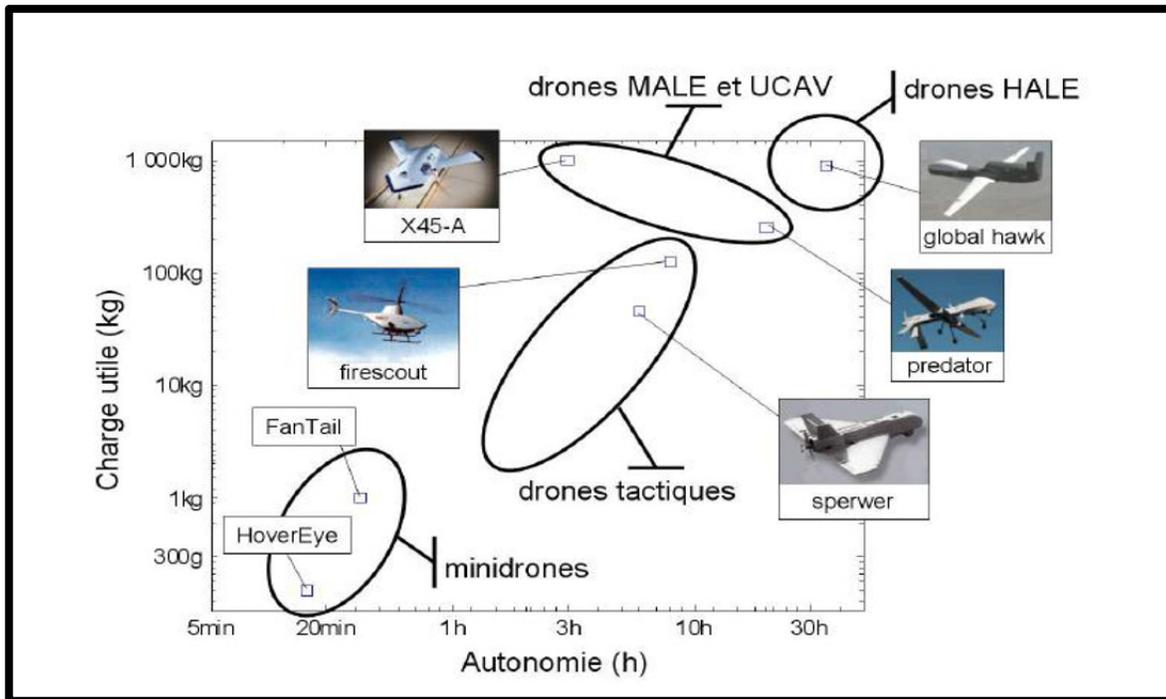


Figure 1.6 Classification des drones selon leur taille et leur endurance

Tirée de (Hattenberger, 2008)

1.4 Les drones à voilure tournante

Les drones à voilure tournante ont tous une caractéristique commune: ils sont des véhicules aériens à décollage et atterrissage vertical, capable d'effectuer des vols stationnaires. Ils peuvent être classés suivant le nombre de rotors et leur position en 4 catégories :

- Les hélicoptères classiques;
- Les rotors coaxiaux;
- Les rotors coaxiaux carénés;
- Les rotors multiples.

1.4.1.1 Les hélicoptères classiques

L'hélicoptère est un drone à voilure tournante le plus connu et le mieux maîtrisé. Il est formé d'un rotor principal et un rotor anti-couple de queue. Ce dernier peut être libre ou caréné dans un fenestron afin d'augmenter la protection et l'efficacité aérodynamique. Les deux configurations sont illustrées dans la figure 1.7. La rotation du rotor principal assure la fonction de la sustentation, alors que le rotor de la queue joue un rôle d'anti-couple pour annuler le couple de réaction en lacet généré par la rotation du rotor principal.

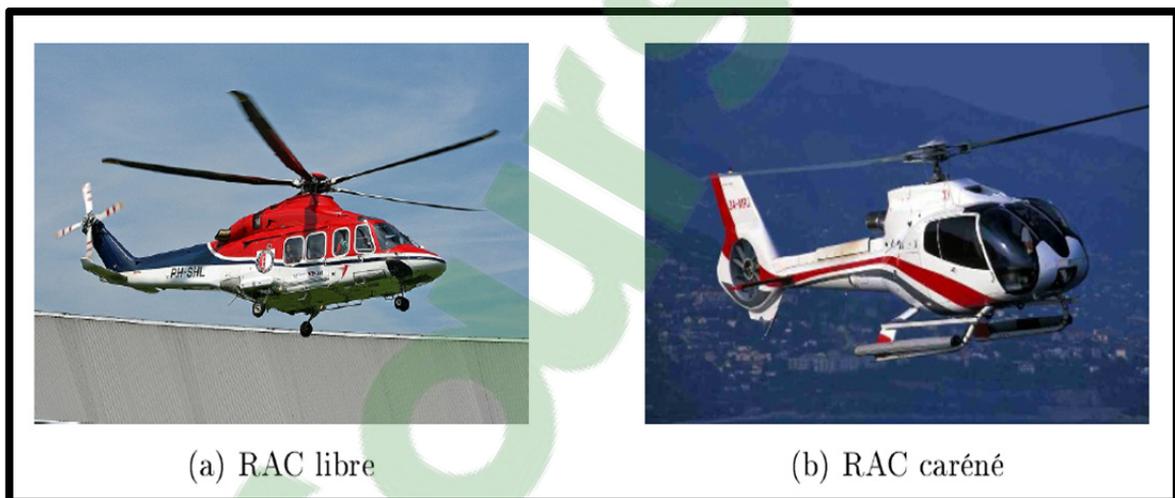


Figure 1.7 Exemple d'hélicoptères à rotor anti-couple de queue
Tirée de (Drouot, 2013)

1.4.1.2 Les rotors coaxiaux

Cette configuration est formée de deux rotors fixés sur le même axe et qui tournent à la même vitesse dans un sens opposé, ce système de rotation inversé du second rotor permet d'annuler l'effet de la réaction du couple du premier. Le second rotor permet également de rendre le flux d'air plus laminaire et plus rapide en sortie (Elamine, 2013), ces deux rotors contribuent à un mouvement de poussée vertical et leur différentiel de vitesse de rotation pilote l'orientation de l'angle de lacet.



Figure 1.8 Exemple d'hélicoptère à rotors coaxiaux

Tirée de (Drouot, 2013)

La stabilité de la structure des drones à rotors coaxiaux en fait des candidats parfaits pour une utilisation dans le mode de l'aéromodélisme. Cet avantage est souvent altéré par une grande sensibilité au vent et par des nombreuses interactions aérodynamiques générées par le mouvement de rotation des pales. Ces deux éléments poussent les chercheurs à concevoir les plus petits de drones à rotors coaxiaux pour un usage en intérieur. C'est le cas des drones illustrés dans les figures 1.8, 1.9 et 1.10 ayant pour objectif d'être les plus légers possibles en gardant certaines performances de vol. Ce qui présente un grand défi technologique.

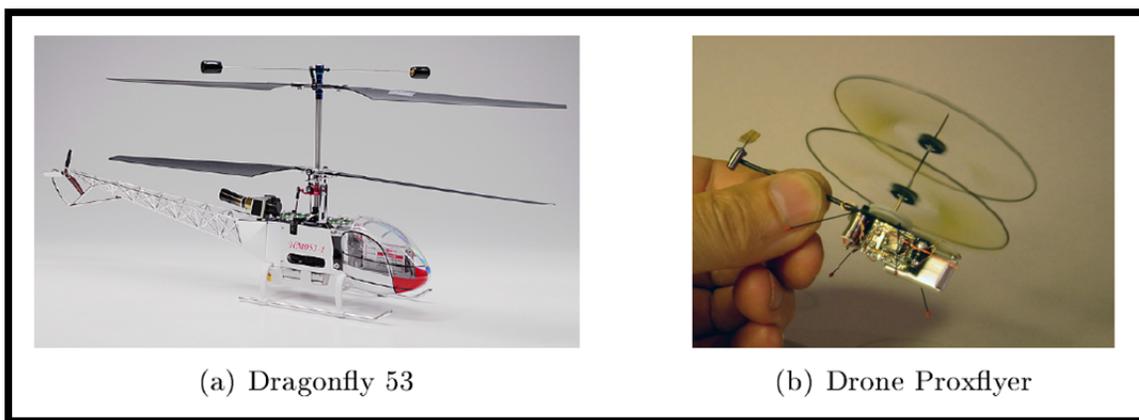


Figure 1.9 Exemple de drones à rotors coaxiaux à usage interne

Tirée de (Drouot, 2013)



Figure 1.10 Le drone à rotors coaxiaux Ka-137 à usage externe

Tirée de (Pflimlin, 2006)

La figure 1.10 présente l'hélicoptère russe kamov Ka-137. Il a une structure très compacte et qui possède un système de propulsion puissant pour être utilisé à l'extérieur. Il peut effectuer de nombreuses missions, notamment dans les domaines de la reconnaissance, la police, l'écologie et la transmission de données.

1.4.1.3 Les rotors coaxiaux carénés

Dans cette structure, le drone à rotors coaxiaux est intégré dans une carène. Il est alors plus résistant aux chocs puisque les pales ne sont pas directement accessibles. Deux architectures techniques peuvent être distinguées. La première architecture regroupe les appareils à carène courte dont la hauteur est faible devant le diamètre de la carène. Ces véhicules possèdent en général une bonne stabilité en vol stationnaire, mais une aptitude limitée à la translation horizontale. Une deuxième architecture présentée à la figure 1.11 a ainsi vu le jour : une hélice secondaire a été rajoutée pour assurer le vol de translation et le rotor principal sert juste pour générer la force de poussée (principe de girodyne). Le véhicule reste pratiquement à plat lors du vol d'avancement, gardant par conséquent une traînée faible en phase de translation. (Pflimlin, 2006)

L'inconvénient de ces véhicules est leur faible tenue à la rafale de vent transverse et qui peut déstabiliser l'appareil en vol. Pour y remédier, on peut soit ajouter des ailes de stabilisation, soit placer la charge utile en hauteur pour rehausser le centre de gravité.

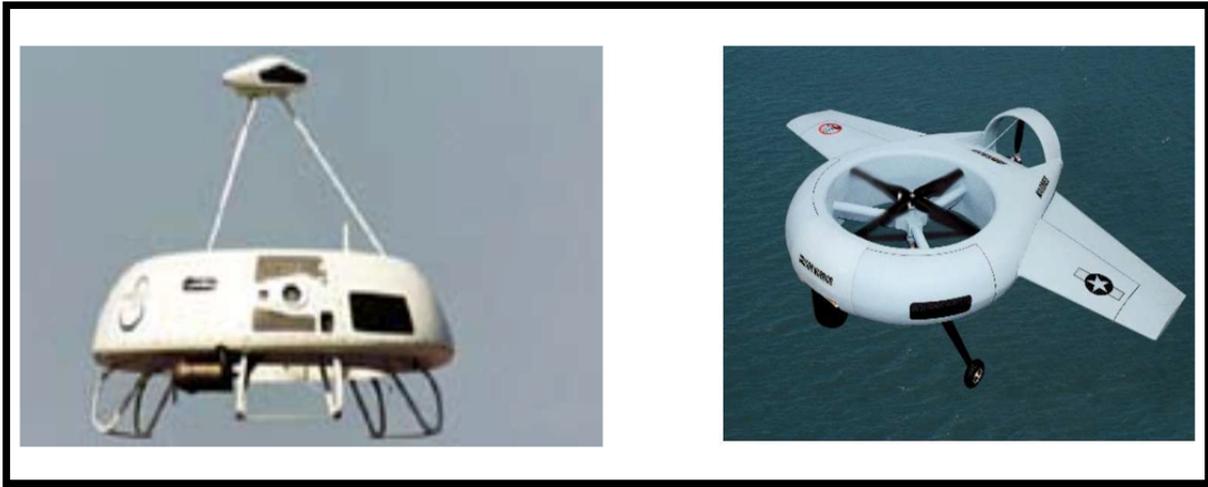


Figure 1.11 Le Sikorsky Cypher I et Cypher II
Tirée de (Pflimlin, 2006)

1.4.1.4 Les rotors multiples

Les drones à rotor multiples constituent une configuration aéromécanique très répandue. Ils possèdent généralement quatre rotors, mais il existe avec six et huit rotors comme en atteste la figure 1.12. La simplicité mécanique de ce véhicule en fait une configuration très populaire pour la réalisation de plateformes expérimentales à faibles coûts (Gupte et al., 2012). Du point de vue fonctionnement, le sens de rotation des rotors est inversé deux à deux afin de compenser le couple de réaction. En effet, c'est la différence de portance qui détermine l'inclinaison du véhicule autour des angles de roulis et de tangage, et qui permettra donc le vol d'avancement. Ces drones sont particulièrement appropriés au vol stationnaire et à faibles vitesses. Ils sont cependant peu adaptés pour des vols de translation à grande vitesse ou pour des vols dans des conditions venteuses.

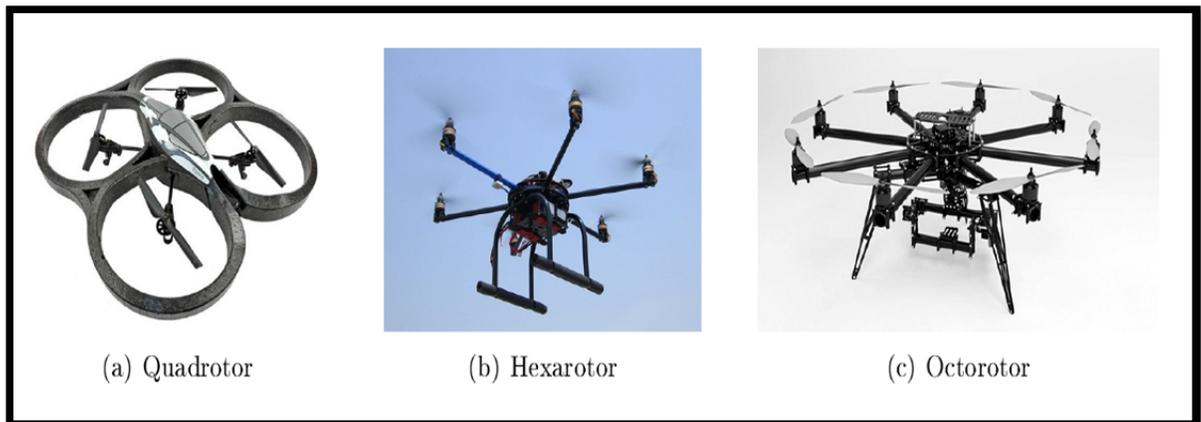


Figure 1.12 Exemple de drone à rotors multiples

Tirée de (Drouot, 2013)

1.5 Les technologies de capteurs utilisées par les drones

Les capteurs sont des outils très importants pour la navigation aérienne, car ils permettent de déterminer les paramètres d'état (positions, vitesses, angles d'attitude, vitesses de rotation), la défaillance de l'un de ces capteurs peut mener à une instabilité et à un dysfonctionnement dans la boucle de contrôle. Leur rôle est de donner des informations fiables et en temps réel sur la localisation et le positionnement du drone dans un milieu donné.

Nous décrirons quelques capteurs susceptibles d'être embarqués sur des drones quadrotor.

1.5.1 Les centrales inertielles

Une centrale inertielle ou IMU (Inertial Measurement Unit) est un système complet souvent composé de trois gyroscopes et trois accéléromètres permettant de mesurer l'accélération non gravitationnelle et la vitesse de rotation du véhicule par rapport à un référentiel inertiel. Grâce à ces capteurs et à partir des conditions initiales, nous pouvons calculer à chaque instant la vitesse linéaire, la position et l'orientation du véhicule. En pratique, il existe plusieurs défauts qui peuvent affecter les mesures d'accélération et des rotations (bruits, biais, facteur d'échelle, non-linéarité).

1.5.2 Les télémètres

Un télémètre est un appareil de mesure qui permet de connaître l'environnement direct du drone dans lequel il évolue. Il détermine la distance le séparant d'un objet. Ceci, en mesurant l'intervalle de temps qui sépare l'émission d'une onde (acoustique, optique, etc...) et sa réception. Il existe plusieurs technologies de capteurs télémétriques, à savoir: les télémètres acoustiques ou SONAR, les télémètres lasers et les télémètres radars.

1.5.3 Système de géolocalisation

Un système de géolocalisation permet de localiser un objet (une personne, etc) sur un plan ou une carte à l'aide de ses coordonnées géographiques. Cette position est donnée en termes de latitude, de longitude et d'altitude, avec une précision d'une dizaine de mètres pour les systèmes standard. Le système de positionnement par satellites le plus connu et le plus répandu est évidemment le système GPS (de l'anglais Global Positioning System) qui est un système de positionnement par balises actives que sont les satellites, chacun d'entre eux émet un signal permettant de calculer la position de l'engin équipé d'un récepteur GPS (Koehl, 2012). Le système GPS est composé de 24 satellites en orbite autour du globe. D'autres systèmes appelés GPS différentiel ou DGPS sont beaucoup plus précis, réduisent l'erreur d'un GPS traditionnel grâce à l'ajout d'une station au sol. Toutefois, un tel système dépend d'une station fixe ce qui rend son déploiement contraignant.

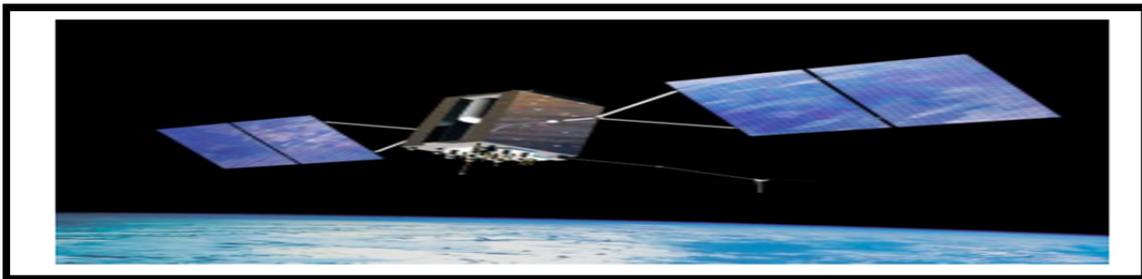


Figure 1.13 Un satellite GPS

Tirée de (Drouot, 2013)

1.5.4 Les altimètres barométriques

Un altimètre barométrique est un dispositif pour mesurer l'altitude du drone. En réalité, il mesure la différence de pression atmosphérique entre son niveau actuel et celui de référence, généralement le niveau de la mer se basant ainsi sur le fait que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente. De nos jours, plusieurs types de baromètres peuvent être utilisés, notamment le baromètre à mercure, le baromètre à eau ou le baromètre à gaz.

1.5.5 Les caméras

La caméra est un capteur qui sert à percevoir l'environnement d'un objet et d'obtenir des renseignements fiables sur sa position et son orientation par rapport à une cible à observer. Néanmoins cet outil possède de nombreuses lacunes, dont les ressources nécessaires pour le traitement des données volumineux et la sensibilité à la lumière (Drouot, 2013). Pour des applications sur des véhicules aériens autonomes, les informations fournies par la caméra peuvent être utilisées avec des mesures issues du système de positionnement par satellites.

1.5.6 La Kinect

La Kinect est à l'origine (Benoît Bernardin, 2013) un périphérique destiné aux consoles de jeux vidéo Xbox 360 de Microsoft permettant de contrôler un jeu sans manette. Cette caméra, utilisant des techniques d'interaction, est basée sur un périphérique d'entrée branché sur la console qui permet d'interagir par commande vocale et par reconnaissance de mouvements ou d'images. C'est un appareil composé de multiples capteurs : une caméra classique, une caméra et un émetteur infrarouge, des microphones pour la reconnaissance vocale et un moteur dans la base permettant de suivre les mouvements de l'utilisateur. Les plus intéressants sont bien entendu la caméra et l'émetteur infrarouges qui permettent de distinguer la profondeur de ce qui est dans le champ de vision de la caméra classique. (Voir figure 1.17)

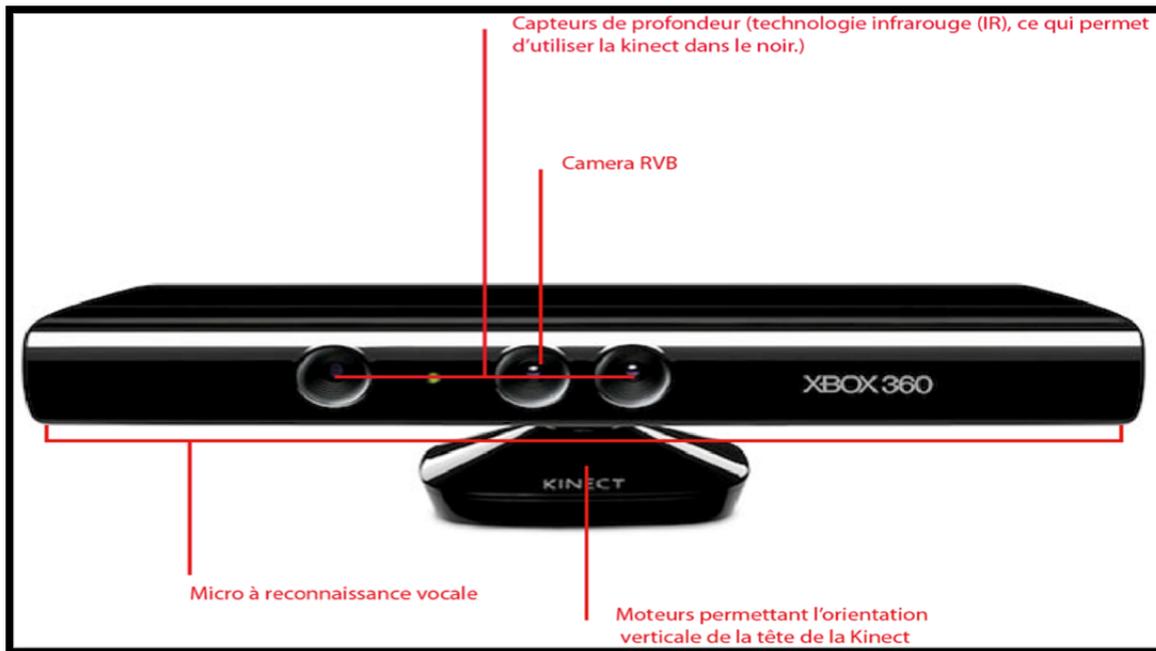


Figure 1.14 La Kinect et ses capteurs

Tirée de (Benoît Bernardin, 2013)

1.6 La littérature sur les observateurs et les filtres d'estimation de la vitesse linéaire

Les capteurs mentionnés précédemment servent à mesurer en temps réel les états décrivant le comportement du système à savoir les positions, les vitesses linéaires, les angles de rotation et les vitesses de rotation angulaires. Toutefois, certaines mesures de ces états ne peuvent toujours être directement disponibles ou sont loin des valeurs réelles. Par exemple, le calcul de la vitesse linéaire par un capteur GPS n'est pas fiable dans un milieu contraint (Sylvain et al., 2009), et si on utilise un accéléromètre, il faut intégrer la valeur de l'accélération obtenue, alors que la mesure par ce capteur peut être toujours entachée d'erreurs de mesure dues aux bruits des moteurs et à des perturbations externes, et par intégration ces erreurs augmentent. Pour cela, la mise en place d'une technique d'estimation pour la mesure de vitesse non linéaire s'avère nécessaire, dans cette partie on cite quelques méthodes traitant cette problématique.

Commençons par la notion des observateurs, cette théorie a été introduite par Kalman et Bucy pour un système linéaire dans un environnement stochastique, puis Luenberger a créé un observateur portant son nom pour les systèmes linéaires déterministes. Son idée est d'ajouter au modèle mis sous la forme canonique compagnon (Brunovsky) une correction à l'aide de la mesure fournie par les capteurs (Amghar, 2013). L'étude de cet observateur a été étendue pour les systèmes non linéaires afin d'améliorer la qualité de la reconstruction de l'état. L'application de cet observateur sur un drone dans (Koehl, 2012) a donné de bons résultats en simulation en conservant une bonne information de la vitesse linéaire. Dans un autre travail (Do et al., 2003), cet observateur utilisé avec un ordre complet a permis d'assurer la poursuite de trajectoire d'un hélicoptère (VTOL) dans le cas où seuls les positions et les angles d'attitude sont mesurés. Un changement de coordonnées est ensuite effectué pour mettre le système sous forme triangulaire adaptée au backstepping dans le but de développer un contrôleur ne nécessitant pas de mesurer les vitesses. Pour réduire la dimension du vecteur d'état estimé, un observateur d'ordre réduit est présenté dans (Boutayeb et al., 2008). Il permet d'estimer la vitesse linéaire d'un drone en utilisant une mesure complète ou partielle de l'accélération. Des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique de l'erreur de l'observation ont été démontrées. Il existe aussi d'autres formes d'observateurs, comme l'observateur adaptatif. Cette approche (Benzemrane et al., 2007) fournit une estimation de la vitesse d'un drone quadrotor à partir de la mesure d'accélération calculée par la centrale inertielle, mais cette méthode présente l'inconvénient de la convergence lente des paramètres à estimer, alors que l'observateur par mode glissant utilisé dans (Madani et Benallegue, 2007) a montré non seulement son aptitude d'estimer la vitesse du quadrotor mais aussi sa robustesse vis à vis aux perturbations externes.

L'utilisation d'un observateur permet donc de surmonter le problème de l'absence d'une certaine mesure en reconstruisant les états non disponibles. Cependant il peut introduire une charge de calcul supplémentaire dans la boucle de commande, ce qui peut engendrer des délais de calcul principalement pour la dynamique de rotation. Il est également nécessaire de prouver tout d'abord la convergence de l'observateur avant d'analyser la stabilité du système en boucle fermée par une commande se basant sur l'estimé de l'état. (Sylvain et al., 2009)

Une autre méthode d'estimation souvent utilisée dans la littérature est les filtres, notamment le filtre de Kalman étendu. C'est un outil mathématique largement appliqué sur des systèmes dynamiques non linéaires, qui sert à estimer les états d'un système évoluant dans le temps à partir des mesures bruitées. Son principe consiste à utiliser les équations du filtre du Kalman standard sur le modèle non linéaire linéarisé en appliquant la formule de Taylor au premier ordre. Ce filtre a été utilisé avec succès pour estimer les variables d'état d'un quadrotor (Benoit, 2014). Cependant leur stabilité ne peut être garantie que lorsque le système répond à certaines conditions particulières complexes à vérifier en pratique (Bouabdallah et al., 2004; La Scala et al., 1995).

Il existe aussi d'autres formes de filtre tel que les filtres de vitesse. Les premiers travaux utilisant ce type de méthode ont été réalisés avec des robots manipulateurs dans (Burg et al., 1996; Burg et al., 1997) , tel que la mesure de la vitesse linéaire est calculée par un signal généré par un filtre linéaire à partir de la mesure de la position des articulations. L'extension de ce travail à un filtre non linéaire est démontrée dans (Dixon et al., 2000). Dans (Bertrand, 2007), l'introduction de l'état virtuel dans la commande d'un quadrotor correspond à une valeur filtrée de la mesure de position, ce qui fournit une bonne estimation de la vitesse linéaire. Cette commande permet d'assurer la stabilité de chaque sous-système bouclé en une seule étape sans avoir besoin de s'assurer au préalable de la convergence d'une estimée fournie par le filtre vers la valeur réelle de l'état estimé. L'utilisation de ces filtres de vitesse est intéressante du point de vue simplicité d'implémentation comparativement à un observateur qui nécessite une copie du modèle du système réel. En plus, l'analyse de stabilité du système en boucle fermée peut être établie sans avoir besoin d'étudier la convergence de valeur estimée toute seule. Nous aurons recours dans ce mémoire à ce genre de filtre pour effectuer l'estimation de la vitesse linéaire du quadrotor.

1.7 La littérature sur les différentes stratégies de commande des quadrotors

Le système de commande est un algorithme mathématique qui calcule de quelle façon il faut agir sur le quadrotor afin de maintenir la mesure égale à la consigne. Malgré son principe

général relativement simple, la conception d'un tel système nécessite une attention particulière, compte tenu de la dynamique complexe et sous actionnée du quadrotor. La littérature sur ce sujet est vaste, très variée et peut mener à une meilleure compréhension sur les performances des contrôles proposés. Cette partie est consacrée à quelques méthodes de contrôles linéaires et non linéaires appliqués au quadrotor.

1.7.1 La littérature concernant les commandes linéaires

Les contrôleurs linéaires sont appliqués à un modèle linéarisé du quadrotor, la linéarisation se fait autour d'un point fonctionnement en utilisant la méthode de la jacobéenne, parmi les commandes employées on cite :

La commande classique Proportionnel Intégrateur Dérivateur (PID) qui a été testée avec succès sur plusieurs plateformes expérimentales (Hoffmann et al., 2007; Yang et al., 2010), il est capable de maintenir l'équilibre et la stabilité de quadrotor à condition de vol stationnaire sans charge et avec charge. Un terme dérivé, ajouté à cette commande, conduit à une stabilité exponentielle et offre une performance en terme de rejet de perturbation (Tayebi et McGilvray, 2004). Une commande linéaire quadratique (LQR) assure le suivi de trajectoire désiré du système avec le minimum de consommation de l'énergie et fonctionne bien dans des conditions bruyantes (Jafari et al., 2010) mais son temps de réponse est assez lent (Joyo et al., 2013), alors que la commande H_∞ présente un temps de réponse des angles de roulis et de lacet rapide, mais avec des petits dépassements (Prempain et Postlethwaite, 2005). Toutefois ces commandes sont faciles à appliquer, car elles possèdent une simple architecture, mais leur performance n'est garantie que sur un point de fonctionnement particulier. Des algorithmes de contrôle spécifiques doivent être développés pour élargir le domaine d'opérationnalité des drones.

1.7.2 La littérature concernant les commandes non linéaires

Les contrôleurs non linéaires sont plus performants, car ils sont appliqués à un modèle du quadrotor qui présente toutes les non linéarités importantes de la dynamique. Les commandes les plus utilisées sont maintenant présentées :

1.7.2.1 La linéarisation entrée sortie

La linéarisation entrée sortie a fait sa première apparition dans les années 1980. Cette méthode consiste à trouver une relation linéaire entre la sortie du système et sa nouvelle entrée. Pour exprimer implicitement cette relation, il suffit de dériver la sortie choisie par rapport au temps jusqu'à l'apparition de l'entrée de commande.

Le contrôle par linéarisation d'entrée sortie s'applique sur des matrices inversibles, une extension de dynamique de système faite dans (Saif, 2009) pour manipuler des matrices non inversibles sans avoir le problème de la dynamique interne. (Kim et Oh, 1999) suggère une autre solution appelée inverse généralisée basée sur la technique des moindres carrés qui peut être utilisée pour faire face à des matrices non inversibles, dont le nombre d'entrées, et de sortie de système sont différents. Plusieurs combinaisons faites entre cette méthode et d'autres types de contrôleurs, afin de stabiliser la dynamique non linéaire du quadrotor en vol (Fang et al., 2008; Lee et al., 2009; Mokhtari et al., 2005). Un observateur par mode glissant d'ordre supérieur surmonte facilement les non-linéarités par une estimation interne des perturbations externes (Benallegue et al., 2006). Dans (Voos, 2009) le contrôle global du quadrotor est séparé en deux boucles, une pour le contrôle d'attitude et l'autre pour la vitesse. Dans (Mistler et al., 2001) cette commande s'applique pour convertir le système en boucle fermée en un système linéaire, contrôlable. Ce qui permet d'améliorer la stabilité et la robustesse du modèle contre le vent, la turbulence et les incertitudes paramétriques.

1.7.2.2 La commande par backstepping

La technique de contrôle par backstepping a été développée par (Kanellakopoulos et al., 1991) au début des années 1990. Cette technique est parmi les méthodes de commande non linéaire qui se base sur la théorie du Lyapunov pour ce qui est étude de stabilité. L'application de cette théorie est souvent entravée par des difficultés de trouver la fonction de Lyapunov appropriée. Cependant l'aspect récursif de la commande backstepping offre un algorithme systématique qui facilite cette tâche. Cette commande a été appliquée pour une classe générale de système (Guessas, 2012; Nganga-Kouya, 2003). Elle consiste à organiser le système principal en des sous-systèmes en cascade, pour lesquels des lois de commande virtuelles sont conçues en plusieurs étapes dans un ordre décroissant jusqu'à l'obtention de la loi de commande qui stabilise le système global.

Des nombreux chercheurs ont développé des contrôleurs backstepping pour les quadrotors. Dans (Mian et Daobo, 2008), cette technique est développée pour le contrôle de sous système d'attitude seulement. Dans (Das et al., 2009; Raffo et al., 2010) , le contrôle se fait en deux boucles, tel que le contrôle d'altitude se fait en boucle externe et le contrôle de rotation en boucle interne. Alors que dans (Madani et Benallegue, 2006), cette commande permet de contrôler un modèle complet présenté en trois sous-système interconnectés : un sous-système sous actionné reliant les positions x, y , le roulis et la tangage, un sous-système entièrement actionné pour la position z et l'angle lacet et un dernier sous système qui représente la dynamique des forces des hélices. Dans (Bouabdallah et Siegwart, 2005) cette commande a été implémentée avec une action intégrale pour permettre d'éliminer l'erreur en régime permanent tout en garantissant une stabilité asymptotique (Mian et Daobo, 2008). Dans (Hicham, 2012), la stratégie adoptée préserve la stabilité et le maintien des performances d'un quadrotor en présence d'un défaut de fonctionnement des actionneurs. Cependant la formulation de la méthode backstepping nécessite un modèle exact. Par conséquent, cette technique ne serait plus performante lorsque des incertitudes sont présentes dans le modèle. Pour résoudre ce problème, des commandes backstepping adaptatives ont été testées avec succès (Zongyu, 2013) permettant une estimation en ligne des paramètres de

contrôleur pour s'adapter aux changements dus à des incertitudes paramétriques ou à des perturbations externes. Il y a d'autres méthodes d'estimation de paramètres tel que l'usage d'un filtre de Kalman pour l'estimation des états inconnus de système (Brito Domingues, 2009).

1.7.2.3 La commande par mode glissant

La commande par mode glissant est une autre technique avancée de contrôle non linéaire. Son idée de base est d'amener les états de système dans une région bien sélectionnée, puis de concevoir la fonction de Lyapunov adéquate permettant de maintenir le système dans cette région. Le mode glissant est une approche jugée robuste aux perturbations externes et aux incertitudes paramétriques. Cette propriété a été démontrée par plusieurs chercheurs tels que (Benallegue et al., 2008; Bouadi et Tadjine, 2007; Luque-Vega et al., 2012) par l'usage des estimateurs et des observateurs permettant de compenser facilement les non linéarités provoquées par ces phénomènes externes tels que le vent et le bruit. Dans (Das et al., 2011), cette commande utilise une linéarisation d'entrée sortie qui semble utile face à des problèmes de sous actionnement, multi entrées sorties et le fort couplage. Cependant la présence de phénomène de broutement «chattering» engendre des effets indésirables sur le comportement du système. Une commande par mode glissant adaptative est utilisée pour faire l'adaptation dynamique de gain de contrôle afin d'établir le minimum de discontinuité permettant de produire le minimum effet de chattering (Bandyopadhyay et al., 2013). Autres techniques ont été alors proposées pour réduire ou éliminer ce phénomène, tel qu'une fonction de type saturation (la proposition de Slotine) ou une fonction de lissage (Hicham, 2012). D'autre part le contrôleur par mode glissant assure une convergence asymptotique du système quadrotor même en présence d'un défaut dans l'un des moteurs (Niu et Wang, 2009). On note aussi que la qualité d'alimentation et sa régulation sont très importantes pour les drones, car si l'alimentation n'est pas stable, le véhicule serait mis en accident, (Chatchanayuenyong, 2008) ont montré à l'aide d'une commande par mode glissant la capacité de faire le réglage de la tension. Finalement cette approche est également

performante pour le contrôle d'un groupe de véhicule en présence des incertitudes et des perturbations (Fahimi, 2006).

1.7.2.4 La commande hiérarchique

La commande hiérarchique est connue en aéronautique par la commande de guidage et pilotage. Elle consiste à séparer la commande en position de la commande en rotation et en synthétisant des lois de commande séparées pour chacune d'entre elle. En effet, une première commande de guidage permet de déterminer la poussée verticale et l'orientation nécessaire à la stabilisation de la dynamique de position. Cette orientation est considérée par la suite comme une consigne à suivre par une seconde loi de pilotage pour stabiliser la dynamique de rotation. Le grand avantage de cette commande est qu'elle possède une structure modulaire, tel qu'il est possible de tester une variété de techniques de contrôle. Dans (Guenard et al., 2005; Hamel et al., 2002), une commande backstepping a été appliquée sur l'ensemble de systèmes. Par contre dans d'autres travaux le contrôle de position est basé sur une commande par retour d'état partiel (Bertrand et al., 2011), ou par une commande par retour d'état avec saturation imbriquée tel que dans (Roza et Maggiore, 2012; 2014). Il est intéressant de noter que cette stratégie de commande est très adaptée au drone miniature, car ce type de drones nécessite l'usage d'un nombre minimum de capteurs et le contrôleur hiérarchique lui offre cette option avec la possibilité d'ajouter des filtres ou des observateurs pour l'estimation des paramètres inconnus pour chacun des sous-systèmes de position ou d'attitude, et en traitant par la suite la stabilité en boucle fermée de chacun de ces sous-systèmes.(Abdessameud et Tayebi, 2010; Sylvain et al., 2009) . Nous choisissons ce type de contrôleur dans ce mémoire pour la commande du quadrotor.

1.8 Conclusion

Ce chapitre présente un inventaire sur les différentes techniques existantes dans le domaine des drones à voilure tournante. Il ne se veut pas exhaustif, mais il illustre la diversité des technologies de capteurs, les méthodes d'estimation de la vitesse linéaire et les stratégies de commande pouvant être utilisées pour les quadrotors. Ce chapitre facilite la compréhension

des éléments fondamentaux de la chaîne de navigation d'un appareil autonome, de plus il présente les imitations et les enjeux inhérents dans la phase de modélisation et de commande des quadrotors.

Le prochain chapitre est consacré à la conception d'un modèle mathématique décrivant le comportement dynamique et permettant l'élaboration du l'algorithme de commande.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DYNAMIQUE DU QUADROTOR

2.1 Introduction

La conception du contrôleur de vol se base essentiellement sur la modélisation, l'analyse et la connaissance précise des phénomènes intervenants sur le système. Le chapitre en cours nous guide à travers les équations dynamiques et cinématiques ainsi que les équations des moteurs à comprendre le comportement de système, et élaborer un modèle dynamique complet. La stratégie adoptée pour la modélisation est basée sur la méthode de Newton-Euler avec les hypothèses de travail suivantes :

- La structure du quadrotor est supposée rigide et symétrique;
- Le centre de gravité du quadrotor coïncide avec l'origine du repère liée au corps;
- les hélices sont supposées rigides.

2.2 Le système d'axes

Avant d'entrer dans les équations de la cinématique et la dynamique du quadrotor, il est nécessaire de préciser les systèmes de coordonnées adoptées ainsi que la façon dont les transformations entre ces différents systèmes sont effectuées. L'utilisation de deux systèmes de coordonnées aide à comprendre le mouvement du quadrotor (voir figure 2.1):

- Un système d'axes inertiel lié à la terre: $F_i = \{O_i, X, Y, Z\}$, dans lequel l'axe X est dirigé vers le nord, l'axe Y vers l'est, et l'axe Z dirigé vers le centre de la Terre;
- Un système d'axes mobile lié au châssis du quadrotor noté: $F_b = \{O_b, x_b, y_b, z_b\}$, qui a pour origine le centre du gravité du drone, ses axes sont alignés avec les axes du référentiel inertiel s'il n'y a pas un mouvement de rotation.

La transformation qui permet de passer du référentiel F_b au référentiel F_i , est définie par une matrice de transformation homogène notée T qui contient la rotation et la translation, cette transformation fait partie d'une famille de matrice nommée **groupe spécial euclidien**. (Rosito et Giribet, 2013).

$$T = \begin{bmatrix} R & \eta \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Où R est la matrice de rotation du repère F_b par rapport au repère F_i , et η est la translation de l'origine du repère F_b par rapport à l'origine de repère F_i .

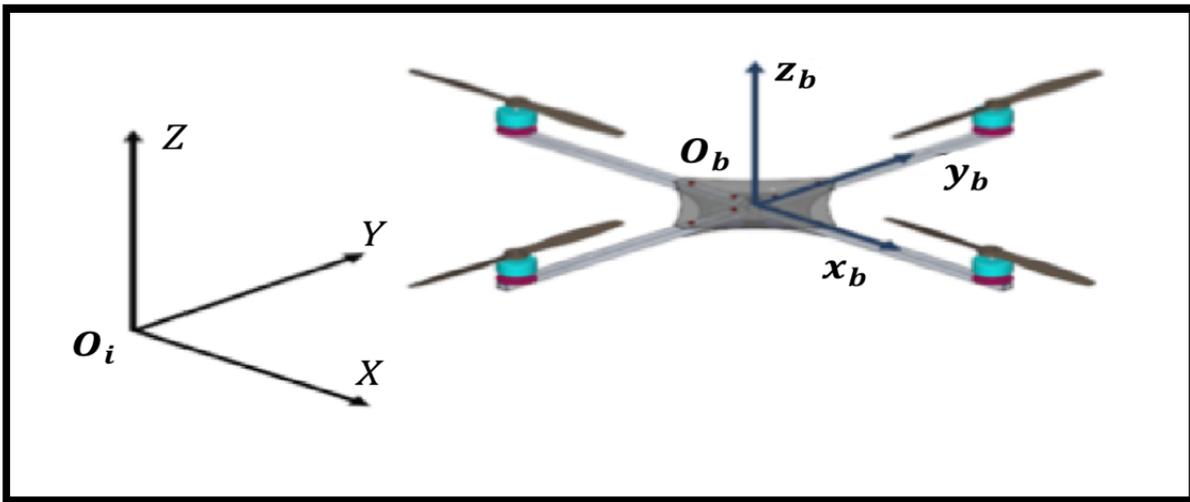


Figure 2.1 Le système de coordonnées inertiel et le repère lié au quadrotor

2.3 Définition des vecteurs de position et de moment

Les vecteurs de position et de vitesse linéaire exprimés dans le repère fixe lié à la Terre sont respectivement identifiés par : $\eta = [x, y, z]^T$ et $\dot{\eta} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$.

En prenant les mêmes notations du domaine de l'aérospatiale, la vitesse linéaire exprimée dans le référentiel mobile attaché au quadrotor est noté par : $v^B = [u, v, w]^T$.

Les moments appliqués au centre de gravité du quadrotor exprimés dans le référentiel lié au quadrotor sont notés par ce vecteur $\tau_a = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$, tel que le sens positif des moments est déterminé à partir de la règle du sens trigonométrique.

2.4 La représentation de la matrice de rotation

La rotation du quadrotor dans l'espace peut être décrite par plusieurs méthodes: les angles d'Euler, quaternion, Tait-Bryan, etc. (Colorado, 2009). La méthode la plus utilisée en génie aérospatial est celle des angles d'Euler qui utilisent le système de coordonnées cartésien $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ pour désigner la rotation dans l'espace. Ils sont définis alors comme suit :

- l'angle de roulis ϕ représente une rotation autour de l'axe \vec{x} (avec $-\pi \leq \phi \leq \pi$).
- l'angle de tangage θ représente une rotation autour de l'axe \vec{y} (avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$).
- l'angle de lacet ψ représente une rotation autour de l'axe \vec{z} (avec $-\pi \leq \psi \leq \pi$).

La figure 2.2 représente chacun de ces angles de rotation.

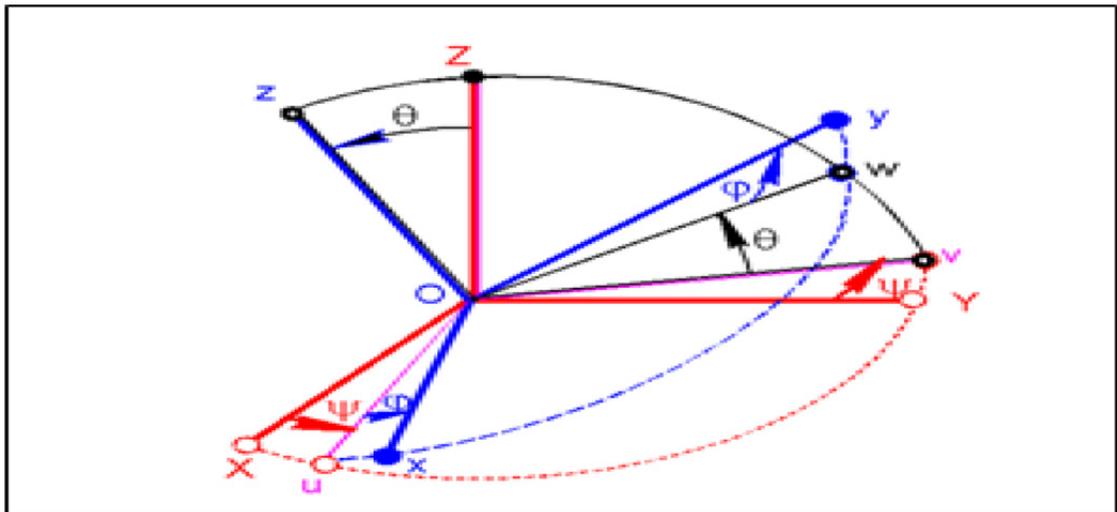


Figure 2.2 Définition des axes
Tirée de (Bouabdallah, 2007)

La matrice d'orientation R reliant les deux repères F_b et F_i , est déterminée à partir de trois rotations consécutives autour de trois axes particuliers. Il y a douze séquences possibles que l'on peut utiliser cependant. Dans ce travail, on met l'accent sur la séquence Z-Y-X comme la montre la figure 2.3.

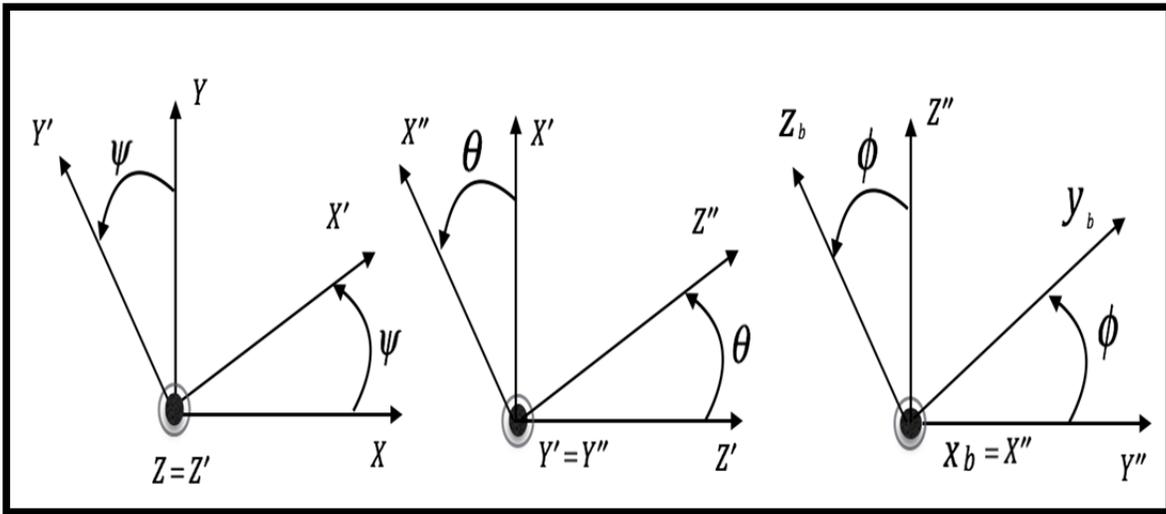


Figure 2.3 Rotations successives définissant les pseudos angles d'Euler

La matrice d'orientation s'écrit alors comme :

$$R = Rot_z(\psi) \times Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi) \quad (2.1)$$

Où :

$Rot_z(\psi)$: une rotation de repère $\{X, Y, Z\}$ autour de l'axe Z d'un angle de lacet ψ vers le repère $\{X', Y', Z' = Z\}$. Cette rotation est représentée par la matrice suivante :

$$Rot_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$Rot_y(\theta)$: une rotation de repère $\{X',Y',Z'\}$ autour de l'axe Y' d'un angle de tangage θ vers le repère $\{X'',Y''=Y',Z''\}$. Cette rotation est représentée par la matrice suivante:

$$Rot_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$Rot_x(\phi)$: une rotation de repère $\{X'',Y'',Z''\}$ autour de l'axe X'' d'un angle de roulis ϕ vers le repère $\{x_b = X'', y_b, z_b\}$. Cette rotation est représentée par la matrice suivante:

$$Rot_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On obtient donc la matrice de rotation complète appelée « Direct Cosine Matrix » (Klump, 1976):

$$R = {}^b R = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Cette matrice représente une rotation dans l'espace à 3 dimensions avec un déterminant égal à 1, elle appartient aux familles des matrices nommées '**groupe spécial orthogonal**'. (Chingozha, 2014). Elle possède donc les propriétés suivantes :

1. l'orthogonalité : $R^{-1} = R^T$.
2. $\det(R) = 1$.
3. chaque ligne ou colonne de R est un vecteur unitaire et par conséquent R est orthonormale.

2.5 Les vitesses angulaires

Le vecteur de vitesse angulaire présente la variation du déplacement angulaire de F_b par rapport à F_i pendant un court intervalle de temps Δt . Cette variation est décrite par la matrice de rotation exprimant l'orientation de F_b par rapport à F_i notée par :

$${}^i_b R(t + \Delta t) = {}^i R(t)^{\Delta t} \cdot {}^i_b R(t) \cdot {}^b R(t)^{\Delta t} \quad (2.6)$$

En se basant sur la définition générale de la dérivée, nous pourrions écrire :

$${}^i_b \dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^i_b R(t + \Delta t) - {}^i_b R(t)}{\Delta t} \quad (2.7)$$

Étant donné qu'il n'y a pas de rotation dans le repère inertiel (Stepaniak, 2008), et en appliquant l'approximation des petits angles $\Delta\Theta = [\Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\psi]$ pour un intervalle infinitésimal de temps. On peut récrire l'équation (2.6) comme suit:

$${}^i_b R(t + \Delta t) = {}^i_b R(t)^{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi & \Delta\theta \\ \Delta\psi & 1 & -\Delta\phi \\ -\Delta\theta & \Delta\phi & 1 \end{bmatrix} = {}^i_b R(t)^{\Delta t} S(\Delta\Theta + I_3) \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.8) dans (2.7), on obtient :

$${}^i_b \dot{R} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^i_b R(t)(S(\Delta\Theta + I_3) - {}^i_b R(t))}{\Delta t} = {}^i_b R(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(\Delta\Theta)}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Donc on peut finalement extraire l'expression des vitesses angulaires :

$${}^i_b \dot{R} = {}^i_b R(t) \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Cette expression peut être réécrite sous cette forme générale :

$$\dot{R} = R S(\Omega) \quad (2.11)$$

Tel que $S(\Omega)$ est une matrice antisymétrique formée par les vitesses angulaires : p, q et r qui représentent la rotation instantanée entre F_b et F_i , et exprimés dans F_b .

2.6 Le modèle cinématique du quadrotor

Après avoir défini la relation entre la vitesse angulaire et la dérivée de la matrice de rotation. Il est intéressant de définir le modèle cinématique complet décrivant les vitesses linéaires et les vitesses angulaires dans le but de décrire le comportement du quadrotor dans l'espace sans tenir compte des forces et des couples qui agissent sur lui. Essentiellement, deux types de mouvements peuvent être décrits: mouvement de translation et un mouvement de rotation.

2.6.1 La cinématique de translation

À l'aide des définitions de la section (2.2) (2.3) (2.4) et (2.5), nous pouvons écrire l'équation relative à la transformation des vitesses linéaires $v^B = [u, v, w]^T$ exprimée dans le repère F_b en des vitesses linéaires $v^I = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ exprimées dans le repère inertiel F_i :

$$v^I = \dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.6.2 La cinématique de rotation

L'objectif de cette partie est de présenter l'ensemble des équations différentielles du premier ordre qui décrivent l'évolution dans le temps des paramètres d'attitude. Comme déjà

démontré dans la définition de la matrice de rotation que l'orientation de F_b par rapport à F_i est décrite par les angles d'Euler, il est important maintenant de connaître la relation entre la variation de ces angles d'Euler et les vitesses angulaires $\Omega = [p \ q \ r]$ mesurée avec un gyroscope (Colorado, 2009). Puisque, tel que nous verrons dans le chapitre 3 concernant la synthèse du contrôleur, l'état qui nous intéresse est la vitesse angulaire et n'est pas l'angle d'orientation ou sa variation dans le temps.

Cette relation cinématique est alors obtenue à partir d'une séquence de trois rotations :

$$R = Rot_z(\psi) \times Rot_y(\theta) \times Rot_x(\phi) \quad (2.13)$$

Tel que $Rot_x(\phi)$, $Rot_y(\theta)$ et $Rot_z(\psi)$ sont trois matrices de rotation définies dans les relations (2.2), (2.3) et (2.4).

Il peut être alors défini de cette façon (Lopes, 2011) :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + Rot_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + Rot_x(\phi) Rot_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Étant donné que les vitesses angulaires $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ sont des petites valeurs, la matrice qui relie les vitesses angulaires (p, q, r) et la dérivée temporelle des angles d'Euler peuvent s'écrire comme :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

L'inverse de l'équation (2.15) peut être exprimé de cette façon :

$$\dot{\Theta} = K(\Theta) \Omega \quad (2.16)$$

Tel que :

$$K(\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)tg(\theta) & \cos(\phi)tg(\theta) \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Il est important de noter que cette matrice présente une singularité en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ car les angles de roulis et de lacet deviennent confondus, ce problème se présente aussi dans la matrice (2.5), il est généralement connu par : le blocage de cadran (Schmidt, 2011), ce qui fait que tous les axes sont alignés et donc un degré de liberté sera perdu. Alors cette configuration limite le quadrotor à effectuer des trajectoires agressives, on peut noter que les quaternions représentent une rotation par un vecteur à quatre éléments, cette méthode ne possède pas ce type de singularité.

2.7 Analyse des forces et des moments agissants sur le quadrotor

Nous présentons dans cette partie une description des forces et des couples agissant sur le quadrotor pour qu'on puisse les appliquer par la suite dans le modèle dynamique. Les forces sont la poussée générée par chaque rotor et la gravitation terrestre. Les moments comprennent les effets gyroscopiques, le moment de traînée ainsi que les couples générés afin de réaliser les mouvements de roulis, tangage et lacet.

L'analyse des équations des sections suivantes nécessite la connaissance de plusieurs notions d'aérodynamique et de dynamique de fluides qui dépassent le cadre du présent mémoire.

Nous donnons une vulgarisation de ces principes ainsi que les résultats utiles à notre modélisation. Pour de plus amples informations, on peut se référer à (Bouabdallah, 2007) et (Pounds et al., 2004).

2.7.1 Les Forces

2.7.1.1 La force de gravitation

Cette force est due au champ gravitationnel terrestre, il est toujours perpendiculaire à la surface du sol, elle est décrite dans le référentiel terrestre par ce vecteur :

$$F_g = m g e_z \quad (2.18)$$

où g est l'accélération gravitationnelle approximée à 9.81 m/s^2 et $e_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ est un vecteur unitaire.

2.7.1.2 La force de poussée

C'est la force provoquée par la rotation des moteurs et des hélices permettant de soulever en altitude le poids du quadrotor, elle agit perpendiculairement sur le plan du rotor le long de l'axe Z . Sa valeur est déterminée à partir de la théorie du moment (Bouabdallah, 2007):

$$T = C_T \rho A (\omega_i)^2 \quad (2.19)$$

où C_T est un paramètre lié à la constitution mécanique des hélices, ρ est la densité de l'air [1.225 kg/m^3] et $A = \pi R^2 [\text{m}^2]$ est la surface balayée par le rotor. En général ces paramètres peuvent être regroupés en une seule constante (Chingozha, 2014), ce qui fait que cette équation peut être directement proportionnelle au carré de la vitesse de rotation des moteurs :

$$T = b (\omega_i)^2 \quad (2.20)$$

2.7.2 Les moments

2.7.2.1 Le moment de traînée

La rotation des hélices pousse l'air dans une direction particulière, dans notre cas vers le bas produisant ainsi la force de poussée, cependant puisque les hélices sont toujours affectées par la réaction de l'écoulement d'air autour de l'engin, il en résulte une force qui s'oppose au déplacement de véhicule nommée le moment de traînée. En supposant qu'il n'y a aucun effet de torsion sur le rotor tel que dans (Pounds et al., 2004), le couple de traînée peut être modélisé comme :

$$M_a = C_D \rho A r^4 (\omega_i)^2 \quad (2.21)$$

Où C_D est un paramètre sans unité qui est lié à la caractéristique mécanique des hélices, ρ [kg/m^3] est la densité de l'air, A [m^2] est l'aire du disque généré par l'hélice et r [m] est le rayon de l'hélice. En utilisant les mêmes hypothèses de la section précédente, on obtient pour chaque hélice i le moment de traînée:

$$M_a = d (\omega_i)^2 \quad (2.22)$$

Tel que d est le coefficient de traînée. Par définition, cette équation produit un moment positif puisque les rotations d'hélice sont dans le sens antihoraire par rapport au repère lié au quadrotor.

2.7.2.2 Les couples liés au mouvement du quadrotor

Le couple de roulis

Le mouvement de roulis décrit dans la figure 2.4 se produit lorsque le quadrotor effectue une rotation autour de l'axe X . Cette manœuvre est réalisée en modifiant la vitesse angulaire du moteur 2 et du moteur 4, tout en gardant la même vitesse aux moteurs 1 et 3. Ce qui fait

que le couple de roulis peut être obtenu en augmentant la poussée de moteur 4 et en diminuant la poussée de moteur 2, il peut s'écrire donc par cette équation:

$$\tau_{\phi} = l [T_4 - T_2] \quad (2.23)$$

où l est la distance entre le centre de gravité du quadrotor et le centre de chaque moteur.

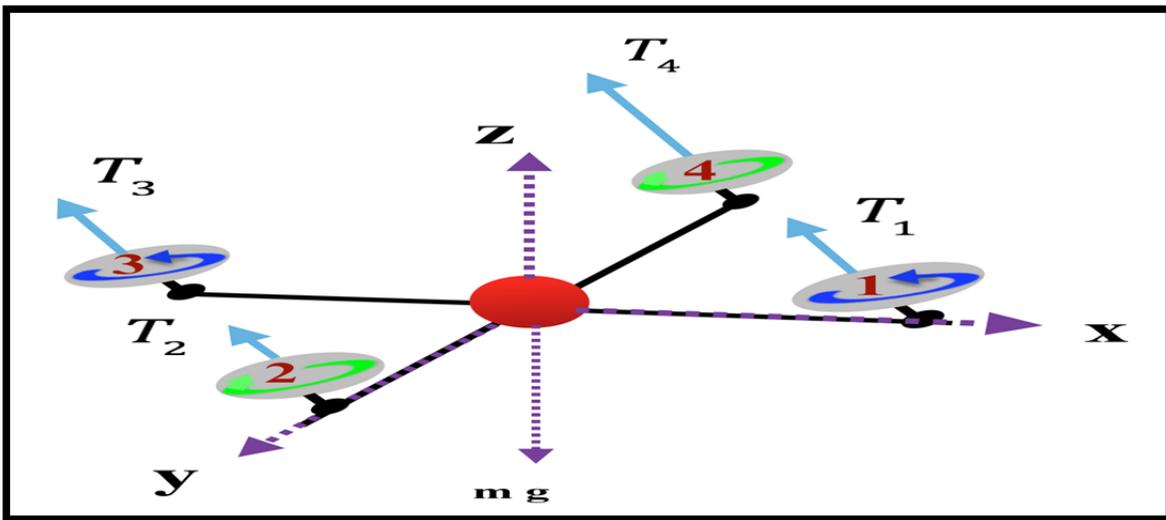


Figure 2.4 Illustration du mouvement de roulis

Le couple de tangage

Le mouvement de tangage illustré dans la figure 2.5 se produit lorsque le quadrotor effectue une rotation autour de l'axe y . Cette manœuvre est réalisée en modifiant la vitesse angulaire du moteur 1 et du moteur 3, tout en maintenant la même vitesse aux moteurs 2 et 4. Ce qui fait que le couple de tangage peut être obtenu en augmentant la poussée du moteur 3 et en diminuant la poussée du moteur 1, il s'écrit alors de cette façon :

$$\tau_{\theta} = l [T_3 - T_1] \quad (2.24)$$

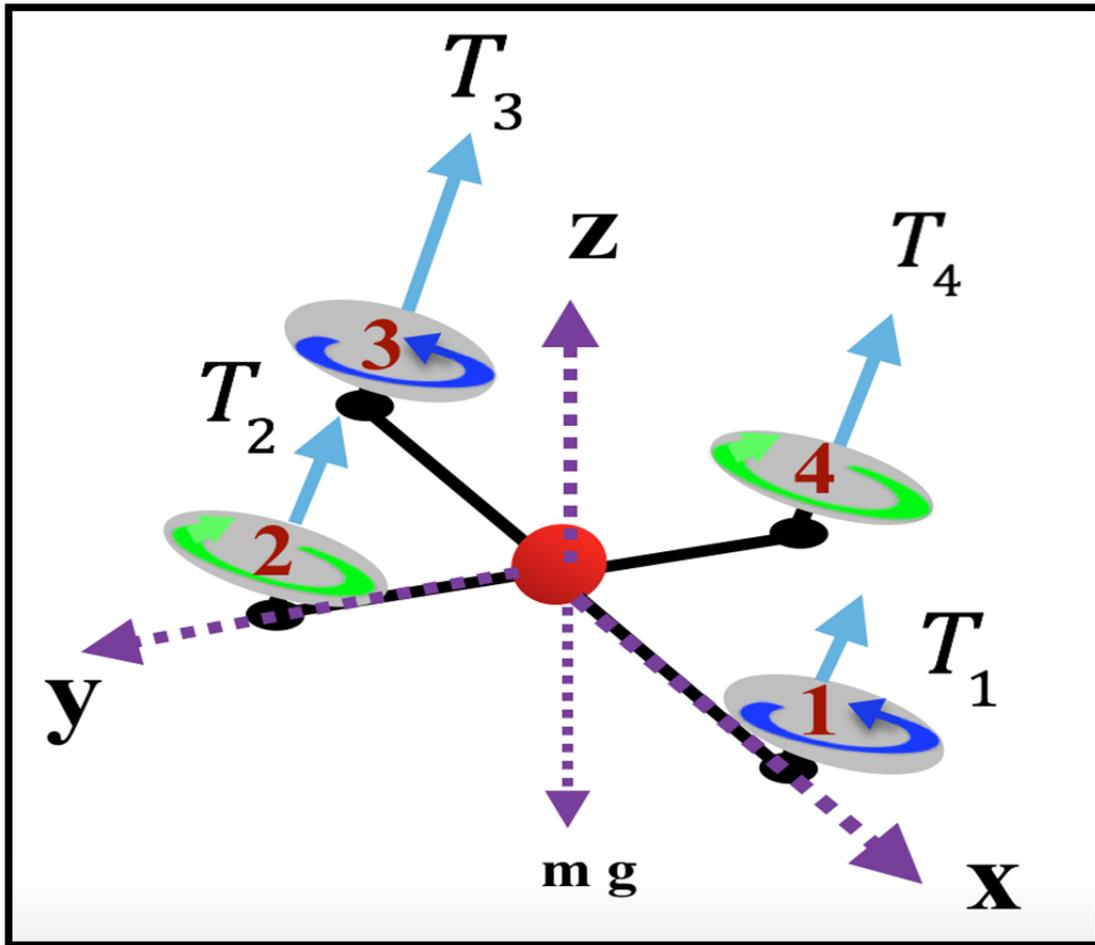


Figure 2.5 Illustration du mouvement de tangage

Le couple de lacet

Le mouvement de lacet peut être effectué en augmentant (ou en diminuant) la vitesse de rotation des paires de moteurs (2) et (4) tournant dans le sens horaire par rapport aux deux autres moteurs tournant dans le sens anti horaire (1) et (3), comme montre la figure 2.6 ce couple de lacet produit une rotation autour de l'axe Z, il est décrit par cette équation :

$$\tau_{\psi} = \tau_{M1} - \tau_{M2} + \tau_{M3} - \tau_{M4} \quad (2.25)$$

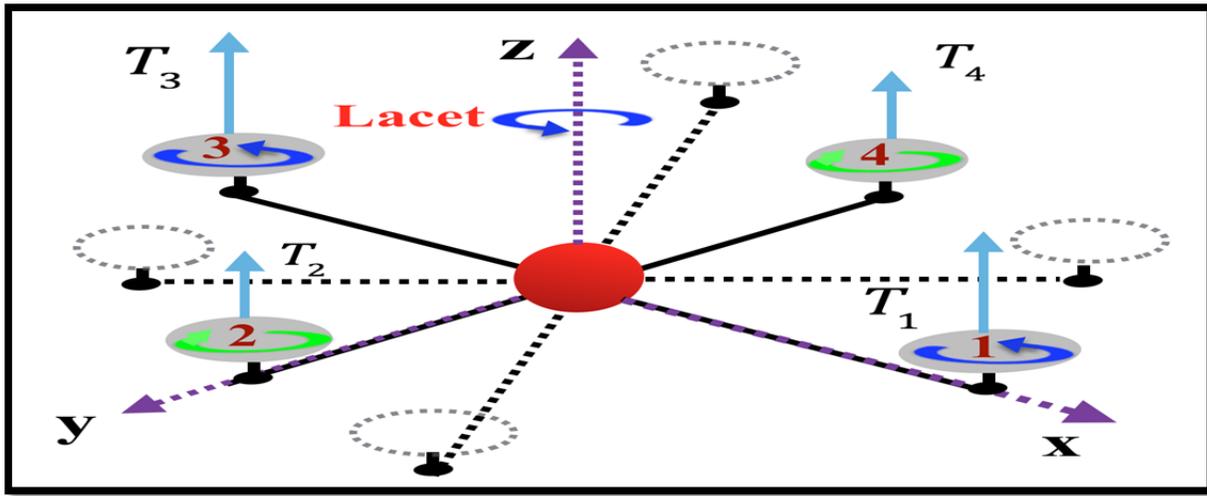


Figure 2.6 Illustration du mouvement de lacet

On peut noter que τ_{Mi} est le couple de réaction de chaque moteur qui est considéré égal au moment de traînée dans le cas de vol stationnaire (Carrillo et al., 2013). Nous pouvons ainsi introduire l'expression de la force de poussée (2.20) dans les équations de couples de roulis et de tangage (2.23) et (2.24) et l'expression du moment de traînée (2.22) dans l'équation du couple de lacet (2.25), afin d'obtenir une relation explicite entre les couples qui décrivent le mouvement du quadrotor et les vitesses de rotation des moteurs ayant cette forme :

$$\begin{bmatrix} \tau_{\phi} \\ \tau_{\theta} \\ \tau_{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bl(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ bl(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ d(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

2.7.2.3 L'effet gyroscopique

Les effets gyroscopiques c'est un couple qui résiste aux changements d'inclinaison des actionneurs et donc à l'orientation d'objet. Pour les quadrotors, le fait de forcer les hélices à s'orienter latéralement dans des directions opposées permet de créer ces moments gyroscopiques qui sont perpendiculaires à la rotation et l'inclinaison des axes. En effet c'est le principe de conservation du moment angulaire qui tend à s'opposer à ce mouvement.

Ce moment s'applique alors sur le rotor et sur les hélices, il peut être décrit par l'équation suivante (Segui-Gasco et al., 2014):

$$G_a = \dot{\omega} J_r + \Omega \Lambda J_r \omega \quad (2.27)$$

Dans notre cas, on néglige la force due au mouvement de rotor connue par la force anti couple notée : $\dot{\omega} J_r$ (Bouabdallah, 2007) , et on considère seulement le moment des hélices, ainsi on considère que l'axe de rotation des moteurs est parallèle à l'axe vertical z . Tous les composants pour les autres axes sont nuls, par conséquent le moment gyroscopique aura l'expression suivante :

$$G_a = \sum_1^4 \Omega \Lambda J_r [0 \ 0 \ (-1)^{i+1} \ \omega_g]^T = J_r [p \ q \ r]^T \omega_g \quad (2.28)$$

Tel que J_r représente l'inertie des rotors, et ω_g est la vitesse résiduelle des moteurs défini par :

$$\omega_g = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \quad (2.29)$$

- Il est intéressant de mentionner dans cette partie qu'il y a d'autres effets aérodynamiques pouvant affecter le mouvement de quadrotor citant par exemple : l'effet de sol, l'effet de battement des hélices ou le frottement de l'air, cependant dans le cadre de ce mémoire, ces paramètres ne seront pas modélisés, car ils peuvent être négligés à faible vitesse (Bouabdallah, 2007). Le lecteur peut consulter la littérature pour plus de détails sur ces effets (Martini, 2008).

2.8 La dynamique de quadrotor

La dynamique est une discipline de la mécanique classique, qui étudie les effets des forces et des couples sur le mouvement d'un corps. Il est typiquement convenu d'assimiler la dynamique de quadrotor à celle d'un corps rigide. Ce qui revient à dire que toutes les particules constituant un objet indéformable restent inchangées lorsque celui-ci subit une force. En s'appuyant sur cette hypothèse, il est possible de considérer le quadrotor comme étant un point matériel où toute la masse est concentrée et qui représente le point d'application de toutes les forces et les moments. Nous modélisons ici le quadrotor comme un corps rigide à six degrés de liberté, en se basant sur la formulation de Newton-Euler.

Pour décrire le mouvement de translation et de rotation du quadrotor, on fait appel aux équations relatives à la vitesse linéaire et angulaire du quadrotor.

$$\dot{\eta} = R v^B \quad (2.30)$$

$$\dot{R} = R S(\Omega) \quad (2.31)$$

L'équation (2.30) présente l'expression de la cinématique de translation, alors que l'équation (2.31) émane de la définition de la vitesse angulaire.

2.8.1 La dynamique de translation

Nous allons d'abord exprimer la dynamique de translation, nous utilisons ainsi la deuxième loi de mouvement de Newton tel que l'accélération est proportionnelle à la somme de toutes les forces extérieures appliquées au centre de gravité. Ce principe n'est applicable que dans le repère inertiel, donc l'expression de la variation de la quantité de mouvement est donnée par :

$$m \frac{dv^I}{dt} = \sum (F_{ext})_I \quad (2.32)$$

En exploitant les propriétés de la matrice de transformation R , nous pouvons exprimer facilement les forces extérieures dans le repère du quadrotor F_b . On applique donc cette matrice et on remplace (2.30) dans (2.32) ce qui donne :

$$R^T \sum (F_{ext})_I = \sum (F_{ext})_B = R^T [m \frac{d}{dt} (R v^B)] = R^T [m (\dot{R} v^B + R \dot{v}^B)] \quad (2.33)$$

Alors on insère (2.31) dans (2.33):

$$\dot{v}^B = -S(\Omega) v^B + \frac{1}{m} \sum (F_{ext})_B \quad (2.34)$$

En s'appuyant sur les définitions de la section précédente, nous pouvons maintenant introduire la somme des forces extérieures exprimée dans F_b :

$$\sum (F_{ext})_B = T e_z - m g R^T e_z \quad (2.35)$$

où $e_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ est un vecteur unitaire et T est la force de poussée totale tel que :

$$T = b [\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2] \quad (2.36)$$

En introduisant l'expression (2.35) dans (2.34), on obtient l'équation de la dynamique de position exprimée dans le référentiel mobile (au centre de gravité du quadrotor) :

$$\dot{v}^B = -S(\Omega) v^B + \frac{1}{m} (T e_z - m g R^T e_z) \quad (2.37)$$

Cependant, les capteurs utilisés pour la localisation du quadrotor dans l'espace nécessitent toujours une connaissance de la position par rapport à un repère fixe (un repère inertiel), donc il est intéressant d'exprimer la vitesse linéaire dans le repère F_i , pour cette fin on peut simplement intervenir les équations (2.37) et (2.31) dans la dérivée de l'équation (2.30), ce

qui amène à cette forme:

$$\dot{v}^I = \dot{R} v^B + R \dot{v}^B = \frac{1}{m} R e_z T - g e_z \quad (2.38)$$

2.8.2 La dynamique de rotation

Contrairement à la vitesse linéaire, telle que la masse représente la résistance au mouvement d'accélération, les mouvements rotatifs introduisent la notion d'inertie. Dans le cas d'un mouvement rotatif dans \mathbb{R}^3 , on définit un tenseur d'inertie, noté I et représenté par une matrice antisymétrique de dimension 3x3, définie positive :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Chaque élément du tenseur d'inertie est calculé en fonction de la distribution de masse de l'objet :

$$I = \begin{bmatrix} \iiint_{vol} (y^2 + z^2) & -\iiint_{vol} xy \, dm & -\iiint_{vol} xz \, dm \\ -\iiint_{vol} yx \, dm & \iiint_{vol} (x^2 + z^2) & -\iiint_{vol} yz \, dm \\ -\iiint_{vol} zx \, dm & -\iiint_{vol} zy \, dm & \iiint_{vol} (y^2 + x^2) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

En se basant sur l'hypothèse énoncée dès le départ que le quadrotor est considéré comme un corps rigide. On peut dire que la distribution de la masse dans le référentiel F_b reste constante au cours de temps. Donc l'expression du tenseur d'inertie peut être donné par (M.Murray et al., 1994):

$$I^I = R I R^T \quad (2.41)$$

La dynamique du mouvement rotatif est définie alors en appliquant le théorème des moments dans le repère inertiel:

$$\frac{d}{dt}(I^I \Omega^I) = \sum (\tau_{ext})_I \quad (2.42)$$

où τ_{ext} est l'ensemble des couples appliqués au solide ramené au centre de gravité. L'introduction de l'expression du tenseur d'inertie (2.41) dans (2.42) donne :

$$\frac{d}{dt}(I^I \Omega^I) = \frac{d}{dt}(RI\Omega) = \dot{R}I\Omega + RI\dot{\Omega} \quad (2.43)$$

Ainsi, en remplaçant (2.31) dans (2.43) on obtient :

$$\sum (\tau_{ext})_I = R S(\Omega)I \Omega + RI\dot{\Omega} \quad (2.44)$$

Nous pouvons maintenant exprimer aisément la dynamique du quadrotor dans le repère F_b en multipliant tout d'abord l'équation (2.44) par la matrice de rotation R^T , puis en ajoutant les expressions des couples extérieurs définis dans la section précédente.

$$\sum (\tau_{ext})_B = R^T (R S(\Omega)I \Omega + RI\dot{\Omega}) = I\dot{\Omega} + \Omega \times I \Omega \quad (2.45)$$

$$\tau_a + G_a = I\dot{\Omega} + \Omega \times (I\Omega) \quad (2.46)$$

2.9 Dynamique générale du quadrotor

En combinant les équations cinématiques et dynamiques du quadrotor, on obtient la représentation dynamique générale du quadrotor:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m} R e_z T - g e_z \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} \dot{R} e_z = R S(\Omega) e_z \\ \dot{\Theta} = K(\Theta) \Omega \\ \tau_a + G_a = I \dot{\Omega} + \Omega \times I(\Omega) \end{cases} \quad (2.48)$$

Les deux premières équations (2.47) représentent la dynamique de translation exprimée dans le repère inertiel et les autres équations (2.48) représentent la dynamique d'orientation exprimée dans le repère attaché au quadrotor. Les commandes considérées sont alors le vecteur de poussée T et le vecteur de couple τ_a .

2.10 La matrice de transformation entre forces /moments et vitesses des moteurs

Après avoir présenté dans la partie 2.7 l'ensemble des forces et des moments qui agit sur le système, nous pouvons formuler une matrice qui relie ces grandeurs avec les vitesses de rotation des moteurs. Cette relation est très importante pour l'implémentation du contrôleur. Cette matrice de correspondance a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ bl & 0 & -bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

En inversant cette matrice carrée, on obtient les expressions des vitesses des moteurs.

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2bl} & -\frac{1}{4b} \\ -\frac{1}{4b} & -\frac{1}{2bl} & 0 & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & 0 & -\frac{1}{2bl} & \frac{1}{4b} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2bl} & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.11 La dynamique des moteurs

Un moteur de type BLDC «brushless direct-current» peut être modélisé par un moteur à courant continu comme illustré dans la figure 2.7:

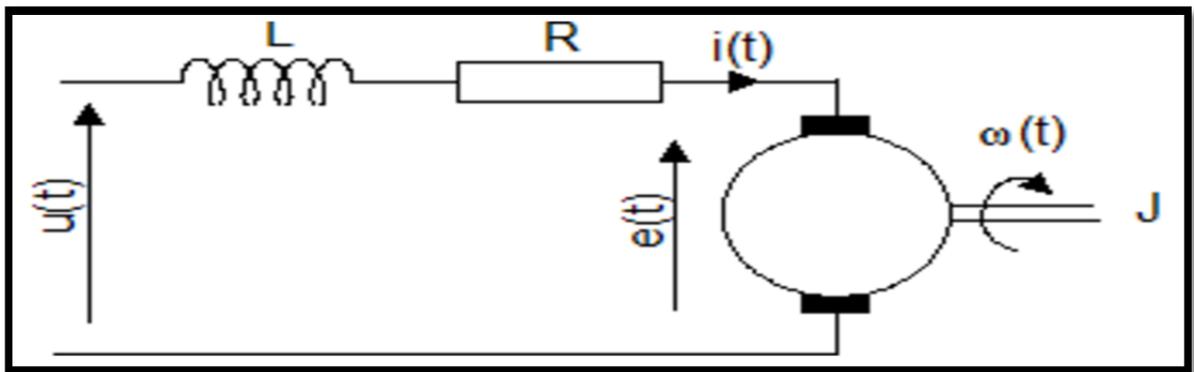


Figure 2.7 Le modèle du moteur à courant continu

Tirée de (WiKiSALS)

Le comportement de ce moteur conduit aux équations suivantes, ils sont respectivement d'origine électrique et mécanique :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_e \omega(t) \quad (2.51)$$

où $e(t) = k_e \omega(t)$

$$i(t) = \frac{J\dot{\omega}(t) + C_r + f\omega(t)}{k_e} \quad (2.52)$$

Tel que $u(t)$ est la tension d'alimentation en (V), $e(t)$ est la force électromotrice en (V), $i(t)$ est le courant du moteur en [A], R : est la résistance de l'induit en (Ω), L : est l'inductance de l'induit en [H], k_e est la constante du moteur en (V/rad/s), $\omega(t)$ est la vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator en [rad. s⁻¹], J est l'inertie du moteur en (kg.m²), et C_r est le couple de charge en (N.m) et f est le coefficient de frottement en (N.m/rad/s).

Il est intéressant de noter que le calcul de certains de ces paramètres reste une tâche difficile en pratique. Ce qui fait que dans plusieurs travaux tels que dans (Bouabdallah, 2007; Phang et al., 2014) ce modèle dynamique de moteur est simplifié par un système du premier ordre, en considérant l'hypothèse que l'influence de la dynamique électrique du moteur est plus rapide que la dynamique mécanique du moteur avec l'hélice (Henriques, 2011). Il peut s'écrire alors dans le domaine de Laplace sous la forme de la fonction du transfert suivante :

$$\frac{\omega(s)}{e(s)} = \frac{k_m}{1 + \tau s} \quad (2.53)$$

avec k_m : c'est le gain statique et τ c'est la constante du temps

2.12 Conclusion

Ce chapitre présente les équations cinématique et dynamique ainsi que les forces et les moments agissants sur le quadrotor pour établir un modèle mathématique permettant de décrire avec une précision satisfaisante le comportement du système. Ce modèle donne une meilleure compréhension de l'ensemble des capacités du système et ses limites, ce qui facilite la conception du contrôleur de vol dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 3

CONCEPTION DU CONTRÔLEUR

3.1 Introduction

Nous avons développé dans le chapitre précédent le modèle mathématique nécessaire pour la synthèse de la commande du vol. Dans ce chapitre, nous présentons une description de l'approche qui est prise pour construire ce contrôleur du quadrotor. Celle-ci est ensuite divisée en deux sous-systèmes de translation et de rotation, dans le but d'analyser le fonctionnement de chaque sous-système et démontrer sa stabilité.

3.2 Le modèle de contrôle du quadrotor

Les équations du modèle du quadrotor défini dans les sections (2.47) et (2.48) du chapitre précédent sont retraitées ici :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 & \begin{cases} \dot{\eta} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m} R e_z T - g e_z \end{cases} \\ \Sigma_2 & \begin{cases} \dot{R} e_z = R S(\Omega) e_z \\ \dot{\Theta} = K(\Theta) \Omega \\ I \dot{\Omega} = -\Omega \times (I \Omega) - G_a + \tau_a \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ce modèle dynamique qui décrit le mouvement du quadrotor dans l'espace (six degrés de liberté) est séparé en une partie translation Σ_1 et une partie rotation Σ_2 . Ces deux systèmes sont totalement couplés par le vecteur de rotation $R e_z$ et le vecteur de poussée totale T . On note aussi que ce modèle néglige les perturbations et les effets de dissipation qui peuvent être présentés dans d'autres applications spécifiques (Roza, 2012).

3.3 Énoncé de problème de contrôle

Nous exploitons l'architecture de contrôle en cascade des deux sous-systèmes (positions et attitude) pour construire un contrôleur global permettant la poursuite de la trajectoire désirée suivante : $\eta_d = [x_d, y_d, z_d]$ et ψ_d , nous admettons que les trajectoires et leurs dérivées sont suffisamment lisses, de telle sorte qu'elles sont uniformément continues et bornées : $\|\eta_d\| < \varepsilon_1$, $\|\psi_d\| < \varepsilon_2$ et $\|\dot{\eta}_d\| < \varepsilon_3$, $\|\dot{\psi}_d\| < \varepsilon_4$ où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et ε_4 sont des constantes positives.

Dans le contrôleur adopté, on suppose que la mesure de la vitesse linéaire n'est pas disponible, seulement la position et l'accélération sont donc accessibles pour le sous-système de translation. Nous voulons ainsi démontrer la convergence asymptotique à zéros des erreurs de poursuite suivantes pour tout instant t : $e_\psi = \psi - \psi_d$, $\eta_e = \eta - \eta_d$ et $\eta'_e = v - v_d$.

Pour ce faire il est indispensable de trouver l'ensemble des couples de commandes appropriées $[T, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]$. Dans ce qui suit, nous présentons la méthodologie de la conception du contrôleur permettant d'atteindre les objectifs désirés.

3.4 La stratégie du contrôleur

Étant donné l'interconnexion entre la dynamique de translation et la dynamique d'attitude, nous choisissons d'appliquer un contrôleur hiérarchique sur l'ensemble du système, un contrôle de position dans la boucle externe, et un contrôle d'attitude dans la boucle interne. La conception du contrôleur se fait donc en deux parties comme illustrées dans la figure 3.1

- Dans la conception du contrôleur de position, nous utilisons un filtre non linéaire pour l'estimation de l'erreur de suivi de la vitesse linéaire. Nous pouvons ainsi faire le design d'un contrôleur intermédiaire pour le contrôle de position à partir duquel nous pouvons calculer la valeur de poussée totale désirée et d'extraire aussi les orientations désirées qui seront considérées comme une référence par la suite pour la dynamique de rotation.

- Pour le contrôleur d'attitude, nous choisissons d'appliquer une approche backstepping. Nous profitons ainsi du fait que la dynamique du Σ_2 est de la forme des systèmes «strict feedback» appropriés pour un tel contrôleur (Chingozha, 2014). Ainsi, l'objectif de l'application du backstepping est de créer des commandes virtuelles pour les vitesses angulaires notées dans ce qui suit $\alpha_\Omega = [\alpha_r, \alpha_p, \alpha_q]$ permettant de garantir la convergence asymptotique vers zéro des erreurs de suivi des angles de rotation $\Theta = [\phi, \theta, \psi]$, et qui aboutit finalement aux calculs des valeurs des couples $[\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]$. Suite au calcul de ces couples, nous pouvons alors connaître les quatre vitesses de rotation des moteurs en appliquant la matrice de transformation déjà présentée dans la section (2.50).

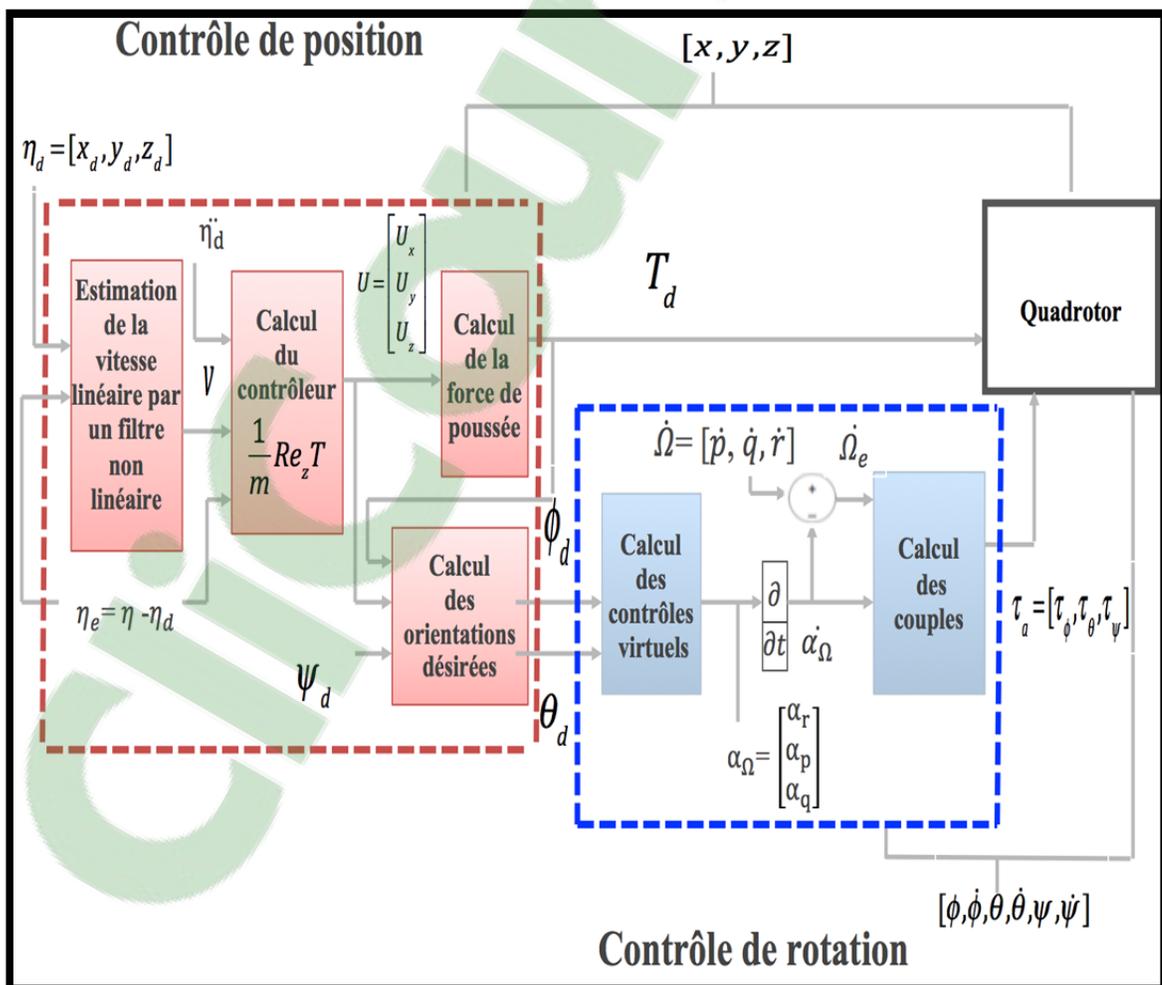


Figure 3.1 L'architecture de contrôleur

- Il est important de noter que la conception du contrôleur d'attitude est basée sur des fonctions barrières de Lyapunov (BLF). Ces fonctions sont conçues de manière à créer des limites qui peuvent éviter l'excursion des angles de rotation : roulis et tangage vers des points de singularité, et qui offrent aussi des conditions initiales faisables pour les commandes des couples.

3.5 Le contrôle de position

3.5.1 L'introduction d'un filtre pour l'estimation de la vitesse linéaire

La nature de la mission ou de l'application effectuée par le quadrotor nécessite des informations en temps réel décrivant le comportement du système. Cependant en pratique, certains états ne peuvent pas être mesurés directement. Dans cette partie, nous présentons une méthode de contrôle de position dans le cas où la vitesse linéaire n'est pas accessible en mesure. Cette méthode repose sur l'utilisation d'un filtre non linéaire de premier ordre afin d'estimer l'erreur de suivi de la vitesse linéaire. Ce filtre est de la forme retour de sortie (De Queiroz, 2012). Il est conçu avec une fonction tangente hyperbolique afin de garantir la bornitude du vecteur de poussée. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$v = q + B\eta_e \text{ et } \dot{q} = -A \tanh(v) \quad (3.2)$$

où A et B sont deux vecteurs colonnes qui contiennent trois éléments positifs.

- Ce filtre sera présenté par un exemple simple avec quelques résultats de simulation pour expliquer son fonctionnement.

3.5.1.1 Principe du filtre

L'approche de ce filtre provient de l'idée d'un simple filtre linéaire passe-bas de premier

ordre ayant comme équation :

$$\frac{q(j\omega)}{x_1(j\omega)} = \frac{\beta}{j\omega - \beta} \quad (3.3)$$

Nous voulons maintenant interpréter ce filtre dans le domaine de Laplace. Pour cela, on introduit la variable $s = j\omega$ (Bertrand, 2007). On remplace donc cette variable dans la fonction de transfert de filtre (3.3), on obtient :

$$sq = \beta (x_1 + q) \quad (3.4)$$

D'où :

$$q = \frac{\beta x_1}{s - \beta} \quad (3.5)$$

Calculons la quantité $(x_1 + q)$:

$$(x_1 + q) = x_1 + \frac{\beta x_1}{s - \beta} = \frac{s x_1}{s - \beta} \quad (3.6)$$

Nous essayons maintenant d'appliquer ce filtre sur un système dynamique de deuxième ordre ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + u \end{cases} \quad (3.7)$$

Tel que $x = [x_1, x_2]^T$ représente l'état du système et u la commande. On suppose de plus que la vitesse x_2 n'est pas mesurable.

En utilisant la première équation de système (3.7), on peut réécrire finalement l'équation (3.6) comme suit :

$$x_1 + q = \frac{x_2}{s - \beta} \quad (3.8)$$

On remarque d'après l'équation (3.8) que le terme $(x_1 + q)$ peut être rapproché de la valeur de la vitesse x_2 inaccessible en mesure. Il peut être considéré donc comme un estimateur de cette grandeur.

Nous remplaçons le filtre linéaire par un filtre non linéaire dans le but d'assurer, d'une part, une valeur bornée de la commande intermédiaire de position, qui sera calculée dans la prochaine partie et d'autre part, d'augmenter la performance d'estimation. Pour cette fin, on applique une fonction tangente hyperbolique à l'expression de filtre (3.4). Ce qui permet de lui donner un aspect non linéaire à la proximité de la région $[-1, 1]$.

L'expression (3.4) se réécrit alors comme :

$$sq = \beta \tanh(x_1 + q) \quad (3.9)$$

Une transposition de cette équation (3.9) dans le domaine temporelle donne :

$$\dot{q} = \beta \tanh(x_1 + q) \quad (3.10)$$

Cette expression démontre notre choix des équations présentées dans (3.2).

3.5.1.2 Simulation de fonctionnement du filtre

Le filtre proposé est testé sur l'exemple de système en double intégrateur de la partie précédente (3.7) dans le cas où $f = 0$. La simulation est effectuée avec des conditions initiales nulles. L'évolution dans le temps de l'erreur de suivi de la vitesse linéaire, la variable auxiliaire utilisée pour faire l'estimation notée q , ainsi l'accélération sont illustrées dans les figures (3.2) (3.3) et (3.4) :

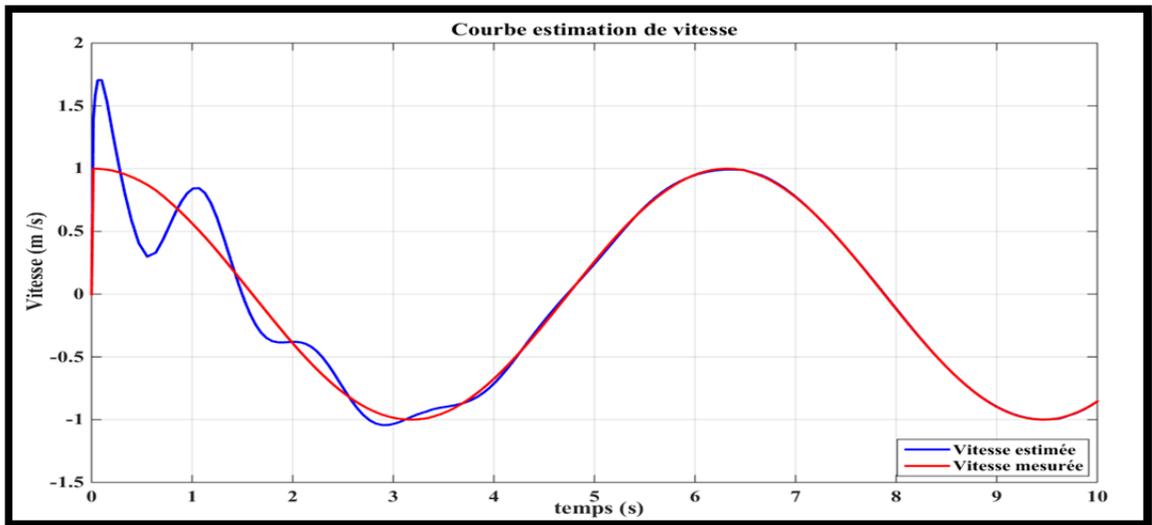


Figure 3.2 Courbe d'estimation de la vitesse linéaire

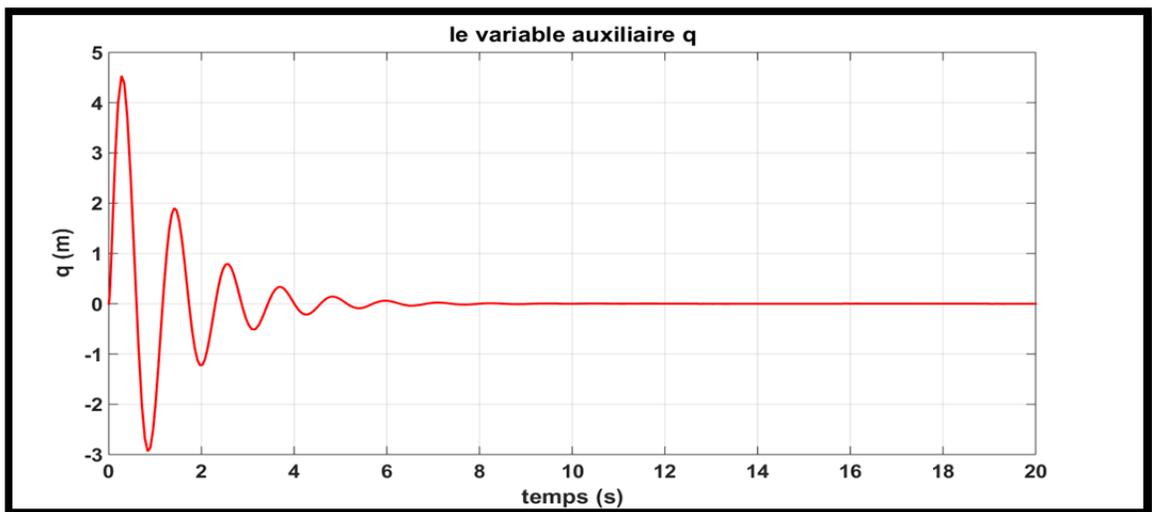


Figure 3.3 Courbe de variable auxiliaire q

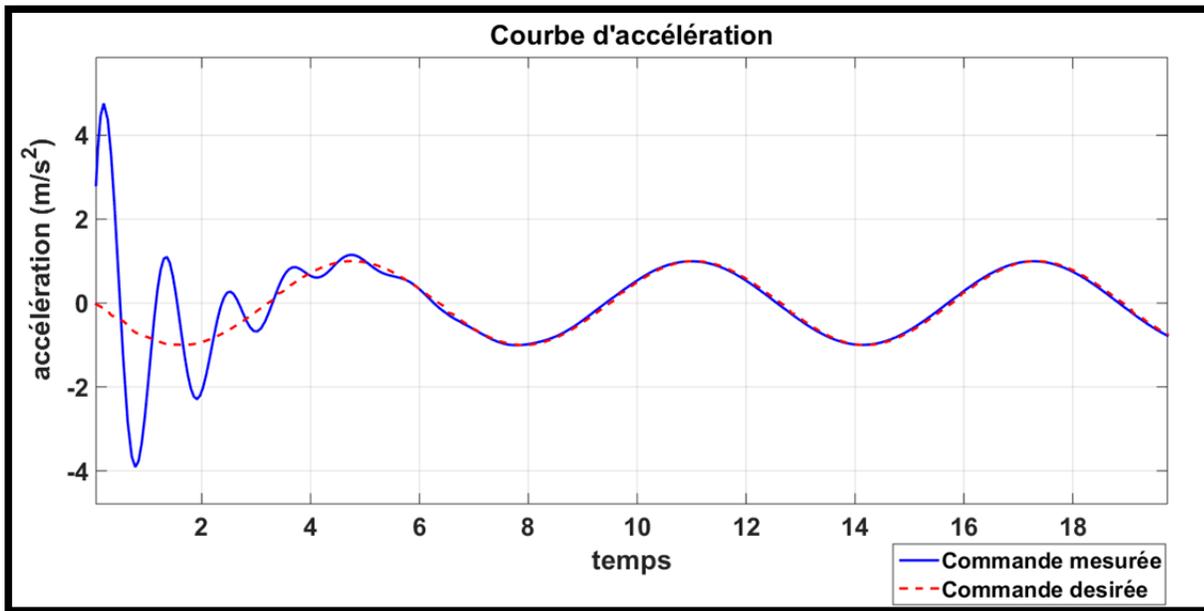


Figure 3.4 La poursuite d'accélération

Il est clair que la convergence asymptotique vers zéro des erreurs de poursuite de vitesse linéaire est bien établie. L'utilisation de ce filtre s'avère intéressante en point de vue simplicité de son architecture proposé comparativement à un observateur d'ordre plein par exemple qui peut augmenter l'encombrement du système.

3.5.2 Le choix de la commande intermédiaire

L'objectif de cette partie est de concevoir un contrôle intermédiaire permettant d'assurer la convergence des erreurs de poursuite de position et de vitesse vers zéro.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\eta - \eta_d\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_d\| = 0$$

Le choix a été fixé sur le vecteur $U = [U_x, U_y, U_z]^T = \frac{1}{m} Re_z T$ puisqu'il constitue un lien entre la dynamique de position et la dynamique d'attitude, ce qui permet d'extraire facilement les orientations désirées.

Ce vecteur peut être présenté sous cette forme :

$$U = \frac{1}{m} Re_z T = -k_p \tanh(\eta_e) - k_d \tanh(v) + \ddot{\eta}_d + g e_z \quad (3.11)$$

Où k_p et k_d sont deux vecteurs colonnes qui contiennent trois éléments positifs. Ils seront déterminés dans la preuve de la stabilité du contrôleur de position dans la prochaine partie. Certaines exigences doivent être prises en compte dans la conception de ce contrôleur intermédiaire de position, notamment la bornitude de vecteur de poussée T . Prenons alors la norme de l'équation (3.11), on obtient :

$$\| U \| = \left\| \frac{T}{m} \right\| = \left\| -k_p \tanh(\eta_e) - k_d \tanh(v) + \ddot{\eta}_d + g e_z \right\| \quad (3.12)$$

On peut dire que :

$$\| U \| = \left\| \frac{T}{m} \right\| \leq k_p + k_g + k_d \quad (3.13)$$

Tel que : $k_g \leq \left\| \ddot{\eta}_d \right\| + g e_z$. Nous pouvons constater qu'un choix des variables positives k_p , k_d et k_g peut garantir que le vecteur de poussée T soit borné.

3.5.3 Étude de sous système de position en boucle fermée

Considérons les équations dynamiques de sous système de position Σ_1 , la dynamique de l'erreur d'accélération s'écrit alors sous cette forme :

$$\ddot{\eta}_e = \frac{1}{m} Re_z T - g e_z - \ddot{\eta}_d \quad (3.14)$$

Le système de position en boucle fermée est obtenu en appliquant le vecteur de la commande intermédiaire U sur la dynamique de ces erreurs. En prenons la dérivée de l'équation de filtre (3.2), il peut être formulé de cette façon :

$$S_{BF1} \begin{cases} \ddot{\eta}_e = -k_p \tanh(\eta_e) - k_d \tanh(v) \\ \dot{v} = -A \tanh(v) + B \dot{\eta}_e \end{cases} \quad (3.15)$$

La fonction candidate de Lyapunov associée au système est la suivante :

$$V_{BF1} = \frac{1}{2} \eta_e^T \dot{\eta}_e + \sum_{i=1}^3 \left(k_{pi} \log(\cosh(\eta_{ei})) + \frac{k_{di}}{B_i} \log(\cosh(v_i)) \right) + \gamma \dot{\eta}_e^T (\tanh(\eta_e) - \tanh(v)) \quad (3.16)$$

Tel que γ est une petite valeur positive à déterminer après.

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} = & \dot{\eta}_e^T \dot{\eta}_e + \sum_{i=1}^3 k_{pi} \tanh(\eta_{ei}) \dot{\eta}_{ei} + \sum_{i=1}^3 \frac{k_{di}}{B_i} \tanh(v_i) \dot{v}_i + \gamma \dot{\eta}_e^T (\tanh(\eta_e) - \tanh(v)) \\ & + \gamma \dot{\eta}_e^T (\cosh^{-2}(\eta_e)^T \dot{\eta}_e - \cosh^{-2}(v)^T \dot{v}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Remplaçons les équations de système S_{BF1} (3.15) dans (3.17). On trouve l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} = & -k_d B^{-1} \tanh(v)^T \tanh(v) - \gamma k_p \tanh(\eta_e)^T \tanh(\eta_e) \\ & + \gamma k_d \tanh(v)^T \tanh(v) + \gamma (k_p - k_d) \tanh(\eta_e)^T \tanh(v) \\ & + \gamma \dot{\eta}_e^T \cosh^{-2}(\eta_e)^T \dot{\eta}_e + \cosh^{-2}(v)^T A \tanh(v) \gamma \dot{\eta}_e^T - \cosh^{-2}(v)^T \gamma \dot{\eta}_e^T B \dot{\eta}_e \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donc on peut écrire l'équation \dot{V}_{BF1} sous cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} \leq & -\frac{k_{dm} a_m}{b_M} \|\tanh(v)\|^2 - k_{pm} \gamma \|\tanh(\eta_e)\|^2 + \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \|\cosh^{-2}(\eta_e)\| \\ & - b_m \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \|\cosh^{-2}(v)\| + \gamma (k_{PM} + k_{DM}) \|\tanh(\eta_e)\| \|\tanh(v)\| \\ & + a_m \gamma \|\dot{\eta}_e\| \|\cosh^{-2}(v)\| \|\tanh(v)\| + k_{DM} \gamma \|\tanh(v)\|^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Considérons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \|\cosh^{-2}(\eta_e)\| & \leq \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \\ a_m \gamma \|\dot{\eta}_e\| \|\cosh^{-2}(v)\| \|\tanh(v)\| & \leq a_m \gamma \|\dot{\eta}_e\| \|\tanh(v)\| \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'inégalité (3.19) peut se réécrire sous cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} \leq & -\frac{k_{dm} a_m}{b_M} \|\tanh(v)\|^2 - k_{pm} \gamma \|\tanh(\eta_e)\|^2 + \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \\ & - b_m \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \|\cosh^{-2}(v)\| + \gamma (k_{PM} + k_{DM}) \|\tanh(\eta_e)\| \|\tanh(v)\| \\ & + a_m \gamma \|\dot{\eta}_e\| \|\tanh(v)\| + k_{DM} \gamma \|\tanh(v)\|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tel que : k_{dm} , k_{pm} , a_m , b_m sont les valeurs minimales des vecteurs respectivement suivants k_d , k_p , A , B et k_{DM} , k_{PM} , a_M , b_M sont les valeurs maximales de ces vecteurs. Pour simplifier l'étude de stabilité de l'équation précédente, on considère que ces valeurs maximales et ces valeurs minimales sont égales.

On peut alors écrire l'inégalité (3.21) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{BF1} \leq & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tanh(\eta_e)\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma k_p & -\gamma(k_p + k_d) \\ -\gamma(k_p + k_d) & \frac{2k_d A}{3B} \end{bmatrix}}^{Q_1} \begin{bmatrix} \|\tanh(\eta_e)\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} \|\dot{\eta}_e\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} & -\frac{\gamma A}{2} \\ -\frac{\gamma A}{2} & \frac{k_d A}{3B} \end{bmatrix}}^{Q_2} \begin{bmatrix} \|\dot{\eta}_e\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix} \\
 & - \underbrace{\left[\frac{k_d A}{3B} - \gamma k_d \right]}_{\beta_1} \|\tanh(v)\|^2 - \underbrace{\left(\frac{2B\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} - \gamma \right)}_{\beta_2} \|\dot{\eta}_e\|^2
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Maintenant, on cherche à déterminer les paramètres k_d, k_p, A, B permettant d'assurer que les termes Q_1, Q_2, β_1 et β_2 soient définies positives, et dans le but de prouver la stabilité globale de sous système de position .

Pour démontrer que les matrices Q_1 et Q_2 sont définies positives, on applique la méthode des inégalités matricielles linéaires (LMI) telle que présentée à l'ANNEXE I.

$Q_1 > 0$. C'est équivalent à dire que :

$$\frac{2k_d A}{3B} > 0 \text{ et } 2\gamma k_p - \frac{3B\gamma^2(k_p + k_d)^2}{2k_d A} > 0 \tag{3.23}$$

$Q_2 > 0$. C'est équivalent à dire que :

$$\frac{k_d A}{3B} > 0 \text{ et } \frac{\gamma B \cosh^{-2}(v)}{3} - \frac{3B\gamma^2 A^2}{4k_d A} > 0 \tag{3.24}$$

L'équation (3.23) donne :

$$\frac{k_p}{(k_d + k_p)^2} > \frac{3B\gamma}{4k_d A} \quad (3.25)$$

L'équation (3.24) donne :

$$\frac{\gamma A}{4k_d} < \frac{1}{9} \quad (3.26)$$

puisque : $\cosh^{-2}(v) \leq 1$

$\beta_1 \geq 0$. C'est équivalent à dire que :

$$\frac{k_d A}{3B} - \gamma k_d \geq 0 \quad (3.27)$$

On peut choisir:

$$\gamma = \frac{A}{3B} \quad (3.28)$$

$\beta_2 \geq 0$. C'est équivalent à dire que :

$$\frac{2B}{3} \geq 1 \quad (3.29)$$

puisque : $\cosh^{-2}(v) \leq 1$. Donc on peut choisir la valeur suivante:

$$B = \frac{3}{2} \quad (3.30)$$

On remplace (3.30) dans (3.28) alors :

$$A = 4.5\gamma \quad (3.31)$$

On insère (3.30) et (3.31) dans (3.25). On obtient :

$$\frac{k_p}{(k_d + k_p)^2} > \frac{9}{36k_d} \quad (3.32)$$

Reprenons maintenant l'équation (3.13) de la partie précédente. On peut écrire alors :

$$k_d = \left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g - k_p \quad (3.34)$$

et

$$(k_p + k_d)^2 = \left(\left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g \right)^2 \quad (3.35)$$

On remplace alors (3.34) et (3.35) dans (3.32). On obtient l'inéquation du deuxième ordre suivante :

$$36k_p \left(\left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g - k_p \right) > 9 \left(\left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g \right)^2 \quad (3.36)$$

La résolution de cette inégalité permet de déterminer la valeur de k_p :

$$k_p > \frac{\left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g}{2} \quad (3.37)$$

donc :

$$k_d > \left\| \frac{T}{m} \right\| - k_g - k_p \quad (3.38)$$

Finalement, on remplace (3.31) dans (3.26). On obtient aussi l'expression de γ :

$$\gamma < 0.31 \sqrt{k_d} \quad (3.39)$$

3.5.4 Calcul de la force de poussée et l'orientation désirée

La commande intermédiaire de la position décrite dans la section (3.11) exprimée par le vecteur $U = [U_x, U_y, U_z]^T$, permet de calculer les angles d'orientation désirés du quadrotor via la matrice de rotation désirée $R^d e_z$ et le vecteur de poussée totale T .

La direction de ce vecteur de commande se présente cette fois par :

$$U = \frac{R^d e_z T}{m} \quad (3.40)$$

Donc la norme de cette équation donne :

$$\frac{T^2}{m^2} = U^T U \quad (3.41)$$

Ce qui équivalent à :

$$T = m \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \quad (3.42)$$

En prenant ce vecteur de poussé pour calculer par la suite les valeurs de ϕ^d et θ^d en se basant sur l'équation (3.40) :

$$R^d e_z = \begin{pmatrix} \cos(\phi^d)\sin(\theta^d)\cos(\psi^d) + \sin(\phi^d)\sin(\psi^d) \\ \cos(\phi^d)\sin(\theta^d)\sin(\psi^d) - \sin(\phi^d)\cos(\psi^d) \\ \cos(\phi^d)\cos(\theta^d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_x m}{T} \\ \frac{U_y m}{T} \\ \frac{U_z m}{T} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

On peut donc réécrire l'équation (3.43) sous forme de trois équations à deux inconnus telle que la valeur de l'angle de lacet ψ^d est disponible comme consigne pour notre contrôleur.

$$\cos(\phi^d)\sin(\theta^d)\cos(\psi^d) + \sin(\phi^d)\sin(\psi^d) = \frac{U_x m}{T} \quad (3.44)$$

$$\cos(\phi^d)\sin(\theta^d)\sin(\psi^d) - \sin(\phi^d)\cos(\psi^d) = \frac{U_y m}{T} \quad (3.45)$$

$$\cos(\phi^d)\cos(\theta^d) = \frac{U_z m}{T} \quad (3.46)$$

Il faut noter que le calcul de ces équations possède une certaine restriction qui doit être respectée pour assurer la validité du domaine de vol usuel du drone. En effet, si la force de poussée T est nulle, de telle façon que le quadrotor se mette dans un mouvement de chute libre, on peut trouver une forme de singularité due à une division par zéro. Or cette condition existe si on a $\phi^d = \pm \frac{\pi}{2}$ ou $\theta^d = \pm \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à des valeurs non atteintes en choisissant des fonctions de Lyapunov barrières.

On peut donc diviser les deux équations (3.44) et (3.45) par (3.46). Ce qui donne :

$$\tan(\theta^d)\cos(\psi^d) + \frac{\tan(\phi^d)}{\cos(\theta^d)}\sin(\psi^d) = \frac{U_x}{U_z} \quad (3.47)$$

$$\tan(\theta^d)\sin(\psi^d) - \frac{\tan(\phi^d)}{\cos(\theta^d)}\cos(\psi^d) = \frac{U_y}{U_z} \quad (3.48)$$

En multiplions cette fois l'équation (3.47) par $\cos(\psi^d)$ et (3.48) par $\sin(\psi^d)$ et en additionnant les deux résultats. Nous trouvons :

$$\tan(\theta^d)\cos(\psi^d)^2 + \tan(\theta^d)\sin(\psi^d)^2 = \frac{U_x \cos(\psi^d) + U_y \sin(\psi^d)}{U_z} \quad (3.49)$$

En utilisant la formule trigonométrique $\cos(\psi^d)^2 + \sin(\psi^d)^2 = 1$. On peut finalement conclure la valeur de l'angle de tangage désiré :

$$\theta^d = \tan^{-1}\left(\frac{U_x \cos(\psi^d) + U_y \sin(\psi^d)}{U_z}\right) \quad (3.50)$$

Ainsi la valeur de ϕ^d est obtenu, en multiplions d'abord l'équation (3.44) par $\sin(\psi^d)$ et (3.45) par C_{ψ^d} . Puis une soustraction de ces deux résultats nous permet d'obtenir:

$$\phi^d = \sin^{-1}\left(\frac{U_x m \sin(\psi^d) - U_y m \cos(\psi^d)}{T}\right) \quad (3.51)$$

Cette expression peut être réécrite sous la forme suivante en introduisant l'équation de poussée (3.42) :

$$\phi^d = \sin^{-1} \left(\frac{U_x \sin(\psi^d) - U_y \cos(\psi^d)}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}} \right) \quad (3.52)$$

3.6 Le contrôle d'attitude

Le contrôleur de sous système d'attitude consiste à assurer la convergence asymptotique des orientations désirées déjà calculées à partir des valeurs extraites de l'expression de la force du poussée. Cela se fait à travers deux blocs interconnectés : un bloc qui calcule les commandes virtuelles $\alpha_\Omega = [\alpha_r, \alpha_p, \alpha_q]^T$ et un bloc contrôleur des couples $\tau_a = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$. Reprenons l'expression qui décrit le système de rotation Σ_2 , nous pouvons remarquer que le vecteur de la vitesse angulaire Ω et le vecteur de couple τ_a peuvent être présentés sous la forme d'une chaîne d'intégrateur :

$$\Sigma_2 \begin{cases} \dot{\Theta} = f_1(\Omega) \\ \dot{\Omega} = f_2(\Omega, \tau_a) \end{cases} \quad (3.53)$$

Donc la création des contrôles virtuels de vitesse angulaire a pour but de tendre l'erreur de la dérivée de vecteur du position angulaire notée $\dot{\Theta}_e = [\dot{e}_\phi, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\psi] = \dot{\Theta} - \dot{\Theta}_d$ vers zéro d'une part, et d'autre part de calculer la commande de couple adéquate pour le système. Nous commençons dans cette partie, à présenter les expressions de la dynamique des erreurs avant d'appliquer les commandes virtuelles.

Reprenons l'équation de la cinématique de rotation définie dans la section (2.16):

$$\dot{\Theta} = K(\Theta) \Omega \quad (3.54)$$

On définit le vecteur d'erreur de poursuite de vitesse angulaire $\Omega_e = [\omega_{1e}, \omega_{2e}, r_e]^T$ par cette équation :

$$\Omega_e = \Omega - \alpha_\Omega \quad (3.55)$$

En faisant intervenir (3.55) dans (3.54) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1e} + \alpha_p \\ \omega_{2e} + \alpha_q \\ r_e + \alpha_r \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

De même :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi)\tan(\theta)q + \cos(\phi)\tan(\theta)r \\ \dot{\theta} = \cos(\phi)(\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi)r \\ \dot{\psi} = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}(r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q \end{cases} \quad (3.57)$$

Finalement le vecteur $\dot{\Theta}_e = [\dot{e}_\phi, \dot{e}_\theta, \dot{e}_\psi]$ décrivant l'erreur de la dérivée de la position angulaire se présente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d = \omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi)\tan(\theta)q + \cos(\phi)\tan(\theta)r - \dot{\phi}_d \\ \dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d = \cos(\phi)(\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi)r - \dot{\theta}_d \\ \dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}(r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q - \dot{\psi}_d \end{cases} \quad (3.58)$$

3.6.1 Les étapes de conception

À ce stade nous allons appliquer l'approche backstepping sur la dynamique de rotation en suivant un algorithme récursif en deux étapes.

Étape 1 : Calcul des commandes virtuelles

Reprenons les équations de la section précédente qui représentent les variables d'erreurs de la variation des angles de rotation dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d = \omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi)\tan(\theta)q + \cos(\phi)\tan(\theta)r - \dot{\phi}_d \\ \dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d = \cos(\phi)(\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi)r - \dot{\theta}_d \\ \dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}(r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q - \dot{\psi}_d \end{cases} \quad (3.59)$$

Pour concevoir une commande qui ne conduit pas la dynamique d'orientation en dehors de ces conditions $\phi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ ou $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Nous choisissons d'appliquer deux fonctions barrières du Lyapunov pour les angles de roulis et tangage, pour l'angle de lacet on n'a pas besoin de cette condition puisque c'est une consigne déjà définie par le concepteur donc le

choix d'une simple fonction quadratique peut être utile. Voilà donc la fonction du Lyapunov du système augmenté :

$$V_1 = \frac{1}{2}e_\psi^2 + \frac{1}{2}\log\frac{k_\phi^2}{k_\phi^2 - e_\phi^2} + \frac{1}{2}\log\frac{k_\theta^2}{k_\theta^2 - e_\theta^2} \quad (3.60)$$

Sa dérivée en fonction de temps est :

$$\dot{V}_1 = e_\psi \dot{e}_\psi + \frac{e_\phi \dot{e}_\phi}{k_\phi^2 - e_\phi^2} + \frac{e_\theta \dot{e}_\theta}{k_\theta^2 - e_\theta^2} \quad (3.61)$$

On continue la démarche de conception. Nous pouvons choisir les commandes virtuelles suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_p = -\sin(\phi)\tan(\theta)q - \cos(\phi)\tan(\theta)r + \dot{\phi}_d - k_\phi e_\phi \\ \alpha_q = -k_\theta \cos(\phi)e_\theta + \tan(\theta)r + \frac{\dot{\theta}_d}{\cos(\phi)} \\ \alpha_r = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\phi)} \left(\dot{\psi}_d - \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q - k_\psi e_\psi \right) \end{cases} \quad (3.62)$$

On insère ces dernières équations dans (3.59), puis on les remplace dans (3.61):

$$\dot{V}_1 = -k_\psi e_\psi^2 - \frac{k_\phi e_\phi^2}{k_\phi^2 - e_\phi^2} - \frac{k_\theta \cos(\phi)^2 e_\theta^2}{k_\theta^2 - e_\theta^2} + \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} r e_\psi + \frac{e_\theta \cos(\phi) \omega_{2e}}{k_\theta^2 - e_\theta^2} + \frac{e_\phi \omega_{1e}}{k_\phi^2 - e_\phi^2} \quad (3.63)$$

Le résultat obtenu contient des termes négatifs qui peuvent stabiliser le système seulement si ces restrictions sont respectées $|e_\phi| < k_\phi$, $|e_\theta| < k_\theta \forall k_\phi > 0$ et $k_\theta > 0$. Cette condition est bien décrite dans le lemme de l'annexe III. Les autres termes positifs vont s'annuler dans la prochaine étape en étudiant la stabilité du système d'attitude en boucle fermée.

Étape 2 : Calcul du contrôleur de couple

On continue avec le principe de backstepping jusqu'à prouver la stabilité du système de rotation en boucle fermée. Reprenons alors l'erreur entre la vitesse angulaire et son contrôleur virtuel défini dans la section (3.55), ainsi que sa variation au cours de temps :

$$\Omega_e = \Omega - \alpha_\Omega \quad (3.64)$$

$$\dot{\Omega}_e = \dot{\Omega} - \dot{\alpha}_\Omega \quad (3.65)$$

La fonction de Lyapunov associée au système d'attitude en boucle fermée est la suivante :

$$V_{BF} = V_1 + \frac{1}{2} \Omega_e^T I \Omega_e \quad (3.66)$$

Sa dérivée en fonction du temps est :

$$\dot{V}_{BF} = \dot{V}_1 + \Omega_e^T I \dot{\Omega}_e \quad (3.67)$$

En introduisant (3.65) dans (3.67) il devient :

$$\dot{V}_{BF} = \dot{V}_1 + \Omega_e^T \left[I \dot{\Omega} - I \dot{\alpha}_\Omega \right] \quad (3.68)$$

On reprend la troisième équation de sous système d'attitude Σ_2 décrite dans la section (3.1), et on la remplace dans l'équation (3.68) :

$$\dot{V}_{BF} = \dot{V}_1 + \Omega_e^T \left[-\Omega \times I \Omega - G_a + \tau_a - I \dot{\alpha}_\Omega \right] \quad (3.69)$$

On insère maintenant (3.64) dans (3.69) ce qui donne :

$$\dot{V}_{BF} = \dot{V}_1 + \Omega_e^T [-(\Omega_e + \alpha_\Omega) \times I\Omega - G_a + \tau_a - I\dot{\alpha}_\Omega] \quad (3.70)$$

Nous proposons donc un contrôleur d'entrée τ_a de manière à rendre \dot{V}_{BF} négative :

$$\tau_a = -k_e \Omega_e - \frac{e_\phi}{k_\phi^2 - e_\phi^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos(\phi)e_\theta}{k_\theta^2 - e_\theta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e_\psi + G_a + I\dot{\alpha}_\Omega + \alpha_\Omega I\Omega \quad (3.71)$$

Ce qui donne finalement :

$$\dot{V}_1 = -k_\psi e_\psi^2 - \frac{k_\phi e_\phi^2}{k_\phi^2 - e_\phi^2} - \frac{k_\theta \cos(\phi)^2 e_\theta^2}{k_\theta^2 - e_\theta^2} - \Omega_e^T k_e \Omega_e - \Omega_e^T \Omega_e I\Omega \leq 0 \quad (3.72)$$

Ce résultat implique que tous les signaux de système d'attitude en boucle fermée sont bornés.

On considère que les conditions initiales suivantes pour $e_\phi(0)$ et $e_\theta(0)$ sont comme suit:

$$e_\phi(0) \in \{x \in \mathcal{R} / |x| < k_\phi\} \triangleq \mathcal{Z}_\phi \quad (3.73)$$

et :

$$e_\theta(0) \in \{x \in \mathcal{R} / |x| < k_\theta\} \triangleq \mathcal{Z}_\theta \quad (3.74)$$

L'équation (3.72) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\dot{V}_{BF} \leq a V_{BF} \quad (3.75)$$

tel que: $a = \min(k_\phi, k_\theta, k_\psi, \lambda_{\min}(k_e))$

Ce qui prouve la stabilité exponentielle:

$$V(t) \leq V(t_0) e^{-a(t-t_0)} \leq V(t_0), \forall t > 0 \quad (3.76)$$

Ainsi on remarque que les erreurs : e_ϕ, e_θ, e_ψ et Ω_e sont bornés.

D'après (3.76), on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \log \frac{k_\phi^2}{k_\phi^2 - e_\phi^2} \leq V(t_0) e^{-a(t-t_0)} \quad (3.77)$$

et :

$$\frac{1}{2} \log \frac{k_\theta^2}{k_\theta^2 - e_\theta^2} \leq V(t_0) e^{-a(t-t_0)} \quad (3.78)$$

En appliquant la fonction exponentielle sur les deux côtés des équations précédentes, on obtient:

$$\frac{k_\phi^2}{k_\phi^2 - e_\phi^2} \leq e^{2V(t_0) e^{-a(t-t_0)}} \quad (3.79)$$

$$\frac{k_\theta^2}{k_\theta^2 - e_\theta^2} \leq e^{2V(t_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad (3.80)$$

Puisque dans l'ensemble \mathcal{Z}_ϕ (3.73), on a $|e_\phi| < k_\phi$ et dans l'ensemble \mathcal{Z}_θ (3.74), on a $|e_\theta| < k_\theta$. Alors les équations (3.79) et (3.80) se réécrivent comme :

$$|e_\phi| \leq k_\phi \sqrt{1 - e^{2V(t_0)e^{-a(t-t_0)}}} \quad (3.81)$$

$$|e_\theta| \leq k_\theta \sqrt{1 - e^{2V(t_0)e^{-a(t-t_0)}}} \quad (3.82)$$

Ce qui implique que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} e_\phi = 0 \quad (3.83)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} e_\theta = 0 \quad (3.84)$$

De la même façon, on démontre que :

$$\frac{1}{2} \Omega_e^T I \Omega_e \leq V(t_0) e^{-a(t-t_0)} \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{2} e_\psi^2 \leq V(t_0) e^{-a(t-t_0)} \quad (3.86)$$

On peut conclure donc que le sous-système d'attitude en boucle fermée est stable.

3.7 Étude de robustesse de la commande suite à une action intégrale

Dans cette partie nous voulons apporter plus de robustesse à la commande hiérarchique, l'idée alors est de lui ajouter une action intégrale. Pour le contrôle de position, l'introduction d'une telle action se fait dans la commande intermédiaire définie dans la section (3.11), tandis que pour le sous-système d'attitude, le contrôleur est modifié en backstepping intégrale.

L'analyse de stabilité de ce système est réalisée en deux parties, en traitant tout d'abord la stabilité en boucle fermée du sous-système de position puis du sous-système d'attitude.

3.7.1 Commande en position

Considérons la dynamique de translation du système décrit dans la section (3.1) par l'équation suivante :

$$\Sigma_1 \begin{cases} \dot{\eta} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m} R e_z T - g e_z \end{cases} \quad (3.87)$$

On introduit l'action intégrale dans la commande intermédiaire décrite dans la section (3.11), le système en boucle fermée peut être considéré comme suit :

$$S_{BF1} \begin{cases} \dot{\eta}_e + k_p \tanh(\eta_e) + k_d \tanh(v) + S = 0 \\ \dot{v} = -A \tanh(v) + B \dot{\eta}_e \\ \dot{S} = -\alpha \tanh(v) + \tanh(\eta_e) \end{cases} \quad (3.88)$$

Tel que : $S = \int \tanh(\eta_e) dt \forall \alpha > 0$

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{BF1} = \frac{1}{2} \eta_e^T \dot{\eta}_e + \sum_{i=1}^3 \left(k_{pi} \log(\cosh(\eta_{ei})) + \frac{k_{di}}{B_i} \log(\cosh(v_i)) \right) + \gamma \dot{\eta}_e^T (\tanh(\eta_e) - \tanh(v)) + \frac{1}{2} S^T S \quad (3.89)$$

La dérivée de la fonction du Lyapunov s'écrit alors :

$$\dot{V}_{BF1} = \dot{\eta}_e^T \ddot{\eta}_e + \sum_{i=1}^3 k_{pi} \tanh(\eta_{ei}) \dot{\eta}_{ei} + \sum_{i=1}^3 \frac{k_{di}}{B_i} \tanh(v_i) \dot{v}_i + \gamma \dot{\eta}_e^T (\tanh(\eta_e) - \tanh(v)) + \gamma \dot{\eta}_e^T (\cosh^{-2}(\eta_e)^T \dot{\eta}_e - \cosh^{-2}(v)^T \dot{v}) + S^T \dot{S} \quad (3.90)$$

Remplaçons les équations de système S_{BF1} (3.88) dans (3.90), on trouve l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} = & -\dot{\eta}_e S - k_d B^{-1} \tanh(v)^T \tanh(v) - \gamma k_p \tanh(\eta_e)^T \tanh(\eta_e) \\ & + \gamma k_d \tanh(v)^T \tanh(v) + \gamma (k_p - k_d) \tanh(\eta_e)^T \tanh(v) - \gamma S \tanh(\eta_e) \\ & + \gamma S \tanh(v) + \gamma \dot{\eta}_e^T \cosh^{-2}(\eta_e)^T \dot{\eta}_e + \cosh^{-2}(v)^T A \tanh(v) \gamma \dot{\eta}_e^T \\ & - \cosh^{-2}(v)^T \gamma \dot{\eta}_e^T B \dot{\eta}_e + S^T S \end{aligned} \quad (3.91)$$

En suivant la même démarche de la section (3.19) et (3.20). On peut aboutir à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} \leq & \|\dot{\eta}_e\| \|S\| - \frac{k_{dm} a_m}{b_M} \|\tanh(v)\|^2 - k_{pm} \gamma \|\tanh(\eta_e)\|^2 + \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \\ & - b_m \gamma \|\dot{\eta}_e\|^2 \|\cosh^{-2}(v)\| + \gamma (k_{pm} + k_{DM}) \|\tanh(\eta_e)\| \|\tanh(v)\| \\ & + a_m \gamma \|\dot{\eta}_e\| \|\tanh(v)\| + k_{DM} \gamma \|\tanh(v)\|^2 - \gamma S \|\tanh(\eta_e)\| \\ & + \gamma S \|\tanh(v)\| + S^T \|\tanh(\eta_e)\| - \alpha S^T \|\tanh(S)\| \end{aligned} \quad (3.92)$$

De même que la section (3.21) on considère que les variables : $k_{pm}, k_{pm}, a_m, b_m, k_{DM}, k_{PM}, a_M, b_M$ sont égaux , on peut écrire donc l'inégalité (3.92) sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{BF1} \leq & -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|S\| \\ \|\tanh(\eta_e)\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\gamma-2 & -2\gamma \\ 2\gamma-2 & 2\gamma k_p & -\gamma(k_p+k_d) \\ -2\gamma & -\gamma(k_p+k_d) & \frac{2k_d A}{3B} \end{bmatrix}}^{Q_1} \begin{bmatrix} \|S\| \\ \|\tanh(\eta_e)\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} \|S\| \\ \|\dot{\eta}_e\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} & -\frac{\gamma A}{2} \\ 0 & -\frac{\gamma A}{2} & \frac{k_d A}{3B} \end{bmatrix}}^{Q_2} \begin{bmatrix} \|S\| \\ \|\dot{\eta}_e\| \\ \|\tanh(v)\| \end{bmatrix} \\ & - \underbrace{\left[\frac{k_d A}{3B} - \gamma k_d \right]}_{\beta_1} \|\tanh(v)\|^2 - \underbrace{\left[\frac{2B\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} - \gamma \right]}_{\beta_2} \|\dot{\eta}_e\|^2 - \alpha S^T \tanh(S) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Maintenant, on cherche à déterminer les paramètres k_d, k_p, A, B permettant d'assurer que les termes Q_1, Q_2, β_1 et β_2 soient définies positives.

Pour démontrer que les matrices Q_1 et Q_2 sont définies positives, on applique le complément de Shur de cette façon (Voir l'ANNEXE I) :

$$\begin{bmatrix} 2\gamma k_p & -\gamma(k_p+k_d) \\ -\gamma(k_p+k_d) & \frac{2k_d A}{3B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\gamma-2 \\ -2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\gamma-2 & -2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma k_p & -\gamma(k_p+k_d) \\ -\gamma(k_p+k_d) & \frac{2k_d A}{3B} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} & -\frac{\gamma A}{2} \\ -\frac{\gamma A}{2} & \frac{k_d A}{3B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma \cosh^{-2}(v)}{3} & -\frac{\gamma A}{2} \\ -\frac{\gamma A}{2} & \frac{k_d A}{3B} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

On remarque que par l'application de ce théorème on peut trouver les mêmes matrices Q_1 et Q_2 de la section (3.22). Puisqu'on a aussi les mêmes expressions de β_1 et β_2 , le calcul des paramètres k_d, k_p, A, B, γ peut être fait de la même façon que celle du contrôleur de position sans action intégrale.

3.7.2 Commande en attitude

On considère maintenant la dynamique de rotation du système Σ_2

$$\Sigma_2 \begin{cases} \dot{R}e_z = R S(\Omega)e_z \\ \dot{\Theta} = K(\Theta)\Omega \\ I\dot{\Omega} = -\Omega \times I(\Omega) \end{cases} \quad (3.96)$$

Choisissons la dynamique de l'erreur de l'orientation suivante :

$$\begin{cases} z_\phi = e_\phi + \lambda_{1\phi} \chi_\phi \\ z_\theta = e_\theta + \lambda_{1\theta} \chi_\theta \\ z_\psi = e_\psi + \lambda_{1\psi} \chi_\psi \end{cases} \quad (3.97)$$

Tel que : $\chi_\phi = \int e_\phi dt$, $\chi_\theta = \int e_\theta dt$ et $\chi_\psi = \int e_\psi dt$, $\forall \lambda_{1\phi}, \lambda_{1\theta}, \lambda_{1\psi} > 0$

La dérivée des équations précédentes s'écrit alors de cette façon :

$$\begin{cases} \dot{z}_\phi = \dot{e}_\phi - \lambda_{1\phi}^2 \chi_\phi + \lambda_{1\phi} z_\phi \\ \dot{z}_\theta = \dot{e}_\theta - \lambda_{1\theta}^2 \chi_\theta + \lambda_{1\theta} z_\theta \\ \dot{z}_\psi = \dot{e}_\psi - \lambda_{1\psi}^2 \chi_\psi + \lambda_{1\psi} z_\psi \end{cases} \quad (3.98)$$

Reprenons les équations de la section (3.58) qui représentent les variables d'erreurs de la variation des angles de rotation dans le temps :

$$\begin{cases} \dot{e}_\phi = \dot{\phi} - \dot{\phi}_d = \omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi)\tan(\theta)q + \cos(\phi)\tan(\theta)r - \dot{\phi}_d \\ \dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d = \cos(\phi)(\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi)r - \dot{\theta}_d \\ \dot{e}_\psi = \dot{\psi} - \dot{\psi}_d = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}(r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q - \dot{\psi}_d \end{cases} \quad (3.99)$$

On insère chaque équation de la relation (3.99) dans la relation (3.98). Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{z}_\phi = \omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi)\tan(\theta)q + \cos(\phi)\tan(\theta)r - \dot{\phi}_d - \lambda_{1\phi}^2 \chi_\phi + \lambda_{1\phi} z_\phi \\ \dot{z}_\theta = \cos(\phi)(\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi)r - \dot{\theta}_d - \lambda_{1\theta}^2 \chi_\theta + \lambda_{1\theta} z_\theta \\ \dot{z}_\psi = \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)}(r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)}q - \dot{\psi}_d - \lambda_{1\psi}^2 \chi_\psi + \lambda_{1\psi} z_\psi \end{cases} \quad (3.100)$$

Choisissons donc la fonction du Lyapunov du système augmenté :

$$V_1 = \frac{1}{2} \chi_\phi^2 + \frac{1}{2} \chi_\theta^2 + \frac{1}{2} \chi_\psi^2 + \frac{1}{2} z_\psi^2 + \frac{1}{2} \log \frac{k_\phi^2}{k_\phi^2 - z_\phi^2} + \frac{1}{2} \log \frac{k_\theta^2}{k_\theta^2 - z_\theta^2} \quad (3.101)$$

Sa dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_1 = \chi_\phi \dot{\chi}_\phi + \chi_\theta \dot{\chi}_\theta + \chi_\psi \dot{\chi}_\psi + z_\psi \dot{z}_\psi + \frac{z_\phi \dot{z}_\phi}{k_\phi^2 - z_\phi^2} + \frac{z_\theta \dot{z}_\theta}{k_\theta^2 - z_\theta^2} \quad (3.102)$$

En faisant intervenir les équations (3.97) et (3.100) dans (3.102). On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = & \chi_\phi [z_\phi - \lambda_{1\phi} \chi_\phi] + \chi_\theta [z_\theta - \lambda_{1\theta} \chi_\theta] + \chi_\psi [z_\psi - \lambda_{1\psi} \chi_\psi] \\
& + z_\psi \left[\frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} (r_e + \alpha_r) + \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} q - \dot{\psi}_d - \lambda_{1\psi}^2 \chi_\psi + \lambda_{1\psi} z_\psi \right] \\
& + \frac{z_\phi}{k_\phi^2 - z_\phi^2} \left[\omega_{1e} + \alpha_p + \sin(\phi) \tan(\theta) q + \cos(\phi) \tan(\theta) r - \dot{\phi}_d - \lambda_{1\phi}^2 \chi_\phi + \lambda_{1\phi} z_\phi \right] \\
& + \frac{z_\theta}{k_\theta^2 - z_\theta^2} \left[\cos(\phi) (\omega_{2e} + \alpha_q) - \sin(\phi) r - \dot{\theta}_d - \lambda_{1\theta}^2 \chi_\theta + \lambda_{1\theta} z_\theta \right]
\end{aligned} \tag{3.103}$$

À cette étape nous pouvons choisir les commandes virtuelles suivantes :

$$\begin{cases}
\alpha_p = -\sin(\phi) \tan(\theta) q - \cos(\phi) \tan(\theta) r + \dot{\phi}_d - k_\phi z_\phi + \lambda_{1\phi}^2 \chi_\phi - ((\chi_\phi + \lambda_{2\phi} z_\phi)(k_\phi^2 - z_\phi^2)) \\
\alpha_q = -k_\theta \cos(\phi) z_\theta + \tan(\theta) r + \frac{\dot{\theta}_d}{\cos(\phi)} - \lambda_{1\theta} z_\theta + \lambda_{1\theta}^2 \chi_\theta - ((\chi_\theta + \lambda_{2\theta} z_\theta)(k_\theta^2 - z_\theta^2)) \\
\alpha_r = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\phi)} (\dot{\psi}_d - \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} q - k_\psi z_\psi - \lambda_{1\psi} z_\psi + \lambda_{1\psi}^2 \chi_\psi - \chi_\psi - \lambda_{2\psi} z_\psi)
\end{cases} \tag{3.104}$$

Remplaçons maintenant les expressions précédentes dans l'équation (3.103), on trouve :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = & -k_\psi z_\psi^2 - \frac{k_\phi z_\phi^2}{k_\phi^2 - z_\phi^2} - \frac{k_\theta \cos(\phi)^2 z_\theta^2}{k_\theta^2 - z_\theta^2} + \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} r_e z_\psi + \frac{\omega_{2e} \cos(\phi) z_\theta}{k_\theta^2 - z_\theta^2} + \frac{z_\phi \omega_{1e}}{k_\phi^2 - z_\phi^2} \\
& - \lambda_{1\psi} \chi_\psi^2 - \lambda_{2\psi} z_\psi^2 - \lambda_{1\phi} \chi_\phi^2 - \lambda_{2\phi} z_\phi^2 - \lambda_{1\theta} \chi_\theta^2 - \lambda_{2\theta} z_\theta^2
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Le résultat obtenu contient des termes négatifs qui peuvent stabiliser le système seulement si ces conditions sont respectées $|z_\phi| < k_\phi$, $|z_\theta| < k_\theta \forall k_\phi > 0$ et $k_\theta > 0$ (voir la lemme de l'annexe III). Les autres termes positifs vont s'annuler dans la prochaine étape en étudiant la stabilité de système d'orientation en boucle fermée.

La fonction de Lyapunov associée au système d'attitude en boucle fermée est la suivante :

$$V_{BF} = V_1 + \frac{1}{2} \Omega_e^T I \Omega_e \quad (3.106)$$

En prenant la même démarche déjà expliquée dans la partie 3.6.1.2. La dérivée de l'expression précédente peut s'écrire sous cette forme :

$$\dot{V}_{BF} = \dot{V}_1 + \Omega_e^T [-(\Omega_e + \alpha_\Omega) \times I \Omega - G_a + \tau_a - I \dot{\alpha}_\Omega] \quad (3.107)$$

Nous proposons donc un contrôleur d'entrée τ_a de manière à rendre \dot{V}_{BF} négative :

$$\tau_a = -k_e \Omega_e - \frac{z_\phi}{k_\phi^2 - z_\phi^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos(\phi) z_\theta}{k_\theta^2 - z_\theta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z_\psi + G_a + I \dot{\alpha}_\Omega + \alpha_\Omega I \Omega \quad (3.108)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -k_\psi z_\psi^2 - \frac{k_\phi z_\phi^2}{k_\phi^2 - z_\phi^2} - \frac{k_\theta \cos(\phi)^2 z_\theta^2}{k_\theta^2 - z_\theta^2} - \Omega_e^T k_e \Omega_e - \Omega_e^T \Omega_e I \Omega \\ & - \lambda_{1\psi} \chi_\psi^2 - \lambda_{2\psi} z_\psi^2 - \lambda_{1\phi} \chi_\phi^2 - \lambda_{2\phi} z_\phi^2 - \lambda_{1\theta} \chi_\theta^2 - \lambda_{2\theta} z_\theta^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

Ce résultat implique que tous les signaux de système d'attitude en boucle fermée sont bornés.

3.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre la synthèse d'un contrôleur hiérarchique. Celle-ci permet de réaliser des commandes séparées pour la position et l'attitude du quadrotor. Pour le contrôle de position nous avons proposé une méthode de commande dans le cas où aucune

mesure de vitesse linéaire n'est disponible, à travers cette mesure nous pouvons calculer la force de poussée et les orientations désirées. Tandis que, pour le contrôle d'attitude, l'application d'une approche backstepping a permet de calculer des contrôleurs virtuels dans le but de rendre la fonction du Lyapunov candidate définie négative et conclure le vecteur approprié pour la commande des couples. Finalement, la stabilité du système est prouvée en étudiant chacun des sous-systèmes en boucle fermée de position et d'attitude.

CHAPITRE 4

VALIDATION DU CONTRÔLEUR HIÉRARCHIQUE

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats de la simulation du contrôleur hiérarchique démontré dans le chapitre précédent. Il présente en premier temps le modèle de simulation et tous les paramètres pouvant influencer le comportement du contrôleur. Trois méthodes ont été effectuées pour valider la performance de la loi de commande proposée : la première consiste à tester cette approche avec trois différentes trajectoires, la deuxième présente une comparaison entre les performances délivrées par ce régulateur hiérarchique par rapport à celle données par le régulateur par mode glissant. Tandis que la troisième méthode consiste à analyser le comportement de cette commande vis à vis des perturbations externes. Pour finir, on a proposé d'ajouter à ce contrôleur une action intégrale afin de lui apporter plus de robustesse.

4.2 Présentation du modèle

Le modèle de simulation du quadrotor a été testé sous Matlab/Simulink à l'aide des outils M-Function, sa structure illustrée dans la figure 4.1 est composée par 5 blocs principaux :

- La génération de trajectoire : ce bloc délivre 4 signaux de référence $[x_d, y_d, z_d, \psi_d]$ que le contrôleur doit suivre.
- Le contrôleur : il est composé en deux sous-systèmes mis en cascade (position, attitude), il est adapté en fonction de l'erreur entre la valeur de consigne souhaitée et la valeur mesurée par les capteurs.

- La dynamique du quadrotor : il contient les équations dynamiques qui décrivent le mouvement du quadrotor, ses équations sont arrangées dans une représentation d'état.
- La dynamique du moteur : ce bloc décrit le comportement des moteurs, il est modélisé par une fonction de transfert de premier ordre qui calcule les vitesses angulaires convenables à celles attendues par le dispositif de commande.
- Les capteurs : sont modélisés comme étant parfaits, ils sont obtenus par une intégration des états de système.

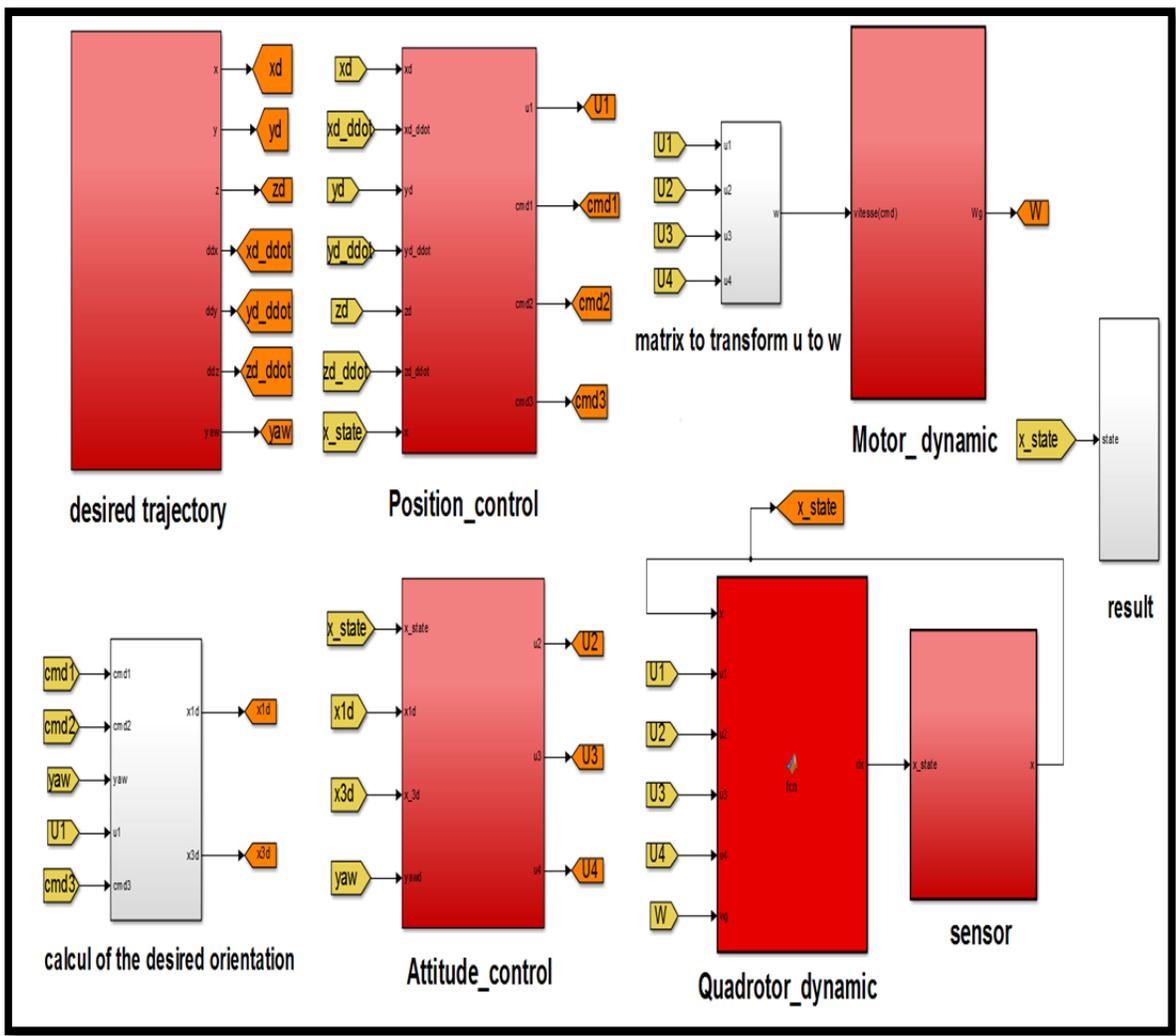


Figure 4.1 Le schéma du modèle de simulation

4.3 Simulation du contrôleur hiérarchique

Dans cette section, nous analysons la performance de la mise en place de l'approche hiérarchique proposée. Le modèle Simulink choisi comporte un grand nombre de paramètres qui peuvent influencer le comportement de la simulation, tel que les paramètres spécifiques au quadrotor, et les paramètres liés au Matlab ainsi les gains de contrôleurs. Ils sont respectivement répertoriés dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3.

Tableau 4.1 Les valeurs des paramètres de quadrotor

Paramètres	Valeurs
La masse du quadrotor (Kg)	1.169
Le moment d'inertie du quadrotor le long de x (Kg.m ²)	0.024
Le moment d'inertie du quadrotor le long de y (Kg.m ²)	0.024
Le moment d'inertie du quadrotor le long de z (Kg.m ²)	0.032
Coefficient de poussée (N.s ²)	0.0000141871313812
Coefficient de traînée (N.m . s ²)	0.00000184
Le moment d'inertie de rotor (Kg.m ²)	0.000078187598
La longueur du bras entre le rotor et le centre de gravité du quadrotor (m)	0.2125

Ces paramètres du quadrotor sont tirés du club dronolab, tel que les moments des inerties ont été mesurés à l'aide d'un modèle CAO réalisé par le logiciel CATIA.

Tableau 4.2 Les paramètres du Matlab/Simulink

Paramètres	Valeurs
Solveur	Ode4 (Runger-Kutta)
Pas de calcul	0.001 s

Tableau 4.3 Gains du contrôleur hiérarchique

Gain	Valeurs
Les gains de filtre pour l'estimation de vitesse linéaire	$A = [40, 40, 40]^T$
	$B = [30, 30, 30]^T$
Les gains de la commande intermédiaire de position	$k_p = [160, 160, 160]^T$
	$k_d = [20, 20, 20]^T$
Les gains de la commande d'orientation	$k_\phi = 4$
	$k_\theta = 8$
	$k_\psi = 4$
Les gains de la commande des vitesses angulaires	$k_e = [7, 7, 7]^T$

Les gains de contrôleur de position sont choisis de cette façon en suivant les conditions présentées dans la partie 3.5.3 du chapitre 3, afin d'assurer la stabilité en boucle fermée de

sous-système de position. Pour le contrôleur d'attitude les gains k_ϕ et k_θ permettent de créer des limites aux angles d'orientations roulis et tangage.

4.3.1 Vol stationnaire

C'est la trajectoire la plus simple pour un quadrotor. Dans ce cas, ce robot volant se maintient à une altitude fixe dans l'espace, et il a la liberté de faire juste des mouvements de rotations.

Pour cette manœuvre les positions de référence sont données par :

$$\begin{cases} x_d(t) = 0 \\ y_d(t) = 0 \\ z_d(t) = (1 - e^{-\frac{t}{10}}) \end{cases} \quad \text{et } \psi_d(t) = \frac{\pi}{4} \text{ si } 20 \leq t \leq 30 \quad (4.1)$$

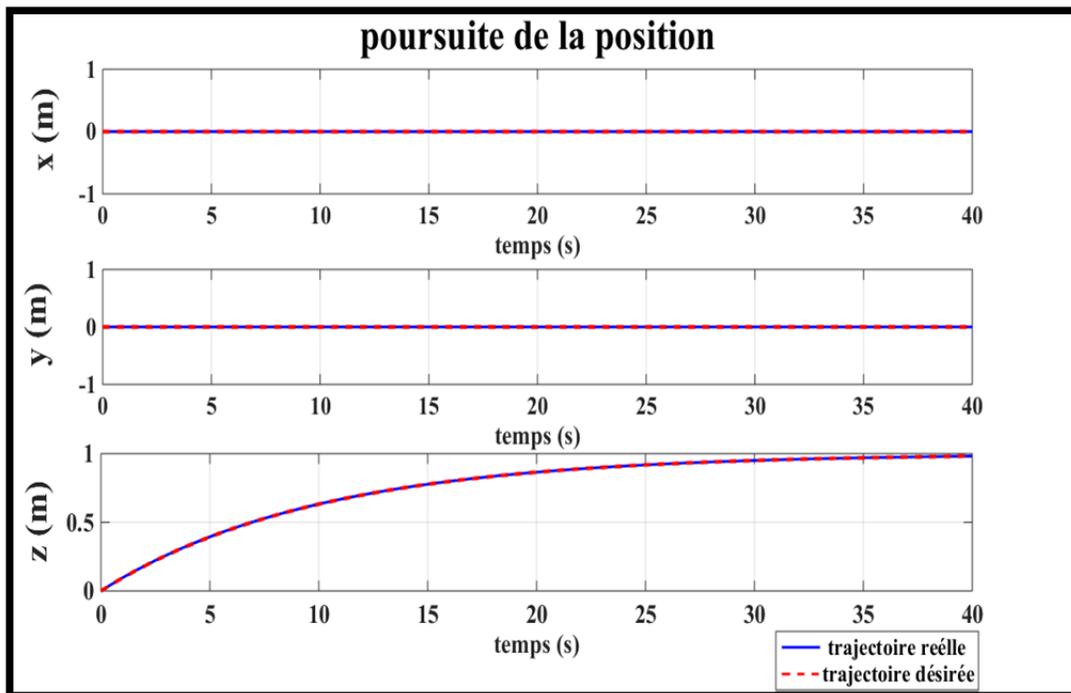


Figure 4.2 Simulation des positions linéaires en vol stationnaire

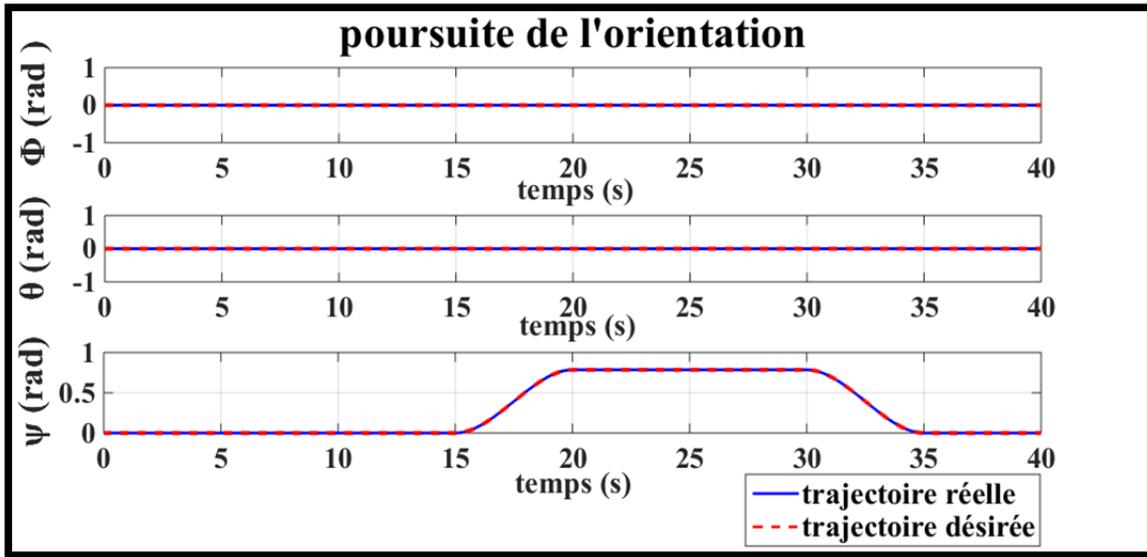


Figure 4.3 Simulation des positions angulaires en vol stationnaire

D'après les figures 4.2 et 4.3, on peut voir que le contrôleur réalise une poursuite de cette trajectoire stationnaire pour les positions linéaires et angulaires. Pour ce type de manoeuvre, le quadrotor atteint son point de référence en augmentant sa vitesse linéaire d'une manière exponentielle, ce qui nécessite plus de vitesse dans les premiers instants de démarrage et qui peut causer une erreur dans la poursuite. Dans ce cas cette erreur ne dépasse pas le 5×10^{-3} m. On peut noter aussi que l'erreur de l'angle de lacet est de l'ordre de 10^{-4} rad. Ces résultats sont démontrés dans la figure 4.4.

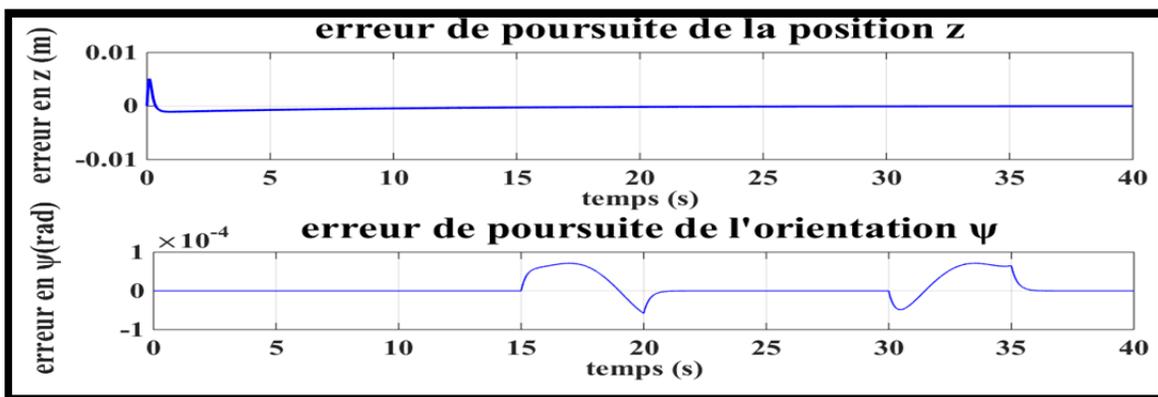


Figure 4.4 Erreur de suivi en vol stationnaire

4.3.2 Trajectoire agressive

Dans le deuxième scénario de simulation, le contrôleur est testé avec une trajectoire agressive. Ce mouvement résulte de la variation rapide des positions linéaires, le profil de cette trajectoire est conçu avec un polynôme d'ordre 3 ce qui permet d'avoir des trajectoires lisses pour les positions et les accélérations linéaires. La mission de vol est illustrée dans le tableau suivant :

Tableau 4.4 Scénario de vol

Point	x	y	z	Lacet (rad)
1	0	0	0	0
2	18	0	8	0
3	18	-18	5	$-\frac{\pi}{4}$
4	0	-18	8	0
5	0	0	0	0

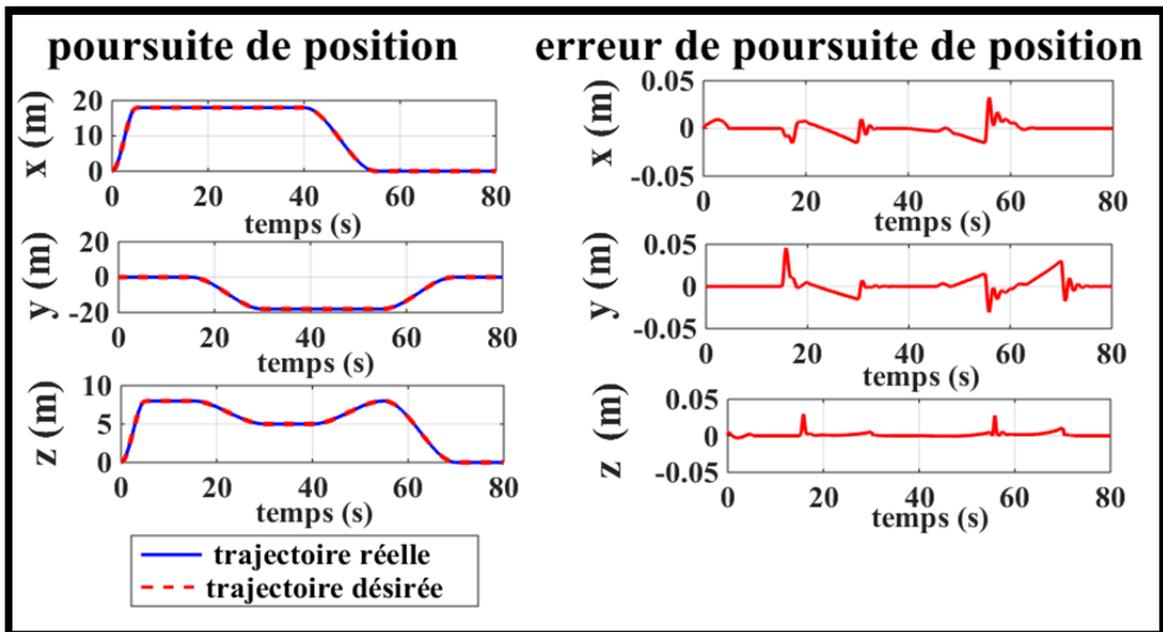


Figure 4.5 Poursuite des positions linéaires pour une trajectoire agressive

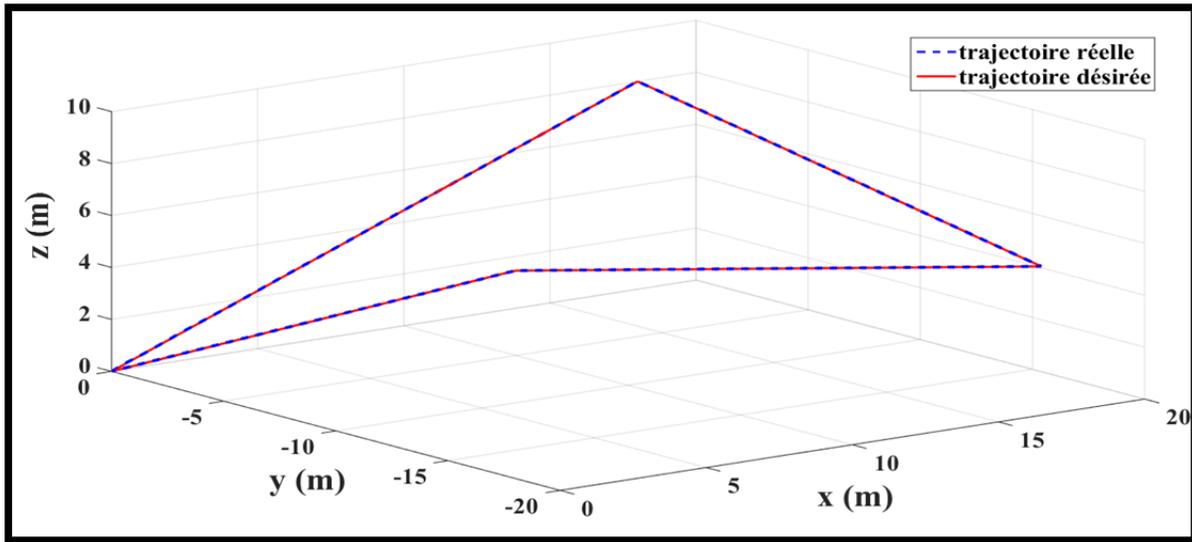


Figure 4.6 Simulation tridimensionnelle pour une trajectoire agressive

Comme le montre la figure 4.5, il est clair que le régulateur hiérarchique assure la poursuite de la consigne de sous-système de translation, avec des faibles erreurs qui ne dépassent pas le 0.03 m pour les positions x et z et une erreur maximale de 0.05 m pour la position y . Ce résultat est bien visualisé dans une représentation tridimensionnelle dans la figure 4.6.

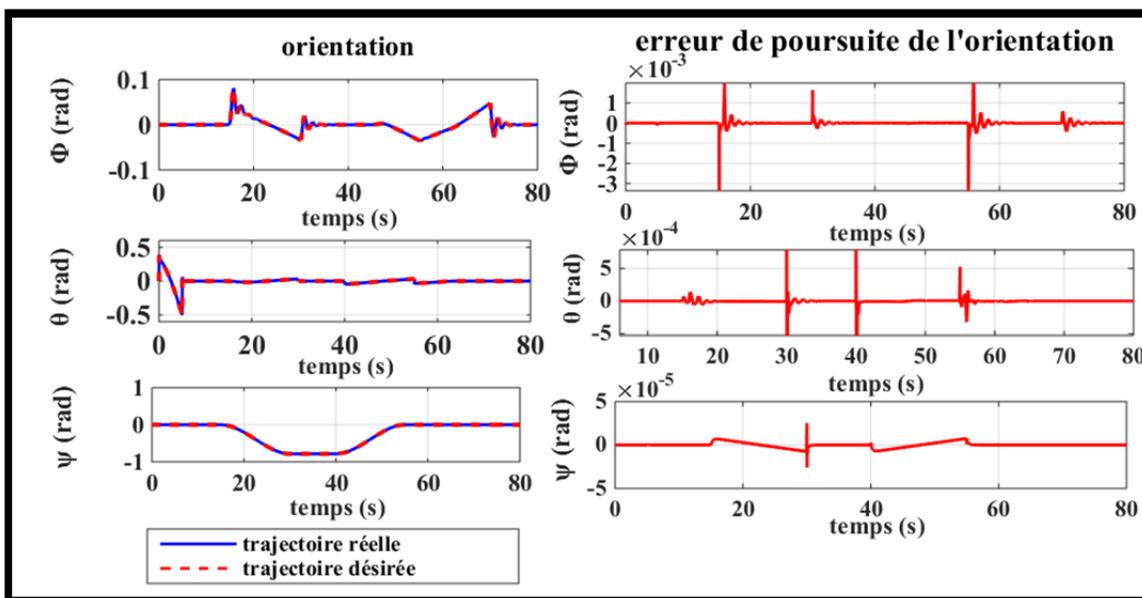


Figure 4.7 Poursuite des positions angulaires pour une trajectoire agressive

L'exécution de cette trajectoire agressive se manifeste dans le changement brusque des angles d'orientation tel que l'angle de tangage peut atteindre simultanément l'angle $-\frac{\pi}{6}$. Cela apparaît nettement dans la figure 4.7 à droite par la présence de plusieurs discontinuités dans les instants de passage entre deux trajectoires, lors de 15^e , 30^e , 40^e , 55^e seconde. Le contrôleur proposé montre son aptitude à exécuter ce genre de manœuvre en assurant la poursuite de la trajectoire désirée d'une part, et d'autre part en offrant l'option de garder les valeurs des angles de roulis et de tangage dans le bon intervalle, en évitant le dépassement de ces valeurs vers des valeurs limites de singularités. Cette option est bien garantie grâce à la fonction barrière de Lyapunov. Les caractéristiques de cette fonction sont données à l'ANNEXE III.

Finalement, nous pouvons mentionner à partir de la figure suivante que l'usage d'un filtre non linéaire dans le contrôleur de position fournit une estimation acceptable de la vitesse linéaire avec des erreurs maximales de l'ordre de 0.1 (m/s).

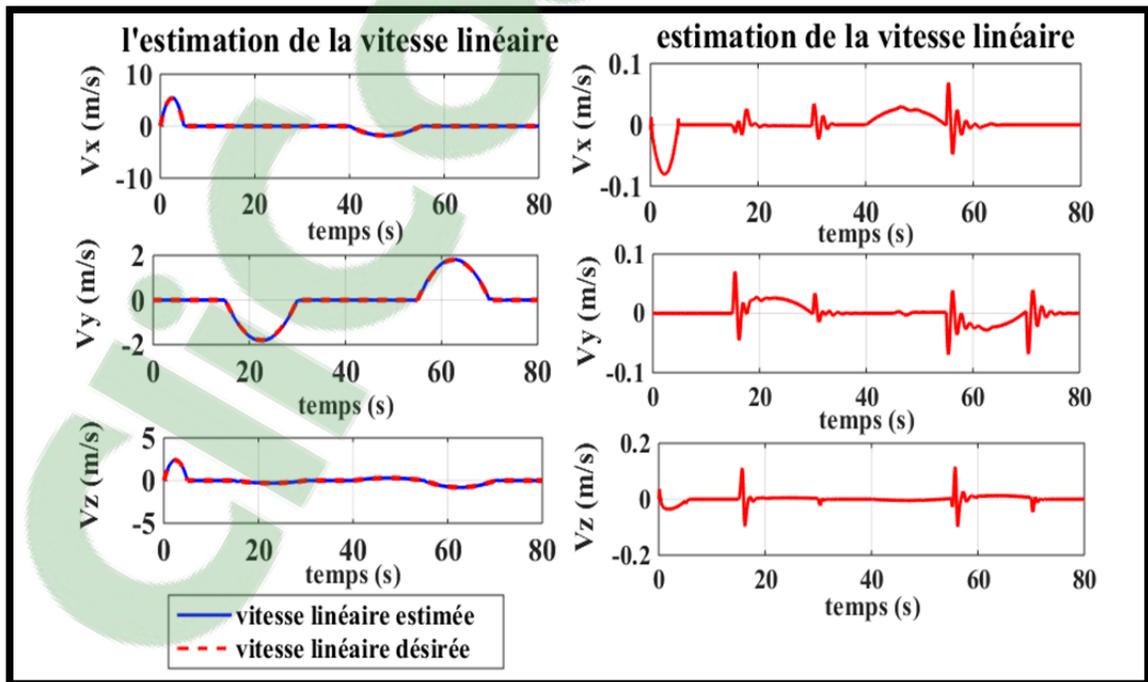


Figure 4.8 Estimation des vitesses linéaires pour une trajectoire agressive

4.3.3 Trajectoire hélicoïdale

La dernière simulation présente une trajectoire complexe sous forme spirale. Dans ce mouvement le quadrotor exécute un mouvement circulaire dans les directions longitudinales et latérales. Cette trajectoire de référence est décrite par des équations sinusoïdales pour les positions x et y qui varient dans le temps en fonction de l'allure de la position z . Ce dernier est conçu avec un polynôme d'ordre trois pour apporter plus de souplesse à la commande.

Les courbes décrivant la réponse de système en position, vitesse linéaire et attitude sont illustrées dans les figures (4.9) (4.10) (4.11) (4.12): pour l'ensemble des degrés de liberté du quadrotor. Comme pour les autres essais les variables des positions et d'orientations commencent toujours par zéro.

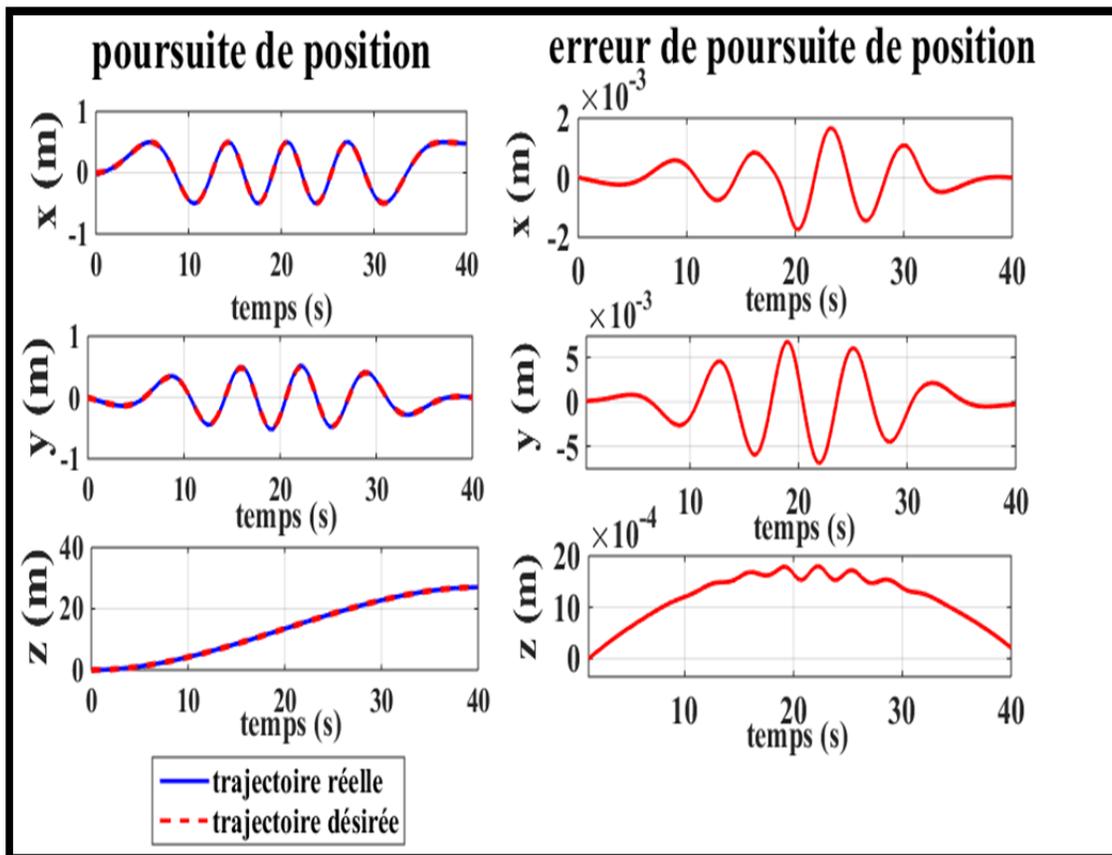


Figure 4.9 Poursuite des positions linéaires en vol hélicoïdale

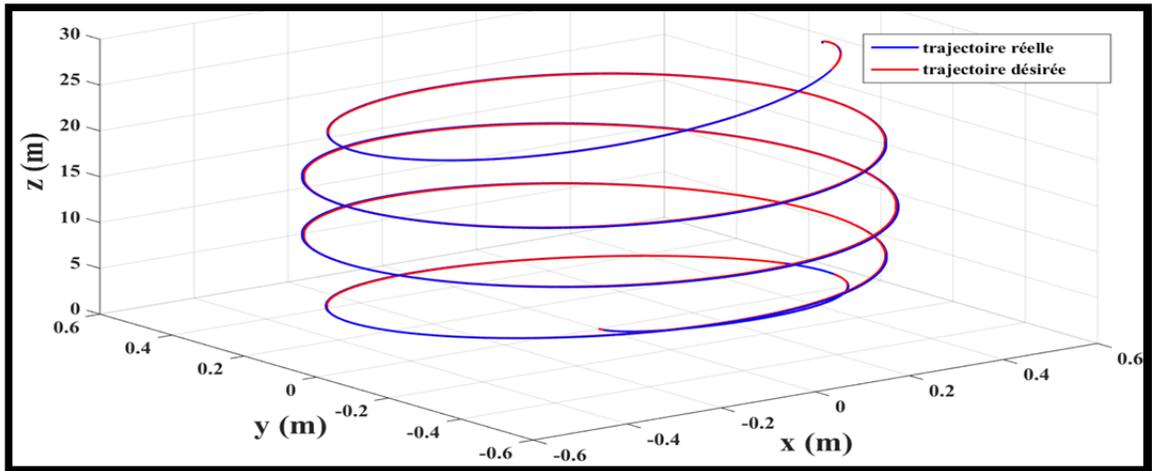


Figure 4.10 Représentation tridimensionnelle des positions linéaires en vol hélicoïdale

Il est visible d'après la figure 4.9 que pour une trajectoire ayant une altitude maximale de 30 m, l'erreur de poursuite ne dépasse pas le 0.005 m. Plus de détails sont fournis dans une représentation à trois dimensions dans la figure 4.10. Nous pouvons remarquer aussi que le suivi de la consigne de la position est atteint sans avoir besoin de la mesure de la vitesse linéaire et l'estimation de ce paramètre offre des résultats raisonnables ce qui démontre la figure 4.11.

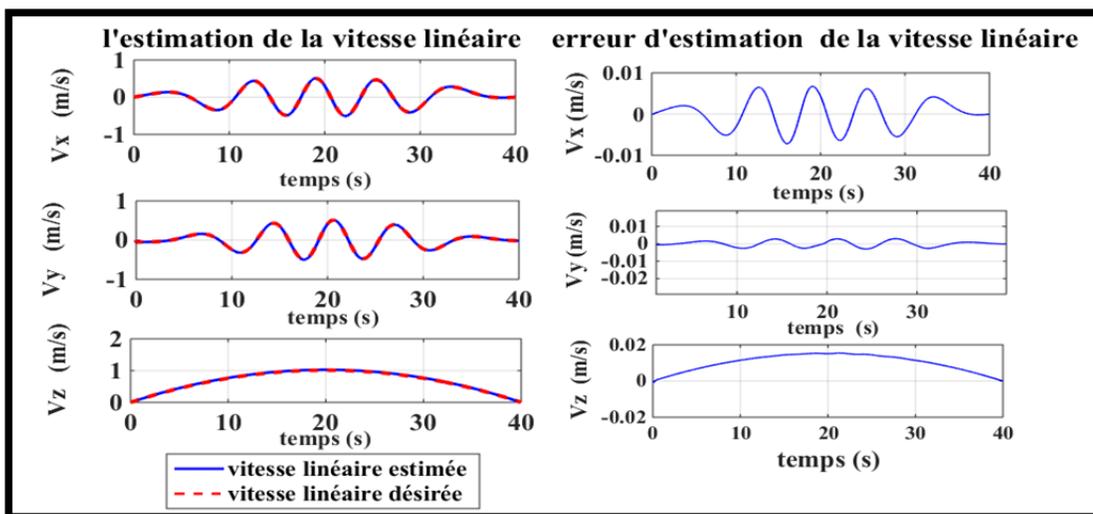


Figure 4.11 Estimation de la vitesse linéaire en vol hélicoïdale

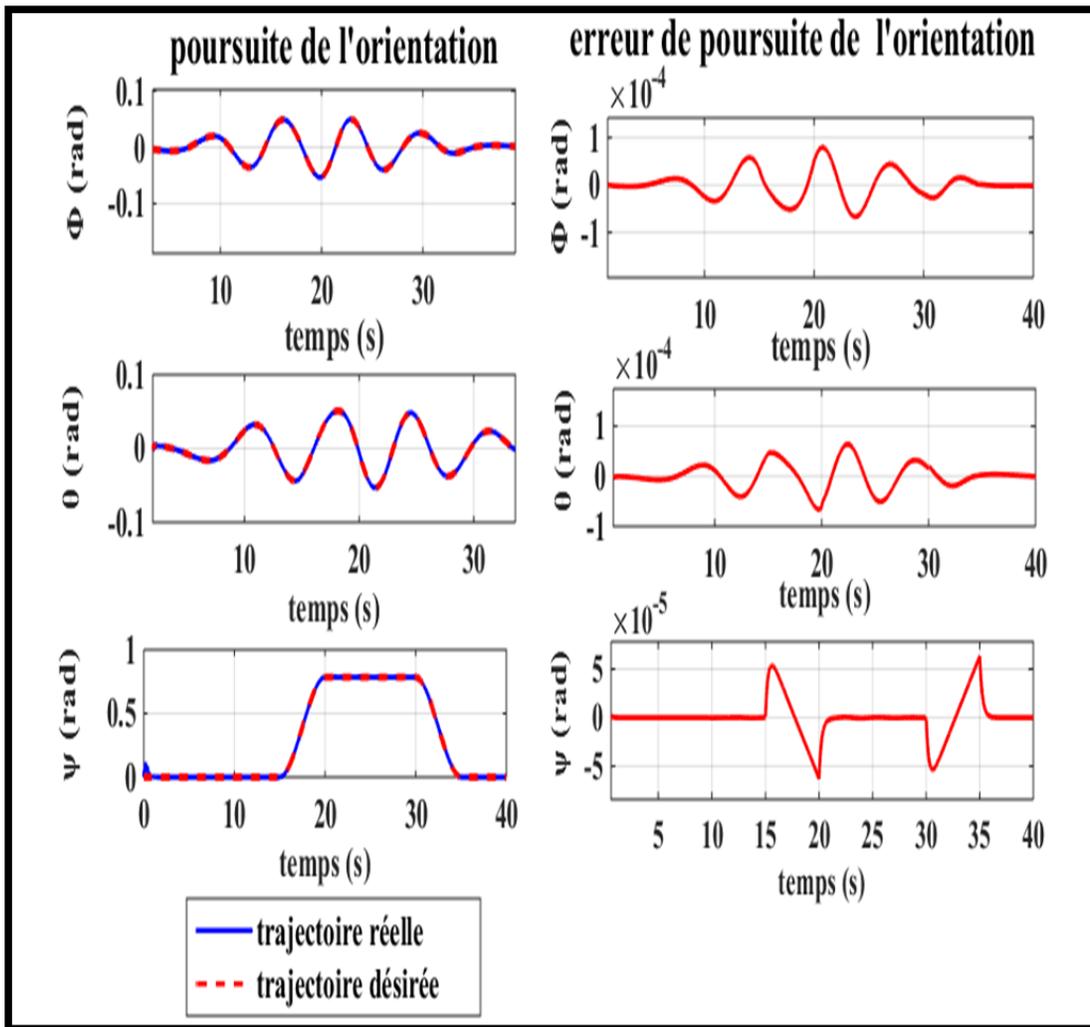


Figure 4.12 Poursuite des positions angulaires en vol hélicoïdale

Dans ce type de trajectoire, les angles de roulis et de tangage obtenus ont une forme sinusoïdale avec des conditions initiales souples et faisables par le quadrotor. Cette performance est liée au caractéristique de la fonction barrière de Lyapunov. Il est bien démontré dans l'ANNEXE III en faisant une comparaison entre un contrôleur Backstepping conçu avec des fonctions barrières et un autre conçu avec des fonctions quadratiques. D'autre part on remarque que les erreurs de suivi sont très faibles de l'ordre de 10^{-5} rad pour l'angle de lacet et de 10^{-4} rad pour les angles de roulis et de tangage ce qui démontre la figure 4.12.

4.4 Comparaison du contrôleur hiérarchique avec la commande par mode glissant

La commande par mode glissant est une commande non linéaire très connue dans la littérature par sa robustesse vis à vis aux perturbations externes. Nous voulons dans cette partie faire une comparaison entre la performance de cette commande et la commande hiérarchique choisie. La structure de simulation à haut niveau du contrôleur par mode glissant est représentée par la figure 4.13. Pour avoir plus de détails sur les équations et la structure de cette commande, nous citons la mémoire de (Hicham, 2012).

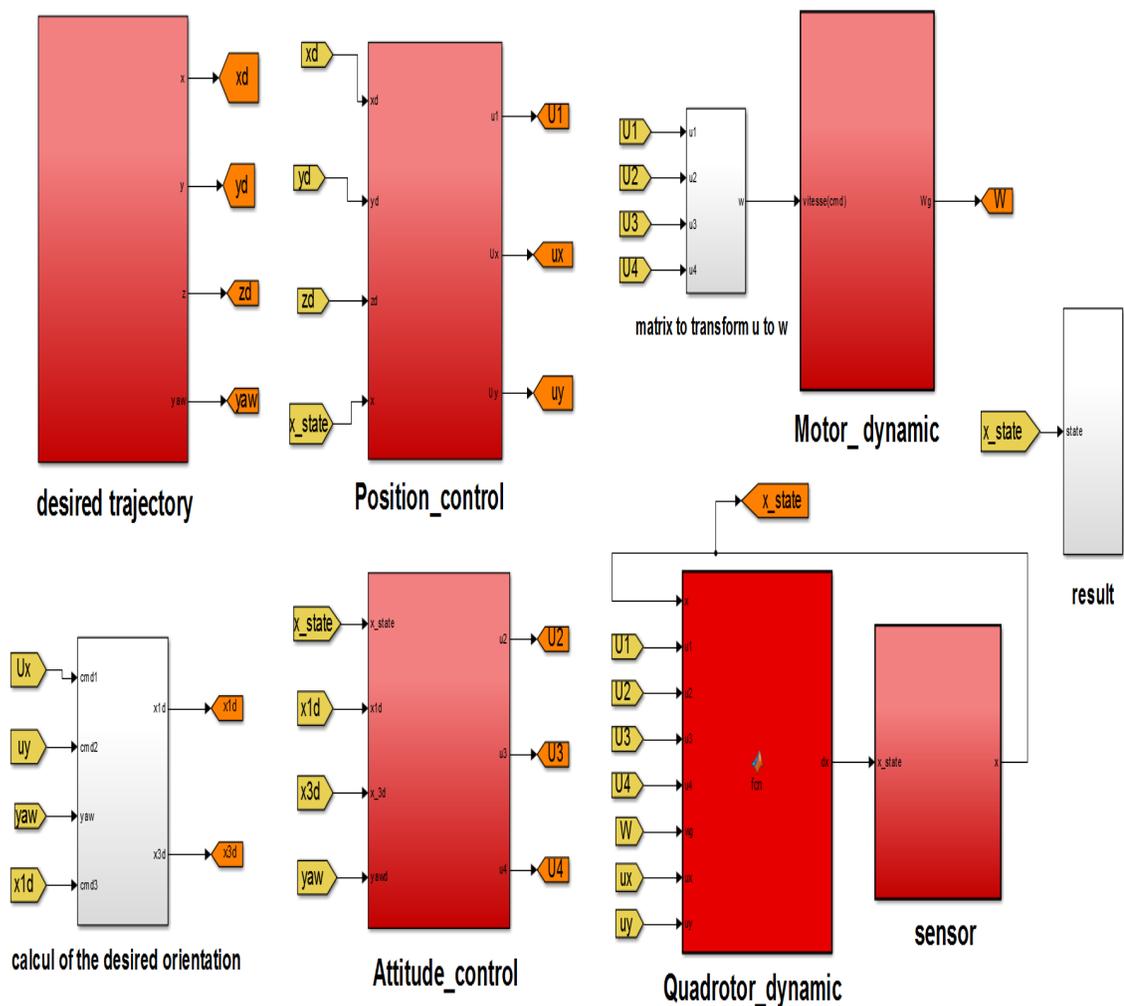


Figure 4.13 Le schéma du modèle de simulation de la commande par mode glissant

Ce modèle Simulink est testé sur la trajectoire hélicoïdale décrite précédemment. Ce qui permet de comparer la performance de la mise en œuvre de la commande hiérarchique par rapport à la commande par mode glissant. Les courbes de positions et d'orientations sont présentées dans les figures 4.14 et 4.15.

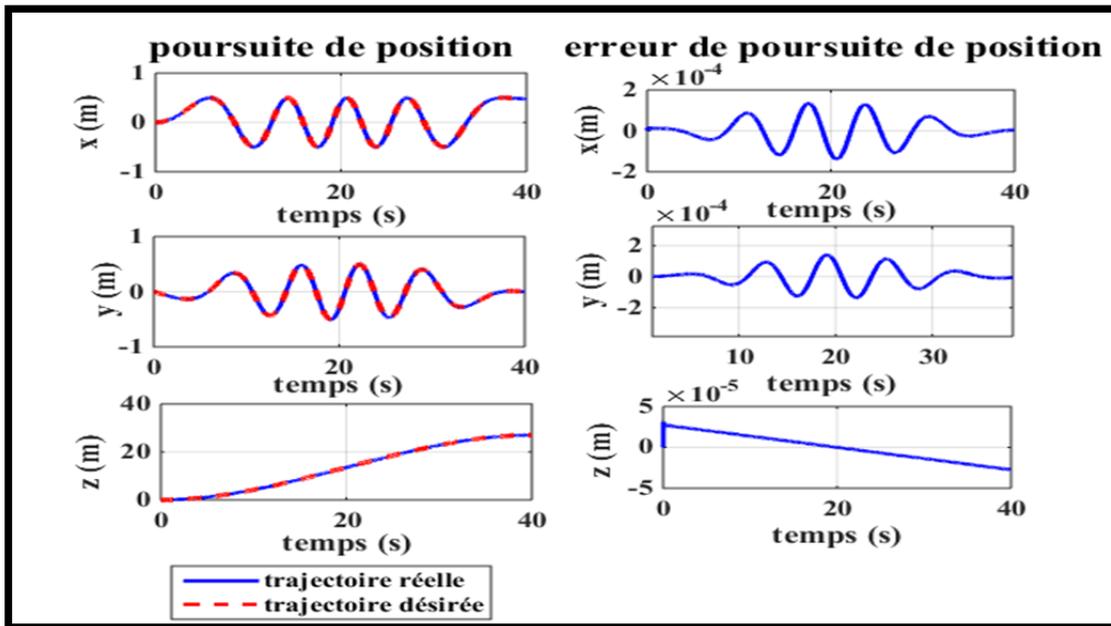


Figure 4.14 Poursuite des positions linéaires pour la commande par mode glissant

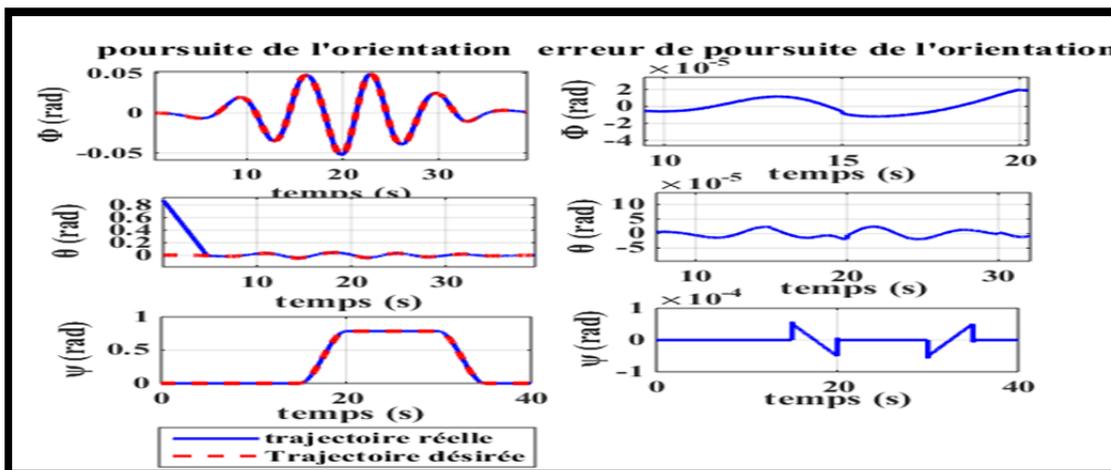


Figure 4.15 Poursuite des positions angulaires pour la commande par mode glissant

Le contrôleur par mode glissant assure la poursuite de trajectoire désirée avec une meilleure précision, tel que l'erreur est de l'ordre de 10^{-4} m pour les positions x et y et une erreur de l'ordre de 10^{-5} m sur l'axe z . Contrairement aux erreurs données par la commande hiérarchique qui sont de l'ordre de 10^{-3} m. Pour les angles de roulis et de tangage, on peut remarquer aussi que la commande par mode glissant possède un meilleur suivi de la référence avec une erreur de 10^{-5} rad. Alors que la commande hiérarchique est mieux dans la poursuite de l'angle de lacet avec une erreur de 10^{-5} rad. Dans le but de donner un aspect pratique dans la comparaison entre ces deux approches, nous choisissons dans la partie suivante une comparaison selon les couples et la force de poussée.

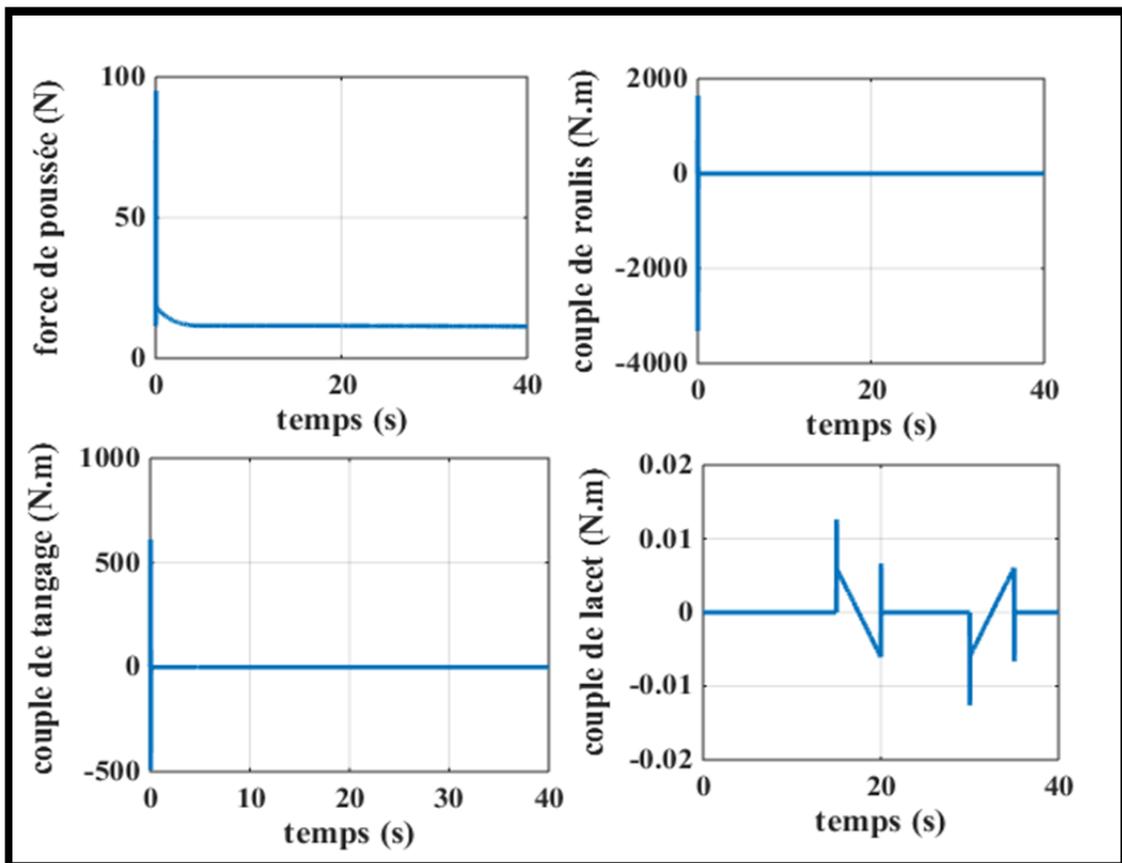


Figure 4.16 La force de poussée et les couples de la commande par mode glissant

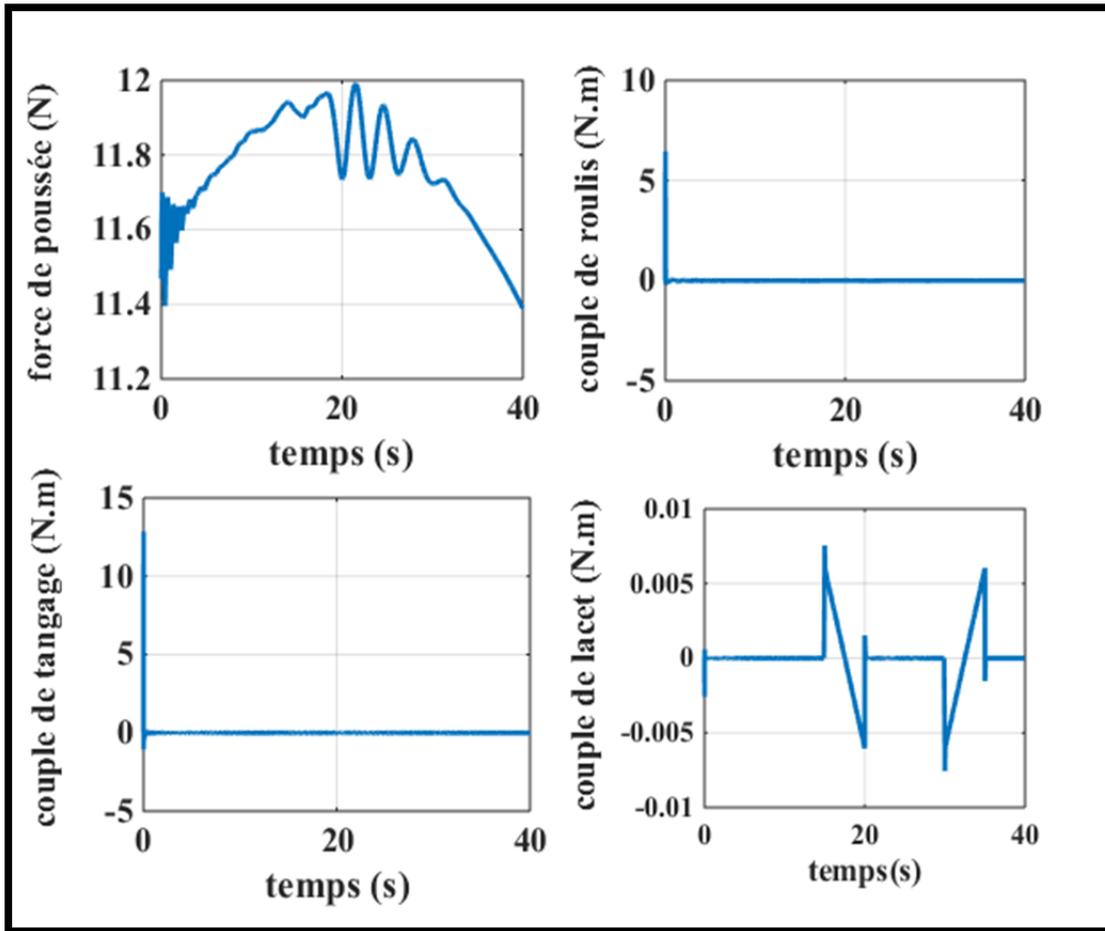


Figure 4.17 La force de poussée et les couples de la commande hiérarchique

Malgré la performance démontrée par le contrôleur par mode glissant dans le suivi de consigne, les commandes fournies par cette approche ne sont pas réalisables sur un vrai quadrotor. Comme on peut voir dans la figure 4.16 que la force de poussée peut atteindre le 100 N et que le couple de roulis et de tangage dépassent des grandes valeurs de l'ordre de 600 N.m et 1800 N.m. Alors que dans la figure 4.17, on peut visualiser que le contrôleur hiérarchique possède des commandes souples et faisables tel que la force de poussée est bornée et ne dépasse pas le 12 N, de même pour les couples de roulis et de tangage qui ont des valeurs maximums de 11 N.m et pour le couple de lacet qui a des valeurs faibles de l'ordre de 0.01 N.m. Plus de détails sont fournis dans les figures 4.18 et 4.19 en faisant un zoom sur les premiers instants de simulation.

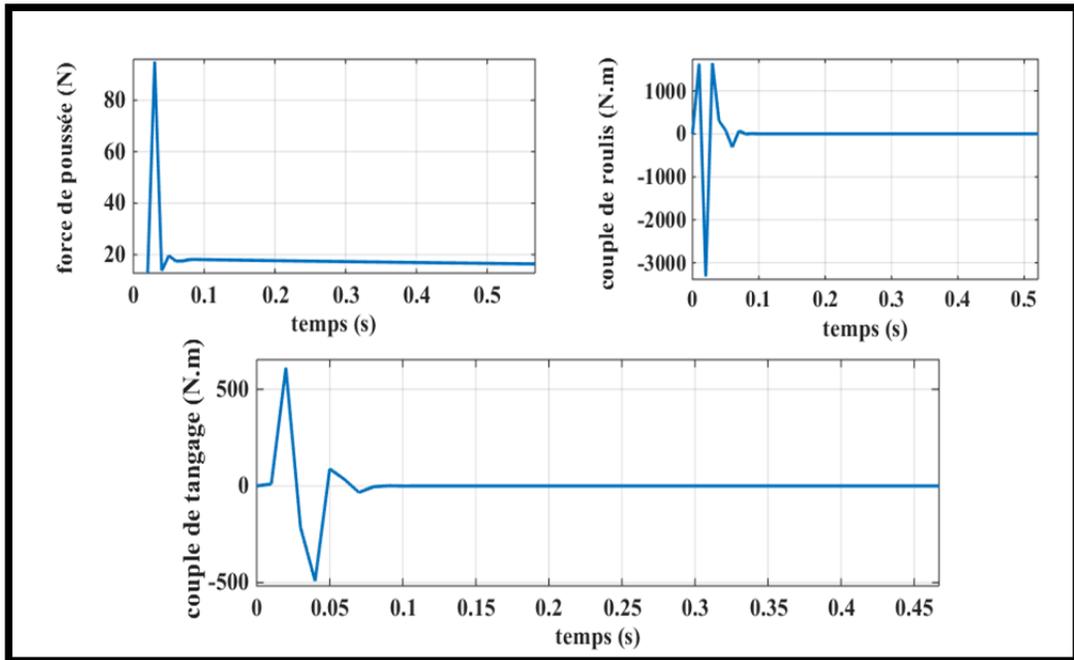


Figure 4.18 La force de poussée et les couples de la commande par mode glissant en régime transitoire

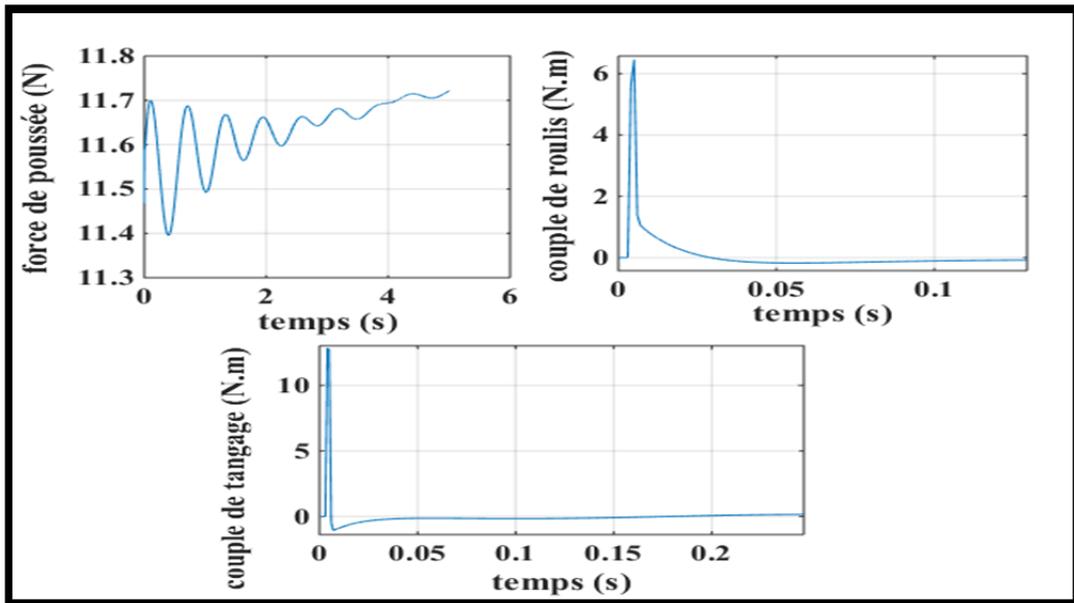


Figure 4.19 La force de poussée et les couples de la commande hiérarchique en régime transitoire

4.5 L'analyse de la robustesse du contrôleur vis à vis aux perturbations externes

4.5.1 Comportement du contrôleur simple

Après avoir démontré l'efficacité du contrôleur à effectuer des trajectoires complexes, ainsi que la performance de cette commande à fournir des valeurs des couples et de force de poussée convenables pour le quadrotor. Nous voulons maintenant analyser son comportement en présence des incertitudes extérieures. Pour cela nous avons rajouté une perturbation dans la dynamique de système ayant une expression proche de l'équation de vent (Raptis, 2010). Cette expression s'écrit sous la forme sinusoïdale suivante :

$$\delta(t) = 2.5 \cos(2\pi t) \quad (4.2)$$

Les tests de simulation sont effectués sur une trajectoire stationnaire. Les figures suivantes présentent respectivement l'évolution dans le temps des angles de rotation et des positions du quadrotor :

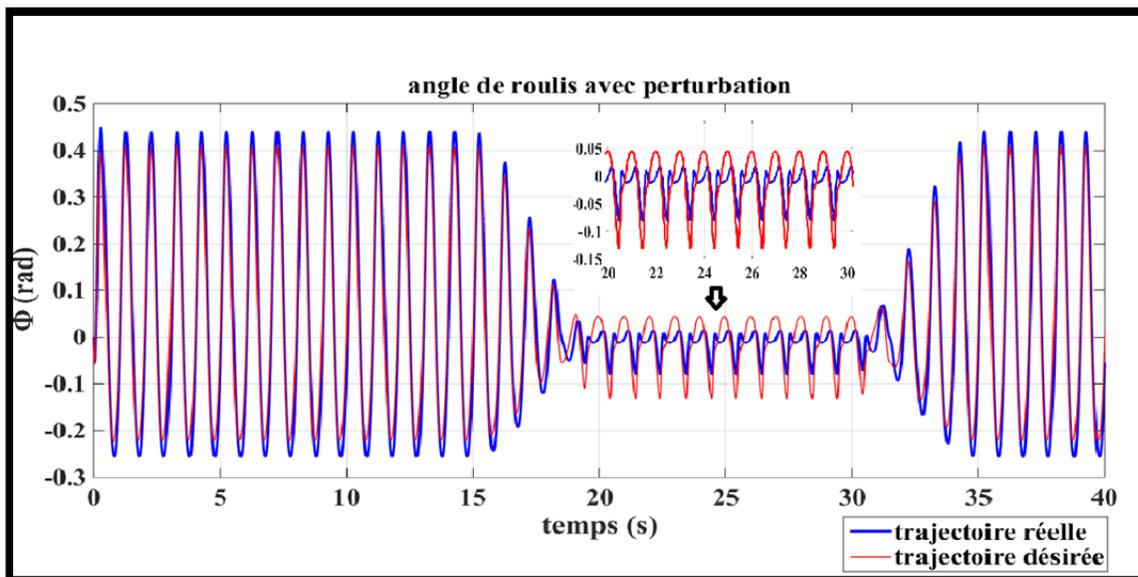


Figure 4.20 Poursuite de l'angle de roulis sous l'effet de perturbation

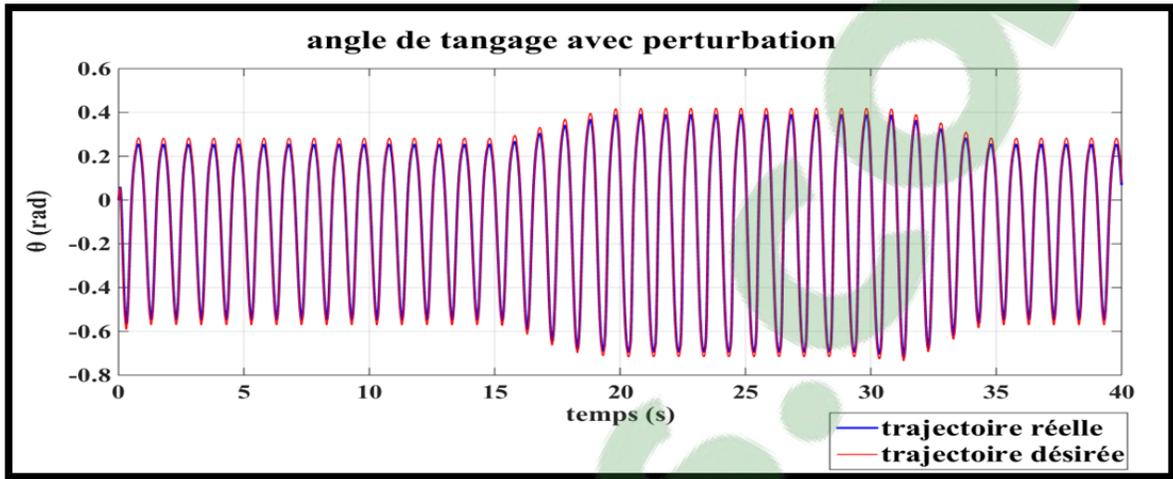


Figure 4.21 Pursuite de l'angle de tangage sous l'effet de perturbation

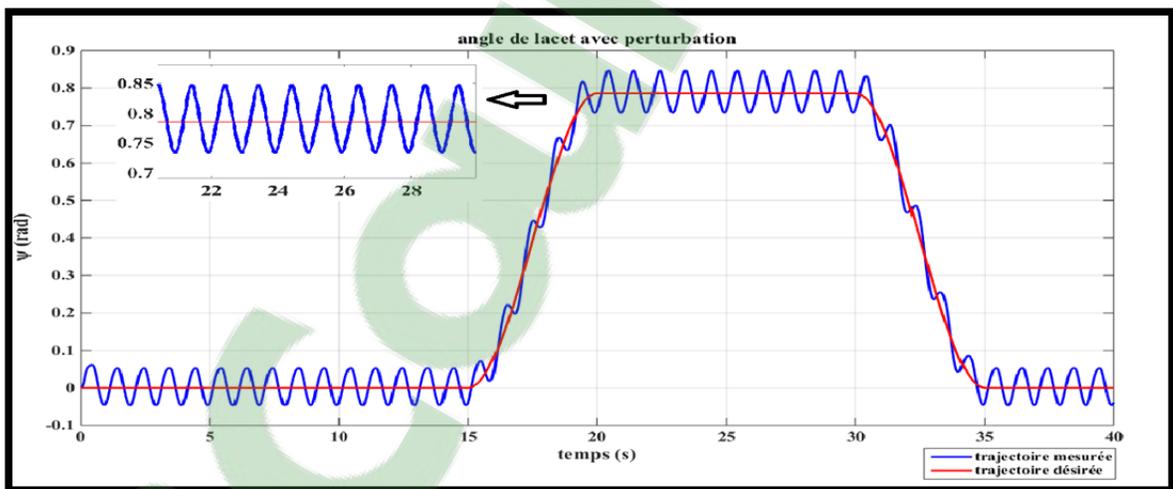


Figure 4.22 Pursuite de l'angle de lacet sous l'effet de perturbation

Les figures 4.20, 4.21 et 4.22 montrent que les angles de rotation subissent une transformation sous l'effet de la perturbation : tel que les angles de roulis et de tangage exécutent un mouvement sinusoidal au lieu de rester à l'état normal à zéro, l'amplitude de cette oscillation varie en fonction de l'évolution de l'angle de lacet. Ce dernier présente également des ondulations durant la mission de vol ayant une amplitude de 0.1 rad. Malgré, toutes ces contraintes on peut visualiser que le suivi des angles de rotation est bien établi, ce qui démontre la robustesse de contrôleur backstepping vis à vis à ce genre de perturbation .

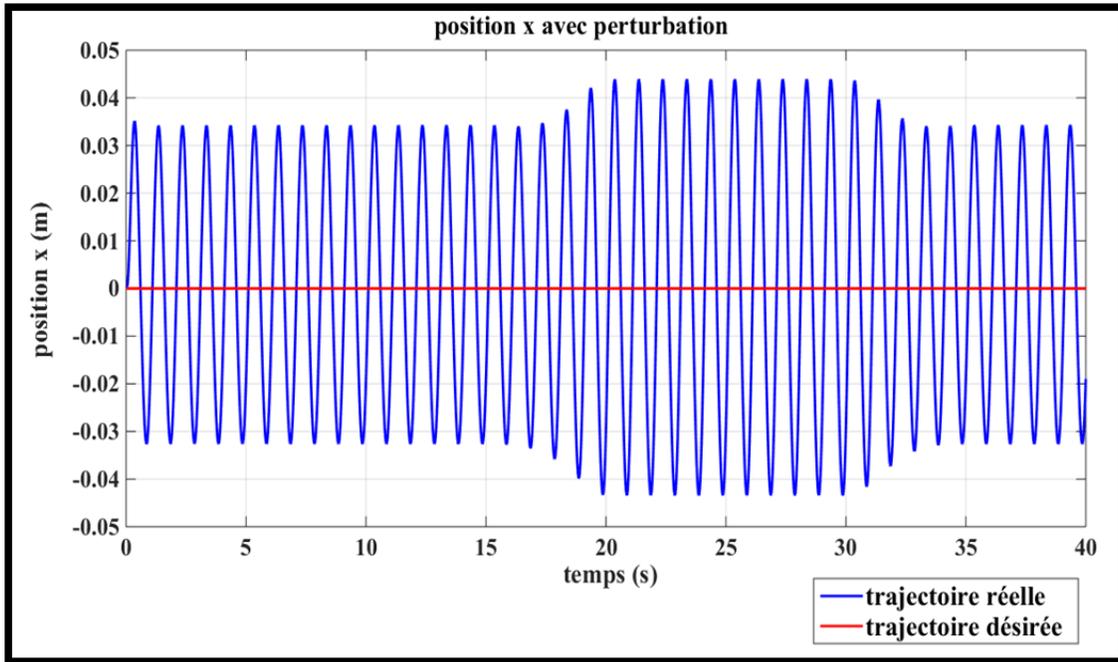


Figure 4.23 Poursuite la position linéaire x sous l'effet de perturbation

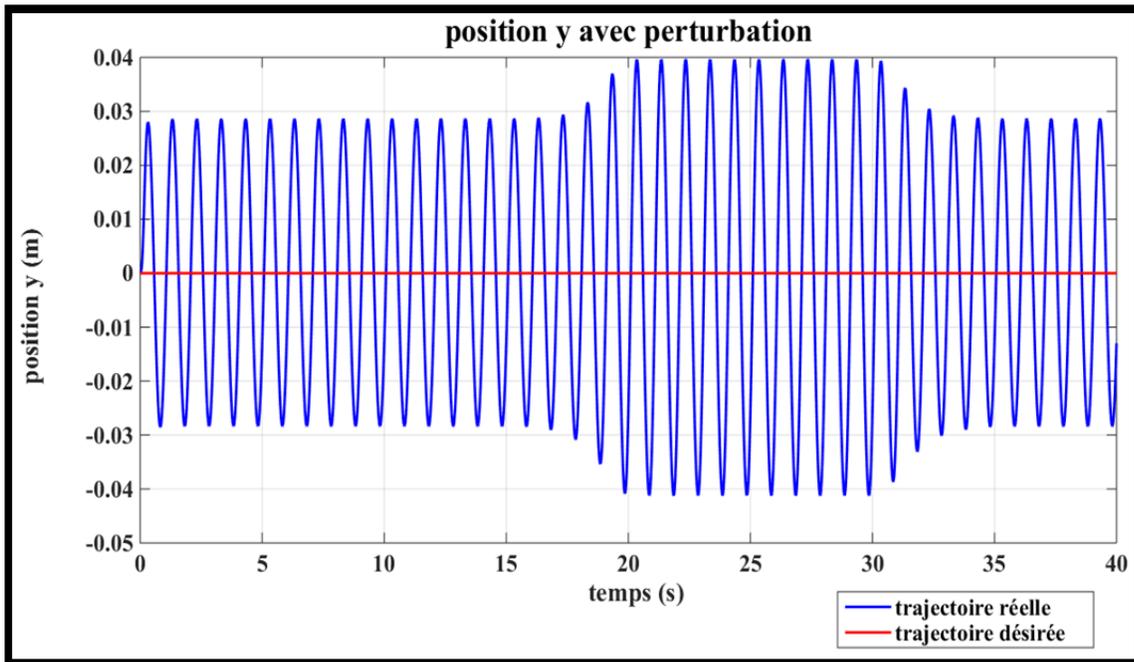


Figure 4.24 Poursuite la position linéaire y sous l'effet de perturbation

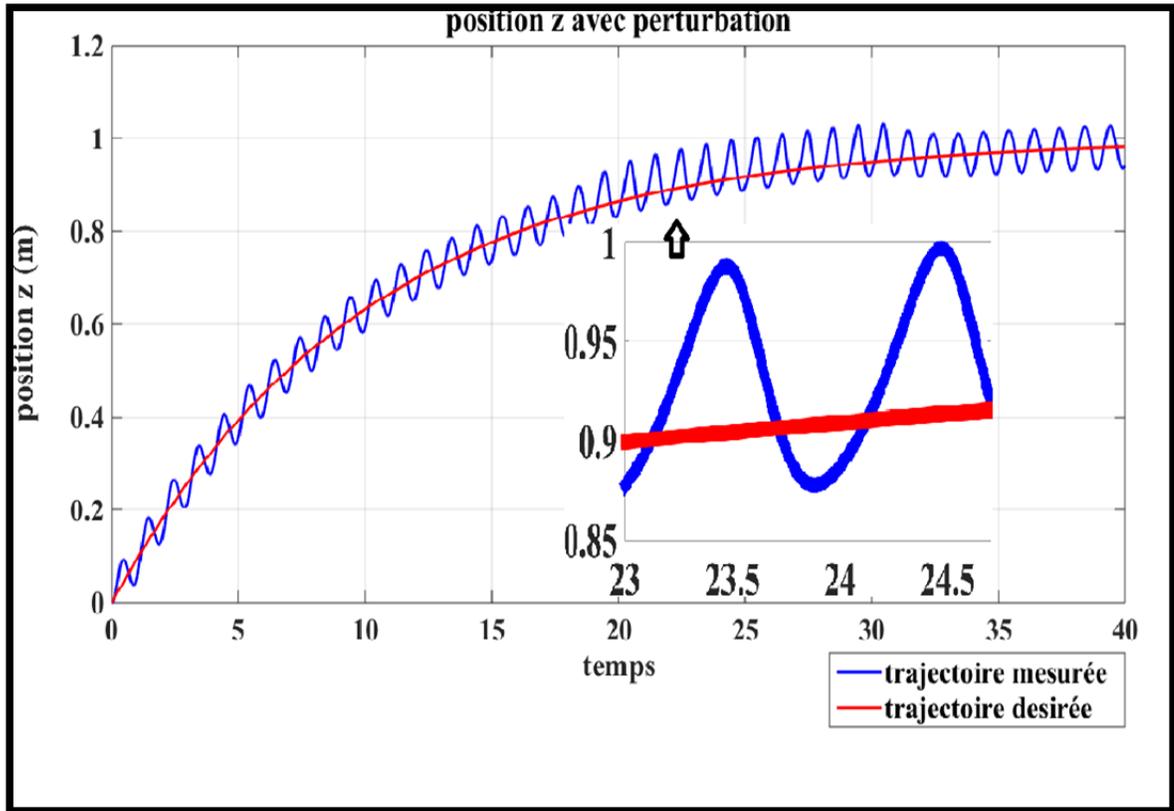


Figure 4.25 Poursuite la position linéaire Z sous l'effet de perturbation

À propos des positions linéaires x et y , nous pouvons constater que le maximum d'erreur de poursuite réside lorsque l'angle de lacet atteint sa valeur maximale $\frac{\pi}{4}$. Pour la position x , l'erreur peut aller jusqu'à 0.044 m, alors que pour la position y l'erreur se limite à 0.04 m. Comme pour l'angle de lacet, la position Z présente des ondulations ayant des amplitudes constantes d'une valeur de 0.1 m.

4.5.2 L'effet de l'action intégrale

Dans cette section, nous voulons améliorer la performance du contrôleur hiérarchique vis à vis aux perturbations externes. Pour cela on applique la commande avec effet intégrale déjà présentée dans la partie 3.7 du chapitre précédent. Les gains de ce contrôleur sont répertoriés dans le tableau 4.5.

Tableau 4.5 Gains du contrôleur hiérarchique avec effet intégrale

Gain	Valeurs
Les gains de filtre pour l'estimation de vitesse linéaire	$A = [40, 40, 40]^T$
	$B = [30, 30, 30]^T$
Les gains de la commande intermédiaire de position	$k_p = [160, 160, 160]^T$
	$k_d = [20, 20, 20]^T$
	$\alpha = 8$
Les gains de la commande d'orientation	$k_\phi = 4, \lambda_{1\phi} = 100, \lambda_{2\phi} = 100$
	$k_\theta = 8, \lambda_{1\theta} = 100, \lambda_{2\theta} = 100$
	$k_\psi = 4, \lambda_{1\psi} = 100, \lambda_{2\psi} = 100$
Les gains de la commande des vitesses angulaires	$k_e = [7, 7, 7]^T$

Les résultats numériques de simulations sont effectués sur la même trajectoire stationnaire afin d'avoir une étude comparative entre le contrôleur simple et le contrôleur avec une action intégrale. Les courbes de position et d'attitude sont illustrées dans les figures suivantes.

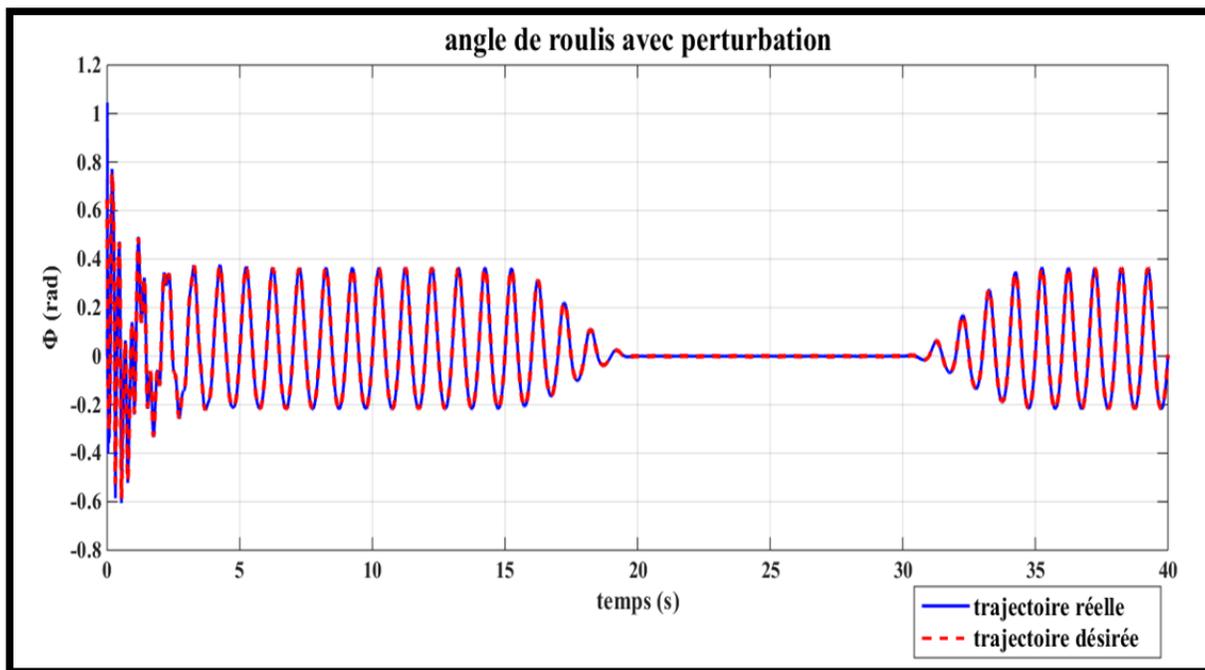


Figure 4.26 Simulation de l'angle de roulis en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

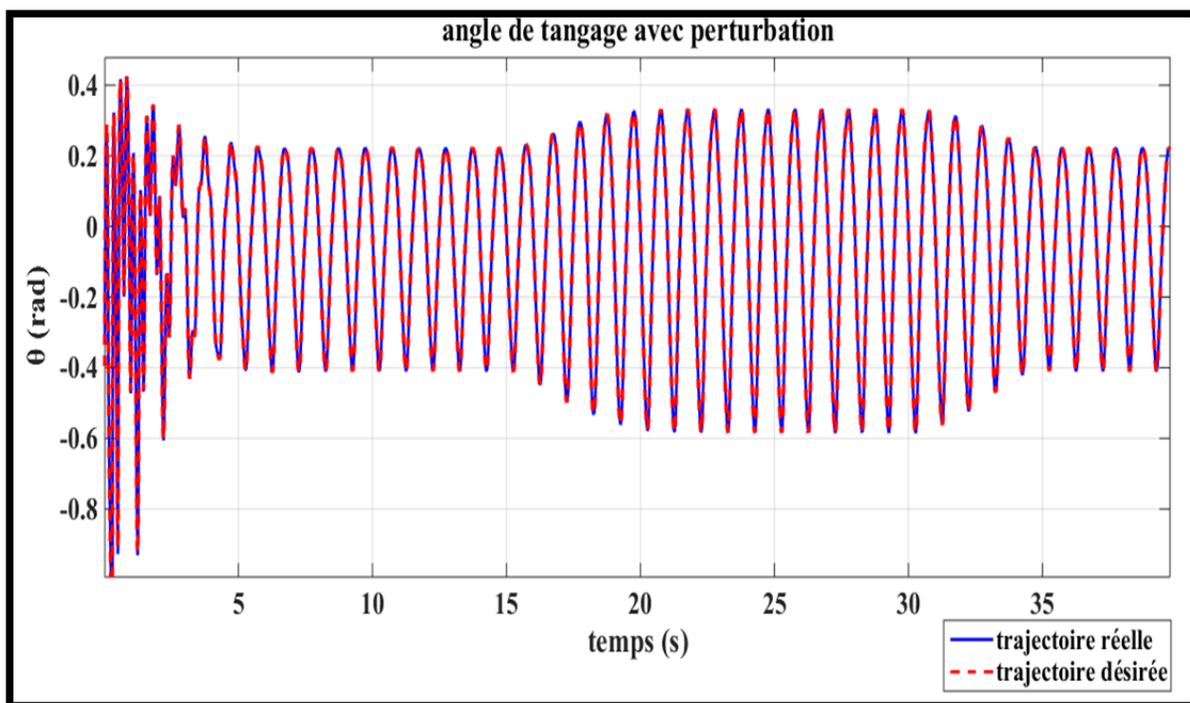


Figure 4.27 Simulation de l'angle de tangage en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

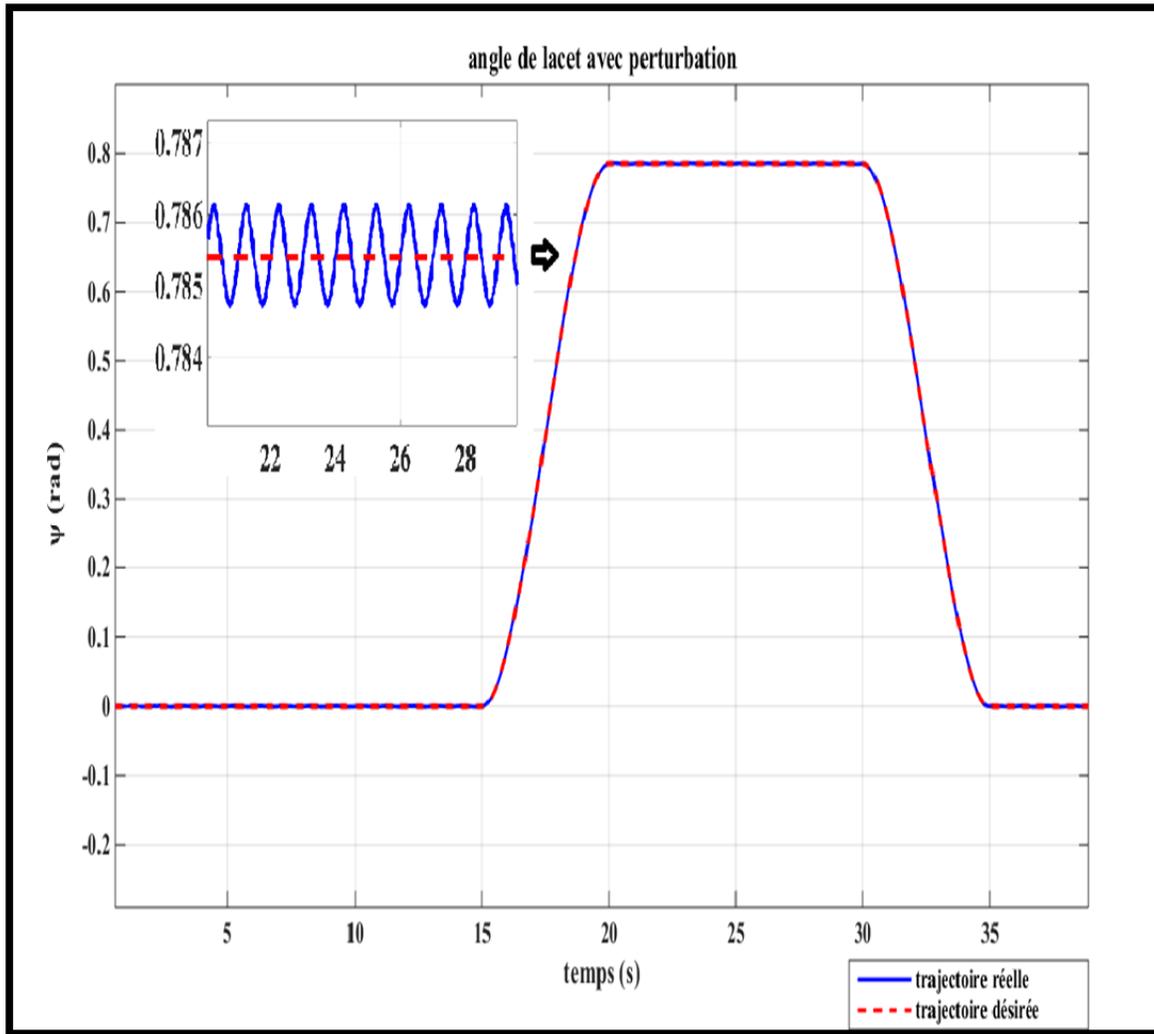


Figure 4.28 Simulation de l'angle de lacet en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

Les figures 4.26, 4.27 et 4.28 montrent la réponse des orientations du système avec le contrôleur de backstepping intégrale. On peut voir que ce contrôleur peut diminuer l'erreur de suivi par rapport au contrôleur backstepping simple décrit dans la partie précédente, on peut observer clairement cette différence pour les angles de roulis et de tangage entre le 20^e et la 30^e seconde, tel que l'angle de roulis se stabilise à zéro dans cette zone et l'erreur de l'angle de tangage a été réduite de 0.1 rad. Alors que pour l'angle de lacet, la diminution de l'amplitude des ondulations est plus remarquable tel que sa valeur devient 0.001 rad.

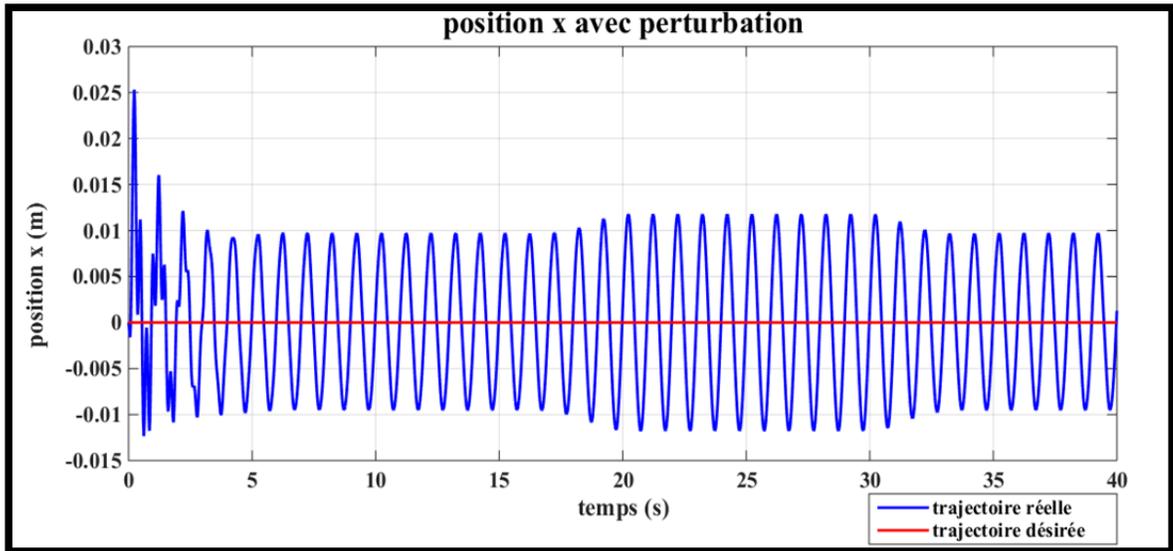


Figure 4.29 Simulation de la position x en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

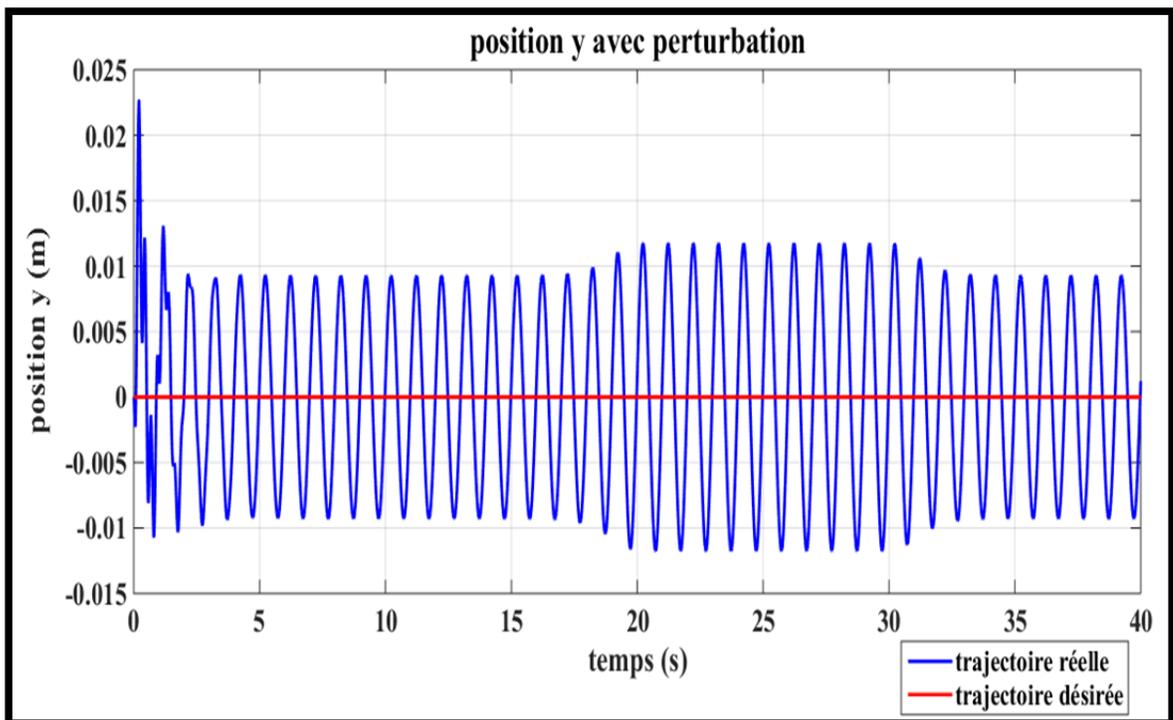


Figure 4.30 Simulation de la position y en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

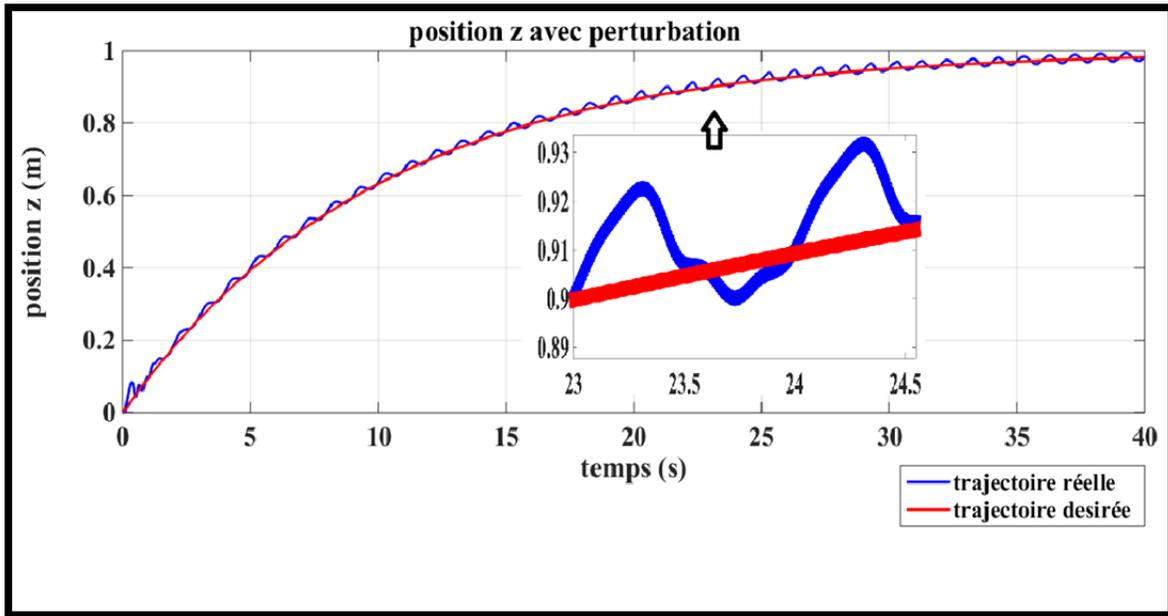


Figure 4.31 Simulation de la position Z en présence de perturbation et sous l'effet d'une action intégrale

Comme pour les angles d'orientations roulis et tangage. Les positions x et y présentent un dépassement accru dans les trois premières secondes qui est normalement dues aux caractéristiques de la commande intégrale. D'autre part nous pouvons constater que les erreurs de poursuite pour ces positions se limitent à une valeur de 0.011 m. Quant à la position z , l'effet intégral a permis de réduire l'amplitude de la perturbation à 0.0224 m. Ce résultat est bien démontré dans la courbe en bas de la figure 4.31. Finalement nous pouvons conclure que l'action intégrale a l'aptitude de réduire l'erreur en régime permanent pour l'ensemble des contrôleurs en présence d'une certaine perturbation externe.

4.6 Conclusion

Les simulations du système en boucle fermée présentée dans ce chapitre, bien qu'ils soient testés sur un nombre limité de trajectoires à l'égard du grand nombre de trajectoires possibles, montrent que le quadrotor peut être commandé sans besoin de la mesure de la vitesse linéaire. En outre la performance du contrôleur hiérarchique est bien démontré dans

l'exécution des manoeuvres complexes et agressives en créant des commandes souples et faisables dans le contrôleur d'attitude basées sur des fonctions barrières de Lyapunov.

D'autre part une étude comparative entre le contrôleur hiérarchique et la commande par mode glissant donne un aperçu sur la faisabilité de la commande adoptée dans un contexte pratique. Finalement, on a vu que la mise en place d'une perturbation dans la dynamique du contrôleur affecte la réponse du système avec la présence des ondulations durant la mission de vol. Donc l'idée d'ajouter une action intégrale a montré qu'elle peut diminuer l'amplitude de ce signal parasite.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'idée de ce travail était de concevoir un contrôleur non linéaire associé d'un filtre d'estimation d'état, permettant de contrôler le système durant ses missions en vol avec des performances acceptables vis à vis le milieu de navigation. Pour ce faire, on a commencé tout d'abord par l'élaboration d'un modèle dynamique non linéaire. En effet on a essayé d'établir un modèle qui décrive avec une précision satisfaisante le comportement du quadrotor, et également simple pour la synthèse de la stratégie de commande, et ceci en s'appuyant sur le formalisme de Newton-Euler. À partir de ce modèle, un contrôleur hiérarchique a été appliqué en exploitant l'interconnexion entre le sous-système de position et le sous-système d'orientation. L'analyse de stabilité a été effectuée en étudiant chacun de ces sous-systèmes en boucle fermée. La preuve de stabilité a été démontrée à l'aide des fonctions de Lyapunov en choisissant les bonnes valeurs des paramètres inhérents au contrôleur.

Le contrôleur a été validé par des résultats de simulation. Ces résultats ont montré l'aptitude de la commande hiérarchique à effectuer la poursuite de plusieurs scénarios de trajectoire sans besoin de la mesure de la vitesse linéaire. Dans le contrôle de position, nous avons remarqué qu'un filtre non linéaire simple est capable de donner une estimation raisonnable de la vitesse linéaire de quadrotor sans avoir besoin d'un observateur par exemple. D'autre part, le contrôleur d'attitude de type backstepping a été conçu avec des fonctions barrières de Lyapunov. Ce qui permet non seulement d'avoir des conditions initiales souples et faisables pour les angles d'orientation (roulis et tangages), mais il permet aussi d'éviter l'excursion de ces angles vers des valeurs de singularité, qui peuvent provoquer l'écrasement de l'appareil. Finalement, une étude sur la robustesse de la commande vis à vis la perturbation externe a montré que le contrôleur choisi peut être affecté par ce phénomène par la présence des ondulations sur les signaux d'états de système, malgré que la poursuite de la trajectoire désirée est toujours réalisée. L'idée d'ajouter une action intégrale a permis de minimiser l'effet produit par la perturbation.

RECOMMANDATIONS

Une première perspective concerne l'obtention d'une analyse complète de la stabilité dans le cas où la vitesse linéaire n'est pas mesurable. La démarche présentée dans ce mémoire peut servir de base à cette analyse en faisant appel à la théorie des matrices à inégalités linéaires, et dont la difficulté réside dans le choix de la fonction de Lyapunov approprié à la commande hiérarchique. Donc le choix des paramètres de réglage obtenu pour la stabilisation de quadrotor n'est pas optimisé en l'état actuel. Il est envisageable alors d'optimiser ce choix afin de renforcer le comportement global de système où encore améliorer la robustesse de la combinaison commande-filtre.

Dans ce travail, le contrôleur proposé comporte un modèle approximatif des moteurs. Ce modèle se présente comme une fonction de transfert du premier ordre qui ne décrit pas réellement la réponse de ces actionneurs. Ceci peut causer des problèmes en pratique en particulier dans le cas des manœuvres rapides, car ces moteurs peuvent ne pas être réactives pour changer les vitesses angulaires des hélices à des vitesses souhaitables par le dispositif de commande. Dans le même esprit, nous avons considéré le modèle de simulation du quadrotor dans le cas idéal, tel que on a supposé que tous les paramètres de modèle sont connus avec précision et sans aucune incertitude. Ce qui n'est pas toujours le cas, puisque parfois il y a certains de ces paramètres qui sont difficilement mesurables, comme par exemple l'inertie. Donc la mise en place d'un contrôleur adaptatif pourrait améliorer la performance de la commande.

Après l'étape de simulation, si le système est prouvé efficace et réalisable, il peut être alors implémenté sur un prototype réel du quadrotor. Alors les problèmes à ce stade s'avèrent intéressants : les mesures en temps réel des états de système sont calculées par plusieurs capteurs sur des différents instants de temps. Il est donc nécessaire de prendre en considération le temps de mise à jour de ces capteurs dans le design du système réel. La plate-forme de matériel embarqué peut également imposer des limitations à la fréquence

maximale de fonctionnement de filtre d'estimation de la vitesse linéaire (aussi pour le dispositif de commande). Dans le même contexte, il est intéressant aussi de tenir compte des problèmes de retard de communication entre le drone et la station de contrôle.

Finalement, une expérimentation réelle donne l'occasion de faire des tests avec des trajectoires agressives et voir à quel niveau l'usage des fonctions barrières de Lyapunov permet d'éviter l'écrasement du quadrotor quand les angles (roulis et tangage) s'approchent des positions de singularité. Nous pouvons aussi analyser le comportement réel du quadrotor en considérant des perturbations externes. À ce point, il est envisagé d'appliquer un contrôleur robuste pour ce genre de phénomène imprévisible tel que celui de mode glissant, en profitant de la structure modulaire du contrôleur hiérarchique qui permet de tester facilement plusieurs lois de commande.

ANNEXE I

LES INÉGALITÉS MATRICIELLES LINÉAIRES

Nous donnerons dans cette annexe une description de principe de LMI (abréviation anglaise d'Inégalité Matricielle Linéaire). Cette méthode utilisée dans ce mémoire pour formuler le problème de la stabilité en boucle fermée, sous forme des inégalités linéaires.

Définition

Une LMI est une inégalité matricielle de la forme :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i A_i + B \quad (\text{A I-1})$$

où les matrices $A_i, (i = 1 \dots n)$ et B sont des matrices symétriques de dimension n , et x est un vecteur de \mathbb{R}^n .

Le lemme de Shur est l'exemple le plus classique de LMI, il est décrit comme suit :

$$F(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A I-2})$$

si et seulement si :

$$R(x) > 0 \text{ et } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (\text{A I-3})$$

ou de manière équivalente, si et seulement si

$$Q(x) > 0 \text{ et } R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0 \quad (\text{A I-4})$$

ANNEXE II

NOTIONS DE STABILITÉ

Dans cette annexe on cite quelques généralités relatives à la stabilité des systèmes dynamiques.

La stabilité au sens du Lyapunov

Considérons le système invariant suivant :

$$\dot{x} = f(x) \quad (\text{A II-1})$$

Commençons à l'état initial $x(0)$. Supposons que x_e est un point d'équilibre du système, $f(x_e) = 0$. Nous disons que le point d'équilibre est :

- Globalement asymptotiquement stable si pour toute trajectoire $x(t)$ on a :

$$x(t) \rightarrow x_e \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (\text{A II-2})$$

- Localement asymptotiquement stable si au voisinage de x_e , il existe $r > 0$ tel que :

$$\|x(0) - x_e\| < r \Rightarrow x(t) \rightarrow x_e \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \quad (\text{A II-3})$$

- Exponentiellement stable si il existe deux variables strictement positives α et λ , tel que :

$$\forall t > 0 \quad \|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t} \quad (\text{A II-4})$$

Méthode directe de Lyapunov

L'idée de base de la méthode directe de Lyapunov provient d'une observation fondamentale de la physique. Car si l'énergie totale d'un système mécanique ou électrique est continuellement dissipée, alors le système se déplace vers le point d'équilibre. Donc cette approche consiste à remplacer l'énergie de système par une fonction de Lyapunov $V(x)$ pour étudier sa variation dans le temps. On peut dire que le système est asymptotiquement stable si cette fonction $V(x)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \\ \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \text{ (radialement non bornée)} \\ \dot{V} < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A II-5})$$

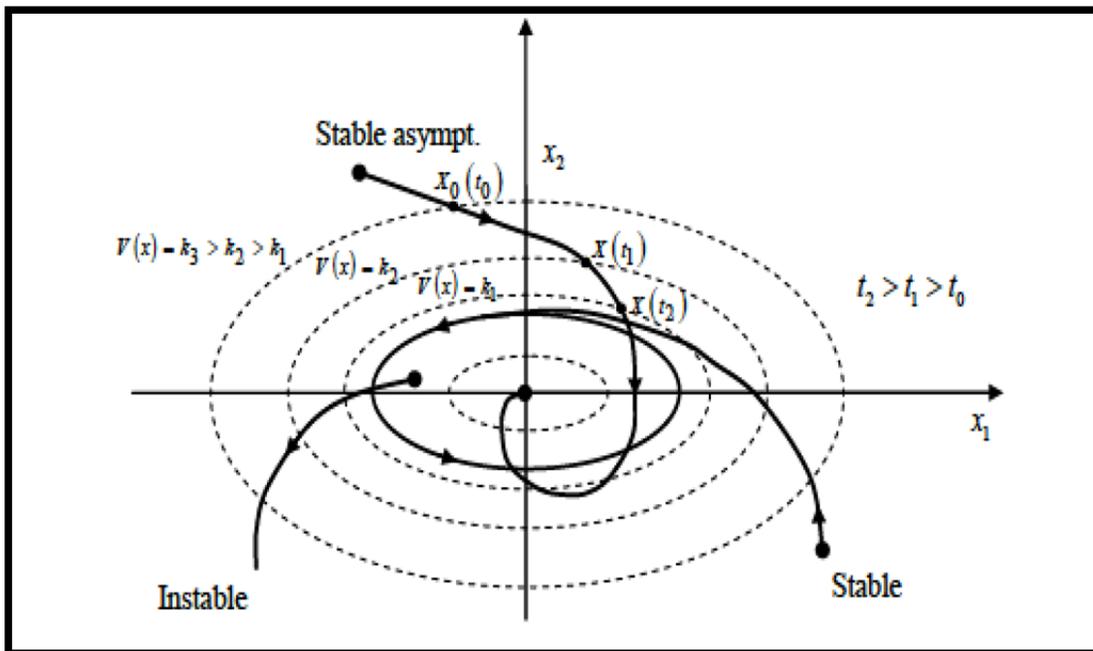


Figure A II-1 Interprétation géométrique de Lyapunov

(Hicham, 2012)

Lemme de Barbalat

Considérons une fonction différentiable $h(t)$. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ est finie, et $\dot{h}(t)$ est une fonction uniformément continue, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{h}(t) = 0 \quad (\text{A II-6})$$

ANNEXE III

LA FONCTION BARRIÈRE DE LYAPUNOV

Cette annexe présente un aperçu sur la fonction barrière de Lyapunov. Cette fonction est utilisée dans ce mémoire dans la conception du contrôleur d'attitude.

Présentation de la fonction barrière de Lyapunov

L'objectif d'utiliser la fonction barrière de Lyapunov est pour éviter l'excursion des variables d'une certaine région d'intérêt. Cette fonction peut s'écrire sur la forme symétrique suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_{b1}^2}{k_{b1}^2 - z_1^2} \quad \forall k_{b1} > 0 \quad (\text{A III-1})$$

Cette fonction tend vers l'infini lorsque sa constante k_b s'approche de certaines valeurs limites, ce qui assure que les états de système ne sont pas violés. Cette propriété est bien illustrée dans la figure (A III-1) :

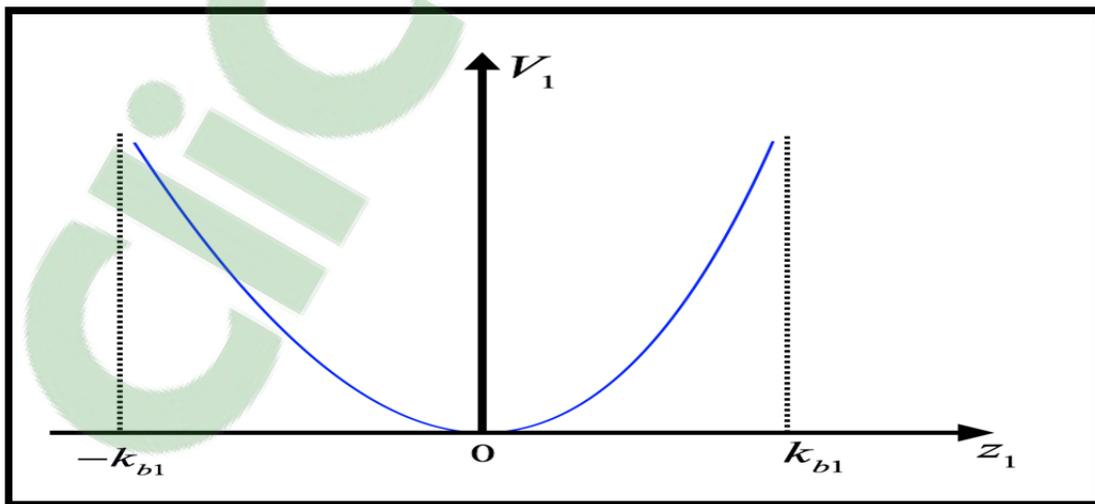


Figure A III-1 Illustration schématique de la fonction barrière de Lyapunov

Le principe clé de cette fonction est d'assurer sa bornitude en boucle fermée. Pour ce faire il est intéressant de citer quelques définitions et théorèmes propres à ce genre des fonctions.

Définition (Peng, 2008):

Une fonction barrière de Lyapunov est une fonction scalaire $V(x)$. Si cette fonction est associée à un système ayant l'équation $\dot{x} = f(x)$ et qui est définie positive, continue et ses dérivées partielles de premier ordre sont continues à chaque point d'une région D , alors on aboutit au résultat suivant : $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque x se rapproche de la limite de D et qui satisfait la condition $V(x) \leq b \quad \forall t \geq 0$ pour toutes les solutions de $\dot{x} = f(x)$, tel que $X(0) \in D$ et b est une constante positive.

Lemme (Tee et al., 2009):

Pour toute constante positive k_{b1} , on définit les systèmes les systèmes $\mathcal{Z}_1 := \{z_1 \in \mathbb{R} : -k_{b1} < z_1 < k_{b1}\} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{N} := \mathbb{R}^l \times \mathcal{Z}_1 \subset \mathbb{R}^{l+1}$ comme des systèmes ouverts. On considère le système suivant :

$$\dot{\eta} = h(t, \eta) \quad (\text{A III-2})$$

Où $\eta := [w, z_1]^T \in \mathcal{N}$ est l'état de système, et la fonction $h: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ est continue par morceau en t , localement Lipschitz en z et uniforme en t dans $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{N}$. On suppose qu'il existe des fonctions $U: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $V_1: \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$, qui sont continuellement différentiable et définie positive dans leurs domaines respectifs, de telle sorte que :

$$V_1(z_1) \rightarrow \infty \text{ lorsque } z_1 \rightarrow \pm k_{b1} \quad (\text{A III-3})$$

$$\gamma_1(\|w\|) \leq U(w) \leq \gamma_2(\|w\|) \quad (\text{A III-4})$$

où γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classe K_∞ . On considère que $V(n) := \sum_{i=1}^n V_i(z_i) + U(w)$ et $z_i(0)$ appartient à l'ensemble $z_i \in (-k_{b1}, k_{b1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si cette inégalité est vraie alors :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} h \leq 0 \quad (\text{A III-5})$$

donc $z_i(t)$ reste dans l'ensemble ouvert $z_i \in (-k_{b1}, k_{b1}) \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Théorème (Tee et al., 2009):

La condition sur la fonction h assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale $\eta(t)$ dans l'intervalle de temps $[0, \tau_{\max})$ selon (Sontag, 1998) (p. 476 théorème 54). Ce qui implique que $V(n(t))$ existe pour tout $t \in [0, \tau_{\max})$. Ensuite, du fait que $\dot{V}(n) \leq 0$, nous savons que chaque $V_i(z_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$, est bornée pour $t \in [0, \tau_{\max})$. Ainsi $z_i(t)$ reste dans l'ensemble $|z_i| < k_{b1}$ pour $t \in [0, \tau_{\max})$. Nous en déduisons que $\eta(t)$ reste dans le sous-ensemble $K \subseteq \mathcal{N}$ pour tout $t \in [0, \tau_{\max})$. Comme une conséquence directe de (Sontag, 1998) (p. 481 Proposition C.3.6), nous avons $\eta(t)$ est défini pour tout $t \in [0, \tau_{\max})$. Il en résulte que $z_i \in (-k_{b1}, k_{b1}) \quad \forall t \in [0, \infty)$.

Comparaison entre la fonction barrière et la fonction quadratique

On considère un système non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + u \end{cases} \quad (\text{A III-6})$$

Tel que $x = [x_1, x_2]$ représente le vecteur d'état de système et u est sa commande. Les figures suivantes (A III-2) et (A III-3) montrent la poursuite de trajectoire désirée avec deux

commandes backstepping. La première est conçue avec une fonction quadratique et la deuxième est conçue avec une fonction barrière.

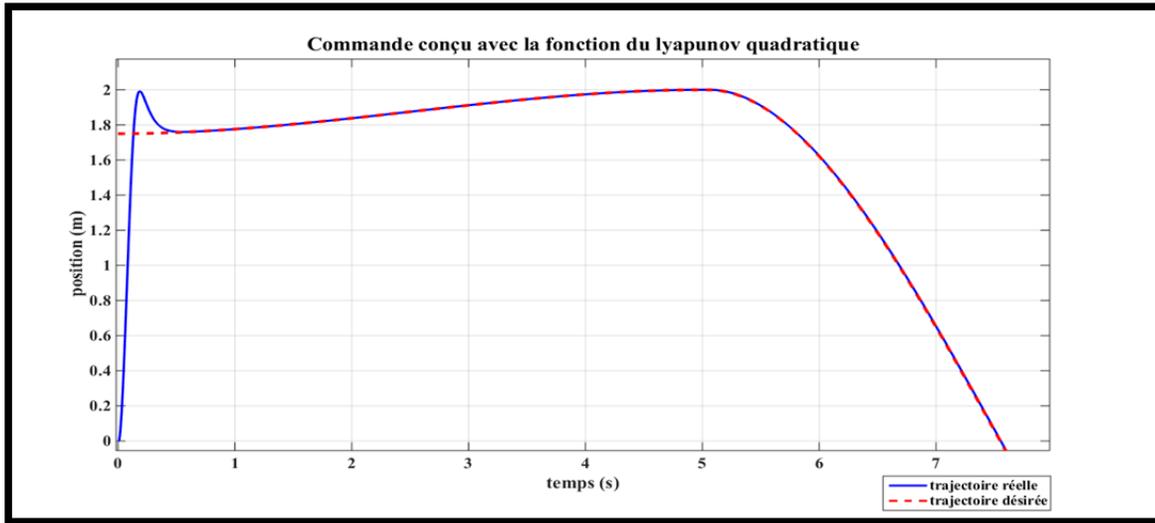


Figure A III-2 Commande Backstepping conçue avec une fonction quadratique du Lyapunov

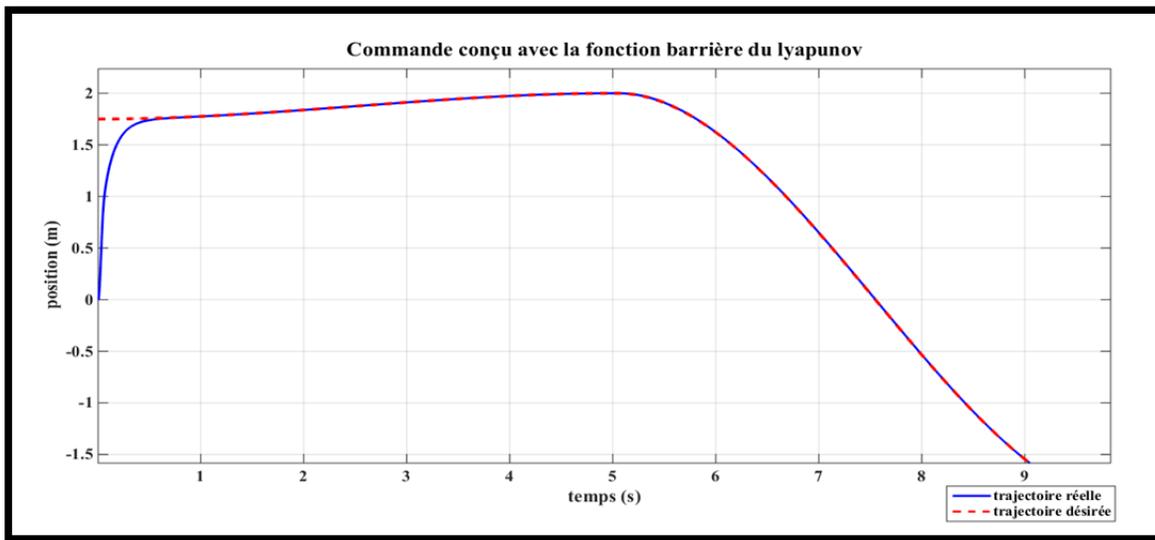


Figure A III-3 Commande Backstepping conçue avec une fonction barrière du Lyapunov

Nous pouvons remarquer que pour des trajectoires de références ayant des conditions initiales non nulles, le contrôleur conçu avec une fonction barrière possède des conditions

initiales souples et faisables. Alors que la commande conçue avec une fonction quadratique présente un dépassement qui peut causer la violation des états de système.

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abdessameud, Abdelkader, et Abdelhamid Tayebi. 2010. « Global trajectory tracking control of VTOL-UAVs without linear velocity measurements ». *Automatica*, vol. 46, n° 6, p. 1053-1059.
- Amghar, Bilal. 2013. « Modélisation, observabilité et commande de convertisseurs multicellulaires parallèles dans un environnement dédié ». Université de Cergy Pontoise.
- Bandyopadhyay, Bijan, S. Janardhanan et Sarah K. Spurgeon. 2013. *Advances in Sliding Mode Control: Concept, Theory and Implementation*. : Springer, 388 p.
- Benallegue, A., A. Mokhtari et L. Fridman. 2006. « Feedback linearization and high order sliding mode observer for a quadrotor UAV ». In *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems*. (Alghero, Italy), p. 365-372 :IEEE.
- Benallegue, Abdelaziz, Abdellah Mokhtari et Leonid Fridman. 2008. « High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 18, n° 4-5, p. 427-440
- Benoît Bernardin, Paul Meyer. 2013. *Projet Kinect: Détection de mouvements intempestifs dans un bloc opératoire France* : Université de Franche-Comté.
- Benoit, landry. 2014. « Planning and control for Quadrotor Flight through Cluttered Environments ». Mémoire de maîtrise. Massachusetts Institute of Technology.
- Benzemrane, Khadidja, Giovanni L. Santosuosso et Gilney Damm. 2007. « Unmanned aerial vehicle speed estimation via nonlinear adaptive observers ». In *American Control Conference*. (New York), p. 985-990 :IEEE.
- Bertrand, Sylvain. 2007. « Commande de drone miniature à voilure tournante ». Université Nice Sophia Antipolis.
- Bertrand, Sylvain, Nicolas Guénard, Tarek Hamel, Hélène Piet-Lahanier et Laurent Eck. 2011. « A hierarchical controller for miniature VTOL UAVs: design and stability analysis using singular perturbation theory ». *Control Engineering Practice*, vol. 19, n° 10, p. 1099-1108
- Bouabdallah, Samir. 2007. « Design and control of quadrotors with application to autonomous flying ». Thèse de doctorat École Polytechnique federale de Lausanne.

- Bouabdallah, Samir, Andre Noth et Roland Siegwart. 2004. « PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor ». In *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. (Sendai, Japan) Vol. 3, p. 2451-2456 :IEEE.
- Bouabdallah, Samir, et Roland Siegwart. 2005. « Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor ». In *International Conference on Robotics and Automation*. (Barcelona, Spain), p. 2247-2252 :IEEE.
- Bouadi, H., et M. Tadjine. 2007. « Nonlinear observer design and sliding mode control of four rotors helicopter ». *proceedings of world academy of science, engineering and technology vol*, vol. 1, n° 2, p. 115-120.
- Boutayeb, Mohamed, Edouard Richard, Hugues Rafaralahy, Harouna Souley Ali et Guy Zaloylo. 2008. « A simple time-varying observer for speed estimation of UAV ». In *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control*
- Brito Domingues, Jorge Miguel. 2009. « Quadrotor prototype ». Mémoire de maîtrise. Technical University of Lisbon.
- Burg, T., D. Dawson, J. Hu et M. De Queiroz. 1996. « An adaptive partial state-feedback controller for RLED robot manipulators ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n° 7, p. 1024-1030
- Burg, T., D. Dawson et P. Vedagarbha. 1997. « A redesigned DCAL controller without velocity measurements: theory and demonstration ». *Robotica*, vol. 15, n° 03, p. 337-346
- Carrillo, Luis Rodolfo García, Alejandro Enrique Dzul López, Rogelio Lozano et Claude Pégard. 2013. « Modeling the quad-rotor mini-rotorcraft ». In *Quad Rotorcraft Control*. p. 23-34 :Springer.
- Chatchanayuenyong, Theerayuth. 2008. « Power Quality Improvement Using a Sliding Mode Control of a Series Active Filter ». *American Journal of Applied Sciences*, vol. 5, n° 8, p. 1029-1033 %@ 1546-9239.
- Chingozha, Tinashe. 2014. « Robust nonlinear trajectory tracking and control of quadrotor UAV ». Mémoire de maîtrise. University of the Witwatersrand Johannesburg.
- Colorado, Julián D. 2009. « Towards Miniature MAV Autonomous Flight: A Modeling and Control Approach ». Mémoire de maîtrise. Université Technique de Madrid.
- Das, Abhijit, Frank L. Lewis et Kamesh Subbarao. 2011. *Sliding Mode Approach to Control Quadrotor Using Dynamic Inversion*. : INTECH Open Access Publisher.

- Das, Abhijit, Frank Lewis et Kamesh Subbarao. 2009. « Backstepping approach for controlling a quadrotor using lagrange form dynamics ». *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 56, n° 1-2, p. 127-151
- De Queiroz, Marcio S., Darren M. Dawson, Siddharth P. Nagarkatti et Fumin Zhang. 2012. *Lyapunov-based control of mechanical systems*. 4. : Springer Science & Business Media.
- Dixon, Warren E., Erkan Zergeroglu, Darren M. Dawson et M. W. Hannan. 2000. « Global adaptive partial state feedback tracking control of rigid-link flexible-joint robots ». *Robotica*, vol. 18, n° 03, p. 325-336
- Do, Khac Duc, Zhong-Ping Jiang et Jie Pan. 2003. « On global tracking control of a VTOL aircraft without velocity measurements ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, n° 12, p. 2212-2217
- Drouot, Adrien. 2013. « Stratégies de commande pour la navigation autonome d'un drone projectile miniature ». Université de Lorraine.
- Elamine, Mr Larbi Mohamed. 2013. « Synthese des Observateurs pour un Dorne Hélicoptere ». Thèse de doctorat. Université des sciences et de la technologie d'Oran.
- Fahimi, Farbod. 2006. « Sliding mode formation control for under-actuated autonomous surface vehicles ». In *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. (Minneapolis, Minnesota, USA), p. 6 :IEEE.
- Fang, Zhou, Zhang Zhi, Liang Jun et Wang Jian. 2008. « Feedback linearization and continuous sliding mode control for a quadrotor UAV ». In *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference* (Kunming, Yunnan, China), p. 349-353 :IEEE.
- Guenard, N., T. Hamel et V. Moreau. 2005. « Dynamic modeling and intuitive control strategy for an" X4-flyer" ». In *International Conference on Control and Automation*. (Budapest,Hungary) Vol. 1, p. 141-146 :IEEE.
- Guessas, Mme Laarem. 2012. « Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques ». Thèse de doctorat. Université Ferhat Abbas de Sétif.
- Gupte, Shweta, Paul Infant Teenu Mohandas et James M. Conrad. 2012. « A survey of quadrotor unmanned aerial vehicles ». In *Proceedings of the IEEE SoutheastCon*. (Orlando, Florida, USA), p. 1-6

- Hamel, Tarek, Robert Mahony, Rogelio Lozano et James Ostrowski. 2002. « Dynamic Modelling and Configuration Stabilization for an X4-Flyer ». In *15th Triennial IFAC World Congress*. (Barcelona, Spain). Vol. 1, p. 3.
- Hattenberger, Gautier. 2008. « Vol en formation sans formation: contrôle et planification pour le vol en formation des avions sans pilote ». Université Paul Sabatier-Toulouse III.
- Henriques, Bernardo Sousa Machado. 2011. « Estimation and control of a quadrotor attitude ». Mémoire de maîtrise. Université Technique de Lisbonne.
- Hicham, Khebbache. 2012. « Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires Application: Système UAV de type Quadrirotor ». Université Ferhat Abbas de Sétif.
- Hoffmann, Gabriel M., Haomiao Huang, Steven L. Waslander et Claire J. Tomlin. 2007. « Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment ». In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit* (south carolina) Vol. 2.
- Jafari, Hamidreza, Mehran Zareh, Jafar Roshanian et Amirali Nikkhah. 2010. « An optimal guidance law applied to quadrotor using LQR method ». *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, vol. 53, n° 179, p. 32-39
- Joyo, M. Kamran, D. Hazry, S. Faiz Ahmed, Faizan A. Warsi et M. Hassan Tanveer. 2013. « Horizontal plane motion controller design for Quadrotor under noisy conditions ». *JOKULL*, vol. 63, n° 9, p. 239-246.
- Kanellakopoulos, Ioannis, Petar V. Kokotovic et Stephen Morse. 1991. « Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 36, n° 11, p. 1241-1253
- Kim, Doh-Hyun, et Jun-Ho Oh. 1999. « Tracking control of a two-wheeled mobile robot using input-output linearization ». *Control Engineering Practice*, vol. 7, n° 3, p. 369-373 %@ 0967-0661.
- Klumpp, Allan R. 1976. « Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix ». *Journal of spacecraft and rockets*, vol. 13, n° 12, p. 754-755
- Koehl, Arnaud. 2012. « Modélisation, observation et commande d'un drone miniature à birotor coaxial ». Université Henri Poincaré-Nancy I.
- La Scala, Barbara F., Robert R. Bitmead et Matthew R. James. 1995. « Conditions for stability of the extended Kalman filter and their application to the frequency tracking problem ». *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 8, n° 1, p. 1-26

- Lee, Daewon, H. Jin Kim et Shankar Sastry. 2009. « Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter ». *International Journal of control, Automation and systems*, vol. 7, n° 3, p. 419-428
- Lopes, Hugo José Dias. 2011. « Attitude determination of highly dynamic fixed-wing uavs with gps/mems-ahrs integration ». Mémoire de maîtrise. Université Technique de Lisbonne.
- Luque-Vega, L., B. Castillo-Toledo et Alexander G. Loukianov. 2012. « Robust block second order sliding mode control for a quadrotor ». *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, n° 2, p. 719-739
- M.Murray, Richard, Li Zexiang Sastry et S. Shankar. 1994. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. : CRC press.
- Madani, Tarek, et Abdelaziz Benallegue. 2006. « Backstepping control for a quadrotor helicopter ». In *International Conference on Intelligent Robots and Systems*. (Beijing,China), p. 3255-3260 :IEEE.
- Madani, Tarek, et Abdelaziz Benallegue. 2007. « Sliding mode observer and backstepping control for a quadrotor unmanned aerial vehicles ». In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. (New York City, USA,), p. 5887-5892 :IEEE.
- Martini, Adnan. 2008. « Modélisation et commande de vol d'un hélicoptère soumis à une rafale de vent ». Thèse de doctorat. Université de Metz.
- Mian, Ashfaq Ahmad, et Wang Daobo. 2008. « Modeling and backstepping-based nonlinear control strategy for a 6 DOF quadrotor helicopter ». *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 21, n° 3, p. 261-268
- Michel Asencio, Philippe Gros, Jean Jacques Patry. 2010. « Les drones tactiques à voilure tournante dans les engagements contemporains ». < <http://www.frstrategie.org> >. Consulté le 1 Novembre 2015.
- Mistler, V., A. Benallegue et N. K. M'Sirdi. 2001. « Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback ». In *Robot and Human Interactive Communication*. (Bordeaux, Paris), p. 586-593 :IEEE.
- Mokhtari, Abdellah, Abdelaziz Benallegue et Boubaker Daachi. 2005. « Robust feedback linearization and $G\mathcal{H}_\infty$ controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle ». In *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference* (Kunming, Yunnan, China), p. 1198-1203 :IEEE.

- Nganga-Kouya, Donatien. 2003. « Commande non linéaire hybride force/position pour les systèmes robotiques avec contraintes holonomiques ». Thèse de doctorat. École de technologie supérieure.
- Niu, Yugang, et Xingyu Wang. 2009. « Sliding mode control design for uncertain delay systems with partial actuator degradation ». *International Journal of Systems Science*, vol. 40, n° 4, p. 403-409
- Peng, Tee Keng. 2008. « Adaptive control of uncertain constrained nonlinear systems ». Thèse de doctorat National University of Singapore.
- Pflimlin, Jean-Michel. 2006. « Commande d'un minidrone à hélice carénée: de la stabilisation dans le vent à la navigation autonome ». Thèse de doctorat. École Doctorale de Toulouse.
- Phang, Swee King, Kun Li, Kok Hwa Yu, Ben M. Chen et Tong Heng Lee. 2014. « Systematic design and implementation of a micro unmanned quadrotor system ». *Unmanned Systems*, vol. 2, n° 02, p. 121-141
- Pounds, Paul, Robert Mahony, Joel Gresham, Peter Corke et Jonathan M. Roberts. 2004. « Towards dynamically-favourable quad-rotor aerial robots ». In *Australasian Conference on Robotics & Automation*. (Canberra,Australia).
- Prempain, Emmanuel, et Ian Postlethwaite. 2005. « Static H_∞ loop shaping control of a fly-by-wire helicopter ». *Automatica*, vol. 41, n° 9, p. 1517-1528
- Raffo, Guilherme V., Manuel G. Ortega et Francisco R. Rubio. 2010. « An integral predictive/nonlinear H_∞ control structure for a quadrotor helicopter ». *Automatica*, vol. 46, n° 1, p. 29-39
- Raptis, Ioannis A. 2010. « Linear and nonlinear control of unmanned rotorcraft ». Thèse de doctorat. University of South Florida.
- Raza, Syed Ali. 2010. « Design and control of a quadrotor unmanned aerial vehicle ».
- Rosito, Claus M., et Juan I. Giribet. 2013. « Sistema de Control de UAVs con aplicaciones a vuelo en formación ». université de Buenos Aires.
- Roza, Ashton. 2012. « Motion control of rigid bodies in SE (3) ». Mémoire de maitrise. Université de Toronto.
- Roza, Ashton, et Manfredi Maggiore. 2012. « Position control for a class of vehicles in SE (3) ». In *51st IEEE Conference on Decision and Control*. (Maui, Hawaii, USA), p. 5631-5636 :IEEE.

- Roza, Ashton, et Manfredi Maggiore. 2014. « A class of position controllers for underactuated VTOL vehicles ». *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. 59, n° 9, p. 2580-2585
- Saif, Al-Hiddabi. 2009. « Quadrotor control using feedback linearization with dynamic extension ». In *Proceeding of the 6th International Symposium on Mechatronics and its Applications*. (Sharjah, UAE), p. 1-3 :IEEE.
- Schmidt, Michael David. 2011. « Simulation and control of a quadrotor unmanned aerial vehicle ». Mémoire de maîtrise. University of Kentucky UKnowledge.
- Segui-Gasco, Pau, Yazan Al-Rihani, Hyo-Sang Shin et Al Savvaris. 2014. « A novel actuation concept for a multi rotor UAV ». *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 74, n° 1-2, p. 173-191
- Sontag, Eduardo D. 1998. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*, 6 Coll. « Textbooks in Applied Mathematics, Number 6 ». : Springer-Verlag.
- Stepaniak, Michael J. 2008. « A Quadrotor Sensor Platform ». Thèse de doctorat Ohio University.
- Sylvain, Bertrand, Hamel Tarek et Piet-Lahanier Hélène. 2009. *Stabilization of Scale Model Vertical Take-Off and Landing Vehicles without Velocity Measurements*. : INTECH Open Access Publisher, 21 p.
- Tayebi, A., et S. McGilvray. 2004. « Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot ». In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. (Paradise Island, Bahamas) Vol. 2, p. 1216-1221. : IEEE.
- Tee, Keng Peng, Shuzhi Sam Ge et Eng Hock Tay. 2009. « Barrier Lyapunov functions for the control of output-constrained nonlinear systems ». *Automatica*, vol. 45, n° 4, p. 918-927
- Voos, Ilolger. 2009. « Nonlinear control of a quadrotor micro-UAV using feedback-linearization ». In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics*. (Malaga, Spain), p. 1-6 :IEEE.
- Wikipédia. 2004. « Drone ». < <https://fr.wikipedia.org/wiki/Drone> >. Consulté le le 20 Aout 2014.
- WiKiSALS. « modélisation d'un moteur à courant modélisation continu ». < http://wiki.baronnerie.com/index.php?title=Mod%C3%A9lisation_d%27un_moteur_%C3%A0_courant_continu >. Consulté le Consulté le 2 Novembre 2015.

- Yang, Hong Chul, Belal Sababha, Coskun Acar et O. Rawashded. 2010. « Rapid prototyping of quadrotor controllers using Matlab RTW and dsPICS ». In *Proceedings of the AIAA Infotech@ Aerospace Conference*. (Georgia, USA).
- Zongyu, Zuo. 2013. « Adaptive trajectory tracking control design with command filtered compensation for a quadrotor ». *Journal of Vibration and Control*, vol. 19, n° 1, p. 94-108