

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE .....</b>	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES.....</b>	<b>vii</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES.....</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>	<b>xvi</b>
<b>CHAPITRE 1 .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES BIOCOMPOSITES POLYMÈRE/FIBRES VÉGÉTALES .....	1
1.2 ÉTAT DE L'ART SUR LES BIOCOMPOSITES DE TYPE PET-CHANVRE .....	2
1.2.1 Généralité sur la structure des fibres naturelles .....	2
1.2.2 Chanvre .....	4
1.2.3 Polyéthylène téréphtalate (PET) .....	5
1.2.4 Mise en œuvre des composites PET-Chanvre .....	7
1.3 THERMOFORMAGE DES THERMOPLASTIQUES.....	8
1.3.1 Introduction au thermoformage .....	8
1.3.2 Polymères thermoplastiques semi-transparent.....	9
1.3.3 Polymères thermoplastiques opaques .....	10
1.4 MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE EN THERMOFORMAGE....	11
1.4.1 Émetteurs et propriétés optiques.....	11
1.4.2 Surfaces de radiations mutuelles.....	13
1.4.3 Modélisation du chauffage infrarouge en thermoformage .....	15
1.5 PROBLÉMATIQUE.....	20
1.6 OBJECTIF DE L'ÉTUDE .....	21
1.6.1 Objectif général.....	21
1.6.2 Objectifs spécifiques.....	22
1.7 MATÉRIEL ET APPROCHE DE MODÉLISATION INFRAROUGE .....	23
1.7.1 Composites PET / Chanvre.....	23
1.7.2 Propriétés thermophysiques du PET/Chanvre .....	23
1.7.3 Modélisation du chauffage infrarouge .....	24
1.7.3.1 Équation de conservation de l'énergie et formulation éléments finis.....	24
1.7.3.2 Équation de transfert radiatif et méthode des ordonnées discrètes .....	24
1.7.3.3 Modélisation dynamique du couplage conduction-radiation.....	27
1.8 ORIGINALITÉS DE LA THÈSE.....	28
1.9 CONTENU DE LA THÈSE .....	28

<b>CHAPITRE 2 .....</b>	<b>30</b>
<b>PROPRIÉTÉS THERMOPHYSIQUES DES BIOCOMPOSITES PET/CHANVRE</b>	<b>30</b>
2.1 CONDUCTIVITÉ THERMIQUE .....	30
2.2 CAPACITÉ CALORIFIQUE .....	33
2.3 DENSITÉ.....	36
<b>CHAPITRE 3 .....</b>	<b>37</b>
<b>CALCUL DES FACTEURS D'ÉCHANGE MUTUEL .....</b>	<b>37</b>
3.1 SCHÉMATISATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE DES PRÉFORMES .....	37
3.2 RAYONNEMENT INFRAROUGE INTERCEPTÉ PAR LA MEMBRANE.....	38
3.3 RAYONNEMENT INFRAROUGE ABSORBÉ PAR LA MEMBRANE .....	40
3.4 SURFACES DE RADIATIONS MUTUELLES.....	42
3.4.1 Méthodes d'intégration directe .....	43
3.4.2 Méthode d'intégration de surface .....	43
3.4.3 Méthode de contour .....	44
3.4.4 Méthode d'aire-intégration .....	45
3.4.5 Méthode statistique de Monté Carlo .....	46
3.4.6 Approche retenue: la méthode semi-analytique.....	47
<b>CHAPITRE 4 .....</b>	<b>50</b>
<b>MODÉLISATION ET VALIDATION RADIATION CONDUCTION .....</b>	<b>50</b>
4.1 MISE EN ÉQUATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE .....	50
4.1.1 Équation de conservation de l'énergie (ECE).....	51
4.1.2 Expression du terme source radiatif.....	52
4.1.3 Équation de transfert radiatif (ETR) .....	53
4.1.4 Modèle réduit de l'ETR .....	55
4.1.4.1 Hypothèse du milieu non-diffusant.....	55
4.1.4.2 Hypothèse du milieu froid .....	56
4.1.4.3 Loi de Beer-Lambert.....	56
4.2 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSFERT RADIATIF PAR LA MÉTHODE DES ORDONNÉES DISCRÈTES (MOD).....	57
4.2.1 Système de référence .....	59
4.2.2 Modélisation en une dimension d'espace .....	60
4.2.3 Condition de symétrie azimutale et conditions aux limites radiatives.....	61
4.2.4 Discrétisation angulaire .....	62
4.2.4.1 Choix de la quadrature .....	62
4.2.4.2 Discrétisation angulaire de l'ETR.....	64
4.2.5 Discrétisation spatiale .....	65
4.2.5.1 Calcul des intensités radiatives .....	66
4.2.6 Cas particulier : Équilibre radiatif .....	69
4.2.7 Validation du code fortran MOD 1D stationnaire (MOD1D.f) .....	70
4.2.7.1 Validation 1 : Équilibre radiatif et calcul de la température adimensionnelle.....	70
4.2.7.2 Validation 2 : Équilibre radiatif et calcul du flux radiatif adimensionnel .....	73

4.2.7.3 Validation 3 : Hors équilibre radiatif et calcul de la divergence du flux radiatif comparé avec la solution analytique de Beer-Lambert.....	76
4.3 COUPLAGE CONDUCTION-RADIATION MEF/MOD .....	78
4.3.1 Linéarisation du terme source radiatif .....	79
4.3.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis 3D .....	80
4.3.3 Conditions aux limites et initiales.....	81
4.3.4 Méthode de Galerkin .....	81
4.3.5 Assemblage.....	85
4.3.6 Schéma d'intégration du temps.....	85
4.3.7 Schéma d'intégration explicite monopas .....	87
4.3.8 Schéma d'intégration implicite monopas .....	88
4.3.9 Algorithme de résolution du couplage FEM / MOD .....	90
4.3.10 Méthodes itératives de résolution des problèmes thermiques non linéaires .....	91
4.3.10.1 Cas du régime stationnaire.....	91
4.3.10.2 Cas du régime transitoire .....	95
4.3.11 Validation 1D des codes Fortran stationnaire et transitoire non linéaire.....	96
4.3.11.1 Validation 1 : Code FEM1DNL Problème Derichlet/Dérichlet transitoire ....	96
4.3.11.2 Validation 2 : Code FEMMOD Couplage conduction-radiation.....	101
4.3.11.3 Validation 3 : Code FEM 3D et 1D cas d'une plaque en absence de source radiative. ....	115
4.4 VALIDATION NUMÉRIQUE DE LA RÉCHAUFFE D'UNE PRÉFORME PET	122
4.4.1 Cas linéaire : Couplage MEF3D et Beer-Lambert 1D.....	122
4.4.2 Cas non-linéaire : Couplage MEF1D avec MOD1D .....	125
4.4.3 Simulation du couplage MEF1D / MOD1D .....	126
4.5 MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU CHAUFFAGE INFRAROUGE DU PET..	137
4.5.1 Flux de chaleur reçu par la préforme lors du chauffage .....	137
4.5.2 Validation avec les résultats expérimentaux.....	139
<b>CHAPITRE 5 .....</b>	<b>143</b>
<b>MODÉLISATION DE LA RÉCHAUFFE D'UN COMPOSITE PET-CHANVRE...143</b>	
5.1 MÉTHODE DE CHAUFFAGE DES PRÉFORMES.....	143
5.2 FACTEUR FORME ET FLUX RADIATIF .....	144
5.3 RÉPRÉSENTATION SPATIALE DE LA DISTRIBUTION DE TEMPÉRATURE	146
5.4 ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE À TRAVERS LA PRÉFORME.....	149
5.5 RÉPARTITION DE LA TEMPÉRATURE À DES TEMPS DE CHAUFFAGE DONNÉS .....	153
<b>CHAPITRE 6 .....</b>	<b>158</b>
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>158</b>
6.1 CONCLUSIONS .....	158
6.2 PERSPECTIVES .....	161
<b>RÉFÉRENCES.....</b>	<b>163</b>

## LISTE DES SYMBOLES

### Symboles latins

Symbole	Grandeur	Unité
$A$	Coefficient d'absorption	$m^{-1}$
$A_s$	Surface émettrice	$m^2$
$A_r$	Surface du récepteur	$m^2$
$C$	Chaleur spécifique	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
$d$	Distance entre émetteur et récepteur	$m$
$E_p$	Épaisseur du matériau	$m$
$F_{ij}$	Facteur de forme de la surface $i$ à la surface $j$	
$F_{s-r}$	Facteur de forme de la source au récepteur	
$h$	Coefficient de convection	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
$I(s, \Omega)$	Intensité radiative directionnelle de direction de propagation $\Omega$ à la position $s$	$W m^{-2} sr^{-1}$
$I_b$	Fonction de Planck (intensité du corps noir)	$W m^{-2} sr^{-1}$
$k$	Conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$q_x, q_y, q_z$	Densités de flux de conduction instantanés	$W \cdot m^{-2}$
$q_r$	Flux radiatif	$W \cdot m^{-2}$
$S_r$	Expression du terme source radiatif	$W \cdot m^{-3}$
$T$	Température	$K$
$t$	Temps	$s$
$T_s$	Température de l'émetteur	$K$
$T_\infty$	Température du milieu ambiant	$K$
$X, Y, Z$	Coordonnées cartésiennes	

**Symboles grecs**

Symbole	Grandeur	Unité
$\alpha$	Diffusivité thermique	$m^2 s^{-1}$
$\beta$	Coefficient d'extinction	
$\varepsilon_s$	Émissivité moyenne de la source	
$\Phi(\hat{r}_i, \hat{r})$	Fonction de phase de dispersion	$sr^{-1}$
$d$	Distance entre émetteur et récepteur	m
$E_p$	Épaisseur du matériau	m
$F_{ij}$	Facteur de forme de la surface i à la surface j	
$F_{s-r}$	Facteur de forme de la source au récepteur	
$\rho$	Masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
$\sigma$	Constante de Stéphan-Boltzmann	$W \cdot m^{-2} K^{-4}$
$\tau$	Transmittivité	
$\omega$	Coefficient albédo de dispersion simple	

**Vecteurs**

$\hat{r}$	Direction de propagation
$\hat{r}_i$	Direction de propagation incidente

**Abréviation**

Symbole	Identifiant
1D	Une dimension
3D	Trois dimensions
CVFEM	Volume de contrôle par la méthode des éléments finis
ECE	Équation de conservation de l'énergie
ERQM	Erreur relative quadratique moyenne

ETR	Équation de transfert radiatif
FEMBEER	Couplage méthode des éléments finis et Beer-Lambert
FEMMOD	Couplage méthodes des éléments finis et des ordonnées discrètes
IR	Infrarouge
LBM	Méthode de Lattice-Boltzman
MEF	Méthode des éléments finis
MOD	Méthode des ordonnées discrètes
NEM	Nombre d'éléments
PET	Polyéthylène téréphtalate

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1-1</b> : Structure des fibres naturelles (Fotso-Talla, 2008).....	3
<b>Figure 1-2</b> : Structure de la cellulose (Ly, 2008).....	3
<b>Figure 1-3</b> : Synthèse du polyéthylène téréphtalate (Marco, 2003).....	6
<b>Figure 1-4</b> : Longueurs d'onde des différents émetteurs (Andrieu, 2005). ....	12
<b>Figure 1-5</b> : Spectre de transmittivité du PET (Venkateswaran et al., 1997). ....	13
<b>Figure 2-1</b> : Capacité calorifique du composite PET-chanvre (Fotso-Talla et al., 2014)....	34
<b>Figure 2-2</b> : Corrélation de la capacité calorifique du PET-chanvre. ....	35
<b>Figure 3-1</b> : Schématisation du chauffage d'une préforme par un émetteur infrarouge. ....	38
<b>Figure 3-2</b> : Géométrie et nomenclature de la méthode d'aire-intégration .....	45
<b>Figure 4-1</b> : Rayonnement à travers une frontière diffuse .....	54
<b>Figure 4-2</b> : Définition de l'angle polaire $\mu$ et l'angle azimutal $\phi$ .....	60
<b>Figure 4-3</b> : Système de coordonnées spatiale et directionnelle .....	61
<b>Figure 4-4</b> : Nomenclature pour la discrétisation spatiale .....	66
<b>Figure 4-5</b> : Configuration du MST bornée par des frontières opaques noires .....	71
<b>Figure 4-6</b> : Distribution de la température adimensionnelle dans un milieu absorbant pour les épaisseurs optiques $\tau_L= 0.1, \tau_L= 0.5, \tau_L= 1, \tau_L= 2$ et $\tau_L= 10$ .....	72
<b>Figure 4-7</b> : Erreur relative sur le calcul de la densité de flux radiatif adimensionnelle ....	75
<b>Figure 4-8</b> : Courbe du flux radiatif adimensionnel reçu par la paroi noire du haut .....	75
<b>Figure 4-9</b> : Validation du code MOD1D avec la solution analytique Beer-Lambert à travers un milieu absorbant.....	77
<b>Figure 4-10</b> : Évolution de la température pour différentes valeurs du temps .....	100
<b>Figure 4-11</b> : Erreurs relatives moyennes sur les résultats obtenus comparées.....	100
<b>Figure 4-12</b> : Évolution de la température pour différentes valeurs de x .....	101
<b>Figure 4-13</b> : Distribution de la température pour différentes valeurs de N.....	104
<b>Figure 4-14</b> : Erreur relative sur le calcul de la température pour $N=0,01$ .....	104
<b>Figure 4-15</b> : Erreur relative sur le calcul de température pour $N=10$ et $N= 0/0.00001$ ...	105
<b>Figure 4-16</b> : Flux total adimensionnel pour différentes valeurs de N .....	108
<b>Figure 4-17</b> : Erreur relative sur le calcul des flux adimensionnels pour $\tau_L=0.1$ .....	108
<b>Figure 4-18</b> : Erreur relative sur le calcul des flux adimensionnels pour $\tau_L=1.0$ .....	110
<b>Figure 4-19</b> : Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark $N= 0.01$ .....	113
<b>Figure 4-20</b> : Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark $N= 0.1$ .....	113
<b>Figure 4-21</b> : Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark $N=1.0$ . ....	114
<b>Figure 4-22</b> : Chauffage d'une plaque plane infinie .....	116
<b>Figure 4-23</b> : Maillage 1 (1x1x10) par MEF 3D .....	118
<b>Figure 4-24</b> : Maillage 2 (2x2x10) par MEF 3D .....	119
<b>Figure 4-25</b> : Validation des solutions MEF1D et MEF3D ( $N=10, t=35s$ ).....	120
<b>Figure 4-26</b> : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D ( $N=10, t=35s$ ).....	121

<b>Figure 4-27</b> : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D (N=100, t=35s).....	121
<b>Figure 4-28</b> : Comparaison Solution Analytique/MEF3D, épaisseur de 10 mm.....	124
<b>Figure 4-29</b> : Erreur relative entre Analytique/MEF3D, épaisseur de 10 mm .....	124
<b>Figure 4-30</b> : Influence de la tolérance sur la température de surface exposée à la source pour trois valeurs de flux pour NEM=500.....	129
<b>Figure 4-31</b> : Influence du nombre d'élément du maillage sur la température de surface exposée à la source .....	130
<b>Figure 4-32</b> : Comparaison de la température de surface exposée à la source pour trois valeurs de flux de surface à t=35s de chauffage .....	131
<b>Figure 4-33</b> : Erreur relative sur la température de surface exposée à la source entre FEM-MOD et FEM-BEER .....	132
<b>Figure 4-34</b> : Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 5000 W/m <sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s.....	132
<b>Figure 4-35</b> : Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 10000 W/m <sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s .....	133
<b>Figure 4-36</b> : Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 25000 W/m <sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s .....	133
<b>Figure 4-37</b> : Évolution de l'erreur relative sur la température de surface exposée à la source entre FEM-MOD et FEM-BEER au temps t=10, 25 et 35s. ....	134
<b>Figure 4-38</b> : Comparaison du profil de température de surface exposée à la source à 35s de chauffage entre FEM-BEER et FEM-MOD pour une épaisseur de 4 mm .....	136
<b>Figure 4-39</b> : Comparaison du profil de température de surface exposée à la source à 35s de chauffage entre FEM-BEER et FEM-MOD pour une épaisseur de 1cm.....	136
<b>Figure 4-40</b> : Flux surfacique sur la trace de la face avant de la feuille PET .....	138
<b>Figure 4-41</b> : Comparaison des températures de la face de la trace face avant données par FEMBEER, FEMMOD avec l'expérimentale .....	139
<b>Figure 4-42</b> : Évolution de la température en deux positions de la face avant de la membrane.....	141
<b>Figure 4-43</b> : Évolution de la différence de température en position centrale entre les faces avant et arrière de la membrane en PET .....	141
<b>Figure 4-44</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur de 5 à 35s .....	142
<b>Figure 5-1</b> : Facteur de forme à la surface de la préforme PET-Chanvre.....	145
<b>Figure 5-2</b> : Flux radiatif à la surface de la préforme PET-Chanvre .....	145
<b>Figure 5-3</b> : Distribution de la température en 3D du composite 15% de chanvre .....	146
<b>Figure 5-4</b> : Distribution de la température en 3D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des X).....	147
<b>Figure 5-5</b> : Distribution de la température en 3D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des Y).....	148
<b>Figure 5-6</b> : Distribution de la température en 2D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des Z) .....	148
<b>Figure 5-7</b> : Évolution de la température face haut, point central de la feuille .....	149
<b>Figure 5-8</b> : Évolution de la température au milieu, point central de la préforme.....	151
<b>Figure 5-9</b> : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane PET .....	151
<b>Figure 5-10</b> : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 1% .....	152

<b>Figure 5-11</b> : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 5% .....	152
<b>Figure 5-12</b> : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 15% .....	153
<b>Figure 5-13</b> : Distribution de la température sur la trace avant des membranes à 0%,1%, 5% , 15% à 30s de chauffage .....	154
<b>Figure 5-14</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 0% à 10s, 20s et 30s de chauffage .....	154
<b>Figure 5-15</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 1% à 10s, 20s et 30s de chauffage .....	155
<b>Figure 5-16</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 5% à 10s, 20s et 30s de chauffage .....	155
<b>Figure 5-17</b> : Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 15% à 10s, 20s et 30s de chauffage .....	156

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 1-1</b> : Composition chimique de quelques fibres naturelles.....	4
<b>Tableau 1-2</b> : Propriétés physiques de quelques thermoplastiques .....	6
<b>Tableau 2-1</b> : Conductivité thermique effective des composites PET-chanvre.....	33
<b>Tableau 2-2</b> : Capacité calorifique des composites PET-chanvre .....	35
<b>Tableau 2-3</b> : Densité moyenne des composites PET-chanvre.....	36
<b>Tableau 3-1</b> : Validation du calcul de facteur de forme dans le cas de surfaces triangulaires parallèles (Erchiqui et Dituba, 2007).....	490
<b>Tableau 4-1</b> : Vérification des moments pour la quadrature SN =4 .....	64
<b>Tableau 4-2</b> : Densité de flux radiatif adimensionnelle reçu par la paroi noire du haut ( $\epsilon_B=1$ ) .....	74
<b>Tableau 4-3</b> : Densité de flux radiatif adimensionnelle reçu par la paroi grise du haut. ....	76
<b>Tableau 4-4</b> : Distribution de température pour le maillage 1D (8 éléments linéaires) .....	99
<b>Tableau 4-5</b> : Distribution de température pour le maillage 2D (4x2Q9) (Reddy, 2004) ...	99
<b>Tableau 4-6</b> : Erreur relative en % entre les deux solutions numériques 1D et 2D.....	99
<b>Tableau 4-7</b> : Comparaison des températures adimensionnelles pour N=0,01 ; 0/0,00001 et 10 avec celles issues de la référence (REF=Modest, 2013).....	105
<b>Tableau 4-8</b> : Erreur relative en % sur le calcul de la température par rapport à la solution de référence (Modest, 2013) .....	106
<b>Tableau 4-9</b> : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD/ Solution additive pour une épaisseur optique $\tau_L=0.1$ et erreur relative en % pour différentes valeurs de $N_{stark}$ .....	109
<b>Tableau 4-10</b> : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD/ Solution additive pour une épaisseur optique $\tau_L=1.0$ et erreur relative en % pour différentes valeurs de $N_{stark}$ .....	110
<b>Tableau 4-11</b> : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD avec les modèles numériques de Viskanta et de Siegel pour $\tau_L=0.1$ et $\tau_L=1.0$ et $N_{stark}=0.01$ ; 0.1 et 1.0 .....	111
<b>Tableau 4-12</b> : Comparaison des nombres d'itérations avant d'atteindre le régime stationnaire pour trois différents modèles numériques .....	115
<b>Tableau 4-13</b> : Propriétés thermophysiques du PET .....	117
<b>Tableau 4-14</b> : Propriétés thermophysiques et conditions initiales du PET .....	122
<b>Tableau 4-15</b> : Influence de la tolérance sur la température de surface à t=35s.....	128
<b>Tableau 4-16</b> : Température de surface à t=35s (FEM/Beer-Lambert) .....	129

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

#### 1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES BIOCOMPOSITES POLYMÈRE/FIBRES VÉGÉTALES

Durant cette dernière décennie, plusieurs laboratoires internationaux ont entrepris des travaux sur le développement de nouveaux matériaux composites à base de matrices thermoplastiques et de renforts végétaux. Ces renforts naturels ont plusieurs avantages par rapport aux renforts minéraux : faible masse volumique, faible coût, moins abrasif. Ces matériaux sont également non toxiques, recyclables et abondants. Les performances mécaniques qu'apportent les fibres cellulosiques, en tant que renforts, ont incité les chercheurs à développer des techniques pour l'extraction et la modification de fibres cellulosiques à partir des ressources d'origine biologique. Des études ont d'ailleurs démontré que les interactions physico-chimiques entre la matrice thermoplastique et la distribution de la charge au sein de la matrice sont des facteurs déterminants quant à l'obtention de matériaux ayant de bonnes propriétés mécaniques, recherchées par l'industrie des composites (Bledzki et al., 1998 ; Bengtsson et al., 2005 ; Fotso-Talla et al., 2016, Boyard, 2016). En conséquence, plusieurs industries ont commencé à s'intéresser à ce type de matériaux pour la conception ou l'amélioration de leurs structures (automobile, naval, construction, etc.). Parmi les secteurs de fabrication, il y a la plasturgie (injection, thermoformage, extrusion-soufflage, roto-moulage, etc.). Les matériaux composites à base de plastique et de renforts végétaux

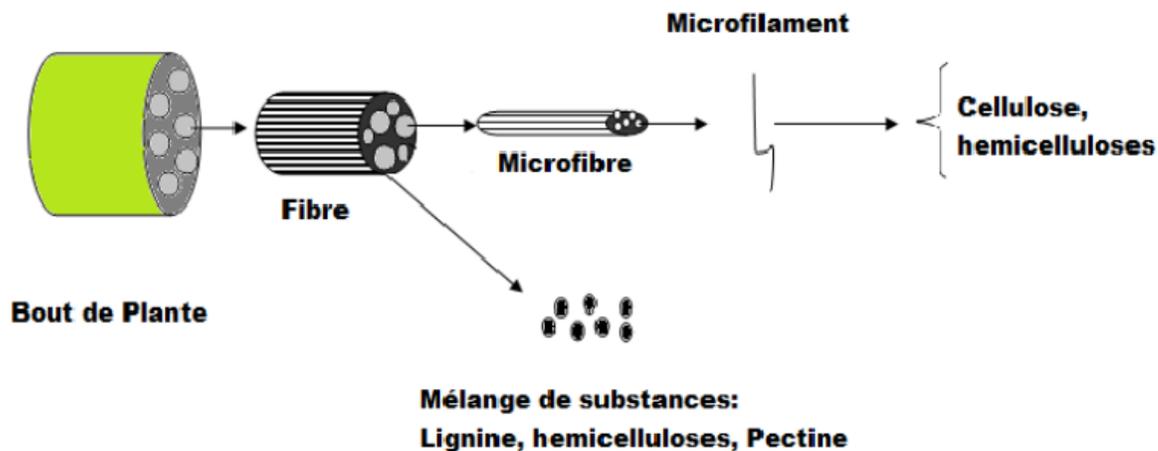
(en remplacement des fibres de verre, fibres de carbone et autres renforts) permettent l'amélioration des propriétés mécaniques (Cantero et al., 2003). Ils sont seulement depuis peu de temps l'intérêt de certains secteurs industriels, comme l'industrie de l'emballage, du bâtiment, des meubles, de l'aéronautique, de l'automobile, de la construction navale et maritime industrielle (Wertz, 2014). Les renforts végétaux sont présents dans le composite sous forme de fibres, de farine ou de sciure (Fotso-Talla et al., 2015 ; Godard et al., 2009), etc. Parmi les plantes utilisées pour l'extraction de renforts végétaux pour la fabrication de biocomposites, on trouve le chanvre, le lin, le sisal et le bois.

## 1.2 ÉTAT DE L'ART SUR LES BIOCOMPOSITES DE TYPE PET-CHANVRE

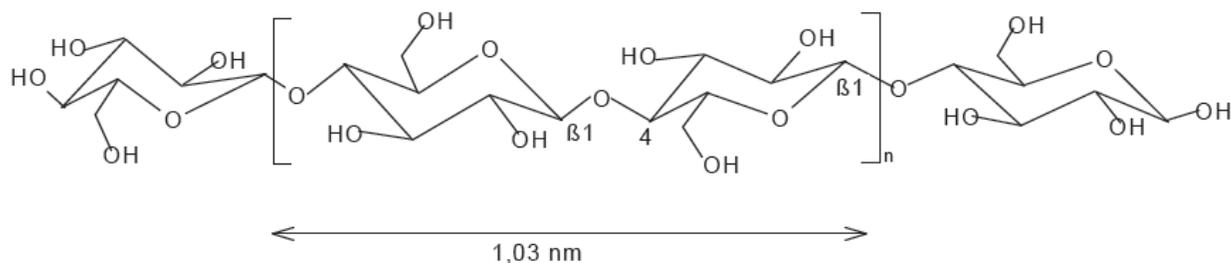
### *1.2.1 Généralité sur la structure des fibres naturelles*

Les fibres naturelles (jute, chanvre, lin, sisal, fibre de bois, etc.) sont des structures biologiques principalement composées de cellulose, hémicelluloses, de pectines, de lignine et d'une proportion d'extractibles généralement faible (gommes, résines, protéines, etc.) (Michaud, 2003) (Voir figure **1-1**).

La cellulose est un polymère dont le monomère est la cellobiose formée de deux molécules de  $\beta$ -glucose. Elle possède des hydroxyles (OH) libres sur les positions 2, 3, et 6, une liaison  $\beta$  (1 – 4) et une conformation chaise pour garantir une bonne stabilité (Ly, 2008) (**Figure 1-2**). La lignine est une macromolécule faite de bisphénols connaissant plusieurs substitutions. Les hémicelluloses sont des mélanges de molécules de sucres. Au point de vue structural, les fibres naturelles sont composées de fibres ultimes constituées de cellulose dont des portions sont amorphes et d'autres sont cristallines.



**Figure 1-1 :** Structure des fibres naturelles (Fotso-Talla, 2008)



**Figure 1-2 :** Structure de la cellulose (Ly, 2008)

Le regroupement de plusieurs fibres ultimes à travers la lignine et les hémicelluloses forment les microfilaments qui, à leur tour, sont groupés en microfibrilles toujours avec la lignine et les hémicelluloses. Des blocs de microfibrilles sont maintenus par l'humus constitué en majorité par la lignine et des hémicelluloses (**Figure 1-1**). Les fibres naturelles peuvent donc être considérées comme des biocomposites dont le renfort est la cellulose et la matrice est un mélange de lignine et d'hémicelluloses (Fotso-Talla, 2008).

Le **tableau 1-1** présente la composition chimique de quelques fibres naturelles étudiées par différents auteurs (Clegg et al., 1986 ; Ellison et al., 2000 ; Wang et Oksman, 2007).

### 1.2.2 Chanvre

Le chanvre industriel (*Cannabis Sativa L*) est une plante à racine pivotante pouvant dépasser quatre mètres de haut, qui lui confère l'avantage de produire de longues fibres largement utilisées dans le renforcement des plastiques (Kabir et al., 2011). Son caractère imputrescible lui confère un intérêt tout particulier en construction navale pour le calfatage des navires, la voilure ou les cordages. Très prisées dans les marchés du bâtiment et de la plasturgie, les fibres de chanvre permettent une bonne réduction du poids des pièces, ainsi qu'une amélioration des perspectives de recyclage et de protection de l'environnement (Pracella et al., 2006).

**Tableau 1-1** : Composition chimique de quelques fibres naturelles

Fibres	Cellulose (%)	Hémicelluloses (%)	Pectines (%)	Lignine (%)	Éléments Hydrosolubles (%)	Wax et gras (%)
Sisal	73.1	13.3	0.9	11.0	14	0.3
Palmier	50-60	24	-	16-24	-	-
Bagasse	46	30	-	15	7.0	2.0
Jute	71.5	13.4	0.2	13.1	1.2	0.6
Chanvre	70	12-15	1	10-15		

Avec environ 70% de cellulose, les fibres de chanvre ont un grand potentiel de renforcement des résines de polyesters pour diverses applications (Aziz et Ansell, 2004). Au Canada, c'est la compagnie Hempline Inc. (Delaware, Ontario, Canada) (appelée désormais Stemergy) fondée en 1994, qui est la pionnière de l'industrie canadienne du chanvre industriel et est

depuis devenue le leader dans l'industrie des fibres de chanvre en Amérique du Nord (Hanks, 2002). Elle est spécialisée dans la fourniture de fibres de chanvre utilisées comme charges et renforcement pour l'industrie des composites. Des chercheurs américains et chinois (Oza et al., 2011) ont obtenu des fibres de chanvre de la compagnie Hempline Inc. pour étudier l'effet de leur traitement chimique sur les propriétés thermiques et mécaniques des composites à fibres de chanvre avec une matrice polyéthylène haute densité (HDPE). La densité moyenne de la fibre était de  $0.86 \text{ g/cm}^3$  et la teneur en humidité était d'environ 6%.

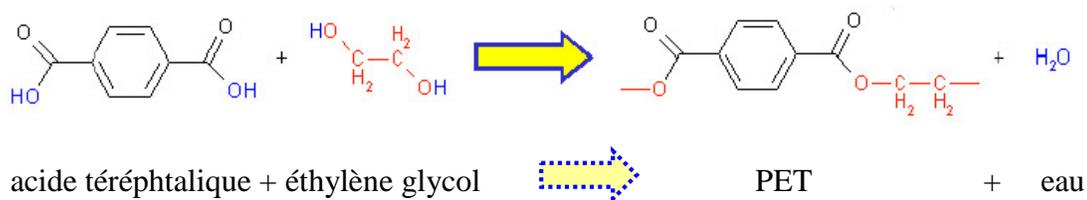
### *1.2.3 Polyéthylène téréphtalate (PET)*

Les matériaux thermoplastiques constituent une importante classe de matériaux synthétiques dérivés de polymères linéaires ou légèrement ramifiés. Ils présentent de nombreuses propriétés parfois inégalables. Ils se caractérisent par leur aptitude à conserver leur plasticité à chaud et leur rigidité à froid. Ce sont des matériaux qui, de nos jours, se substituent progressivement aux métaux et aux verres grâce à leurs divers avantages autant au niveau des propriétés mécaniques (rigidité, légèreté, étanchéité, résistance à la corrosion entre autres) qu'au niveau économique (rapport qualité / prix). Le **tableau 1-2** présente quelques caractéristiques physiques des polymères thermoplastiques les plus utilisés (Morin, 2000 ; Baïlon et Dorlot, 2005).

**Tableau 1-2:** Propriétés physiques de quelques thermoplastiques

Polymère	Densité	$\sigma$ traction (N/mm <sup>2</sup> )	MOE (N/mm <sup>2</sup> )	A(%)	R <sub>(IZOD)</sub> (kJ/m <sup>2</sup> )	T <sub>fle</sub> (°C)
PVC	1.5	50	2400	10-50	-	60
PS	1.05	40	2800-3500	4	-	90
HDPE	0.95	30-35	1000	700-1000	5	77
PET	1.39	2.5	3400	90	3	80
PMMA	1.19	65	3300	4	15	95
PP	0.91	20-40	1100-1600	200-1000	-	100

Parmi les matériaux thermoplastiques semi-transparents, le polyéthylène téréphtalate est le plus utilisé en industrie. C'est un polyester dur et tenace obtenu par polycondensation à partir des produits de base qui sont l'acide téréphtalique et l'éthylène glycol (**Figure 1-3**). Sa structure peut être amorphe ou partiellement cristalline. La possibilité de passer d'une phase à l'autre dépend fortement de la température. En effet, en dessous de la température de transition vitreuse ( $T_g \approx 80^\circ\text{C}$ ), les chaînes ne sont pas assez mobiles et le matériau est rigide, avec une microstructure figée.

**Figure 1-3 :** Synthèse du polyéthylène téréphtalate (Marco, 2003)

Au-dessus de la température de fusion (environ  $270^\circ\text{C}$ ), les liaisons entre les chaînes sont détruites et le matériau est liquéfié. Entre ces deux températures, les chaînes sont mobiles et leur configuration peut changer. C'est cet état du matériau qui est intéressant pour plusieurs procédés (thermoformage, soufflage, etc.) car il permet la mise en forme avec moins d'efforts.

#### *1.2.4 Mise en œuvre des composites PET-Chanvre*

La performance d'un composite renforcé par des fibres naturelles dépend en grande partie de l'adhésion entre les fibres et la matrice thermoplastique (Wertz, 2014). Les fibres naturelles, bien qu'elles possèdent de nombreuses qualités, présentent certains défauts majeurs lorsqu'il s'agit de les associer aux polymères thermoplastiques. En effet, la matière ligneuse possède une forte affinité avec l'eau (caractère hydrophile fort) ce qui crée une incompatibilité d'interface entre les renforts végétaux et les thermoplastiques à caractère fortement hydrophobe (Erchiqui et al., 2016 ; Kumar et al., 1995). Cette incompatibilité implique une faible adhérence entre les deux phases et des difficultés d'obtention d'un mélange homogène (problème d'agglomération). Par conséquent, elle entraîne des propriétés mécaniques peu performantes (Balasuriya et al., 2001 ; Lu, 1997).

Une amélioration de la résistance mécanique nécessite une meilleure liaison entre la cellulose de bois et la matrice de polyoléfine (le polyéthylène). Cela peut être obtenu par une modification chimique de la surface des renforts végétaux ou de la matrice ou par l'ajout d'un agent de couplage dont le rôle est d'établir un pont entre les composants. C'est souvent le couplage des agents chimiques (traitement à l'anhydride maléique, PE-g-MA) (Godard et al., 2008) qui est utilisé pour améliorer l'affinité et l'adhésion fibres-matrice.

Les techniques plasturgistes ont comme point commun la réalisation du mélange des matières premières à une température correspondant à une phase liquéfiée des plastiques. Cette façon de faire permet de réaliser un mélange homogénéisé de fibres cellulosiques et d'un thermoplastique à haute température. Une fois le mélange réalisé, il est possible de fabriquer le produit par extrusion, compression ou injection, etc.

Field et Chien (1985) sont parmi les précurseurs du renforcement du PET avec des fibres naturelles. La mise en œuvre des composites de PET renforcés de chanvre s'effectue généralement par une mercerisation du chanvre (Bledzki et al., 2004, Kabir et al., 2011). Cette étape consiste à tremper les fibres dans une solution de NaOH à 18% pendant une heure, laver successivement dans l'eau chaude, dans l'acide acétique puis dans l'eau froide et ensuite sécher dans un four à 80°C pendant 24 heures. Le chanvre mercerisé est ensuite mélangé avec le PET par extrusion en présence du polycaprolactone (PCL), un polyester biodégradable comportant une faible température de fusion d'environ 60°C. La post-cuisson de la résine polyester insaturée PCL ne nécessite pas une température supérieure à 100°C, ce qui permet de préserver les propriétés mécaniques du chanvre dont le point de dégradation thermique (Td) est à 190°C (Roudier, 2012). À titre d'exemple, soulignons le travail de Fotso-Talla et al. (2013) qui ont utilisé 5% de PCL, du pyromellitic dianhydride (PMDA), du glycidyl methacrylate (GMA) et des fibres de chanvre de différentes concentration (1% à 20%) dans une matrice de PET pour l'étude des propriétés rhéologiques et mécaniques des composites élaborés. Dans ce présent travail, nous considérons des biocomposites PET-chanvre issues des travaux de Fotso-Talla et al. (2014).

### 1.3 THERMOFORMAGE DES THERMOPLASTIQUES

#### *1.3.1 Introduction au thermoformage*

Les procédés de mise en forme des pièces thermoplastiques sont nombreux et très complexes. La température est un facteur important en thermoformage car il s'agit d'atteindre un ramollissement optimal sans dégrader les propriétés du matériau et ce, de la façon la plus

homogène possible. La première étape du procédé de thermoformage qui consiste à le chauffer par rayonnement infrarouge d'une feuille polymérique, est caractérisée par la transformation de l'état vitreux de la feuille à un état caoutchouteux. La température à laquelle cette transition se produit est appelée température de transition vitreuse 'T<sub>g</sub>' et l'intervalle de température pour lequel la préforme est suffisamment molle pour être thermoformée s'appelle '*fenêtre de thermoformage*' (Agassant et al., 2012). En conséquence, si la borne supérieure de cet intervalle est dépassée, la feuille risque de couler sous l'effet des forces de gravité. Dans le cas contraire, le matériau conserve une rigidité et sa mise en forme devient difficile. Pour le thermoformage ou l'extrusion-soufflage, il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur de la préforme thermoplastique une température appropriée. Pour cela, le chauffage infrarouge court est préférentiellement utilisé dans les industries de plasturgie.

### *1.3.2 Polymères thermoplastiques semi-transparent*

Un milieu polymérique est désigné comme semi-transparent dans une bande de longueur d'onde donnée lorsqu'il transmet partiellement à travers son épaisseur les radiations reçues en surface. Pour des épaisseurs relativement minces des préformes en PET, par exemple, entre 0.5 mm et 1.5 mm, les spectres de transmittivité de ces polymères représentent 90% à 95% du rayonnement émis par les sources infrarouges (Shelby, 1991). Ces sources opèrent généralement à des températures qui peuvent dépasser les 2500 K. D'autre part, le coefficient d'absorption du matériau PET, est généralement déterminé par la connaissance du spectre de transmittivité du matériau (Venkateswaran et al., 1997). L'hypothèse voulant que ces

matériaux (PET amorphe) absorbent le rayonnement selon la loi de Beer-Lambert est souvent admise (Esser et al., 1987 ; Bordival, 2009).

### *1.3.3 Polymères thermoplastiques opaques*

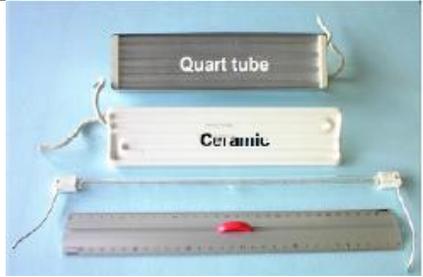
L'ajout d'une certaine proportion de fibres végétales dans le polymère semi-transparent fondu modifie ses propriétés radiatives. On aboutit à un matériau différent, opaque et macroscopiquement homogène. Dans ces conditions, l'épaisseur est telle qu'aucune fraction du rayonnement incident n'est transmise. Erchiqui et al. (2009-a) ont étudié expérimentalement et numériquement le comportement viscoélastique des composites constitués d'une matrice de polymère thermoplastique HDPE et de six différentes concentrations de fibres de bois, lors du thermoformage. D'après cette étude, l'apport en charge dans le polymère augmente d'avantage son caractère élastique et réduit son comportement visqueux et au-delà de 50% le matériau devient presque élastique. Toutefois, l'effet thermique sur l'impact des charges végétales n'a pas été étudié. Fotso-Talla et al. (2014) ont analysé expérimentalement la stabilité thermique et la variation des différentes propriétés thermophysiques en fonction du taux des fibres et de la température des composites de PET renforcé de cinq différentes concentrations (1%, 5%, 10%, 15%, et 20%) de fibres de chanvre. Concernant les composites élaborés par Fotso-Talla et al. (2013), la mise en œuvre a été réalisée en deux étapes : i) mélange des différentes composantes dans une enceinte maintenue successivement à 240°C, 250°C, et 260°C et ii) moulage par injection. Les formulations établies sont caractérisées par une bonne stabilité thermique en bas de 300°C. Ces résultats sont davantage pertinents aux applications comme le

thermoformage, dont la mise en œuvre comporte de multiples étapes. La plage de thermoformage des matériaux biocomposites, située entre 110 et 130°C (Osso et al., 1999), convient parfaitement aux fibres cellulosiques qui se dégradent réellement à partir d'une température supérieure à 200°C (Saheb, 1999). Toutefois, pour les composites élaborés par Fotso-Talla et al. (2013), la température de dégradation est au-dessus de 270°C.

## 1.4 MODÉLISATION DE L'ÉTAPE DE CHAUFFAGE EN THERMOFORMAGE

### *1.4.1 Émetteurs et propriétés optiques*

Dans une première étape, une caractérisation du système de chauffage s'impose. En effet, la répartition spectrale de l'énergie des lampes doit être identifiée selon chaque type d'émetteur considéré. En général, trois types d'émetteurs électriques sont fréquemment utilisés : les émetteurs en céramique, en quartz et en halogène qui correspondent chacun à un domaine différent de l'infrarouge : long (3 à 15  $\mu\text{m}$ ), moyen (1.4 à 3  $\mu\text{m}$ ) et court (0.78 à 1.4  $\mu\text{m}$ ). Le choix des émetteurs IR dépend de la valeur de la longueur d'onde  $\lambda_{\text{max}}$  selon la loi de Wien pour laquelle l'intensité spectrale est maximale (Boyard, 2016). Andrieu, (2005), dans ces travaux, montre dans un tableau (**Figure 1-4**) les températures maximales que peuvent atteindre les émetteurs en halogène, en tube de quartz et en céramique, ainsi que leur gamme de longueur d'onde maximale d'émission associée.

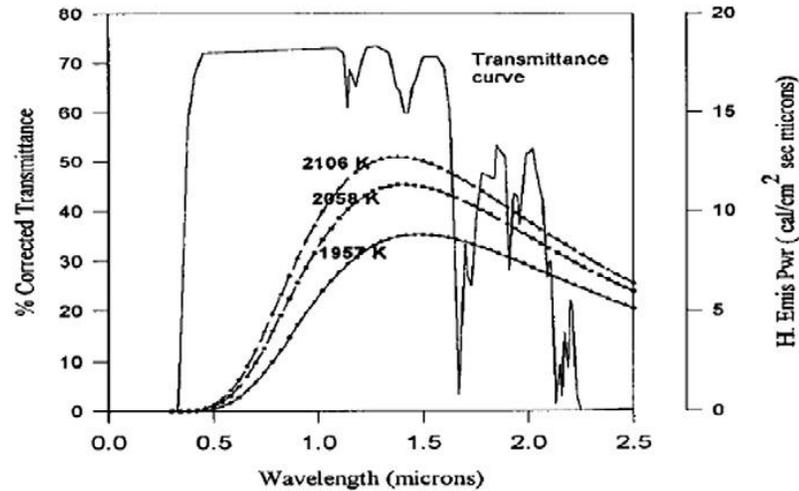
		Température des émetteurs (K)	Longueur d'onde $\Delta\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )
	Tube en quartz	1140	1.3 - 12.5
	Céramique	970	1.5 - 15
	Lampe halogène	2470	0.6 - 6

**Figure 1-4 :** Longueurs d'onde des différents émetteurs (Andrieu, 2005).

Dans le cas des préformes en PET, il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur une température avoisinant la température de mise en forme du matériau (Hartwig, 1996). Toutefois, soulignons que le spectre de transmittivité du PET, en général pour l'infrarouge court (0.78 à 1.4  $\mu\text{m}$ ), représente environ 70% du rayonnement émis par des émetteurs infrarouges en halogène pour lesquels les températures de rayonnement se situent entre 1800 et 2200°C (Venkateswaran et al., 1997) (**Figure 1-5**).

Par contre, dans le cas de l'infrarouge moyen (1.4 à 3  $\mu\text{m}$ ), ce spectre de transmittivité représente environ 40% du rayonnement émis par des émetteurs infrarouges en quartz.

Afin d'augmenter l'efficacité des émetteurs, des réflecteurs sont généralement rajoutés (Shelby, 1991). Par effet joule et en régime permanent, les émetteurs peuvent atteindre les températures de l'ordre de 1400 à 2000°C (Monteix et al., 2001).



**Figure 1-5 :** Spectre de transmittivité du PET (Venkateswaran et al., 1997).

Dans ce travail, les émetteurs formés de zones radiantes rectangulaires en céramique dont la température  $T_s$  et l'émissivité  $\varepsilon_s$  sont supposées connues, sont considérés. Aussi, le milieu qui sépare le matériau thermoplastique et l'émetteur infrarouge est considéré transparent (Venkateswaran et al., 1997).

#### *1.4.2 Surfaces de radiations mutuelles*

La qualité des pièces fabriquées par thermoformage dépend largement des échanges thermiques entre la source de chauffage utilisée et le matériau considéré. La prédiction des énergies échangées par rayonnement, entre chaque partie de la membrane biocomposite (récepteur) et chaque partie de l'émetteur (source infrarouge), dépend, d'une part, des propriétés physiques de chaque partie du système émetteur-récepteur et, du milieu environnant d'autre part.

Dans le cas d'un milieu ambiant transparent, le problème de calcul de l'échange de chaleur radiatif entre des surfaces,  $A_i$  de l'émetteur infrarouge et  $A_j$  du récepteur, placées arbitrairement dans l'espace, se ramène à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle  $F_{ij}$  (Modest, 2013), appelée facteur de forme. Le calcul analytique des facteurs de forme n'est possible que pour des géométries simples.

L'introduction des méthodes d'intégration numérique (Kreith, 1959 ; Ambirajan et Venkateshan, 1993) et probabilistes (Siegel et Howel, 2001) ont permis de surmonter ces difficultés pour des formes arbitraires des émetteurs et récepteurs. Dans le cas d'intégration numérique, les formulations utilisées peuvent être classées en deux catégories :

i) formulation intégrale surfacique (Krishnaprakas, 1998 ; Chung et Kim, 1982) et  
ii) formulation intégrale de contour (Rammohan, 1996, Mazumder et Ravishankar, 2012). Le calcul numérique de ces intégrales peut s'effectuer, par exemple, par l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss sur des éléments finis de surfaces ou de contours (Sparrow, 1963, Narayanaswamy, 2015). Contrairement à la méthode probabiliste de Monté-Carlo (Siegel et Howel, 2001, Vujicic et al., 2006, Mirhosseini et Saboonchi, 2011), lorsque deux surfaces ont des régions communes, ou très voisines, le noyau qui apparaît dans l'expression mathématique de la valeur du facteur de forme diverge dans ces régions. L'utilisation des formules d'intégration numérique pour le calcul de  $F_{ij}$  conduit à des résultats trop peu précis, même si l'on utilise un très grand nombre de points de Gauss (Krishnaprakas, 1998). Toutefois, la méthode de Monté Carlo, qui permet de contourner ce problème, peut nécessiter un temps de calcul élevé particulièrement dans le cas d'un milieu optiquement épais. La méthode semi-analytique développée par (Erchiqui et Dituba, 2007) permet également de

lever cette singularité en résolvant analytiquement la partie singulière du facteur de forme puis en intégrant numériquement le résultat de cette première étape.

#### *1.4.3 Modélisation du chauffage infrarouge en thermoformage*

La modélisation de chauffage infrarouge en thermoformage est basée sur la résolution des équations de la conservation de l'énergie (ECE) et de transfert radiatif (ETR). Toutefois, la prédiction numérique de l'évolution de la température, au sein d'une préforme thermoplastique semi-transparente mince n'est pas suffisamment élucidée dans la littérature et particulièrement dans le cas des biocomposites. Elle se traite le plus souvent à l'aide de la méthode des éléments finis 1D (Shelby, 1991 ; Thrasher, 1996) ou 2D (Hartwig, 1996), ou par la méthode des différences finies 1D (Esser et al., 1987 ; Shelby, 1991 ; Throne, 1996 ; Venkateswaran et al., 1997 ; Duarte et Covas, 2002), ou 2D (Lebaudy, 1989). En plus, l'hypothèse des transferts radiatifs internes unidirectionnels, suivant l'épaisseur de chaque région de la membrane thermoplastique, est largement adoptée par les auteurs (Esser et al., 1987 ; Shelby, 1991 ; Throne, 1996 ; Venkateswaran et al., 1997 ; Duarte et Covas, 2002). À cela s'ajoute l'hypothèse des milieux froids (Le Maoult et al., 1997) pour les procédés de soufflage et de thermoformage de préformes (Erchiqui et al., 2009-b). Dans le cas du PET, les auteurs justifient cette hypothèse par le fait que la température d'utilisation du matériau PET est significativement inférieure à la température des sources rayonnantes (Monteix, 2001). Cette hypothèse permet alors, dans le cas unidirectionnel, d'exprimer la transmission de la densité de flux à travers la profondeur de la membrane thermoplastique par la loi de Beer-Lambert en fonction d'une seule variable spatiale (Venkateswaran et al, 1997 ;

Champin, 2007 ; Bordival, 2009 ; Erchiqui et al, 2009-b ; Hamani et al, 2009). Parmi les travaux d'intérêt, soulignons les travaux de :

Monteix (2001) qui a développé une approche basée sur la méthode des volumes-finis 3D, sur la modélisation numérique du transfert radiatif pour des géométries 3D rectangulaires. De plus, une modélisation fine des émetteurs IR est proposée, ainsi qu'un calcul du terme source prenant en compte la dépendance spectrale du rayonnement pour résoudre l'ECE durant l'étape de chauffage de préforme thermoplastique semi-transparente.

Michaeli et Papst (2004) utilisent quant à eux la méthode des zones pour résoudre l'équation du transfert radiatif dans la préforme. Cette méthode est couplée avec la méthode des éléments finis 3D pour déterminer la distribution de température dans la préforme en PET lors du chauffage infrarouge pour le procédé de moulage par étirage-soufflage.

Huang et al. (2005) ont modélisé, à l'aide du logiciel d'éléments finis ANSYS, le chauffage de la préforme par le modèle basé sur le calcul d'un terme radiatif surfacique reçu par la préforme et diffusé ensuite dans le matériau par conduction. Ils ont validé la comparaison entre leur modèle et des mesures expérimentales réalisées par des thermocouples implantés dans l'épaisseur de la préforme.

Champin (2007) a implanté la méthode du lancer de rayons (Raytracing) en trois dimensions sein du logiciel éléments finis Forge3, pour calculer le terme source radiatif volumique présent dans l'équation de la chaleur, couplée avec une loi d'absorption spectrale de Beer Lambert.

Erchiqui, et al., (2009) ont modélisé le chauffage infrarouge des membranes thermoplastiques semi-transparentes. Dans l'article, la modélisation 3D par la méthode des

éléments finis du chauffage des feuilles minces en PET a été réalisée. Il y est supposé que les propriétés thermophysiques du PET sont indépendantes de la température et que l'absorption de l'intensité radiative à l'intérieur du matériau est unidirectionnelle et est régit par la loi de Beer-Lambert.

Bordival, (2009) présente une stratégie d'optimisation développée pour le procédé de moulage par étirage-soufflage des bouteilles en PET. La méthode est basée sur un couplage entre l'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead et la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel ABAQUS. Les simulations du conditionnement thermique de la préforme sont réalisées avec un logiciel de volumes finis en 3D (PLASTIRAD). La loi de Beer Lambert est utilisée pour calculer l'absorption du rayonnement dans la préforme.

Trovalet, (2011) développe un code de calcul permettant de simuler le transfert de chaleur par conduction et rayonnement au sein d'un milieu semi-transparent, gris (ou non gris) et non diffusant pour une géométrie 3D de forme complexe. Dans son étude, la résolution spatiale de l'ETR s'effectue par une méthode des volumes finis (MVF) avec une formulation « cell-vertex ». Cette formulation généralisée en géométrie 3D par l'auteur, consiste à calculer les grandeurs discrètes aux nœuds d'un maillage tétraédrique non structuré dans un ordre de parcours (« marching order map »). Le code de rayonnement par volumes finis est couplé à un code de conduction par éléments finis sur un même maillage tétraédrique.

Cosson et al. (2011) utilisent la méthode des éléments finis 3D avec le logiciel Comsol pour modéliser le chauffage d'une préforme cylindrique en PET. Leur modèle est basé sur le calcul du terme source radiatif spectral par la méthode du lancer de rayons dans l'équation du bilan thermique transitoire. Considérant l'hypothèse de la loi d'absorption spectrale de Beer-

Lambert pour le PET, ils établissent un comparatif entre leur modèle numérique et des mesures expérimentales.

Luo, (2012) a réalisé une simulation 3D du chauffage d'une préforme tournant devant des lampes par la méthode des éléments finis avec le logiciel Comsol. Le rayonnement IR absorbé est estimé à partir d'une modélisation basée sur le principe de l'énergie spectrale. Le flux radiatif se propage de manière unidirectionnelle dans l'épaisseur de la préforme et est calculé par la loi de Beer Lambert. La solution numérique est confrontée avec des résultats expérimentaux réalisés sur un banc de chauffage et pour lesquels l'évolution du champ de température de la surface extérieure de la préforme est enregistré par une caméra thermique. Finalement, Luo et al. (2014) proposent une approche simplifiée des transferts de chaleur couplés (conduction, convection et rayonnement) pour le chauffage IR en modélisant la convection entre la préforme PET cylindrique et l'air ambiant par un modèle 2D, cas d'une feuille plane, avec le logiciel ANSYS / FLUENT. La conduction est résolue par une simulation 3D du chauffage par le logiciel Comsol. Le flux radiatif provenant de lampes infrarouges est calculé en utilisant le principe de l'énergie spectrale. L'effet de la rotation de la préforme est pris en compte dans le flux de rayonnement par une fonction temporelle périodique.

Concernant la mise en forme des composites thermoplastiques, les méthodes numériques de la modélisation du chauffage infrarouge se basent sur celles déjà utilisées pour la mise en forme des pièces thermoplastiques simples pour le thermoformage. On peut citer certaines références comme :

Nakouzi, (2012) a réalisé les simulations 3D du chauffage infrarouge de composite par un modèle de calcul par éléments finis basé sur la méthode des radiosités afin de prédire le flux radiatif absorbé par le composite. Ce flux radiatif absorbé est imposé comme condition aux limites dans le logiciel commercial COMSOL Multiphysics qui résout par la méthode des éléments finis l'équation de chaleur couplée avec la cinétique de réticulation de la résine afin de modéliser la polymérisation par infrarouge. Un algorithme d'optimisation a été couplé avec le modèle radiatif afin d'obtenir une distribution de température optimale dans le composite. Les résultats numériques de l'étape de chauffage sont validés à l'aide de thermocouple et de la thermographie infrarouge pour le cas d'une plaque composite et le cas d'une pièce 3D.

Akué-Asseko, (2014) a modélisé et simulé l'irradiation d'un faisceau laser dans les composites semi-transparents. L'auteur développe un modèle analytique de diffusion basé sur une modélisation optique et thermique permettant de décrire l'atténuation du faisceau laser et l'estimation de la puissance radiative dans le composite semi-transparent lors du procédé de soudage laser. Le terme source radiatif calculé est ensuite importé dans le logiciel commercial COMSOL afin d'effectuer un calcul thermique complet du modèle analytique. Le modèle analytique de diffusion développé est comparé à la méthode numérique du lancer de rayons puis confronté avec des essais expérimentaux du procédé de soudage laser et du procédé de soudage par lampe focalisée des matériaux de l'étude.

Finalement, Boyard (2016), par le biais de contribution de plusieurs chercheurs, compile dans son livre, quelques avancements de travaux sur la détermination des propriétés thermophysiques et radiatives, la modélisation numérique et expérimentale avec couplage

thermocinétique ou thermomécanique du transfert de chaleur par rayonnement infrarouge de la mise en forme des polymères et composites.

Au niveau expérimental, on peut citer quelques travaux de : Taylor et Kazmer (1992), Lappin et Martin (1996), Monteix (2001), Bunyong (2003), Huang et al. (2005), Andrieu (2005), Luo (2012), Nakouzi (2012), Ahmad (2013), Akué-Asseko (2014).

### 1.5 PROBLÉMATIQUE

Il ressort de cette synthèse bibliographique que l'étape du chauffage de feuilles minces thermoplastiques semi-transparentes fibreuses aura une incidence sur la qualité des pièces fabriquées par thermoformage. Effectivement, l'effet combiné de la température et de la force de gravité, induira, d'une part, une répartition de la température dans la feuille biocomposite, et, d'autre part, l'affaissement de la structure fibreuse (effet thermomécanique). Dans ce contexte, il est nécessaire de caractériser l'évolution de ces phénomènes thermiques et mécaniques lors du chauffage infrarouge des feuilles thermoplastiques fibreuses. Pour cela, l'utilisation ou le développement d'outils numériques de prédiction des phénomènes lors de l'étape de chauffage infrarouge s'avèrent nécessaires. L'autre approche que certains industriels utilisent est le recours à un nombre élevé d'essais avant d'entamer une production de masse. Ceci occasionne des opérations coûteuses en temps et en argent.

Du point de vue numérique, la modélisation, de l'étape de chauffage infrarouge, nécessite des outils robustes pour estimer le flux de chaleur rayonnée par la source émettrice, le flux reçu, absorbé et diffusé par le matériau composite. Ceci nécessite donc des études sur la modélisation numérique de transfert radiative dans les matériaux polymériques (semi-

transparents ou opaques). À titre de remarque, certains auteurs consacrent leurs études à des modèles à une dimension (1D), sans pour autant spécifier suffisamment les limites d'utilisation des modèles 1D vis-à-vis des modèles 3D.

Du point de vue du procédé de thermoformage, l'évolution de la température dans un matériau thermoplastique de type PET renforcé de fibres de chanvre n'a pas été suffisamment étudiée dans la littérature. Ceci mérite d'être étudié.

## 1.6 OBJECTIF DE L'ÉTUDE

### *1.6.1 Objectif général*

L'objectif général de ce travail de thèse est de développer une approche numérique hybride qui couple l'équation de la conservation de l'énergie (ECE), en 3D, avec l'équation de transfert radiatif (ETR), en 1D, pour la compréhension et la simulation de la phase de chauffage infrarouge de structures composites minces, à base d'une matrice thermoplastique semi-transparente (polyéthylène téréphtalate, PET) renforcée de fibres de chanvre, pour des applications en thermoformage. Pour l'équation de l'énergie, la méthode des éléments finis 3D, MEF, en implicite et non-linéaire, est considérée. Pour l'ETR, la méthode des ordonnées discrète (MOD) est utilisée et est confrontée avec le modèle de Beer-Lambert. Cette étude considère les hypothèses suivantes :

- Seul le phénomène thermique (rayonnement-conduction-convection) est traité ;
- Le couplage thermique-mécanique n'est pas considéré (la déformation de la préforme sous l'effet des forces de gravité, 'Effet de Sag', n'est pas prise en compte) ;

- Il n'y a de changement de phase (le ramollissement de la préforme par chauffage infrarouge n'est pas considéré) ;
- Le milieu thermoplastique PET sera considéré semi-transparent, gris, absorbant et non diffusant ;
- Le milieu composite PET chargé de fibres de chanvre sera considéré opaque ;
- Les propriétés thermophysiques du PET-chanvre varient en fonction de la température.

### *1.6.2 Objectifs spécifiques*

- Développement d'un modèle numérique 3D de transfert transitoire de chaleur par la méthode des éléments finis avec perte par convection.
- Développement d'un modèle hybride 3D de transfert de chaleur transitoire couplé à un modèle 1D radiatif basé sur le modèle Beer-Lambert. Cette méthode a été appliquée au chauffage infrarouge d'une membrane polymérique semi-transparente avec des validations analytique et expérimentale.
- Élaboration d'une méthode résolvant l'ETR par la Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD) 1D et 2D en statique avec validation.
- Réalisation d'un outil numérique 1D pour l'étude du chauffage infrarouge des matériaux semi-transparents. Cette approche couple la Méthode des Éléments Finis avec la Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD).
- Étude numérique de l'étape de chauffage infrarouge, en thermoformage d'une préforme rectangulaire en PET-chanvre à l'aide d'un modèle hybride (3D-MEF et 1D-MOD).

## 1.7 MATÉRIEL ET APPROCHE DE MODÉLISATION INFRAROUGE

### *1.7.1 Composites PET / Chanvre*

Les composites PET-Chanvre considérés pour l'étude numérique du chauffage infrarouge, sont ceux élaborés au Laboratoire des Biomatériaux de l'UQAT (Fotso-Talla et al., 2008-2013-2015).

### *1.7.2 Propriétés thermophysiques du PET/Chanvre*

Les propriétés thermophysiques des matériaux composites suscitent beaucoup d'intérêts et un grand nombre de travaux ont été consacrés à l'étude de la conductivité thermique effective (keff) en particulier (Behzad et Sain, 2007 ; Liu, 2011 ; Bourai 2013 ; Zheng, 2014 ; Boyard, 2016). Cette propriété dépend de la conductivité de la matrice et celle du renfort, ainsi que du taux de remplissage et de l'orientation des fibres. Une répartition aléatoire des composants est généralement le cas le plus répandu et le modèle le plus connu est celui de Maxwell (Maxwell, 1954) valable pour de faibles pourcentages de remplissage. Dans ce travail, nous avons considéré cette dernière méthode pour déterminer la conductivité thermique des composites PET chargé de 1%, 5% et 15% de fibres de chanvre.

Les mesures de capacité calorifique massique en fonction du taux des fibres et de la température sont réalisées à l'aide d'un appareillage d'Analyse Enthalpique Différentielle (AED), plus communément appelé DSC (Differential Scanning Calorimetry) disponible dans le Laboratoire de Biomatériaux de l'UQAT (Fotso-Talla et al., 2013 b). Dans ce travail, seul les concentrations massiques de 1%, 5% et 15% en fibres de chanvre sont considérées.

Les masses volumiques des échantillons composites chargés de 1%, 5% et 15% sont déterminées par la loi des mélanges. Cette propriété dépend de la densité de la matrice (PET) et celle du renfort (fibre de chanvre), ainsi que du taux de remplissage.

### *1.7.3 Modélisation du chauffage infrarouge*

#### *1.7.3.1 Équation de conservation de l'énergie et formulation éléments finis*

Pour atteindre l'objectif visé, les méthodes des éléments finis (MEF) 1D et 3D sont considérées pour modéliser et analyser l'étape de chauffage transitoire des feuilles de matériaux thermoplastiques semi-transparentes et opaques. Une discrétisation basée sur une formulation intégrale faible de l'équation de conservation de l'énergie avec terme source radiatif est considérée. Pour le cas 3D, la solution est approchée par une méthode d'interpolation isoparamétrique de Galerkin sur des éléments hexaédriques linéaires. Pour la stabilité de la méthode, un schéma monopas implicite de Crank-Nicolson est utilisé (inconditionnellement stable) (Reddy, 1993).

#### *1.7.3.2 Équation de transfert radiatif et méthode des ordonnées discrètes*

Pour la modélisation du transfert radiatif, la source volumique radiative à l'intérieur du matériau polymérique est déterminée en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR). L'ETR traduit le fait que les variations locales et temporelles de l'intensité radiative monochromatique, résultent d'un bilan entre l'atténuation par l'absorption et la diffusion du rayonnement par émission propre du milieu et diffusion, dans une direction donnée en provenance de toutes les autres directions.

Dans la référence (Lallemand et Saccadura, 1988), une revue des différentes techniques de résolutions de l'ETR par des méthodes numériques est détaillée. La méthode de Monté-Carlo (Steward et Cannon, 1971), qui est un outil statistique mis en œuvre pour les problèmes thermiques dans les milieux complexes, est considérée comme une très bonne approche pour la résolution de l'ETR, mais elle exige un important temps de calcul. La méthode de zones (Hottel et Sarofim, 1967) donne aussi des résultats précis, mais elle est difficile à manier et s'adapte difficilement aux milieux diffusants ; elle a été utilisée par Tan et al. (1991) dans la modélisation des transferts couplés dans les verres chauds. Une autre méthode, appelée méthode des plans imaginaires, basée sur une nouvelle formulation de la méthode de zones associée à la technique de Monté-Carlo a été utilisée pour le calcul du transfert radiatif dans des fours rectangulaires en 3D (Charette et al., 1989) ; les temps de calcul se sont avérés considérablement réduits par rapport à ceux de la méthode de zones. Bayazitoglu et Higenyi (1980) ont utilisé la méthode des harmoniques sphériques, appelée approximation  $P_n$  ; cette méthode s'adapte facilement au problème d'absorption et de diffusion, mais le temps de calcul reste important et l'amélioration de la précision des résultats nécessite un effort laborieux pour mettre en place les équations qui gouvernent le problème. La méthode des éléments finis (Razzaque et al., 1983) a été aussi utilisée pour le calcul du transfert radiatif dans une cavité bidimensionnelle rectangulaire, mais en plus de nécessiter des temps de calcul importants, elle s'applique difficilement au cas d'un milieu diffusant. La méthode des ordonnées discrètes qui appartient à la famille des méthodes multiflux, a été appliquée en premier dans le domaine de l'astrophysique par Chandrasekhar (1960). Elle a été ensuite utilisée par les neutroniciens Carlson et Lathrop (1968) et, ensuite, elle a été utilisée dans le

domaine du transfert radiatif par Khalil et Truelove (1977) et Fiveland (1982). Cependant, cette méthode présente certaines limitations dues à un effet de rayon important pour une émission localisée et lorsque la diffusion est plus faible que l'absorption. Aussi, elle peut donner une mauvaise convergence pour des albédos optiques forts. Toutefois, Il existe une littérature abondante sur la méthode MOD (Lathrop et Carlson, 1964 ; Thurgood et al., 1995 ; Sakami et al., 1996 ; Balima, 2010 ; Modest, 2013 ; Coelho, 2014, entre autres) proposant de nombreuses techniques pour accroître la précision des résultats et constituant une base de données intéressante pour faire des comparaisons. Dans le cas de la modélisation de l'étape de chauffage en thermoformage, plusieurs travaux sont à l'étude, et le phénomène de chauffage par infrarouge des structures minces semi-transparentes mérite d'être mieux étudié. C'est dans ce contexte, que nous considérons la méthode aux ordonnées discrètes, MOD (Modest, 2013) pour la résolution de l'ETR. Effectivement, la MOD est connue pour sa flexibilité et sa rapidité. Elle permet de tenir compte des phénomènes d'échanges thermiques intervenant dans le milieu physique (milieu gris, absorbant, émettant, diffusant) et elle est caractérisée par une démarche simple et performante pour appréhender les calculs. L'ETR est d'abord discrétisée de façon angulaire pour un nombre fini de directions, ce qui permet d'obtenir une équation par direction qu'on peut résoudre par les techniques numériques classiques, et ensuite de calculer les flux radiatifs et incidents par des formules de quadratures (Coelho, 2014).

### *1.7.3.3 Modélisation dynamique du couplage conduction-radiation*

La modélisation par la méthode des éléments finis du problème du couplage MEF/MOD est un problème non linéaire transitoire. La recherche de la solution s'effectue de manière itérative. À cet effet, plusieurs méthodes sont utilisées dans la littérature et particulièrement les méthodes suivantes : la méthode de substitution, la méthode de Newton-Raphson ou la méthode mixte (substitution et Newton-Raphson). La méthode de substitution est une méthode sécante basée sur le principe de la méthode du point fixe. La température initiale du processus est très importante pour la convergence (ou non) vers la solution cherchée avec un temps approprié (rapide ou lent). Dans certains cas, les méthodes sécantes ne convergent pas d'où la préférence pour les méthodes dites tangentes. La méthode tangente la plus connue est celle de Newton-Raphson, dont il existe de nombreuses variantes (Newton modifié, quasi-Newton...) (Dhatt et Touzot, 1984). Avec la méthode itérative de Newton-Raphson, la matrice tangente doit être calculée à chaque itération pour chaque pas de temps. Il est difficile avec cette méthode d'évaluer la stabilité et la convergence de l'algorithme si on se place trop loin de la solution ce qui engendre de grandes divergences (Rachik, 2003).

Une des manières de réduire le temps de résolution numérique, d'un problème non linéaire transitoire, est de définir un nouveau schéma d'intégration temporel. L'équation de conservation de l'énergie est préalablement linéarisée. Puis, la température au premier pas de temps est déterminée par une méthode, à un ou deux pas d'intégration temporelle du type Euler explicite comme prédiction puis comme correction par une méthode d'Euler implicite ou par un schéma de Crank-Nicholson. Chaque pas de temps requiert la détermination du

calcul de la matrice tangente pour l'application de la méthode itérative de Newton-Raphson résolvant la non-linéarité.

Dans ce travail, le schéma monopas prédiction-correction d'intégration en temps est utilisé (Reddy et Gartling, 2010). La méthode de prédiction-correction développée par Gresho et al., (1980) est appliquée à notre problème. Elle consiste à considérer un schéma d'Euler avant explicite comme prédiction suivi d'un schéma d'Euler arrière implicite comme correcteur.

## 1.8 ORIGINALITÉS DE LA THÈSE

L'originalité de la thèse est triple : i) Développement d'une approche numérique transitoire hybride pour étudier le transfert radiatif dans les structures minces semi-transparentes. Cette approche couple la méthode des éléments finis 3D, pour l'équation d'énergie, et la méthode des ordonnées discrète, pour l'équation de transfert radiatif (1D); ii) Application de la méthode hybride pour étudier l'étape de chauffage infrarouge des structures minces semi-transparentes (PET) en thermoformage et iii) Analyse de l'effet de la radiation infrarouge sur le chauffage des préformes composites de type PET-Chanvre.

**Remarque** : La substitution de la loi de Beer-Lambert, généralement utilisée en thermoformage, par la MOD, permet d'améliorer la précision du calcul radiatif au sein des matériaux thermoplastiques semi-transparentes.

## 1.9 CONTENU DE LA THÈSE

Cette thèse est subdivisée en (6) chapitres. Le **chapitre 1** introduit le sujet de recherche avec une revue de littérature, la problématique, les objectifs et la méthodologie utilisée. Le

**chapitre 2** décrit l'aspect d'élaboration et de caractérisation des biocomposites PET/Chanvre effectuées au sein du laboratoire de biomatériaux de l'UQAT. Après une revue des différentes techniques de mise en forme des matériaux polymériques chargés de fibres végétales, l'accent est mis sur la caractérisation des propriétés thermophysiques de ces matériaux composites, propriétés requises pour la simulation numérique du chauffage infrarouge. Dans le **chapitre 3**, une étude comparative de différentes méthodes de calcul des facteurs de forme entre l'émetteur infrarouge et le récepteur polymérique composite est effectuée. La densité de flux thermique à la surface du récepteur thermoplastique semi-transparent fibreux sera déduite à l'issue de l'étude. Le **chapitre 4** est consacré à la modélisation hybride du chauffage infrarouge qui consiste à la résolution tridimensionnelle de l'équation de la conservation de l'énergie à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF) couplée avec l'équation de transfert radiatif résolue par la méthode des ordonnées discrètes (MOD). La formulation intégrale, les discrétisations angulaires, spatiales et temporelles y seront abordées. Les validations analytiques, numériques et expérimentales ainsi que les résultats obtenus y seront développés et discutés. Dans le **chapitre 5** une application à l'étape de chauffage des préformes au thermoformage est effectuée à l'aide de l'outil numérique développé pour des composites thermoplastiques PET chargés de différentes teneurs en fibres de chanvre. Le **chapitre 6** termine avec une conclusion et des recommandations qu'il est possible de tirer de ce travail. Une synthèse des travaux de cette thèse est présentée ainsi que les perspectives et les extensions possibles.

## CHAPITRE 2

### PROPRIÉTÉS THERMOPHYSIQUES DES BIOCOMPOSITES PET/CHANVRE

Ce chapitre met l'accent sur la caractérisation des propriétés thermophysiques des biocomposites PET/Chanvre, propriétés requises pour la simulation numérique du chauffage.

#### 2.1 CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

La conductivité thermique donne une indication sur la vitesse dont l'énergie de conduction est transférée par diffusion à l'intérieur du matériau. Étant donné que les matériaux composites sont hétérogènes et leur renfort fibreux peut avoir plusieurs orientations, la conductivité thermique a un caractère anisotrope, qui impose l'évaluation d'un tenseur (Villière et al., 2013). Dans la littérature, la détermination de la conductivité thermique des composites est effectuée suivant deux approches complémentaires :

Le premier est expérimental. Il vise à identifier la conductivité thermique par des méthodes numériques. Ces méthodes sont soit stationnaires (la méthode de la plaque chaude gardée, la méthode de la barre, la méthode des boîtes, et la méthode du flux radial) ou transitoires (méthodes flash, fil chaud, plan chaud, ruban chaud, pastille chaude, et Hot Disk) réalisées à partir des mesures obtenues expérimentalement (Degiovanni 1994; Bendada et Degiovanni, 1996; Jannot et Meukam, 2004; Filali, 2006; Milošević, 2008; El Bahri et al., 2010; Hamani et al., 2011; Rodiet, 2014).

La seconde consiste à utiliser des modèles analytiques (à partir de la résolution exacte de l'équation de l'énergie) et / ou des théories d'homogénéisation (analogie électrique) pour prédire la conductivité thermique effective. Il existe plusieurs modèles de détermination de conductivité thermique effective des composites. Ces modèles dépendent généralement de la conductivité thermique de la matrice et celle du renfort, de leur fraction volumique, de la géométrie et de l'orientation des fibres (Boyard, 2016). Toutefois, tous les modèles sont toujours compris entre deux valeurs extrêmes :

La borne inférieure  $k_{inf}$  (modèle en série) correspond à un milieu où la charge est orientée dans le sens du vecteur densité de flux de chaleur (Idicula et al., 2006).

$$k_{inf} = \phi k_f + (1 - \phi) k_m \quad (2.1)$$

La borne supérieure  $k_{sup}$  (modèle en parallèle) correspond à un milieu où la charge est orientée dans perpendiculairement au vecteur densité de flux de chaleur.

$$\frac{1}{k_{sup}} = \frac{1 - \phi}{k_m} + \frac{\phi}{k_f} \quad (2.2)$$

Un grand nombre de travaux ont été consacrés à l'étude de la conductivité thermique effective ( $k_{eff}$ ) des composites polymériques renforcés de fibres végétales validée expérimentalement par des techniques de traitement de signal, des mesures de flux de chaleur injectés, ou l'utilisation des sondes de mesures (Islam et Pramila, 1999 ; Sweeting et Liu, 2004 ; Behzad et Sain, 2007 ; Liu et al., 2011 ; Zheng, 2014).

Behzad et Sain (2007) ont étudié la conductivité thermique effective des composites polymériques renforcés de fibres de chanvre disposés de façon transversale, horizontale ou aléatoire à partir de l'état d'équilibre jusqu'à une basse température. Les échantillons, à

différentes fractions volumiques de fibres, sont exposés à une valeur de flux de chaleur connu. Pour valider les résultats expérimentaux, les mesures de la conductivité thermique ont été simulées par un modèle d'éléments finis en utilisant les valeurs obtenues expérimentalement. Les résultats expérimentaux ont montré que l'orientation des fibres a un effet significatif sur la conductivité thermique des composites.

En supposant une répartition aléatoire des fibres de chanvre dans la matrice PET, nous avons adopté dans ce travail, le modèle de Maxwell (Maxwell, 1954 ; Bourai et al.2013 ; Villière et al., 2013) qui est généralement utilisé pour représenter la conductivité effective  $k_{eff}$  des composites valable pour de faibles pourcentages de remplissage.

$$k_{eff} = k_m \frac{k_f + 2k_m + 2\phi(k_f - k_m)}{k_f + 2k_m - 2\phi(k_f - k_m)} \quad (2.3)$$

où  $k_f$  et  $k_m$  sont les conductivités thermiques de la charge et de la matrice respectivement.  $\phi$  représente la fraction volumique de la fibre dans le composite donnée par l'équation (Behzad et Sain, 2007) :

$$\phi = \frac{\rho_m \omega_f}{\rho_m \omega_f + \rho_f \omega_m} \quad (2.4)$$

où  $\rho_f$  et  $\rho_m$  sont les densités de la charge et de la matrice respectivement et  $\omega_f$  et  $\omega_m$  les fractions massiques correspondantes.

L'application du modèle de Maxwell sur le PET-chanvre (voir **tableau 2-1**) montre que la conductivité thermique effective diminue avec l'ajout de fibres dans la matrice.

**Tableau 2-1** : Conductivité thermique effective des composites PET-chanvre

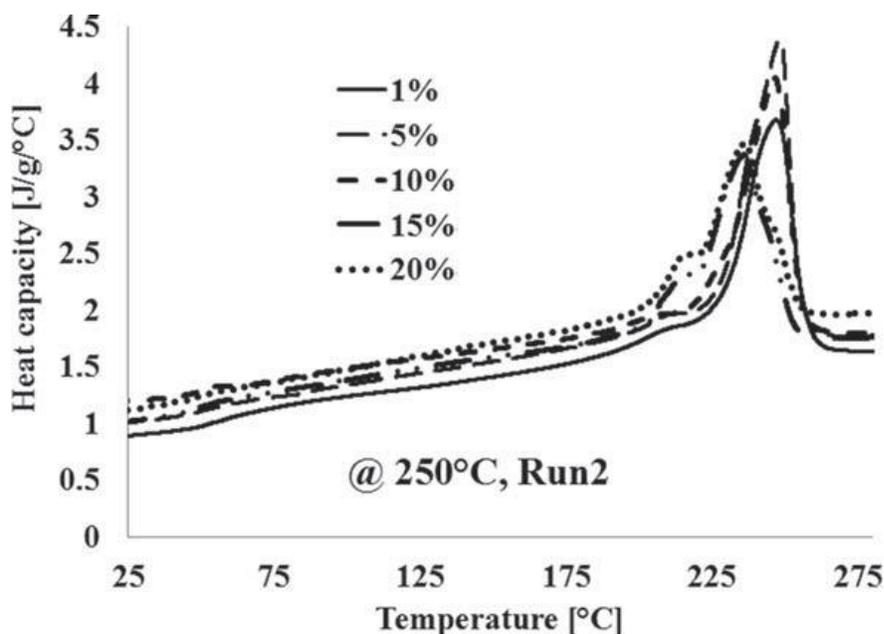
<b>PET</b>	<b><math>k_m</math> [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.290</b>
<b>CHANVRE</b>	<b><math>k_f</math> [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.050</b>
<b>15%</b>	<b><math>K_{eff}</math> [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.243</b>
<b>5%</b>	<b><math>K_{eff}</math> [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.274</b>
<b>1%</b>	<b><math>K_{eff}</math> [W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.287</b>

## 2.2 CAPACITÉ CALORIFIQUE

Les mesures de capacité calorifique massique sont déterminées à partir d'un appareillage adapté : l'Analyse Enthalpique Différentielle (AED), plus communément appelé DSC (Differential Scanning Calorimetry) disponible dans le laboratoire de Biomatériaux de l'UQAT.

La mesure par D.S.C. est une technique employée pour étudier le comportement des polymères lorsqu'ils sont chauffés. Lorsqu'on met une certaine quantité de chaleur dans un échantillon, sa température augmentera d'une certaine quantité. La quantité d'énergie nécessaire pour élever la température d'un gramme de matière de 1 °C est appelée capacité calorifique, ou  $C_p$ . Nous obtenons la capacité calorifique en divisant la chaleur fournie par l'augmentation de température résultante. (Fotso-Talla et al., 2014) par un procédé de mesure DSC ont quantifié et montré graphiquement (voir **Fig. 2-1**) la variation des différentes capacités calorifiques en fonction du taux des fibres et de la température des composites de PET renforcé de cinq différentes concentrations (1%, 5%, 10%, 15%, et 20%) de fibres de chanvre.

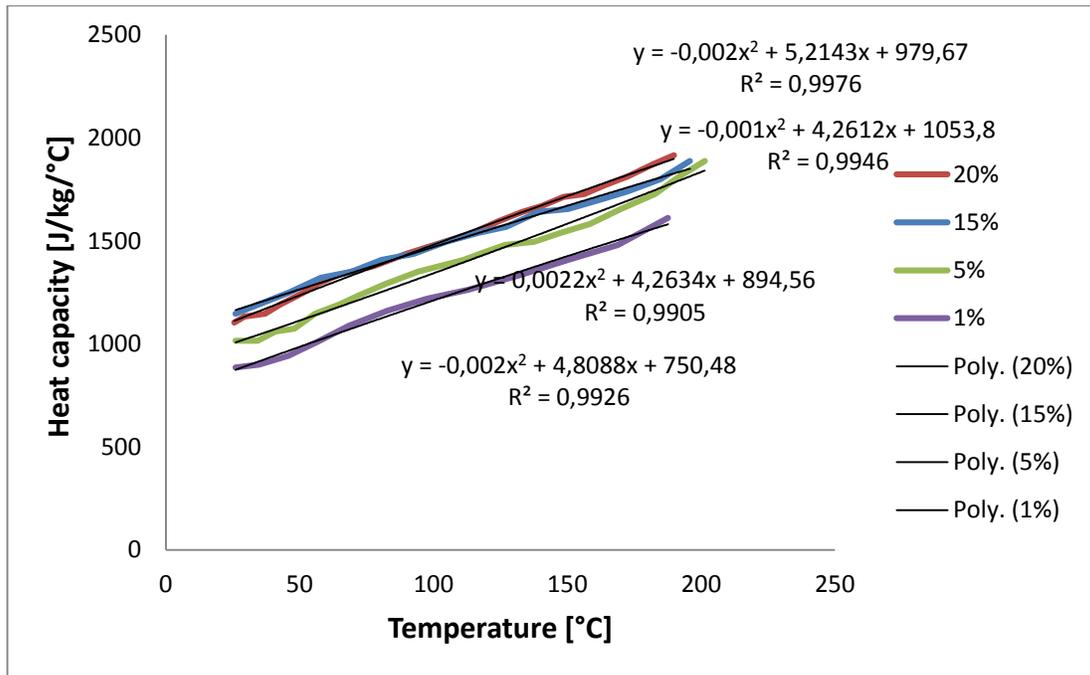
Nous pouvons constater que la capacité calorifique massique du PET et ou PET-chanvre présente une variation importante sur l'intervalle de température correspondant à celui du chauffage IR d'une préforme entre 20 à 120°C. En effet la valeur augmente d'environ 50% entre 50 et 110°C. Ce phénomène pourrait être attribué à la transition vitreuse du PET qui se situe aux alentours de 80°C. Cette variation a un effet très important sur la température de la préforme, ce qui justifie l'intérêt porté à cette mesure.



**Figure 2-1** : Capacité calorifique du composite PET-chanvre (Fotso-Talla et al., 2014).

En appliquant une régression polynomiale avec le tableur Excel (voir **Fig. 2-2**) pour des températures inférieures à 200°C, nous avons déterminé la mise en équation de la variation de la capacité calorifique en fonction de la température pour les composites à matrices PET chargées de 1%, 5% et 15% de fibres de chanvre (voir **tableau 2-2**). Ces données seront

incorporées dans l'équation de l'énergie pour la modélisation du chauffage infrarouge des composites PET-chanvre.



**Figure 2-2 :** Corrélation de la capacité calorifique du PET-chanvre.

**Tableau 2-2 :** Capacité calorifique des composites PET-chanvre

<b>15%</b>	<b><math>C_p = -0.001 T^2 + 4.261 T + 1053.8</math></b>	<b><math>R^2 = 0.995</math></b>
<b>5%</b>	<b><math>C_p = 0.002 T^2 + 4.263 T + 894.56</math></b>	<b><math>R^2 = 0.990</math></b>
<b>1%</b>	<b><math>C_p = -0.002 T^2 + 4.809 T + 750.48</math></b>	<b><math>R^2 = 0.993</math></b>

### 2.3 DENSITÉ

La densité des composites est déterminée par la formulation de la loi des mélanges :

$$\rho_c = \frac{m_m + m_f}{v_m + v_f} = \frac{\rho_m v_m + \rho_f v_f}{v_m + v_f} = \rho_m(1 - \phi) + \rho_f \phi \quad (2.5)$$

où  $\rho_c$ ,  $\rho_f$  et  $\rho_m$  sont les densités du composite, de la charge et de la matrice respectivement.

$\phi$  représente la fraction volumique de la fibre dans le composite.

On en déduit (voir tableau 2-4) les valeurs moyennes des densités des composites à matrices PET chargées de 1%, 5% et 15% de fibres de chanvre.

On remarque d'après le **tableau 2-3** que l'incorporation de fibres de chanvre dans la matrice PET induit une diminution de la densité des composites.

**Tableau 2-3** : Densité moyenne des composites PET-chanvre

<b>PET</b>	$\rho_m$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	<b>1400</b>
<b>CHANVRE</b>	$\rho_f$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	<b>110</b>
<b>15%</b>	$\rho_c$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	<b>1206.5</b>
<b>5%</b>	$\rho_c$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	<b>1335.5</b>
<b>1%</b>	$\rho_c$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	<b>1387.1</b>

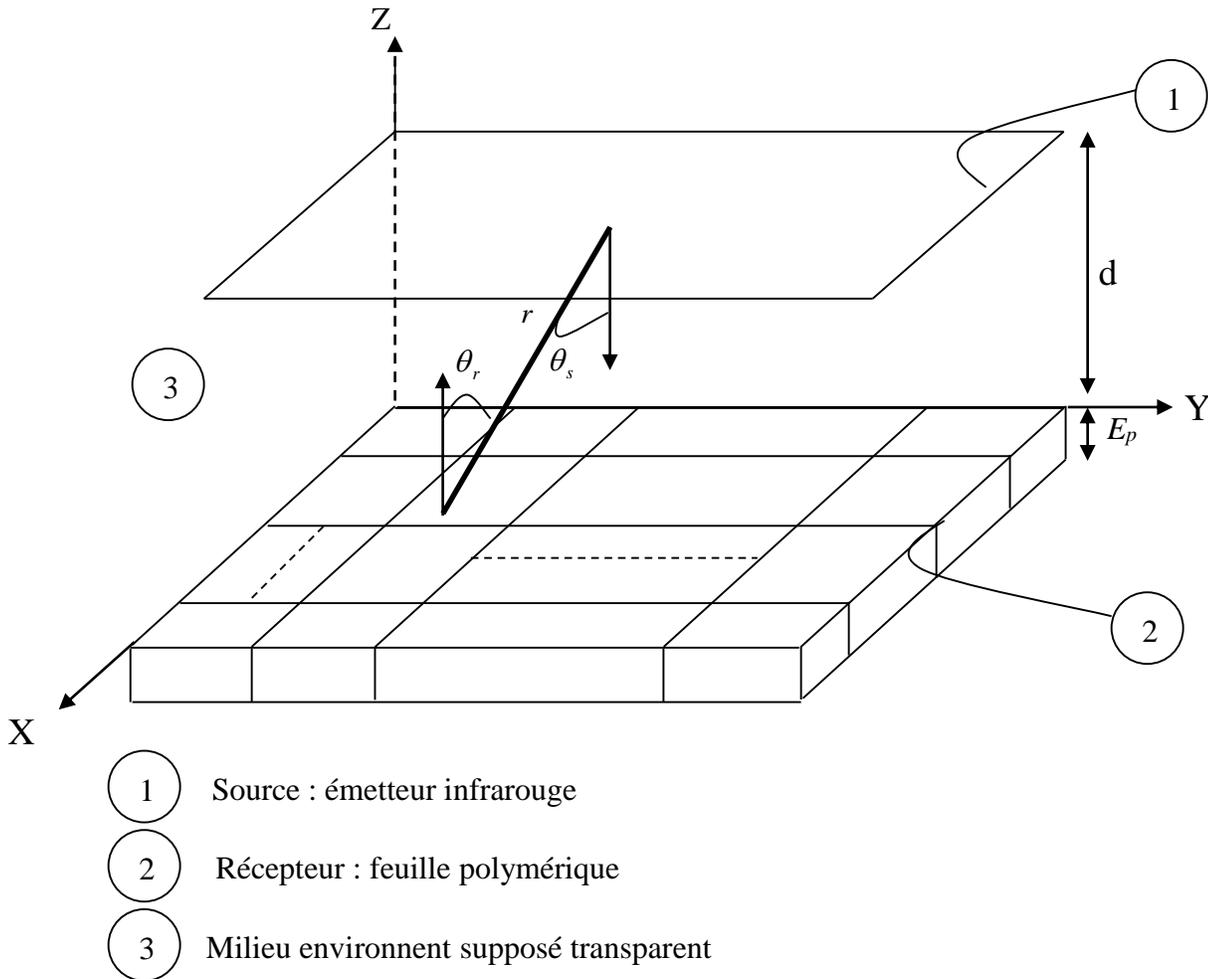
## CHAPITRE 3

### CALCUL DES FACTEURS D'ÉCHANGE MUTUEL

Dans ce chapitre, les équations qui gouvernent le transfert de chaleur radiatif entre les émetteurs et le récepteur sont énoncées. L'accent est mis sur l'étude comparative de différentes méthodes de calcul des facteurs de forme entre l'émetteur infrarouge et le récepteur thermoplastique.

#### 3.1 SCHÉMATISATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE DES PRÉFORMES

Considérons des émetteurs infrarouges représentés par des panneaux constitués de plaques en céramiques de température  $T_s$  et d'émissivité spectrale  $\varepsilon_\lambda(T_s)$ . Le milieu, séparant la préforme et les émetteurs infrarouges, est supposé transparent. Par contre, le matériau polymérique, qui est une feuille rectangulaire mince disposée parallèlement aux émetteurs à une distance  $d$ , est considéré comme un milieu partiellement absorbant pour le PET et opaque pour le composite PET / chanvre (voir **Fig. 3-1**).



**Figure 3-1** : Schématisation du chauffage d'une préforme par un émetteur infrarouge.

### 3.2 RAYONNEMENT INFRAROUGE INTERCEPTÉ PAR LA MEMBRANE

Considérons une feuille semi transparente en PET exposée à une source infrarouge à haute température. L'énergie spectrale émise par la source et dont une partie est reçue par la surface thermoplastique réceptrice est donnée par la relation suivante :

$$E_{\lambda}(T_s) = \varepsilon_{\lambda}(T_s) E_{\lambda,b}(T_s) \quad (3.1)$$

où  $E_{\lambda,b}(T_s)$  représente l'émittance spectrale du corps noir. L'expression de  $E_{\lambda,b}(T_s)$  est donnée par la distribution de Planck :

$$E_{\lambda,b}(T_s) = \frac{C_1}{n^2 \lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_s}\right) - 1 \right]} \quad (3.2)$$

$T_s$  est la température absolue de la source de chaleur (K) et  $n$  l'indice de réfraction du milieu.

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont données par :

$$C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 / \text{m}^2, \quad C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{mK}$$

Pour tenir compte des géométries arbitraires de la source et du récepteur, nous subdivisons leurs surfaces en petites surfaces élémentaires simples. Ainsi, en supposant que le milieu qui sépare la source du milieu thermoplastique est absolument transparent au rayonnement et que la surface de la source est diffuse, la quantité d'énergie spectrale  $q_{0,\lambda}$  quittant une surface finie  $A_s$  de la source et qui est interceptée par une surface finie  $A_r$  de la membrane poreuse thermoplastique est donnée par la relation suivante :

$$q_{0,\lambda}(T_s) = F_{s-r} \frac{A_s}{A_r} E_{\lambda}(T_s) \quad (3.3)$$

$F_{s-r}$  est le facteur de forme. Le rayonnement total intercepté par la surface  $A_r$  de thermoplastique fibreux est alors obtenu en intégrant sur la totalité des longueurs d'ondes, soit :

$$q_0(T_s) = \int_0^{\infty} q_{0,\lambda}(T_s) d\lambda \quad (3.4)$$

En utilisant la formule (3.3), nous obtenons pour (3.4) la relation suivante :

$$q_0(T_s) = F_{s-r} \frac{A_s}{A_r} \int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda \quad (3.5)$$

Dans le cas d'une source qui rayonne de façon isotrope (source lambertienne de rayonnement), nous considérons une émissivité moyenne de la source chauffante, soit :

$$\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_{\lambda}(T_s) = \frac{\int \varepsilon_{\lambda}(T_s) d\lambda}{\Delta\lambda} \quad (3.6)$$

Dans ce cas-ci, le rayonnement total intercepté par la surface de plastique, donnée par l'équation (3.5), devient :

$$q_0(T_s) = F_{s-r} \frac{A_s}{A_r} \varepsilon_s T_s^4 \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{n^2 \lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_s}\right) - 1 \right]} d\lambda = n^2 \sigma T_s^4 \quad (3.8)$$

Le terme  $n^2 \sigma T_s^4$  représente l'émittance du corps noir et  $\sigma$  est la constante de Stéphan-Boltzmann ( $= 5,67 \cdot 10^{-8} W / m^2 K^4$ ).

### 3.3 RAYONNEMENT INFRAROUGE ABSORBÉ PAR LA MEMBRANE

Dans le cas des préformes en PET, il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur une température avoisinant 90°C (Marco, 2003). Le mécanisme d'absorption du rayonnement infrarouge par une membrane polymérique semi transparente dépend du régime de vibration des molécules constituant le polymère. Ainsi, pour une température donnée, chaque membrane semi transparente est caractérisée par un spectre d'absorption. Ce spectre d'absorption, en vertu de la loi de conservation de l'énergie, est relié aux spectres de

transmission et de réflexion par la relation suivante :

$$\alpha_{\lambda} = \mathbf{1} - \tau_{\lambda} - \rho_{\lambda} \quad (3.9)$$

Où  $\rho_{\lambda}$ ,  $\alpha_{\lambda}$  et  $\tau_{\lambda}$  représentent, respectivement, la réflectivité, l'absorptivité et la transmittivité hémisphérique spectrale de la membrane. Dans le cas d'une membrane en PET mince, l'absorption spectrale du rayonnement dans le polymère est fonction du coefficient d'absorption spectrale  $\kappa_{\lambda}$  et de la profondeur  $z$  du milieu semi transparent. Ce coefficient d'absorption  $\kappa_{\lambda}$  peut être obtenu par la connaissance du spectre de transmissivité du matériau. Si nous supposons que la propagation du rayonnement s'effectue dans la direction normale à la membrane et que la réflexion du PET est négligeable, la loi de Beer Lambert nous permet d'écrire (Hartwig 1996) :

$$\kappa_{\lambda}(\lambda) = -\frac{\ln[\tau_{\lambda}(\lambda)]}{L} \quad (3.10)$$

$L$  étant l'épaisseur de la membrane thermoplastique utilisée pour obtenir le spectre de transmissivité du matériau en fonction de la longueur d'onde.

Soulignons que pour les membranes en PET à faible épaisseur (entre 0.5 et 1.5 mm), les spectres de transmissivité limités à l'infrarouge court représentent 90% à 95% du rayonnement émis par des sources infrarouges à des températures aux environs de 2300K et pour lesquelles la longueur d'onde est, généralement, comprise dans l'intervalle  $\Delta\lambda = [0,2-10] \mu m$ . La **figure 1-5** illustre la courbe de transmissivité du PET dans l'intervalle  $\Delta\lambda = [0,25-2,5] \mu m$  (Venkateswaran et al., 1997).

### 3.4 SURFACES DE RADIATIONS MUTUELLES

Le calcul du flux reçu par le matériau à sa surface, donnée par l'équation (3.7), nécessite le calcul du facteur de forme  $F_{s-r}$  entre les deux facettes  $A_s$  et  $A_r$ . Ce dernier représente le pourcentage d'énergie quittant  $A_s$  et atteignant  $A_r$  et s'exprime sous la forme (Modest, 2013) :

$$F_{s-r} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \int_{A_r} \frac{\cos \theta_s \cos \theta_r}{\pi r^2} dA_s dA_r \quad (3.11)$$

où  $r$  est la distance entre les éléments de surface  $dA_s$  et  $dA_r$ .

Les angles  $\theta_s$  et  $\theta_r$  sont formés respectivement par le vecteur  $\vec{r}$  porté par la direction de la radiation incidente quittant l'émetteur et arrivant à la surface du récepteur thermoplastique et les deux vecteurs normaux aux surfaces  $A_s$  et  $A_r$  respectivement.

Le facteur de forme est en fait une quantité purement géométrique. Il dépend uniquement de la forme et de la position relative des surfaces  $A_s$  et  $A_r$ .

Dans le cas de surfaces de forme simple, il est possible d'exprimer cette intégrale double, équation (3.11), de manière analytique (Hamilton et Morgan, 1952 ; Incropera et Dewitt, 2001). Siegel et Howel ont fourni un catalogue d'expressions analytiques de facteurs de forme pour des géométries simples (Siegel et Howel, 2001). Cependant, pour des problèmes plus complexes, il devient impossible de les calculer de manière analytique. Toutefois, de nombreuses méthodes d'approximation du facteur de forme ont été développées ces dernières décennies. Dans cette partie, une description sommaire de quelques méthodes de calcul de facteur de forme issues de la littérature, est présentée. Après analyse de leurs convergences, l'objectif est de choisir celle qui correspond le mieux à notre problème.

### 3.4.1 Méthodes d'intégration directe

Ce sont des méthodes qui permettent de calculer l'intégral double de l'équation (3.11) soit à l'aide d'une méthode intégrale de contour surfacique (méthode de contour) (Rammohan, 1996), soit à l'aide d'une intégrale de surface. Par la suite, ces intégrations peuvent être approchées à l'aide d'intégrations numériques (Reddy, 1993).

### 3.4.2 Méthode d'intégration de surface

Cette méthode consiste en un découpage fin de la surface mère en petites surfaces dites éléments finis. Chung et Kim ont proposé une méthode en adoptant le formalisme des éléments finis (Chung et Kim, 1982). Il décrit les coordonnées des côtés des surfaces dans un repère local ensuite, il calcule les facteurs de forme par l'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss. Le facteur de forme entre deux surfaces 1 et 2 est donnée alors par :

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \sum_i \sum_j W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.12)$$

Avec

$\xi_i, \eta_j$  : les points d'intégration de Gauss ;  $W_i, W_j$  : les poids d'intégration de Gauss et  $f(\xi_i, \eta_j)$  la fonction à intégrer.

Krishnaprakas souligne les potentialités de cette méthode avec laquelle on peut calculer les facteurs de forme sur des géométries complexes à partir d'un découpage par des triangles élémentaires (Krishnaprakas, 1998).

La formulation du facteur de forme est donnée par l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N A_{ik} F_{ikjl} \quad (3.13)$$

Avec

$F_{ikjl}$ : le facteur de forme élémentaire entre le triangle  $k$  sur la surface  $i$  et  $l$  sur la surface  $j$ , obtenu à partir de l'équation (3.12).  $M$  et  $N$  représentent respectivement le nombre de triangles sur  $i$  et  $j$ .

### 3.4.3 Méthode de contour

La méthode d'intégration de contour fait appel à la transformation par le biais du théorème de Stokes de l'équation (3.11) en une intégrale sur les contours (3.14) de surfaces (Sparrow, 1963) :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oiint_{\Gamma_1 \Gamma_2} \ln r \, d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (3.14)$$

Rammohan a comparé plusieurs méthodes d'intégrations numériques du double intégral (3.14) par la méthode de trapèze, Simpson et Gauss (Rammohan, 1996). La méthode de Gauss se révèle comme la plus rapide et la plus précise. La méthode du contour couplée avec une méthode d'intégration de Gauss, aboutit à l'expression (3.15) voir (Rammohan, 1996) :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (a_{x1,i} \cdot a_{x2,i} + a_{y1,i} \cdot a_{y2,i} + a_{z1,i} \cdot a_{z2,i}) \left\{ \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q W^k W^l \ln(d(\xi, \eta)) \right\} \right\} \quad (3.15)$$

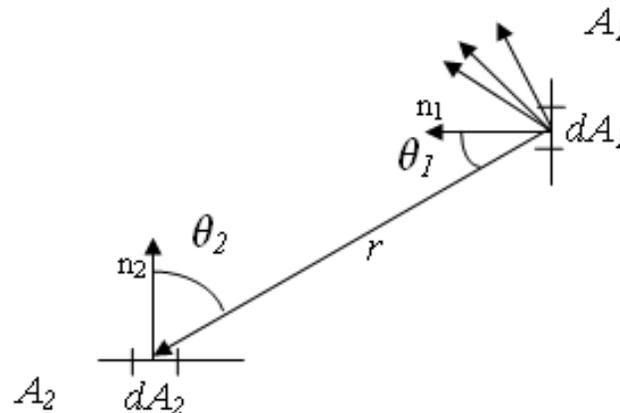
Les coefficients  $a_{1,i}$  et  $a_{2,j}$  représentent les transformations spatiales des coordonnées globales des points des contours des surfaces ( $A_i, A_j$ ) vers les coordonnées locales de Gauss, et les coefficients  $W^k$  et  $W^l$  représentent les poids de Gauss compris entre  $p$  et  $q$  qui représentent respectivement le nombre de points de Gauss utilisés pour chacune des surfaces  $A_i$  et  $A_j$ . Shapiro a comparé les deux méthodes d'intégrations directes décrites ci-dessus, celle dite de

l'intégrale de surface avec celle de l'intégrale de contour (Shapiro, 1985). Shapiro montre que pour des plaques parallèles centrées, la méthode de contour converge beaucoup plus rapidement que la méthode de l'intégrale de surface.

#### 3.4.4 Méthode d'aire-intégration

Cette méthode consiste à réécrire l'équation (3.11) sous la forme d'une double sommation sur des opérations vectorielles des cosinus directeurs.

Comme  $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = r \cos \theta_1$ , donc  $\cos \theta_1 = \vec{r} \cdot \vec{n}_1 / r$  et  $\cos \theta_2 = -\vec{r} \cdot \vec{n}_2 / r$ . Le signe moins vient du fait du sens de  $r$  ( $\equiv \vec{r}_{1 \rightarrow 2}$ ) qui va de la surface  $A_1$  vers la surface  $A_2$  (voir **Fig. 3-2**).



**Figure 3-2** : Géométrie et nomenclature de la méthode d'aire-intégration

Il s'agit donc de remplacer l'expression  $\frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{r^2}$  par  $\frac{-(\vec{r} \cdot \vec{n}_1)(\vec{r} \cdot \vec{n}_2)}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2}$ .

Dans ces conditions, l'équation (3.11) peut être intégrée numériquement en subdivisant les surfaces  $A_1$  et  $A_2$  par des petites surfaces (Siegel et Howel, 2001).

$$F_{1 \rightarrow 2} \approx \frac{-1}{\pi A_i} \sum_i \sum_j \frac{(\vec{r} \cdot \vec{n}_1)(\vec{r} \cdot \vec{n}_2)}{(\vec{r} \cdot \vec{r})^2} \Delta A_i \Delta A_j \quad (3.16)$$

La convergence de la méthode dépendra du raffinement du maillage, mais pour un temps de calcul assez élevé.

Les différentes méthodes de détermination présentées dans ce paragraphe sont des méthodes déterministes. Il existe aussi un certain nombre de méthodes probabilistes telle la méthode de Monté Carlo utilisée pour approximer les facteurs de forme.

#### 3.4.5 Méthode statistique de Monté Carlo

La méthode de Monté Carlo est une technique probabiliste basée sur la simulation d'une série de nombres aléatoires  $R_\xi$  compris entre 0 et 1 et qui constituent les distributions de probabilités des variables d'un problème complexe (Siegel et Howel, 2001).

$$R_\xi = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi} f(\xi^*) d\xi^*}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(\xi) d\xi} \quad (3.17)$$

Avec  $\xi$  une variable du problème et  $f(\xi)$  une fonction relative à  $\xi$ .

L'évaluation des facteurs de forme entre deux surfaces par la méthode de Monté Carlo consiste à simuler numériquement l'émission d'un nombre élevé de  $N$  radiations à partir de la surface  $A_i$  et de compter le nombre  $n$  de rayons atteignant la surface  $A_j$ . Le facteur de forme est alors obtenu en faisant le rapport du nombre de rayons qui atteint la surface  $A_j$  sur le nombre total de rayons générés à partir de  $A_i$  (Vujicic et al., 2006).

$$F_{ij} = \frac{n}{N} \quad (3.18)$$

Cette méthode réside sur le fait que les temps de calculs sont proportionnels au nombre de faisceaux émis. Le temps de calcul est long quand le milieu est optiquement épais. Toutefois, dans notre cas, le milieu étant transparent, le temps de calcul peut être rapide spécialement avec les ordinateurs d'aujourd'hui. C'est une méthode qui est préférablement utilisée dans la description des échanges en présence de surfaces dont les réflexions spéculaires ne sont pas négligeables ou bien pour des surfaces dont l'émission est anisotrope, pour lesquelles les autres méthodes ne peuvent être appliquées.

#### 3.4.6 Approche retenue : la méthode semi-analytique

Les intégrales de surface qui interviennent dans (3.11) peuvent être remplacées par des intégrales de contour (3.19), en utilisant le théorème de Stokes (Rammohan, 1996):

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r \, dr_i \, dr_j \quad (3.19)$$

$r$  qui apparaît dans (3.19) représente cette fois-ci la distance entre les vecteurs positions  $\mathbf{r}_i$ , d'un point quelconque  $p$  appartenant au contour  $\partial A_i$  de la surface  $A_i$ , et  $\mathbf{r}_j$ , d'un point quelconque  $q$  appartenant au contour  $\partial A_j$  de la surface  $A_j$  :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.20)$$

Dans ce travail, pour évaluer la valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$  avec précision, nous avons considéré l'approche semi-analytique élaborée par (Erchiqui et Dituba, 2007). Cette approche, en premier temps, consiste à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie

singulière de (3.19) et la seconde consiste à intégrer numériquement le résultat de cette première étape. La nouvelle expression de  $F_{ij}$  est alors donnée par la formule suivante :

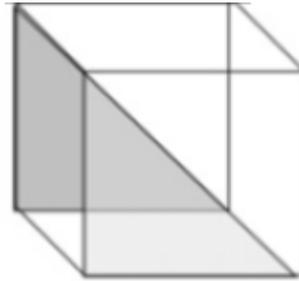
$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (e_i \cdot e_j) (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c) \quad (3.21)$$

$e_i$  et  $e_j$  sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement aux segments de contour  $L_i$  et  $L_j$  formant les frontières  $\partial A_i$  et  $\partial A_j$ .  $\Gamma_{ij}^a, \Gamma_{ij}^b, \Gamma_{ij}^c$  sont des fonctions dont les expressions font apparaître les propriétés géométriques des segments contours (Erchiqui et Dituba, 2007).

Pour la validation, nous avons confronté la solution obtenue par cette approche, d'une part, avec la solution analytique (Hottel, 1931 ; Feingold, 1966 ; Ehlert et Smith, 1993) et avec les résultats obtenus avec trois différentes techniques d'autre part, soit : 'Aera-Integration method' pour trois types de maillage fournis dans (Erchiqui et Dituba, 2007), quadratique de Gauss et la méthode classique de contour. Le **tableau 3-1** résume les résultats numériques obtenus dans chacun des cas et donne l'erreur relative.

Ces exemples montrent clairement que la méthode semi-analytique de frontière, pour le calcul de la valeur de facteur de forme, est robuste et pourra être, sans difficulté, combinée à d'autres techniques numériques (méthode des éléments finis ou de frontières) pour analyser des problèmes physiques de transfert de chaleur dans les systèmes physiques.

**Tableau 3-1** : Validation du calcul de facteur de forme dans le cas de surfaces triangulaires parallèles (Erchiqui et Dituba, 2007)



<b>Aire-intégration</b>	<b>Maillage</b>	<b>Résultats</b>	<b>Erreur %</b>
	Maillage T1	0.159155	38.34
	Maillage T2	0.134023	16.50
	Maillage T3	0.123739	7.56
<b>Intégration surface</b>	<b>Nbr Pts Gauss</b>		
	1	0.159155	38.34
	3	0.114041	0.87
	4	0.113515	1.33
	7	0.115134	0.08
	12	0.115051	0.01
<b>Intégral de contour</b>	<b>Nbr Pts Gauss</b>		
	1	0.142058	16.5
	2	0.114598	0.04
	3	0.115110	0.04
	4	0.115048	-
	5	0.115049	-
<b>Sémi-analytique</b>	<b>Nbr Pts Gauss</b>		
	1	0.123129	7.03
	2	0.114626	0.36
	3	0.115071	0.02
	4	0.115018	-
	5	0.115049	-
<b>Valeur exacte</b>		0.115045	

## CHAPITRE 4

### MODÉLISATION ET VALIDATION RADIATION CONDUCTION

Dans les milieux semi-transparents, les transferts de chaleur sont la conséquence, en général, de deux mécanismes : la conduction et le rayonnement, et ce lorsque la convection est négligée ou mise sous forme de conditions aux frontières. Dans ce cas, le calcul des champs de température ne peut se faire que par un couplage de ces deux modes de transfert. La réponse transitoire des températures dans le milieu est donnée en résolvant l'équation de la chaleur qui est aussi l'équation de conservation de l'énergie avec terme source radiatif écrite le plus souvent sous forme d'une équation aux dérivées partielles.

Dans ce chapitre, on fait appel à la méthode des ordonnées discrètes (MOD) pour résoudre l'équation de transfert radiatif (ETR) qui va être couplée avec l'équation de la conservation de l'énergie (ECE). Cette dernière est résolue par une méthode des éléments finis (MEF). La formulation intégrale et les discrétisations angulaire, spatiale et temporelle qui en résultent seront exposées. Les validations analytiques, numériques et expérimentales ainsi que les résultats obtenus y seront développés et discutés.

#### 4.1 MISE EN ÉQUATION DU CHAUFFAGE INFRAROUGE

Comme élaboré dans le chapitre 3, trois aspects importants du processus du chauffage des membranes polymériques sont à souligner :

- ✓ L'émissivité spectrale de la source chauffante  $\varepsilon_\lambda(T_s)$ ;

- ✓  $F_{s-r}$  est le facteur de forme entre la surface source  $A_s$  (émetteur infrarouge) et la surface réceptrice  $A_r$  (matériau composite thermoplastique/fibres naturelles).
- ✓ L'absorptivité spectrale  $\kappa_\lambda(\lambda)$  caractéristique du matériau polymérique fibreux ou amorphe.

#### 4.1.1 Équation de conservation de l'énergie (ECE)

La distribution de la température dans le temps en un point de la préforme est déterminée en résolvant l'équation de la chaleur. En vertu de la première loi de la thermodynamique, cette équation traduisant la conservation de l'énergie interne en absence de convection est donnée par l'équation suivante (Ozisik, 1993) :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} - \nabla \cdot (k_c \cdot \nabla T) = -\nabla q_{rad} \quad (4.1)$$

où  $T$  est la température,  $t$  le temps.  $q_{rad}$  représente la densité du flux radiatif.  $\rho$ ,  $C_p$  et  $k_c$  sont respectivement la densité, la chaleur spécifique, et la conductivité thermique du matériau polymérique supposé isotrope.

La condition de frontière considérée, dans le cas d'un milieu isotrope, est liée aux pertes convectives et radiatives particulièrement importantes, notamment durant la phase d'équilibre (après arrêt du chauffage). Elle est donnée par :

$$k \nabla T \cdot n_{rp} + h(T_p - T_\infty) + \varepsilon_p \sigma (T_p^4 - T_\infty^4) = 0 \quad (4.2)$$

Le terme  $h(T_p - T_\infty)$  représente le transfert de chaleur par convection à partir du milieu polymérique vers le milieu ambiant,  $h$  est son coefficient d'échange de chaleur par convection (de l'ordre de 2 à 10  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  pour l'air en convection naturelle et pour des

fours équipées d'un système de ventilation, il est de l'ordre de de 30 à 50  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$  (Monteix, 2001).  $T_p$  est la température de surface externe de la préforme et  $T_\infty$  est la température du milieu ambiant (air).  $n_{rp}$  est le vecteur normal à la paroi.  $\varepsilon_p$

La divergence du flux radiatif  $\nabla q_{rad}$  présentée dans l'équation (4.1) représente l'énergie radiative absorbée par unité de volume au niveau du point matériel considéré. Ce terme à un signe près, est plus communément appelé *terme source radiatif*. Tout l'enjeu de la modélisation des transferts radiatifs réside dans l'estimation de ce terme source.

#### 4.1.2 Expression du terme source radiatif

Le terme source radiatif, notée  $S_{rad}(\mathbf{r})$ , exprime la divergence du flux rayonné à l'intérieur du milieu semi transparent, dans la direction  $\Omega$  de la propagation de l'intensité spectrale à la position  $\mathbf{r}$ , est reliée au flux rayonné  $q_{rad}$  par :

$$S_{rad}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{rad}(\mathbf{r}) \quad (4.3)$$

En supposant que le milieu est homogène, nous avons pour le flux rayonné en fonction de l'intensité spectrale  $I_\lambda$  l'expression suivante (Siegel et Howell, 2001) :

$$\mathbf{q}_{rad}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega d\lambda \quad (4.4)$$

La divergence spectrale de ce flux rayonné est obtenue en effectuant un bilan net d'énergie radiative au sein d'un petit volume élémentaire du milieu semi transparent homogène et de coefficient d'absorption spectral  $\kappa_\lambda$  :

$$S_{rad} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{rad}(\mathbf{r}) = -\int_{\Omega} [\text{émis} - \text{absorbé}] d\Omega = -\int_0^{\infty} \left[ 4\pi\kappa_{\lambda} I_{b,\lambda}(T) - \kappa_{\lambda} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\mathbf{r},\Omega) d\Omega \right] d\lambda \quad (4.5)$$

$$\text{avec } \int_0^{\infty} I_{b,\lambda}(T) \cdot d\lambda = I_b(T) = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi}$$

$I_{b,\lambda}$  étant l'intensité spectrale du corps noir.  $n$  est l'indice de réfraction du milieu.

#### 4.1.3 Équation de transfert radiatif (ETR)

La connaissance du flux rayonné  $\mathbf{q}_{rad}$  nécessite le calcul de l'intensité spectrale  $I_{\lambda}$  via la résolution de l'équation intégral-différentielle du transfert radiatif (Siegel et Howell, 2001) :

$$\underbrace{\frac{dI_{\lambda}(\mathbf{r},\Omega)}{dr}}_{\text{terme de transport}} + \underbrace{\beta_{\lambda} I_{\lambda}(\mathbf{r},\Omega)}_{\text{extinction}} = \underbrace{\beta_{\lambda} (1 - \omega_{\lambda}) I_{b,\lambda}(T(r))}_{\text{gain par émission}} + \underbrace{\beta_{\lambda} \frac{\omega_{\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_{\lambda}(\Omega, \Omega') I_{\lambda}(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega'}_{\text{gain par diffusion}} \quad (4.6)$$

où  $\Phi_{\lambda}$  représente la fonction de phase spectrale,  $\beta_{\lambda}$  le coefficient d'extinction spectrale et  $\omega_{\lambda}$  l'albédo spectrale. Le coefficient d'extinction spectrale est défini comme l'atténuation du rayonnement par diffusion, caractérisé par le coefficient spectrale  $\sigma_{d,\lambda}$ , et par absorption, caractérisé par le coefficient spectral  $\kappa_{\lambda}$ , soit :

$$\beta_{\lambda} = \kappa_{\lambda} + \sigma_{d,\lambda} \quad (4.7)$$

Toutefois, il faut souligner que l'albédo de diffusion  $\omega_{\lambda}$  est relié aux coefficients  $\sigma_{d,\lambda}$  et  $\kappa_{\lambda}$  par la formule suivante :

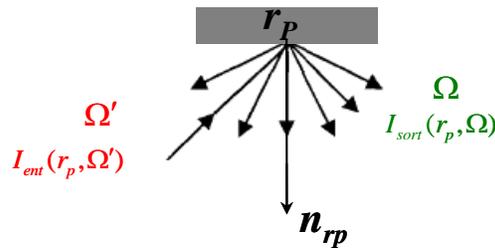
$$\omega_\lambda = \frac{\sigma_{d,\lambda}}{\kappa_\lambda + \sigma_{d,\lambda}} \quad (4.8)$$

L'ETR traduit le fait que les variations locales et temporelles de l'intensité radiative monochromatique résultent d'un bilan entre l'atténuation par l'absorption et la diffusion du rayonnement et de son renforcement par émission propre du milieu et diffusion dans la direction considérée en provenance de toutes les autres directions.

Dans le cas d'une frontière diffuse (voir **Fig. 4-1**), nous considérons que l'intensité quittant la frontière est isotrope et que la partie réfléchie est fonction de l'intensité incidente totale provenant de toutes les directions du demi-espace orienté selon la normale  $n_{rp}$ . Pour toutes les directions  $\Omega$  appartenant à ce demi-espace nous avons l'expression suivante :

$$I_\lambda(r_p, \Omega) = \varepsilon_p I_{b,\lambda}(r_p, T) + \frac{1 - \varepsilon_p}{\pi} \int_{\Omega \cdot n_{rp} < 0} |\Omega' \cdot n_{rp}| I_\lambda(r_p, \Omega') d\Omega' \quad (4.9)$$

$\varepsilon_p$  représente l'émissivité au point  $r_p$  de la frontière S.



**Figure 4-1** : Rayonnement à travers une frontière diffuse

#### 4.1.4 Modèle réduit de l'ETR

##### 4.1.4.1 Hypothèse du milieu non-diffusant

Dans le cas d'un PET amorphe, plusieurs travaux confirment que ce matériau peut être considéré comme milieu non diffusant (Esser et al., 1987 ; Shelby, 1991 ; Venkateswaran et al., 1997). En effet, certains auteurs posent l'hypothèse que le milieu pourrait être considéré comme un milieu diffusant si le chauffage IR peut générer des centres diffusants (structures cristallines de type sphérolitique) suffisamment nombreux pour diffuser significativement le rayonnement IR dans la préforme (Marco, 2003). Or, la cristallisation du PET est un phénomène lent par rapport à la vitesse de chauffage qui est rapide limitant ainsi l'apparition de ce type de cristallisation (Bordival, 2009). Dans ces conditions, les coefficients d'extinction  $\beta_\lambda$  et d'absorption  $\kappa_\lambda$  deviennent égaux et l'albédo résultant devient nul ( $\omega_\lambda = 0 \Rightarrow \sigma_{d,\lambda} = 0$  et  $\beta_\lambda = \kappa_\lambda$ ). Avec ces considérations, l'ETR (4.6), s'écrit :

$$\frac{dI_\lambda(\mathbf{r}, \Omega)}{dr} = \kappa_\lambda [I_{b,\lambda}(T(\mathbf{r})) - I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega)] \quad (4.10)$$

Cette équation possède une solution formelle, qui s'exprime sous sa forme intégrale par (Viskanta et Anderson, 1975) :

$$I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = \overbrace{I_\lambda(0, \Omega) e^{-\kappa_\lambda r}}^1 + \overbrace{\int_{r'=0}^{r'=r} \kappa_\lambda I_{b,\lambda}(T(\mathbf{r})) e^{\kappa_\lambda(r'-r)} dr'}^2 \quad (4.11)$$

Le premier terme du membre de droite représente la transmission du rayonnement incident (provenant en grande majorité des lampes IR), et le second terme l'absorption du rayonnement émis par la préforme (le rayonnement émis et réabsorbé par le PET).

#### 4.1.4.2 Hypothèse du milieu froid

La bande spectrale d'émission (dans la plage des températures rencontrées en thermoformage ou en soufflage) du PET n'excède pas, en général, la température de 125 °C, ce qui est largement inférieur aux températures des sources de rayonnement utilisées pour l'étape de chauffage qui sont de l'ordre de 2000°C. Dans ces conditions, on peut utiliser l'hypothèse des milieux froids (Le Maout et al., 1997) qui permet de négliger l'intensité radiative totale émise par le PET ( $I_b = 0$ ). L'équation (4.11) devient :

$$I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = I_\lambda(0, \Omega) e^{-\kappa_\lambda r} \quad (4.12)$$

#### 4.1.4.3 Loi de Beer-Lambert

En appliquant la définition de la densité de flux radiatif (équation (4.4)) ; en considérant que les préformes en PET sont minces et en supposant que la propagation du rayonnement est effectuée dans la direction normale (selon l'axe x), la solution de l'équation (4.12) peut être reformulée ainsi :

$$q_{rad,\lambda}(x) = q_{0,\lambda} e^{-\kappa_\lambda x} \quad (4.13)$$

Cette équation plus connue sous le nom de la loi de Beer-Lambert (Esser et al., 1987), traduit le fait que la densité de flux radiatif incidente  $q_{0,\lambda}$  est absorbée selon une exponentielle décroissante. L'indice  $\lambda$  représente la longueur d'onde et dans la suite il sera omis pour alléger l'écriture.

## 4.2 RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSFERT RADIATIF PAR LA MÉTHODE DES ORDONNÉES DISCRÈTES (MOD).

La méthode des ordonnées discrètes a été proposée pour la première fois par Chandrasekhar (1960), pour des problèmes de transfert radiatifs monodimensionnels en astrophysique. Carlson et Lathrop (1968) l'ont ensuite développée pour résoudre l'équation de transport en neutronique, dans des cas multidimensionnels en géométrie cartésienne, cylindrique et sphérique. C'est essentiellement Fiveland (1982-1987) qui, dans les années 80, a introduit les ordonnées discrètes en transfert radiatif. De nombreux auteurs l'ont suivi, comme Truelove (1987) et bien d'autres (Yucel et al., 1988; Jamaluddin and Smith, 1988; Tsai et al., 1989; Balima, 2010; Coelho, 2014) etc. Depuis 1990, la méthode a connu un essor, notamment en transferts couplés (Baek and Kim, 1990 ; El-Wakil, 1991 ; Sakami et al., 1996).

La méthode des ordonnées discrètes consiste à résoudre de l'ETR avec les conditions aux limites qui lui sont associées, suivant deux étapes :

1. L'ETR est d'abord discrétisée de façon angulaire pour un nombre fini de directions ( $\Omega_m$  avec  $m = 1, M$ ) ce qui permet d'obtenir une équation par direction :

$$\frac{1}{\kappa} \nabla \cdot [I(r, \Omega_m) \Omega_m] + I(r, \Omega_m) = I_b(r) \quad (4.14)$$

qu'on peut résoudre par les techniques numériques classiques afin d'obtenir, en tout point du domaine, plusieurs valeurs de l'intensité radiative  $I(r, \Omega_m) = I^m(r)$ .

2. La somme pondérée de ces valeurs permet ensuite de calculer l'intensité locale de la source, du flux radiatif ou incident par des formules de quadratures.

Le flux radiatif  $q_{rad}(r)$  et le rayonnement incident  $G(r)$  s'expriment en fonction des intensités provenant de toutes les directions de l'espace, c'est-à-dire dans un angle solide de  $4\pi$  stéradians autour d'un point donné.

$$q_{rad}(r) = \int_{4\pi} I(r, \Omega) \Omega d\Omega \approx \sum_{m=1}^M w_m I^m(r) \Omega_m \quad (4.15)$$

$$G(r) = \int_{4\pi} I(r, \Omega) d\Omega \approx \sum_{m=1}^M w_m I^m(r) \quad (4.16)$$

Les coefficients  $w_m$  sont les poids de la quadrature et leur choix, ainsi que celui des directions discrètes, suit certaines règles. L'ensemble de directions  $\Omega_m$  et de poids  $w_m$  constitue le set de quadrature.

Dans le cas d'une frontière diffuse, les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$\underbrace{I^m(n_{r_p} \cdot \Omega > 0)}_{\text{Intensité sortante}} = \underbrace{\varepsilon_p I_b(p, T)}_{\text{émission surface}} + \underbrace{\frac{(1 - \varepsilon_p)}{\pi} \sum_{n_{r_p} \cdot \Omega_m' < 0}^M w_m I^m'}_{\text{réflexion}} |n_{r_p} \cdot \Omega_m'| \quad (4.17)$$

La divergence du flux radiatif sera donnée par :

$$\nabla \cdot q_{rad}(r) = \kappa [4\pi I_b(T) - G(r)] \approx \kappa \left[ 4\pi I_b(T) - \sum_{m=1}^M w_m I^m(r) \right] \quad (4.18)$$

$I_b$  étant l'intensité radiative du corps noir dépend de la température  $T$  du MST et peut être obtenue à partir de :

$$I_b(T) = \int_0^{\infty} I_{b,\lambda}(T) \cdot d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2hC_0^2}{n^2 \lambda^5 \exp\left[\frac{hC_0}{nk\lambda T} - 1\right]} \cdot d\lambda = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi} \quad (4.19)$$

- $C_0$  vitesse de la lumière  $C_0 = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- $h$  est la constante de PLANCK:  $h = 6,6255 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- $k$  est la constante de BOLTZMANN:  $k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
- $\sigma$  est la constante STEFAN-BOLTZMANN:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$
- $n$  est l'indice de réfraction du milieu

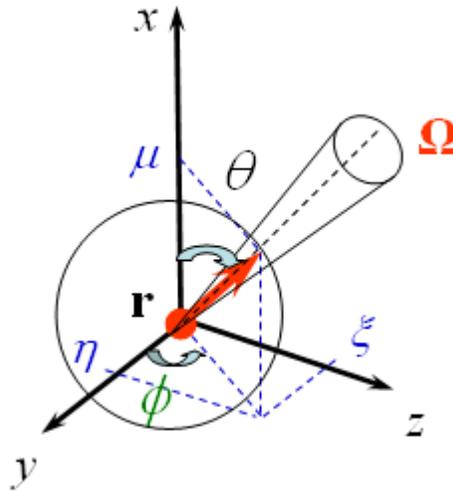
#### 4.2.1 Système de référence

Le parcours du rayonnement dans le milieu semi-transparent (MST) peut être projeté sur un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec ses cosinus directeurs respectifs  $(\mu, \eta, \xi)$  (voir **Fig. 4-2**).

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= (\vec{\Omega} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{k})\vec{k} \\ &= \mu\vec{i} + \eta\vec{j} + \xi\vec{k} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu = \cos \theta \\ \eta = \cos \alpha_y = \sin \theta \cos \phi \\ \xi = \cos \alpha_z = \sin \theta \sin \phi \end{cases} \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$\mu$  correspond à l'angle polaire et  $\phi$  l'angle d'azimut.



**Figure 4-2** : Définition de l'angle polaire  $\mu$  et l'angle azimutal  $\phi$

#### 4.2.2 Modélisation en une dimension d'espace

L'épaisseur du MST étant mince, nous considérons un problème unidimensionnel et ne prenons en compte que le transfert selon la direction Ox. Notre milieu semi-transparent a une épaisseur L.  $r$  est la position,  $\Omega$  la direction. En projetant l'élément de longueur  $dr$  sur Ox, nous avons :

$$dx = \cos \theta \cdot dr = \mu \cdot dr \text{ on pose : } \mu = \cos \theta$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dr} = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

L'ETR devient :

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \cdot [I(x, \mu, \phi)] = \kappa [4n^2 \sigma T^4(x, t) - I(x, \mu, \phi)] \quad (4.21)$$

### 4.2.3 Condition de symétrie azimutale et conditions aux limites radiatives

La condition de symétrie azimutale facilite les calculs dans la résolution de l'ETR. Elle suppose que l'intensité du rayonnement ainsi que les propriétés radiatives sont indépendantes de l'angle d'azimut  $\phi$ . Dans ce cas, on a :

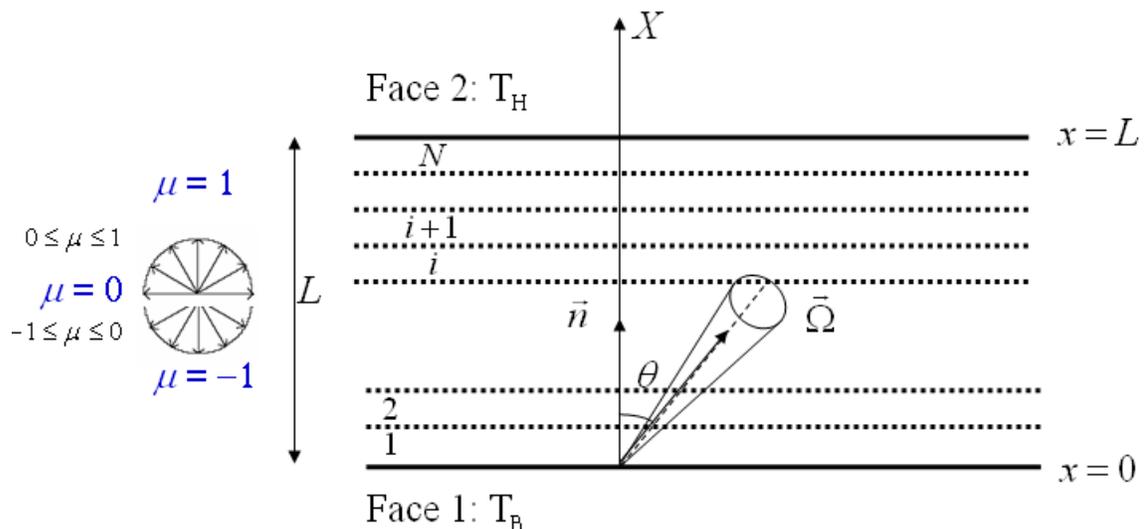
$$\mu = \cos \theta \Rightarrow d\mu = -\sin \theta d\theta$$

$$\int_{\Omega=4\pi} \dots d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 \dots d\mu \quad (4.22)$$

L'ETR devient :

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} [I(x, \mu)] = \kappa [4n^2 \sigma T^4(x, t) - I(x, \mu)] \quad (4.23)$$

Si on impose sur la face 1 et la face 2 (voir **Fig. 4-3**) :



**Figure 4-3** : Système de coordonnées spatiale et directionnelle

Les températures  $T_B$  et  $T_H$  ainsi que leurs émissivités  $\varepsilon_B$  et  $\varepsilon_H$  respectives, les conditions aux limites radiatives (4.9) deviennent :

$$I(x=0) = \varepsilon_B I_b(T_B) + 2(1-\varepsilon_B) \int_{-1}^0 I(x=0, \mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu > 0 \quad (4.24)$$

$$I(x=L) = \varepsilon_H I_b(T_H) + 2(1-\varepsilon_H) \int_0^1 I(x=L, \mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu < 0$$

Ces conditions aux limites seront utilisées pour la validation de la résolution de l'ETR par la MOD en une dimension.

#### 4.2.4 Discrétisation angulaire

En résumé, la résolution numérique de l'ETR par la MOD se fait généralement en trois étapes distinctes : une discrétisation angulaire, une discrétisation spatiale puis par une discrétisation spectrale. Dans ce travail, nous avons adopté les deux premières discrétisations, en considérant les valeurs moyennes sur les propriétés radiatives prise dans une bande de longueur d'onde donnée.

La discrétisation angulaire consiste à choisir un nombre de directions paires  $2M$  chacune d'elle affectée d'une pondération. Tous les termes intégraux intervenant dans l'ETR, dans les conditions aux limites ou les expressions des flux incidents et radiatifs et même dans la divergence de flux sont remplacés par une somme quadratique effectuée sur les intensités radiatives selon les directions choisies.

##### 4.2.4.1 Choix de la quadrature

Une telle méthode d'approximation de l'intégration angulaire nécessite, comme première optimisation, la recherche d'ordonnées discrètes liées aux directions permettant une bonne

couverture de l'espace par une quadrature numérique précise et fiable. Pour cela, différentes quadratures angulaires, que l'on rencontre dans la littérature, peuvent être utilisées : notamment les quadratures  $S_N$  (Lathrop et Carlson 1964 ; Modest, 2013) ou les quadratures  $T_N$  (Thurgood et al., 1995). Dans ce travail, nous avons considéré les quadratures  $S_N$ .

Une quadrature  $S_N$  est un set de  $M = S_N (S_N + 2)/4$  directions discrètes positives  $\Omega_m$  en une dimension. (Carlson et Lathrop, 1968), puis (Fiveland, 1982) ont définis certaines lois permettant d'accéder à des sets de quadrature satisfaisants qui répondent à certaines propriétés de symétrie. Les sets de quadrature obtenus sont invariants par toute rotation de  $90^\circ$  autour d'un des axes du repère cartésien. Avec les contraintes suivantes tenant compte de la symétrie azimutale :

$$\forall m = 1, \dots, M \Rightarrow \begin{cases} \mu_m^2 + \eta_m^2 + \xi_m^2 = 1 \\ M_o = \int_{-1}^1 d\mu = 2 \rightarrow \sum_{m=1}^{2M} w_m = 2 \quad (\text{moment d'ordre 0}) \\ M_1 = \int_{-1}^1 \mu d\mu = 0 \rightarrow \sum_{m=1}^{2M} \mu_m w_m = 0 \quad (\text{moment d'ordre 1}) \end{cases} \quad (4.25)$$

Afin d'obtenir une bonne corrélation avec la physique liée à la radiation (Truelove, 1987) redéfinit un certain type de sets et propose les contraintes suivantes :

$$\forall m = 1, \dots, M \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 \mu d\mu = 1/2 \rightarrow \sum_{\mu_m > 0}^M w_m \mu_m = 1/2 \\ M_2 = \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = 2/3 \rightarrow \sum_{m=1}^{2M} w_m \mu_m^2 = 2/3 \quad (\text{moment d'ordre 2}) \end{cases} \quad (4.26)$$



$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} [I^m] = \kappa [I_b - I^m] \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, 2M \text{ et } I^m = I(x, \mu_m) \quad (4.27)$$

Les conditions aux limites radiatives associées discrétisées peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \tau = 0 & I_m^+ = \varepsilon_B I_b(T_B) - 2(1 - \varepsilon_B) \sum_{\mu_m < 0} w_m I(0, \mu_m) \mu_m & \text{avec } \mu_m > 0 \\ \tau = \tau_L & I_m^- = \varepsilon_H I_b(T_H) + 2(1 - \varepsilon_H) \sum_{\mu_m > 0} w_m I(\tau_L, \mu_m) \mu_m & \text{avec } \mu_m < 0 \end{cases} \quad \text{avec } m=1,2,\dots,M \quad (4.28)$$

#### 4.2.5 Discrétisation spatiale

Plusieurs méthodes sont couramment utilisées dans la littérature pour la discrétisation spatiale de l'ETR. Notamment, la méthode de différence finies, la méthode de volume finies, la méthode de volume de contrôle. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des volumes de contrôle décrite par Patankar (1980) et utilisée par Moura (1998) pour la caractérisation des propriétés radiatives dans les milieux isotropes semi-transparents. La discrétisation spatiale consiste à diviser le milieu en un ensemble d'intervalles (volumes de contrôles) juxtaposés uniformes ou non, dont les centres sont les nœuds du maillage. (Voir **Fig. 4-4**).

$$dx(nv) = \frac{L}{N_{vc}} \quad (4.29)$$

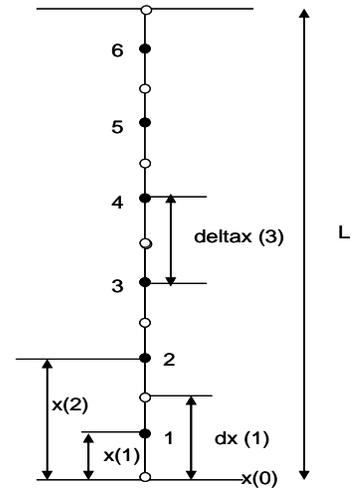
$dx$  : dimension de chaque volume de contrôle.

$L$  : épaisseur totale du matériau

$N_{cv}$ : nombre de volume de contrôle

$x(nx)$  : position du nœuds  $nx$

$deltax(nx)$  : distance entre le nœuds  $nx$  et  $nx+1$



**Figure 4-4** : Nomenclature pour la discrétisation spatiale

#### 4.2.5.1 Calcul des intensités radiatives

Le système d'équations différentielles (4.27) avec les conditions aux limites (4.28) est ensuite intégré sur chaque élément de volume en utilisant le principe de la discrétisation de la méthode des volumes de contrôle. On obtient le système d'équations algébriques :

$$\mu_m \int_V \frac{\partial I^m}{\partial \tau} dV + \int_V I^m dV = \int_V I_b(T) dV \quad \text{avec } 1 \leq m \leq 2M \quad \text{et } V = \Delta \tau_x \quad (4.30)$$

La première intégrale est remplacée par une intégrale linéique :

$$\mu_m \int_V \frac{\partial I^m}{\partial \tau} dV = \mu_m (I_{n+1}^m - I_n^m) \Rightarrow I_n \text{ connue, } I_{n+1} \text{ inconnue} \quad (4.31)$$

Dans chaque élément, les valeurs moyennes des intensités sont considérées

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V I^m dV = \Delta \tau I_{n+1/2}^m \\ \int_V I_b dV = \Delta \tau I_{b,n+1/2} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

L'ETR, intégrée sur chaque volume de contrôle, devient :

$$\mu_m (I_{n+1}^m - I_n^m) + \Delta\tau I_{n+1/2}^m = \Delta\tau I_{b,n+1/2} \quad 1 \leq m \leq 2M \quad (4.33)$$

L'équation a deux inconnues, une intensité sur une face (fictive)  $I_{n+1}^m$  et une intensité au centre de l'élément  $I_{n+1/2}^m$ . On utilise une **relation de fermeture** (une loi de variation) de l'intensité à l'intérieur du volume, à l'aide d'une fonction de pondération f (Moura, 1998) :

$$I_{n+1/2}^m = f I_{n+1}^m + (1-f) I_n^m \quad 1 \leq m \leq 2M \quad (4.34)$$

La valeur de f est définie par différents schémas :

Si  $f = 1 \Rightarrow$  schéma "step"

Si  $f = 1/2 \Rightarrow$  schéma diamant (interpolation linéaire)

**Schéma exponentiel** et schéma intégral dépendent de  $\tau$ .

Dans ce travail nous avons utilisé le schéma exponentiel. Pour essayer d'obtenir une meilleure approximation pour la relation de fermeture, Carlson et Lathrop (1968) ont proposé d'utiliser la solution formelle de l'ETR pour un volume de contrôle où le terme source est constant à chaque itération. Dans ce cas l'expression de f s'écrit :

$$f = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\mu_m}}} - \frac{1}{\mu_m \Delta\tau} \quad (4.35)$$

En substituant l'expression de  $I_{n+1}^m$  de l'équation (4.34) on l'introduit dans l'équation de l'ETR discrétisée (4.33), cela permet d'obtenir l'expression de l'intensité radiative au milieu de chaque volume de contrôle :

$$\mu_m > 0 \rightarrow I_{n+1/2}^{m+} = \frac{1}{\left(1 + f \frac{\Delta\tau}{\mu_m}\right)} \left[ f \frac{\Delta\tau}{\mu_m} I_{b,n+1/2} + I_n^m \right] \quad (4.36)$$

$$\mu_m < 0 \rightarrow I_{n+1/2}^{m-} = \frac{1}{\left(1 - f \frac{\Delta\tau}{\mu_m}\right)} \left[ -f \frac{\Delta\tau}{\mu_m} I_{b,n+1/2} + I_n^m \right] \quad (4.37)$$

La méthode est progressive. Connaissant  $I_n^m$  de la surface on peut déterminer  $I_{n+1/2}^m$  qui est l'intensité au centre de l'élément puis celle de  $I_{n+1}^m$ . On passe ensuite à l'élément adjacent jusqu'à la détermination de l'intensité radiative dans tout le domaine.

Les conditions aux limites dépendent des intensités radiatives, le calcul du champ d'intensité radiative se fera de façon itérative jusqu'à la convergence vers un seuil de tolérance préétablie.

$$\frac{I_{n+1/2}^{it} - I_{n+1/2}^{it+1}}{I_{n+1/2}^{it+1}} < \varepsilon = 10^{-5} \quad (4.38)$$

Le flux radiatif  $q_{rad}(x)$  et le rayonnement incident  $G(x)$  dans chaque volume de contrôle :

$$q_{n+1/2} = 2\pi \sum_{m=1}^M w_m \mu_m \left( I_{n+1/2}^{m+} - I_{n+1/2}^{m-} \right) \quad (4.39)$$

$$G_{n+1/2} = 2\pi \sum_{m=1}^M w_m \left( I_n^{m+} + I_n^{m-} \right) \quad (4.40)$$

La divergence du flux radiatif sera donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_{rad,n+1/2} = \kappa \left[ 4\pi I_b^m(T) - G_{n+1/2} \right] \approx \kappa \left[ 4\pi I_b^m(T) - 2\pi \sum_{m=1}^M w_m (I_n^{m+} + I_n^{m-}) \right] \quad (4.41)$$

#### 4.2.6 Cas particulier : Équilibre radiatif

En absence de tout mode de transfert de chaleur autre que le rayonnement et en régime stationnaire, le bilan énergétique se traduit par :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_{rad}(r) = 0 \quad (4.42)$$

Ce qui signifie que l'énergie émise par un élément de volume quelconque compense exactement celle qu'il a absorbée. Au sein d'un milieu semi-transparent plan et gris, l'hypothèse de l'équilibre radiatif implique l'équation :

$$2\pi \sum_{m=1}^M w_m (I_n^{m+} + I_n^{m-}) = 4\sigma n^2 T^4(x) \quad (4.43)$$

Nous recherchons à estimer le champ de température  $T(x)$  qui satisfait à la relation précédente. Cette procédure se fera également de manière itérative :

- à partir d'une évaluation du champ de température dépendant des conditions aux limites radiatives, on calcule le flux radiatif incident  $G(x)$  suite à la résolution de l'ETR à l'aide de la MOD.
- Ensuite le champ de température  $T(x)$  est mis à jour à partir de la relation :

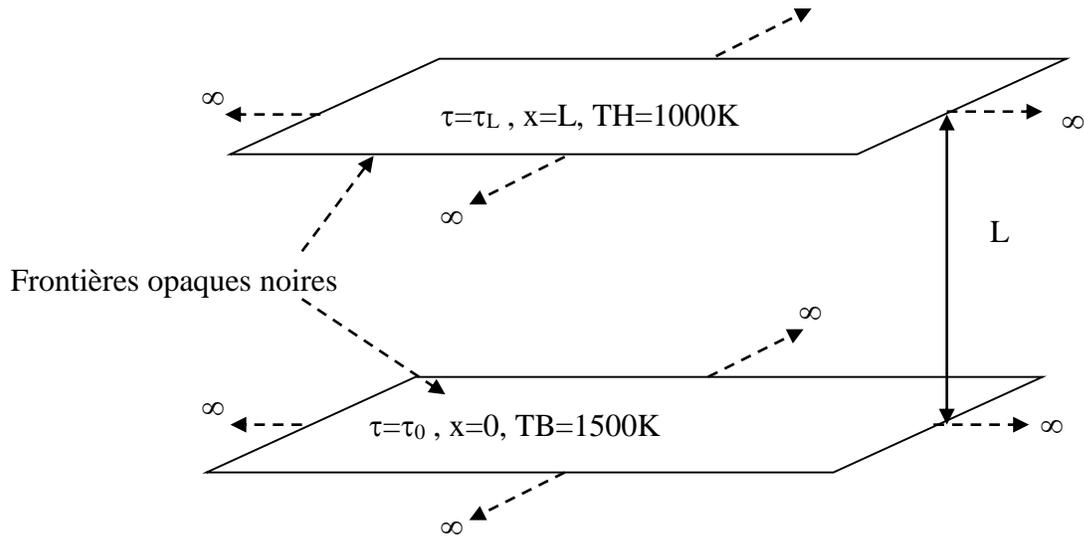
$$T(x) = \left[ \frac{\pi}{2\sigma n^2(x)} \sum_{m=1}^M w_m (I_n^{m+} + I_n^{m-}) \right]^{1/4} \quad (4.44)$$

Les étapes précédentes sont itérées jusqu'à la convergence qui est considérée atteinte si l'écart relatif maximal entre deux champs de température est inférieur à un critère d'arrêt choisi. L'équilibre radiatif est un problème classique en transfert radiatif dans un milieu participant. Couramment invoquée uniquement dans l'étude du transfert de chaleur à travers les atmosphères planétaires ou des étoiles, la condition d'équilibre radiatif est très souvent utilisée comme cas primaire pour la validation des codes de calculs en transfert radiatif (Modest, 2013).

#### *4.2.7 Validation du code fortran MOD 1D stationnaire (MOD1D.f)*

##### *4.2.7.1 Validation 1 : Équilibre radiatif et calcul de la température adimensionnelle*

Considérons un MST gris, absorbant et émettant placé entre deux parois opaques noires ( $\varepsilon_B = \varepsilon_H = 1$ ) de dimensions infinies de températures différentes :  $T_H=1000$  K et  $T_B=1500$  K. La température du milieu n'est pas imposée (on prendra :  $T_M = (T_H + T_B)/2$ ) et le plan P1 du haut est à la température  $T_H=1000$  K et le plan P2 du bas à la température  $T_B=1500$  K. L'hypothèse d'unidimensionnalité est adoptée. Les deux plans sont distants de  $L$ . Le milieu est non diffusant ( $\sigma_s = 0$  et  $\omega = 0$ ) avec un coefficient d'absorption constant  $\kappa=1$ . L'objectif est de calculer la répartition des sources volumiques radiatives dans le MST pour différentes épaisseurs optiques, à l'équilibre radiatif. Nous cherchons également à déterminer le champ de température ou, plus précisément, la puissance émise normalisée. La configuration étudiée est exposée sur la **figure 4-5**.



**Figure 4-5** : Configuration du MST bornée par des frontières opaques noires

La solution exacte de ce problème est obtenue à partir des solutions formelles de l'ETR. La condition d'équilibre radiatif, à travers les fonctions exponentielles intégrales, transforme l'ETR en équation de Fredholm de deuxième espèce avec une singularité logarithmique du noyau (Modest, 2013).

$$\Phi_b(\tau) = \frac{1}{2} \left[ E_2(\tau) + \int_0^{\tau_L} \Phi_b(\tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \right] \quad (4.45)$$

$\Phi_b(\tau)$  la température adimensionnelle d'un corps noir.

Ce type de problème est réputé pour sa difficulté de résolution et l'intégrale d'une telle équation nécessite couramment des techniques numériques raffinées pour atteindre une solution correcte. La solution de l'équation du type Fredholm de seconde a été résolue pour la première fois dans ce contexte par (Heaslet and Warming, 1965).

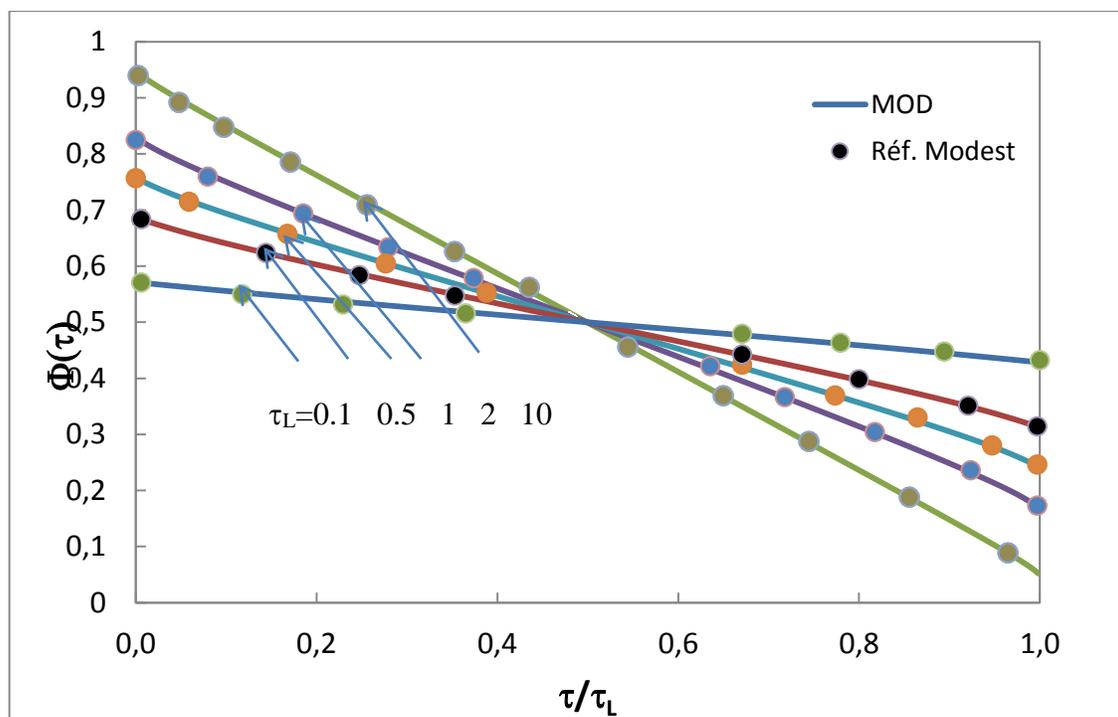
Les équations associées au problème sont écrites en variables adimensionnelles.

$$\Phi(\tau) = \frac{T^4(\tau) - T_H^4}{T_B^4 - T_H^4} \quad (4.46)$$

Avec  $\Phi(\tau)$  la température adimensionnelle

Les résultats par la MOD coïncident bien avec ceux donnés par les résultats analytiques

(Voir Fig. 4-6).



**Figure 4-6 :** Distribution de la température adimensionnelle dans un milieu absorbant pour les épaisseurs optiques  $\tau_L = 0.1$ ,  $\tau_L = 0.5$ ,  $\tau_L = 1$ ,  $\tau_L = 2$  et  $\tau_L = 10$

On remarque que l'évolution de la puissance radiative est quasi linéaire ce qui justifie par ailleurs l'approximation de (Rosseland, 1936) du flux radiatif pour un milieu très absorbant :

$$q_{rad} \approx -k_R \nabla T \quad \text{avec} \quad k_R = \frac{16n^2 \sigma T^3}{3\kappa} \quad (4.47)$$

#### 4.2.7.2 Validation 2 : Équilibre radiatif et calcul du flux radiatif adimensionnel

La deuxième validation consiste à comparer les résultats du flux net issus de la MOD et ceux obtenus dans l'ouvrage de (Heaslet et Warming, 1965). La densité de flux radiative adimensionnelle reçue par la paroi du haut est donnée analytiquement par l'expression :

$$\psi_b = 1 - 2 \int_0^{\tau_L} \Phi_b(\tau') E_2(\tau') d\tau' \quad (4.48)$$

$\psi_b$  le flux radiatif adimensionnel.

Pour une surface grise, la densité de flux radiative adimensionnelle reçue par la paroi du haut est donnée par :

$$\Psi = \frac{q}{\sigma(T_B^4 - T_H^4)} = \frac{\psi_b}{1 + \psi_b(1/\varepsilon_B + 1/\varepsilon_H - 2)} \quad (4.49)$$

La température adimensionnelle  $\Phi(\tau)$  peut être calculée par :

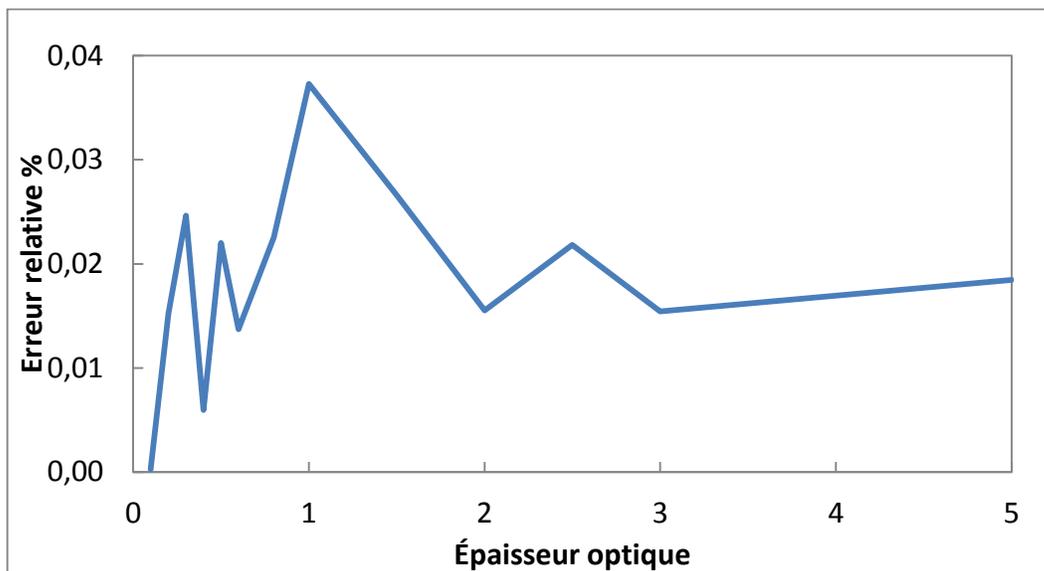
$$\Phi(\tau) = \frac{T^4(\tau) - T_H^4}{T_B^4 - T_H^4} = \frac{\Phi_b(\tau) + (1/\varepsilon_H - 1)\psi_b}{1 + \psi_b(1/\varepsilon_B + 1/\varepsilon_H - 2)} \quad (4.50)$$

Le **tableau 4-2** présente les résultats numérique MOD1D et analytique de la densité de flux radiative adimensionnelle reçue par la paroi du haut pour des épaisseurs optiques allant de 0

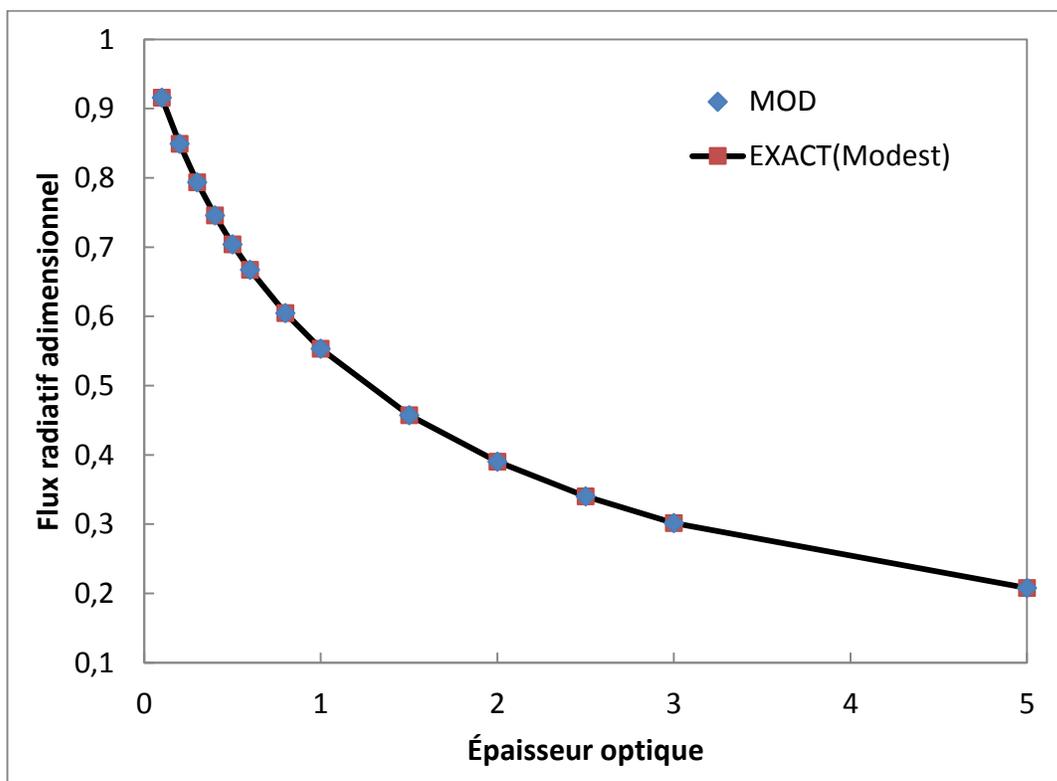
à 5. Nous remarquons que l'erreur relative entre les deux méthodes est faible mais augmente avec l'augmentation de l'épaisseur optique. Pour un nombre d'éléments linéaires NEM=500 et avec 500 itérations de MOD, l'erreur relative ne dépasse pas 0.04% (voir **Fig.4-7**) pour des épaisseurs optiques comprises entre 0.1 et 1, ce qui montre une bonne efficacité de la MOD dans cet intervalle. Par contre, le temps de résolution de l'équation de Fredholm devient très vite important pour les grandes valeurs des épaisseurs optiques, ce qui introduit forcément des erreurs qui ne sont pas considérées ici. On remarque également que le flux de chaleur reçu par la paroi diminue avec l'augmentation de  $\tau_L$  (voir **Fig.4-8**)

**Tableau 4-2** : Densité de flux radiatif adimensionnelle reçu par la paroi noire du haut ( $\epsilon_B=1$ )

$\tau_L$	MOD $\psi_b$	EXACTE $\psi_b$	Erreur relative %
0.1	0.915697	0.9157	0.00029
0.2	0.849229	0.8491	0.01524
0.3	0.793595	0.7934	0.02462
0.4	0.745844	0.7458	0.00595
0.5	0.704155	0.7040	0.02200
0.6	0.667292	0.6672	0.01373
0.8	0.604736	0.6046	0.02254
1	0.553406	0.5532	0.03727
1.5	0.457322	0.4572	0.02658
2	0.390061	0.3900	0.01552
2.5	0.340174	0.3401	0.02182
3	0.301647	0.3016	0.01543
5	0.207662	0.2077	0.01846



**Figure 4-7 :** Erreur relative sur le calcul de la densité de flux radiatif adimensionnelle



**Figure 4-8 :** Courbe du flux radiatif adimensionnel reçu par la paroi noire du haut

Dans le cas des plaques grises diffuses émettantes et réfléchissantes, les résultats obtenus pour différentes combinaisons d'émissivités sont donnés dans le **tableau 4-3**. Les solutions numériques sont conformes aux solutions analytiques avec une erreur relative ne dépassant pas 0.03% pour des épaisseurs optiques comprises entre 0.1 et 1.

**Tableau 4-3** : Densité de flux radiatif adimensionnelle reçu par la paroi grise du haut.

$\tau_L$	MOD $\psi_b$	EXACTE $\psi_b$	Erreur relative %	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$
0.1	0.745121	0.7451	0.00282	0.8	1
0.5	0.598751	0.5986	0.02531		
1	0.486147	0.4860	0.03025		
5	0.197413	0.1975	0.04412		
0.1	0.426974	0.4270	0.00612	0.8	0.5
0.5	0.374512	0.3745	0.00318		
1	0.327119	0.3271	0.00582		
5	0.164866	0.1649	0.02052		
0.1	0.09669	0.0967	0.00775	0.8	0.1
0.5	0.09372	0.0937	0.02077		
1	0.09044	0.0904	0.04482		
5	0.07110	0.0711	0.00591		

*4.2.7.3 Validation 3 : Hors équilibre radiatif et calcul de la divergence du flux radiatif comparé avec la solution analytique de Beer-Lambert*

A partir de l'équation 4.13 traduisant la loi de Beer-Lambert de la densité de flux radiatif, on peut déduire la divergence du flux radiatif qui s'écrit sous la forme :

$$\nabla q_{rad}(x) = -\kappa q_0 e^{-\kappa x} \quad (4.51)$$

Cette solution analytique est confrontée avec la solution numérique MOD1D donnée par l'équation (4.41) qui représente l'expression de la divergence du flux radiatif dans les

conditions du milieu froid et non diffusant en considérant également la direction positive des quadratures.

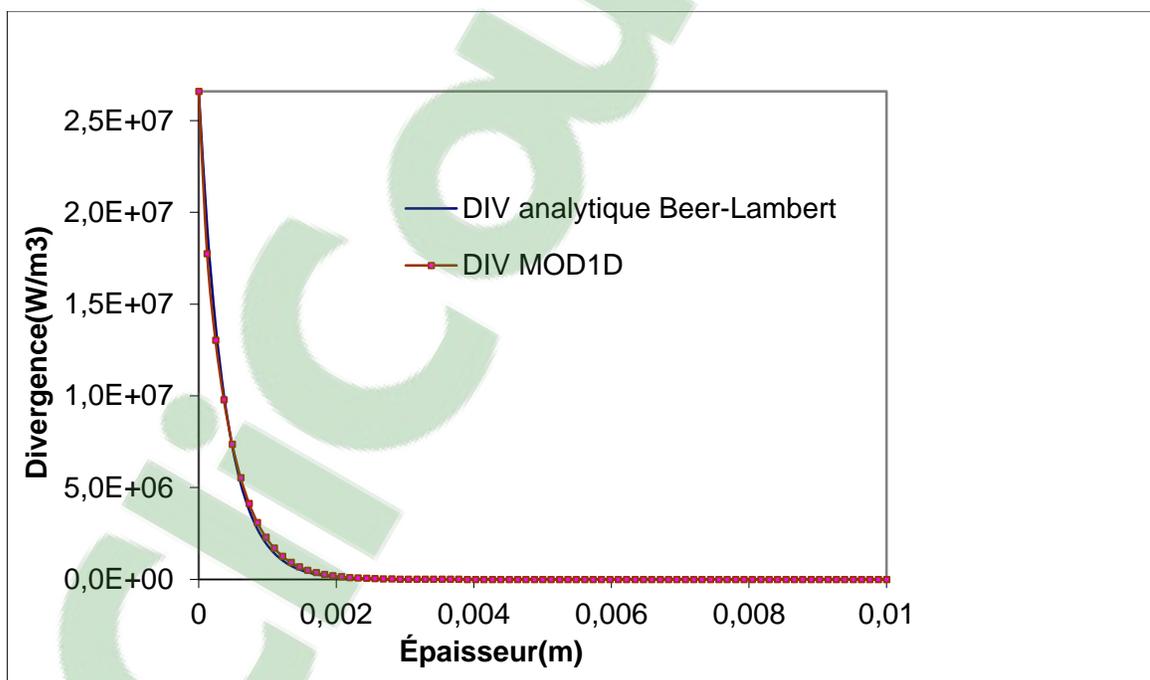
$$\nabla \cdot q_r(z) = -\kappa G(z) \approx -\kappa \sum_{m=1}^M w_m I^m(z) \quad (4.52)$$

La condition aux limites radiative pour la résolution de l'ETR pour la face 1 et 2 s'écrira alors:

$$I(x=0) = \varepsilon_B n_B^2 \frac{q_0(T_B)}{\pi} + 2(1-\varepsilon_B) \int_{-1}^0 I(x=0, \mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu > 0$$

$$I(x=L) = \varepsilon_H n_H^2 \frac{q_0(T_H)}{\pi} + 2(1-\varepsilon_H) \int_0^1 I(x=L, \mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu < 0$$

Avec  $\kappa=2660 \text{ m}^{-1}$  et  $q_0 = 10000 \text{ Wm}^{-2}$ , la validation du code est donnée à la **figure 4-9**.



**Figure 4-9** : Validation du code MOD1D avec la solution analytique Beer-Lambert à travers un milieu absorbant

On remarque que le résultat obtenu par la MOD concorde bien avec celui donné par la loi de Beer-Lambert. Ce résultat va être considéré comme valeur initiale de la divergence de flux prise à la première itération (NITER=1) lors de la résolution du problème transitoire non linéaire MEF/MOD. Mais abordons d'abord la formulation numérique du couplage non linéaires hybride MEF3D / MOD1D.

#### 4.3 COUPLAGE CONDUCTION-RADIATION MEF/MOD

Le transfert de chaleur combinée par radiation et conduction joue un rôle important dans les applications d'ingénierie impliquées dans un milieu semi-transparent à des températures élevées avec un grand rayonnement incident. Certaines erreurs seront causées si seulement on considère uniquement la conduction ou le rayonnement. Les premières études sur le transfert de chaleur couplé ont été examinés en détail par (Viskanta et Anderson, 1975) et par (Kunc et al., 1984).

En 1998, (Siegel, 1998) a fait une revue détaillée de la littérature sur le sujet au cours des 40 dernières années et a souligné que les effets transitoires de rayonnement thermique dans les milieux semi-transparentes sont importants pour de nombreuses applications telles que la fabrication du verre, de la céramique à des températures élevées. Au cours des dernières (Asllanaj et al., 2007 ; Safavisohi et al., 2009 ; Kaemmerlen et al, 2010 ; Mishra et al., 2007-2011 ; Niezgodna et al., 2011 ; Sadat et al., 2012 ; Zare et al., 2014 ; Wang et al., 2016) ont étudié le problème du transfert de chaleur couplé conduction-radiation transitoire dont l'équation est la suivante :

$$\rho(T)C_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k(T) \cdot \text{grad} T) = S_{rad}(x, T) \quad (4.53)$$

Pour la source radiative, nous avons considéré la MOD pour le calcul du rayonnement incident  $G(x)$  à travers un milieu gris, absorbant et émettant.

$$\nabla \cdot q_{rad}(x) = \kappa \left[ 4n^2 \sigma T^4 - G(x) \right] \approx \kappa \left[ 4n^2 \sigma T^4 - \sum_{m=1}^M w_m I^m(x) \right] \quad (4.54)$$

#### 4.3.1 Linéarisation du terme source radiatif

En faisant intervenir la température du milieu (milieu non froids) dans l'équation de la divergence, la méthode de Beer-Lambert n'est plus prise en compte, rendant le problème fortement non-linéaire avec  $T^4$ . Pour résoudre ce problème nonlinéaire, il est plus pratique de linéariser le terme source radiatif par un développement de Taylor d'ordre 1 au voisinage de la température recherchée (Patankar, 1980)

$$S_{rad} = S_{rad}^0 + \left. \frac{\partial S_{rad}}{\partial T} \right|_{T^0} (T - T^0) \quad (4.55)$$

Selon la méthode décrite par Patankar, 1980, la linéarisation de l'équation 4.54 peut s'écrire

$$S_{rad} = -\nabla q_{rad} = \kappa \left( 2\pi \sum_{m=1}^{2M} w_m I^m + 12\sigma (T^0)^4 - 16\sigma (T^0)^3 T \right) \quad (4.56)$$

D'où la forme linéaire :

$$S_{rad} = S_C + S_p * T \quad (4.57)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} S_C = \kappa(2\pi \sum_{m=1}^{2M} w_m I^m + 12\sigma (T^0)^4) \\ S_p = -16\kappa\sigma (T^0)^3 \end{cases} \quad (4.58)$$

### 4.3.2 Discrétisation par la méthode des éléments finis 3D

Pour la résolution de l'ECE transitoire non-linéaire (Éq.4.53), la MEF 3D de type Galerkin est appliquée. La méthode des éléments finis propose d'approcher la solution exacte, à priori inconnue, par une solution dont la singularité est moins forte que celle de la solution exacte (Zienkiewicz et Taylor, 2000). Pour ce faire, on multiplie l'ECE, dite forme forte, par une fonction test  $W$ , appartenant à un certain espace fonctionnel  $V$  (Reddy, 1993), puis on intègre sur tout le domaine physique. On obtient ainsi la formulation intégrale de l'ECE :

$$\int_{\Omega} w \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - S_{rad}(x,T) + \rho(T)Cp(T) \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = 0 \quad \forall w \in V \quad (4.59)$$

avec

$$q_x = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad q_y = -k(T) \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad q_z = -k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.60)$$

En effectuant une intégration par parties, on réduit la forte régularité de la fonction température au niveau des dérivées secondes qui apparaissent implicitement dans l'équation (4.59), en faisant apparaître une forme faible de l'équation de la chaleur.

Dans ce cas (4.59) devient :

$$\int_{\Omega} \rho(T)Cp(T) \frac{\partial T}{\partial t} w dV - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right) \{q\} dV = \int_{\Omega} S_r(x,T) w dV - \int_S \{q\}^T \{n\} \cdot w ds \quad (4.61)$$

avec

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}^T \quad (4.62)$$

$$\{n\} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T \quad (4.63)$$

$\{n\}$  étant le vecteur normal sortant à la surface du matériau.

### 4.3.3 Conditions aux limites et initiales

On suppose que la préforme est à une température initiale de  $T(x, y, z, t=0) = T_{ini}$ .

On considère, comme conditions aux frontières, la présence d'une convection et de la radiation sur les parties supérieure,  $S_{sup}$ , et inférieure,  $S_{inf}$ , de la membrane polymérique. Ces conditions aux limites se traduisent par l'équation :

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_p - T_\infty) \quad (4.64)$$

$$\begin{cases} h = h_{conv} + h_{rad} \\ h_{rad} = \varepsilon_p \sigma (T_p - T_\infty)(T_p^2 + T_\infty^2) \end{cases} \quad (4.65)$$

$h$  : la somme des coefficients de convection  $h_{conv}$  et de radiation  $h_{rad}$  supposés respectivement identiques pour les deux surfaces concernées.  $\varepsilon_p$  est l'émissivité de la surface de la préforme.

$T_p$  : les températures surfaciques et  $T_\infty$  est la température du milieu ambiant.

Dans ce travail, on suppose que les parois latérales de la feuille thermoplastique mince semi-transparente sont adiabatiques (épaisseur très négligeable par rapport aux autres dimensions).

En introduisant les conditions aux limites convectives et radiatives l'équation (4.61) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(T) C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} w \, dV - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \right) \{q\} \, dV = \int_{\Omega} S_r(x, y, z) w \, dV - \int_{S_{sup}} h(T - T_\infty) \cdot w \, ds \\ - \int_{S_{inf}} h(T - T_\infty) \cdot w \, ds \end{aligned} \quad (4.66)$$

### 4.3.4 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à prendre pour fonctions tests les fonctions d'interpolations  $N_i$  (Reddy, 1993) :

$$w = N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad i = 1, \dots, m \quad (4.67)$$

Dans ce travail, nous considérons des éléments hexaédriques linéaires. Ainsi, en utilisant des interpolations sur le champ de température, on a pour chaque élément l'expression suivante :

$$T(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_{j=1}^m T_j^e(t) N_j^e(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.68)$$

avec

$m$  : le nombre de nœuds de l'élément hexaédrique linéaire qui a été retenu ( $m=8$ ) ;

$T_i(t)$  : les valeurs nodales de la température à un instant  $t$  ;

$N_i(\xi, \eta, \zeta)$  : les fonctions d'interpolation isoparamétriques ;

$\xi, \eta, \zeta$  : les coordonnées nodales de l'élément de référence hexaédrique linéaire.

Sous forme matricielle, l'équation (4.68) s'écrit :

$$T = [N]\{T\} \quad (4.69)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\{T\} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_8 \end{bmatrix}^T \quad (4.71)$$

où

$\{T\}$  : le vecteur des températures nodales et  $[N]$  : la matrice des fonctions d'interpolation.

La dérivée associée à (4.71) devient sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial x & \partial N_2 / \partial x & \cdots \\ \partial N_1 / \partial y & \partial N_2 / \partial y & \cdots \\ \partial N_1 / \partial z & \partial N_2 / \partial z & \cdots \end{bmatrix} \{T\} = [B]\{T\} \quad (4.72)$$

où  $[B]$  est la matrice des gradients des fonctions d'interpolation. On en déduit alors, selon la loi de Fourier, équation (4.60), l'expression matricielle du flux de conduction :

$$\{q\} = -k[B]\{T\} \quad (4.73)$$

En substituant dans l'équation (4.62), les équations (4.65), (4.69) et (4.73) on aura :

$$\begin{aligned} \sum_e \left( \int_{\Omega^e} \rho C_p \frac{\partial T_j}{\partial t} N_j N_i dV + \int_{\Omega^e} k [B]^T [B] \{T\} dV \right) = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} S_r(x, y, z) N_i dV - \int_{S_{sup}^e} h (T_j N_j - T_\infty) \cdot N_i ds \right. \\ \left. - \int_{S_{inf}^e} h (T_j N_j - T_\infty) \cdot N_i ds \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Finalement, en écrivant la température sous forme vectorielle et les fonctions d'interpolation sous forme matricielle, on peut déduire à partir de l'équation (4.74) les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans le milieu physique :

$$\sum_e ([C]^e \{\dot{T}\}^e + ([K_c]^e + [K_h]^e + [K_p]^e) \{T\}^e) = \sum_e (\{F_{source}\}^e + \{F_h\}^e) \quad (4.75)$$

avec

$$[C]^e = \int_{\Omega^e} \rho(T) C_p(T) [N]^T [N] dV ; \quad [K_c]^e = \int_{\Omega^e} k(T) [B]^T [B] dV \quad ;$$

$$[K_h]^e = \int_{S_{sup}^e \cup S_{inf}^e} h [N]^T [N] dS \quad ;$$

$$\{F_{source}\}^e = \int_{\Omega^e} S_C [N]^T dV \quad ; \quad \{F_h\}^e = - \int_{S_{sup}^e \cup S_{inf}^e} h T_\infty [N]^T dS \quad ; \quad [K_p]^e = - \int_{\Omega^e} S_p [N]^T [N] dV .$$

Sous forme condensée, l'équation (4.75) peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_e ([C]^e \{\dot{\mathbf{T}}\}^e + [K]^e \{\mathbf{T}\}^e) = \sum_e \{\mathbf{F}\}^e \quad (4.76)$$

où

$[C]^e$  : la matrice de capacité élémentaire ;

$[K]^e = [K_c]^e + [K_h]^e + [K_p]^e$  : la matrice de conductivité élémentaire ;

$\{\mathbf{F}\}^e = \{F_{source}\}^e + \{F_h\}^e$  : le vecteur flux généralisé élémentaire ;

$\dot{T}$  est la dérivée de la température par rapport au temps.

Pour résoudre l'équation (4.76) on est amené à évaluer les différentes intégrales figurant dans (4.75). Comme il est souvent très difficile d'évaluer les expressions exactes de ces intégrales, les méthodes d'intégration numériques sont utilisées, en particulier la méthode des quadratures de Gauss (Zienkiewicz et Taylor, 2000). Elle consiste à approcher les intégrales de types :

$$\text{En 2D : } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} w_i \cdot w_j \cdot g(\xi_i, \eta_j)$$

$$\text{En 3D : } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^{m_G} \sum_{j=1}^{m_G} \sum_{k=1}^{m_G} w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

avec

$m_G$  : le nombre de points de Gauss utilisés pour l'intégration ;

$\xi_i, \eta_j$  et  $\zeta_k$  : les points d'intégration de Gauss;

$w_i, w_j, w_k$  : les poids d'intégration de Gauss.

**Remarques :**

- a) La méthode de Gauss permet d'intégrer exactement un polynôme de degré  $2m_G - 1$  avec  $m_G$  points.
- b) Afin de faciliter la résolution globale de toutes les intégrales de volume et de surface de l'équation discrétisée (4.75), des transformations sont effectuées sur chaque élément réel.

#### 4.3.5 Assemblage

La discrétisation de l'équation de la chaleur par éléments finis nous a conduit à interpoler sur chaque élément la variable température par ses valeurs prises aux nœuds de l'élément. Ainsi, pour chaque élément considéré, on obtient un système élémentaire. La contribution de tous ces systèmes élémentaires à travers la sommation sur les éléments dans l'équation (4.76), permet de construire un système global. Cette étape est appelée assemblage (Reddy, 1993). Ainsi, l'équation (4.76) se réécrit après assemblage sous la forme :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (4.77)$$

où

$$[K] = \sum_e [K]^e \quad : \text{la matrice conductivité globale}$$

$$[C] = \sum_e [C]^e \quad : \text{la matrice de capacité globale}$$

$$\{F\} = \sum_e \{F\}^e \quad : \text{le vecteur de charge thermique global}$$

Sous la condition initiale :

$$T(x, y, z, t=0) = T_{\text{ini}}(x, y, z) = T_{\text{ini}} \quad \forall x, y, z \quad (4.78)$$

#### 4.3.6 Schéma d'intégration du temps

Après assemblage, le système d'équations globales s'écrit la forme de l'équation (4.74) sous la condition initiale (4.76). C'est un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre dont la résolution nécessite une discrétisation du temps. Pour ce faire, on subdivise la durée du chauffage en une suite d'intervalles  $([t_i, t_{n+1}])_{0 \leq i \leq n-1}$ . En utilisant une paramétrisation linéaire sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  on obtient :

$$t_{\theta} = (1-\theta) \cdot t_n + \theta \cdot t_{n+1} = t_n + \theta \cdot \Delta t \quad \theta \in [0,1] \quad (4.79)$$

où

$\theta$  est un paramètre.  $\Delta t$  est le pas de temps et s'exprime :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (4.80)$$

La dérivée par rapport au temps de la température à l'instant  $t_{\theta} \in [t_n, t_{n+1}]$  est approchée

alors par le schéma aux différences finies suivant (Reddy, 1993) :

$$\left\{ \dot{T} \right\}_{\theta} = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \quad \theta \in [0,1] \quad (4.81)$$

$\{T\}_{n+1}$  et  $\{T\}_n$  étant les températures aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$  respectivement. Ainsi la

température  $\{T\}_{\theta}$  et le vecteur de charge thermique global  $\{F\}_{\theta}$  à l'instant  $t_{\theta}$  seront

approchés par les formules suivantes (Reddy, 1993) :

$$\{T\}_{\theta} = (1-\theta)\{T\}_n + \theta\{T\}_{n+1} \quad (4.82)$$

$$\{F\}_{\theta} = (1-\theta)\{F\}_n + \theta\{F\}_{n+1}$$

$\{F\}_n$  et  $\{F\}_{n+1}$  étant les vecteurs de charge thermique globaux aux instants  $t_{n+1}$  et  $t_n$

respectivement. Le même principe est appliqué aux matrices de conductivité globale et de

capacité globale respectivement.

$$[K]_{\theta} = (1-\theta)[K]_n + \theta[K]_{n+1} \quad (4.83)$$

$$[C]_{\theta} = (1-\theta)[C]_n + \theta[C]_{n+1}$$

En substituant  $\left\{ \dot{T} \right\}_{\theta}$ ,  $\{T\}_{\theta}$  par leurs expressions dans (4.77), on obtient le schéma suivant :

$$[C]_{\theta} \cdot \left( \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \right) + [K]_{\theta} \cdot ((1-\theta) \cdot \{T\}_n + \theta \cdot \{T\}_{n+1}) = \{F\}_{\theta} \quad \theta \in [0,1] \quad (4.84)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left( \frac{[C]_{\theta}}{\Delta t} + \theta \cdot [K]_{\theta} \right) \cdot \{T\}_{n+1} = \left( \frac{[C]_{\theta}}{\Delta t} - (1-\theta) \cdot [K]_{\theta} \right) \cdot \{T\}_n + \{F\}_{\theta} \quad (4.85)$$

Le schéma (4.85) peut se réécrire de façon compacte sous la forme :

$$\hat{C} T^{n+1} = \hat{K} \cdot T^n + \hat{F} \quad (4.86)$$

Avec

$$\left[ \hat{C} \right] = \left( \frac{[C]}{\Delta t^*} + \alpha \cdot [K] \right) \quad \theta \in [0,1] \quad (4.87)$$

$$\left[ \hat{K} \right] = \left( \frac{[C]}{\Delta t^*} - (1-\alpha) \cdot [K] \right) \quad \theta \in [0,1] \quad (4.88)$$

$$\left\{ \hat{F} \right\} = (1-\alpha) \{F\}^n + \alpha \{F\}^{n+1} = \{F\}_{\theta} \text{ et } T^n = \{T\}_n \quad \theta \in [0,1] \quad (4.89)$$

où  $T_n$  est le vecteur nodal global des températures à l'instant  $t_n$  et  $\hat{C}$ ,  $\hat{K}$  et  $\hat{F}$  sont respectivement les matrices globales modifiées de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique du système (Dokainish et Subbaraj, 1989).

**Remarque :** Certaines valeurs de  $\theta$  sont associées à des méthodes classiques :

$\theta = 0$  : méthode d'Euler explicite ;  $\theta = 1/2$  : méthode de Crank-Nicholson.

$\theta = 2/3$  : méthode de Galerkin ;  $\theta = 1$  : méthode d'Euler implicite.

#### 4.3.7 Schéma d'intégration explicite monophas

Si on choisit  $\theta = 0$  le schéma donné par la formule (4.85) s'écrit :

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \cdot \hat{C}^{-1}(T^n) \cdot \left[ \hat{F}(T^n) - \hat{K}(T^n) \cdot T^n \right] \quad (4.90)$$

Ce schéma est dit explicite. Il présente l'avantage d'exprimer la température à l'instant  $t_{n+1}$  en fonction de la température et du flux à l'instant précédent  $t_n$ . Cependant, il a l'inconvénient d'être conditionnellement stable (Reddy, 1993) dans le sens qu'il faut prendre un pas de temps très petit comparativement à la discrétisation spatiale. Ce qui a pour effet d'alourdir le temps de calcul. Pour améliorer la stabilité numérique de l'équation (4.85), la matrice de capacité thermique  $C$  peut être diagonalisée 'lumped Matrix' (Dokainish et Subbaraj, 1989). Bien que cette matrice présente une diffusion numérique, elle élimine les oscillations indésirables produites par la matrice masse consistante 'unlumped Matrix'.

#### 4.3.8 Schéma d'intégration implicite monopas

Pour  $\theta \neq 0$ , on remarque que la solution, équation (4.85), à l'instant  $t_{n+1}$  ne dépend pas explicitement de la solution à l'instant  $t_n$ . Ce schéma est dit implicite. Il présente l'avantage d'être inconditionnellement stable (pour  $\theta \geq \frac{1}{2}$ ). En effet, pour tous les schémas implicites pour lesquels le paramètre est supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ , aucune composante ne diverge donc la température reste finie partout et à tout instant. Le schéma (4.85) peut se réécrire de façon compacte sous la forme :

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} \hat{C}(T^{n+1}) + \hat{K}(T^{n+1}) \right] T^{n+1} = \left[ \frac{1}{\Delta t} \hat{C}(T^{n+1}) \cdot T^n + \hat{F}(T^{n+1}) \right] \quad (4.91)$$

La matrice  $\hat{C}$  est constante pour les problèmes linéaires tant que le pas de temps ne change pas. Son inverse n'est évalué qu'une seule fois. On applique une méthode itérative par la

méthode de Picard pour trouver  $T^{n+1}$  à chaque pas de temps à partir de la valeur initiale  $T_p^{n+1}$ . La solution converge généralement pour un pas de temps inférieur ou égale à 0.01 (Reddy et Gartling, 2010). Dans ce travail, le schéma d'intégration temporel monopas implicite est utilisé (Reddy et Gartling, 2010). Une des manières de réduire le temps de résolution numériques d'un problème non linéaire transitoire est de définir un nouveau schéma d'intégration temporel. L'équation de conservation de l'énergie (ECE) est préalablement linéarisée. Puis la température au premier pas de temps est déterminée par une méthode à un ou deux pas d'intégration temporelle du type Euler explicite ( $\theta=0$ ) comme prédiction puis comme correction par une méthode d'Euler implicite ( $\theta=1$ ) ou par un schéma de Crank-Nicholson ( $\theta=1/2$ ) aux itérations suivantes. Chaque pas de temps requière l'application d'une méthode itérative de type Picard résolvant la non-linéarité jusqu'à la convergence selon un seuil de tolérance sur l'erreur relative.

On montre dans la littérature que le schéma d'intégration est stable pour :

$$\Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)l_{\max}} = \Delta t_{cr} \quad (4.92)$$

avec

$l_{\max}$  la plus grande valeur propre de  $[C]^{-1}[K]$ .

Le schéma d'intégration est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1/2$ .

Il y a stabilité sans oscillation si :

$$\Delta t \prec \frac{1}{(1-\theta)l_{\max}} \quad (4.93)$$

#### 4.3.9 Algorithme de résolution du couplage FEM / MOD

L'algorithme de résolution du transfert de chaleur couplé conduction / radiation par les méthodes FEM et MOD se fera comme suit :

1-Initialisation des champs de température et des intensités radiatives

2-Pas de temps

3-Résolution de l'ETR par la MOD

4-Calcul itératif sur l'intensité radiative par la MOD. Critère de convergence

5-Déduction du flux radiatif incident  $G(i)$  par la MOD

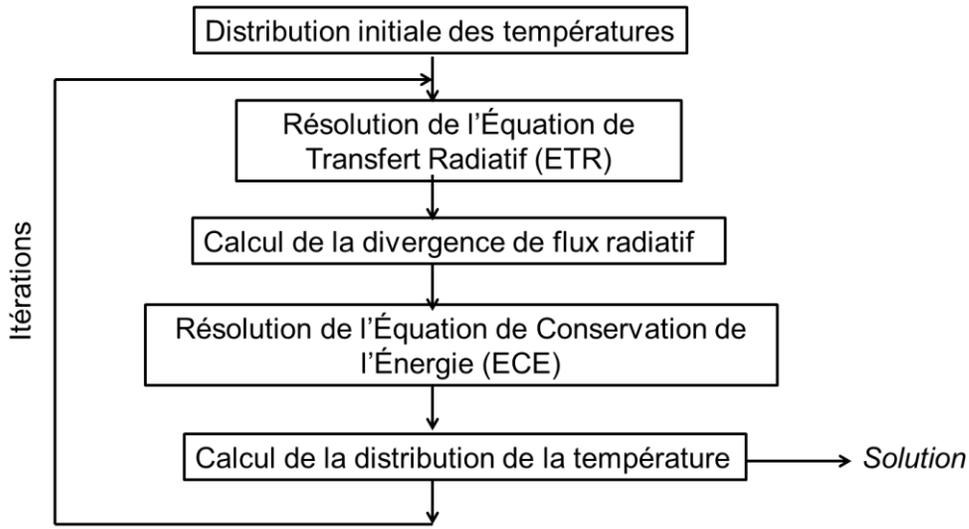
6-Discretisation de l'ECE avec terme source linéarisé par la FEM avec application d'une méthode itérative pour un problème non linéaire (Picard ou Newton-Raphson)

7-Résolution du système d'équation par la méthode des systèmes tri diagonaux T.D.M.A

8-Critère de convergence sur le résidu et le champ de température nodaux.

9-Les points 3 à 8 sont repris jusqu'à ce que le critère de convergence soit inférieur ou égal au seuil de tolérance.

Cet algorithme peut être résumé par le schéma suivant :



#### 4.3.10 Méthodes itératives de résolution des problèmes thermiques non linéaires

##### 4.3.10.1 Cas du régime stationnaire

Dans le cas d'une analyse stationnaire non linéaire, il peut y avoir la présence de flux radiatif (loi en  $T^4$ ) où le coefficient de convection  $h(T)$  peut être en fonction de la température ou de même que la conductivité thermique  $k(T)$  peut dépendre de la température : il s'ensuit à cause de cette dernière hypothèse de non-linéarité de propriété thermophysique que la matrice de conductivité  $[K(T)]$  n'est donc plus constante. Le problème s'écrit alors :

$$[K(T)]\{T\} - \{F(T)\} = 0 \quad (4.94)$$

Ce système d'équations non linéaires est résolu de manière itérative par la méthode de Picard, la méthode de Newton-Raphson ou une méthode mixte (Picard et Newton-Raphson) (Debard, 2009).

De façon générale, résoudre un problème thermique non linéaire revient à déterminer un champ de températures  $T$  tel que le résidu soit aussi proche que possible de zéro. Le résidu de l'équation (4.94) s'écrit

$$\{R(T_{i-1})\} = \{F(T_{i-1})\} - [K(T_{i-1})]\{T_{i-1}\} \quad (4.95)$$

- 1- Premièrement, on estime un vecteur  $\{T_0\}$ , comme prédiction de la solution.
- 2- On calcule la correction  $\{\Delta T_i\}$  tel que :

$$[M(T_i)] \{\Delta T_i\} = \{R(T_i)\} \quad (4.96)$$

**Remarque :** La matrice  $[M(T_i)]$  dépend de la méthode de résolution utilisée.

- 3- Ensuite, on actualise la température à l'itération suivante par une correction  $\{\Delta T_i\}$  à apporter au vecteur de température nodale pour s'approcher de la solution optimale :

$$\{T_{i+1}\} = \{T_i\} + \{\Delta T_i\} \quad (4.97)$$

- 4- Puis on construit de manière itérative une suite d'approximation  $\{T_{i=1,\dots,n}\}$  telle que la norme du vecteur résidu et la norme de la correction soient inférieures à un seuil de tolérance  $\varepsilon$  :

$$\|\{R(T_i)\}\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\{\Delta(T_i)\}\| < \varepsilon \quad (4.98)$$

- 5- Si vrai, l'algorithme converge
- 6- Sinon on passe à l'itération suivante.

**Remarque :** En pratique, le résidu  $\{R(T)\}$  est construit élément par élément par assemblage des résidus élémentaires.

### Méthode itérative de Picard

La méthode itérative de Picard appelée également la méthode de substitution consiste à prendre pour matrice  $[M(T_i)]$  la matrice de conductivité  $[K(T_i)]$ . Après avoir choisi un vecteur  $\{T_0\}$ , on construit de manière itérative une suite d'approximation  $\{T_{i=1,\dots,n}\}$  telle que :

$$\begin{cases} [K(T_{i-1})]\{T_i\} = \{F(T_{i-1})\} \\ \{R(T_n)\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.99)$$

Ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale :

$$\begin{cases} [K(T_{i-1})](\{T_i\} - \{T_{i-1}\}) = \{F(T_{i-1})\} - [K(T_{i-1})]\{T_{i-1}\} \\ [K(T_{i-1})]\{\Delta T_i\} = \{R(T_{i-1})\} \\ \{T_i\} = \{T_{i-1}\} + \{\Delta T_i\} \\ \{R(T_n)\} = \{0\} \end{cases} \quad (4.100)$$

**Remarque :** La méthode de substitution est une méthode sécante basée sur le principe de la méthode du point fixe. La température initiale du processus est très importante car elle permet une convergence (si convergence il y a) plus ou moins rapide vers la solution cherchée. En effet, dans certains cas, les méthodes sécantes ne convergent pas d'où la préférence pour les méthodes dites tangentes.

### Méthode de Newton-Raphson

La méthode tangente la plus connue est celle de Newton-Raphson, dont il existe de nombreuses variantes (Newton modifié, quasi-Newton...) (Reddy, 2014; Drapier et Fortunée, 2015). La méthode consiste à déterminer la correction de la température à partir d'un développement de Taylor au premier ordre du vecteur résidu  $\{R(T_i)\}$  autour de  $\{T_{i-1}\}$

on obtient:

$$\{R(T_{i-1} + \Delta T_i)\} = \{R(T_{i-1})\} + \left( \frac{\partial \{R(T)\}}{\partial \{T\}} \right)_{i-1} \cdot \{\Delta T_i\} + \dots = \{0\} \quad (4.101)$$

Ce qui implique :

$$-\left( \frac{\partial \{R(T)\}}{\partial \{T\}} \right)_{i-1} \cdot \{\Delta T_i\} = \{R(T_{i-1})\} \quad (4.102)$$

On pose

$$[K_t(T_{i-1})] = - \left( \frac{\partial \{R(T)\}}{\partial \{T\}} \right)_{i-1} \quad (4.103)$$

Ainsi en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, on est amené à résoudre l'équation :

$$[K_t(T_{i-1})] \cdot \{\Delta T_i\} = \{R(T_{i-1})\} \quad (4.104)$$

$[K_t(T_{i-1})]$  s'appelle la matrice tangente de rigidité, elle représente la matrice jacobienne du vecteur résidu  $\{R(T)\}$  par rapport au vecteur  $\{T\}$ .

Ainsi la méthode de Newton-Raphson consiste à prendre pour matrice  $[M(T_i)]$  la matrice tangente de rigidité  $[K_t(T_i)]$ .

**Remarque :** En pratique le calcul de la matrice tangente s'effectue pour chaque élément à chaque itération puis assemblée. La forme élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned} [K_t]^e &= K_{t,ij}^e \equiv - \frac{\partial R_i^e}{\partial T_j^e} = \frac{\partial}{\partial T_j^e} \left( \sum_{m=1}^n K_{im}^e T_m^e - F_i^e \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial K_{im}^e}{\partial T_j^e} T_m^e + K_{im}^e \frac{\partial T_m^e}{\partial T_j^e} \right) - \frac{\partial F_i^e}{\partial T_j^e} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial K_{im}^e}{\partial T_j^e} T_m^e + K_{ij}^e - \frac{\partial F_i^e}{\partial T_j^e} \end{aligned} \quad (4.105)$$

**Remarque:** En pratique, le système d'équations est résolu par la méthode de Newton-Raphson lors des premières itérations, puis par la méthode de Newton-Raphson modifiée dès que l'incrément de températures  $\{\Delta(T_i)\}$  devient suffisamment petit.

La méthode de Newton-Raphson nécessite l'assemblage et la factorisation de la matrice  $[K_t(T_{i-1})]$  à chaque itération, par contre dans la méthode de Newton-Raphson modifiée elle est considérée selon la remarque ci-dessus comme la dernière matrice tangente calculée ou elle est considérée dans certaines références comme la partie linéaire de la matrice  $[K(T)]$ .

### 4.3.10.2 Cas du régime transitoire

Pour les problèmes non linéaires dans lesquels  $[C]$  est constante et  $[K]$  est en fonction de  $\{T\}$ , le système à résoudre dans l'algorithme de résolution est l'équation (4.91) écrite sous forme incrémentale :

$$\left[ \overline{K}_t \right]_{n+1} \{ \Delta T_i \} = \{ \overline{R} \}_{n,n+1} \quad (4.106)$$

Où :

$$\begin{aligned} \{ \overline{R} \}_{n,n+1} = & \Delta t \cdot \left[ (1-\theta) \cdot \{ F \}_n + \theta \cdot \{ F \}_{n+1} - (1-\theta) [K(T_{i-1,n})] \{ T_{i-1,n} \} \right. \\ & \left. - \theta [K(T_{i-1,n+1})] \{ T_{i-1,n+1} \} \right] + [C] \left( \{ T_{i-1,n} \} - \{ T_{i-1,n+1} \} \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

La matrice  $\left[ \overline{K}_t \right]_{n+1}$  s'exprime :

- **Méthode itérative de Picard :**

$$\left[ \overline{K}_t \right]_{n+1} = [C] + \theta \cdot \Delta t \cdot [K(T_{i-1,n+1})] \quad (4.108)$$

**Méthode de Newton-Raphson :**

$$\left[ \overline{K}_t \right]_{n+1} = - \left( \frac{\partial \overline{R}}{\partial T} \right)_{n+1} = [C] + \theta \cdot \Delta t \cdot \left[ [K] + \frac{\partial K}{\partial T} \cdot T - \frac{\partial F}{\partial T} \right]_{i-1,n+1} \quad (4.109)$$

Dans le cas où la densité et la capacité calorifique dépendent de la température, la non-linéarité du problème s'étend à la matrice de capacité  $[C]$  qui s'écrit en fonction de  $\{T\}$ . Pour la méthode de Newton-Raphson, la matrice tangente s'écrit :

$$\left[ \overline{K}_t \right]_{n+1} = - \left( \frac{\partial \overline{R}}{\partial T} \right)_{n+1} = \left( [C] + \frac{\partial C}{\partial T} \cdot T \right) + \theta \cdot \Delta t \cdot \left[ [K] + \frac{\partial K}{\partial T} \cdot T - \frac{\partial F}{\partial T} \right]_{i-1,n+1} \quad (4.110)$$

En pratique le calcul de la matrice tangente s'effectue pour chaque élément à chaque itération puis assemblée. La forme élémentaire de la matrice de capacité ainsi que sa dérivée partielle par rapport à la température s'écrivent respectivement :

$$[C^e(T)] = \int_{V^e} \rho(T) C_p(T) [N^e]^T [N^e] dV \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial [C^e(T)]}{\partial T} = \int_{V^e} \left( \frac{\partial \rho(T)}{\partial T} C_p(T) + \frac{\partial C_p(T)}{\partial T} \rho(T) \right) [N^e]^T [N^e] dV \quad (4.112)$$

**Algorithme semi-implicite (Newton-Raphson ou Picard)** (Dhatt et Touzot, 1984)

- 1- Choisir la précision  $\varepsilon$ , le pas  $\Delta t$ ,
- 2- l'instant  $t=t_0$
- 3- Pas de temps :  $t = t + \Delta t$
- 4- Choisir la température initiale  $\{T_{0,n+1}\} = \{T_n\}$
- 5-  $i=0$
- 6 – Pour chaque itération  $i = i+1, \dots$ 
  - a- Pour chaque élément :
    - calculer et assembler de  $\{\bar{R}\}_{n,n+1}$  et  $[K_t]_{n+1}$
  - b- Résoudre  $[K_t]_{n+1} \{\Delta T_i\} = \{\bar{R}\}_{n,n+1}$
  - d- Mettre à jour la température  $\{T_{i,n+1}\} = \{T_{i-1,n+1}\} + \{\Delta(T_i)\}$
  - e- Vérifier la convergence : le calcul s'arrête si :

$$\sqrt{\{\bar{R}_i\}^T - \{\bar{R}_i\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\{\bar{R}_i\}|^2} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\{\Delta T_i\}^T - \{\Delta T_i\}}}{\sqrt{\{T_i\}^T - \{T_i\}}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\{T_i\} - \{T_{i-1}\}|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\{T_i\}|^2}} < \varepsilon$$

- 7- Fin boucle itération
- 8- Fin boucle sur le pas de temps

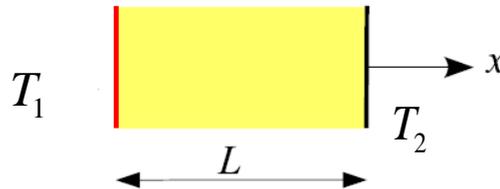
#### 4.3.11 Validation 1D des codes Fortran stationnaire et transitoire non linéaire

##### 4.3.11.1 Validation 1 : Code FEMIDNL Problème Dirichlet/Dérichlet transitoire

Considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.113)$$

Soient 1 et 2 les deux faces d'un mur opaque de surface  $A=1\text{m}^2$  et d'épaisseur  $L=0.18\text{m}$



La face 1 est soumise à une température uniforme  $T(0,t) = T_1 = 500^\circ\text{C}$ .

La face 2 est soumise à une température uniforme  $T(L,t) = T_2 = 300^\circ\text{C}$ .

Soit  $k = k_0(1 + \beta T)$   $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  la conductivité thermique du matériau dépendant

linéairement de la température  $T$  avec  $k_0 = 0.2$  ( $\text{Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ ) et  $\beta = 2 \cdot 10^{-3}$  ( $^\circ\text{C}^{-1}$ ).

La masse volumique  $\rho = 8000$   $\text{kg/m}^3$  et la capacité calorifique  $C_p = 400$   $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ .

La température initiale est  $T(x,0) = 0$   $^\circ\text{C}$ .

**Modélisation 1D :** (Reddy, 2004)

Maillage : 8 éléments linéaires

Durée : 0.1s

Pas de temps : 0.005 s

$\theta = 0.5$  (Crank-Nicholson)

Le **tableau 4-4** représente le résultat obtenu par la simulation de notre code. Les solutions sont tracées graphiquement sur la **figure 4-10**.

On constate sur cette figure que le profil de température évolue progressivement d'une valeur constante  $T(x,0) = 0$  °C à  $t=0$  vers le profil du régime permanent pour un temps supérieure ou égal à 0,1s. En effet, au bout d'un temps suffisamment long, la température n'évolue plus au cours du temps, de sorte que dans l'équation différentielle à résoudre  $\{\dot{T}\} = \{0\}$ . La solution est alors celle obtenue en régime permanent.

Le **tableau 4-5** contient les résultats donnés par le même problème simulé en 2D (maillage 4x2Q9) issus de la littérature (Reddy, 2004). Les erreurs relatives sur chaque solution obtenue sont répertoriées dans le **tableau 4-6**. La représentation graphique des erreurs relatives moyennes (%) commises sur nos résultats est tracée sur la **figure 4-11**. On remarque que l'erreur relative moyenne est inférieure à 5%. En plus elle décroît de façon exponentielle avec l'augmentation du temps. En régime stationnaire l'erreur relative moyenne est de 0,014%. Les résultats sont satisfaisants.

On a tracé également sur la **figure 4-12** l'évolution de la température dans le temps en différentes positions du domaine suivant l'épaisseur. Pour une température initiale de 0°C, toutes les températures des quatre nœuds évoluent dans le temps jusqu'à atteindre un palier caractérisant le régime stationnaire.

**Tableau 4-4** : Distribution de température pour le maillage 1D (8 éléments linéaires)

x	t=0.01	t=0.02	t=0.03	t=0.05	t=0.1	Station
0.0225	434.32	460.65	473.36	478.26	477.54	477.24
0.0450	307.47	397.23	433.22	450.57	453.61	453.94
0.0675	190.95	348.45	403.17	427.29	430.21	430.05
0.0900	125.76	316.39	378.09	403.21	405.44	405.54
0.1125	123.12	295.56	353.40	377.91	380.48	380.34
0.1350	175.67	288.32	331.03	350.96	354.17	354.40
0.1575	255.54	299.69	319.07	327.54	327.81	327.65

**Tableau 4-5** : Distribution de température pour le maillage 2D (4x2Q9) (Reddy, 2004)

x	t=0.01	t=0.02	t=0.03	t=0.05	t=0.1	Station
0.0225	426.96	456.51	471.49	477.91	477.55	477.31
0.045	289.94	386.79	427.71	448.57	453.08	454.03
0.0675	178.69	343.34	401.45	427.63	430.45	430.12
0.090	119.17	311.9	375.4	402.23	404.97	405.57
0.1125	118	289.1	350.39	377.39	380.54	380.32
0.135	167.1	278.42	326.87	350.13	353.99	354.34
0.1575	250.2	293.2	316.46	327.12	327.8	327.58

**Tableau 4-6** : Erreur relative en % entre les deux solutions numériques 1D et 2D

x	t=0.01	t=0.02	t=0.03	t=0.05	t=0.1	Station
0.0225	1.725	0.908	0.396	0.074	0.003	0.014
0.045	6.046	2.700	1.288	0.445	0.118	0.020
0.0675	6.863	1.489	0.429	0.080	0.056	0.015
0.09	5.530	1.439	0.718	0.244	0.117	0.008
0.1125	4.339	2.235	0.858	0.137	0.014	0.005
0.135	5.131	3.556	1.272	0.236	0.051	0.017
0.1575	2.136	2.214	0.825	0.129	0.002	0.021
Erreur relative moyenne %	4.539	2.077	0.827	0.192	0.051	0.014

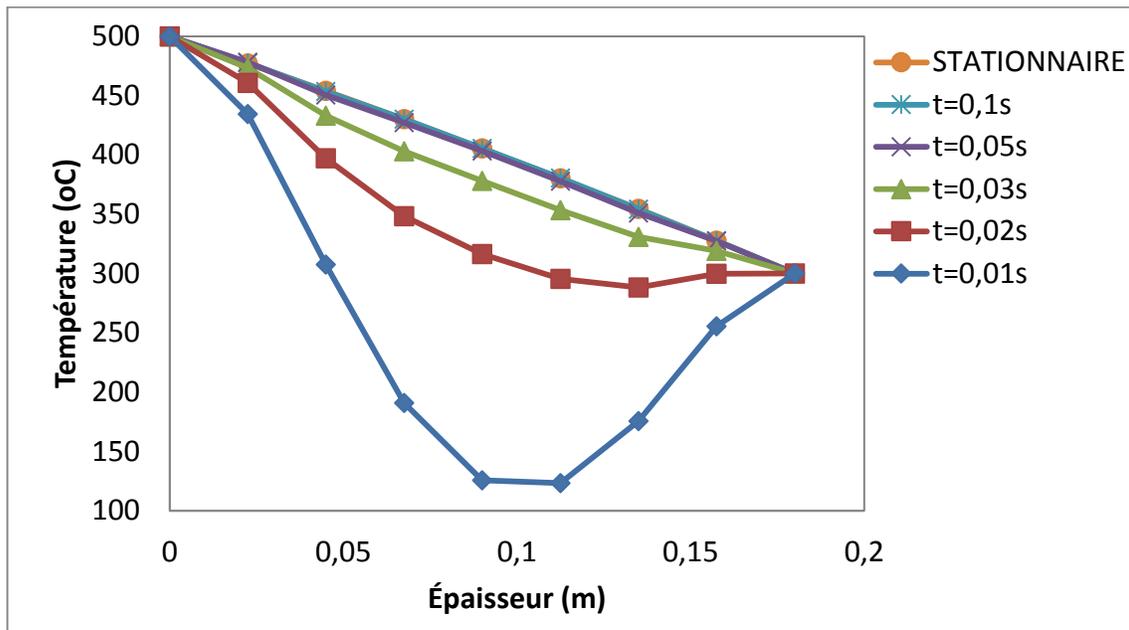


Figure 4-10 : Évolution de la température pour différentes valeurs du temps

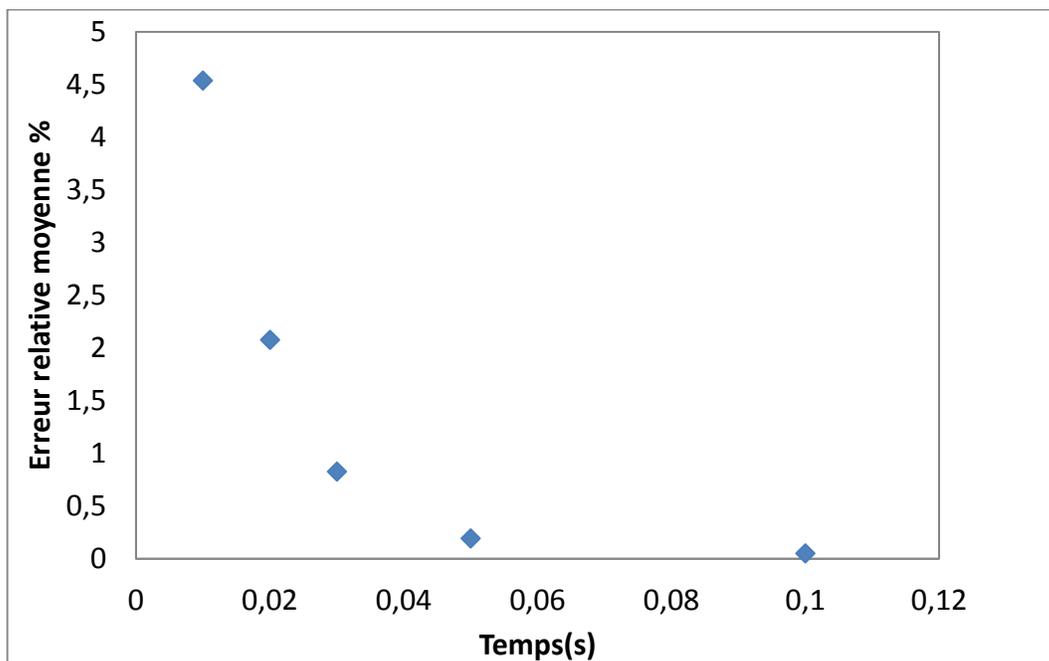
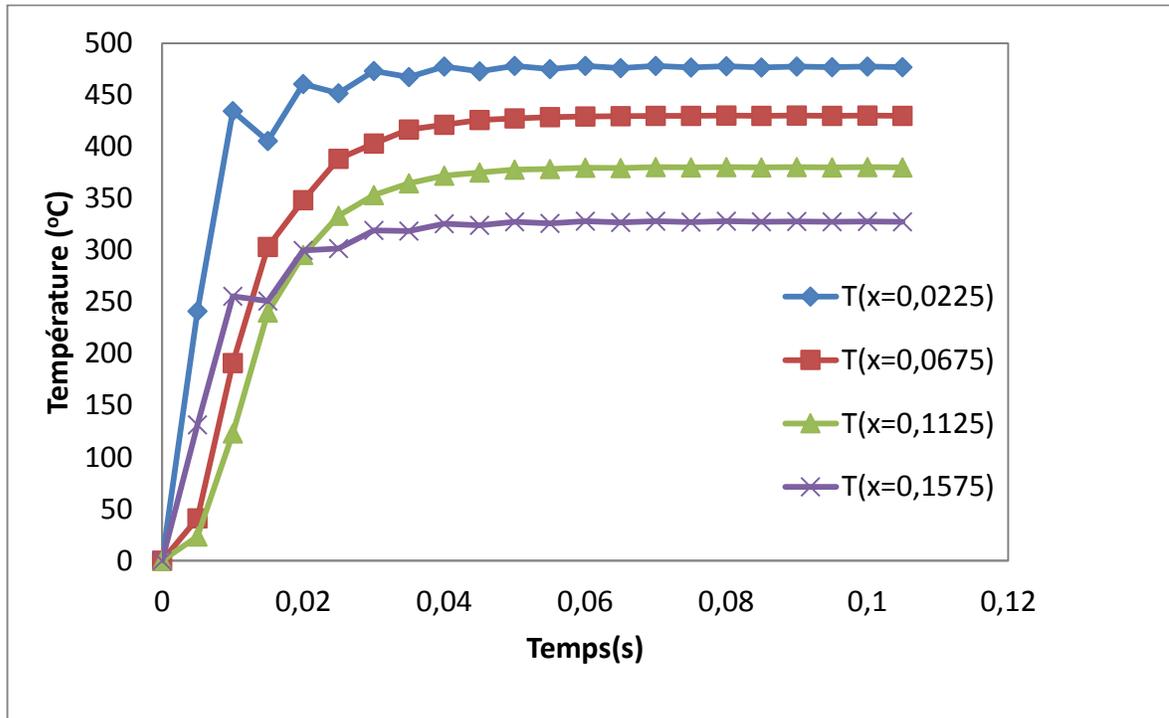


Figure 4-11 : Erreurs relatives moyennes sur les résultats obtenus comparés



**Figure 4-12 :** Évolution de la température pour différentes valeurs de x

#### 4.3.11.2 Validation 2 : Code FEMMOD Couplage conduction-radiation

Le couplage conduction radiation se fait avec les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \rho C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = S_{rad} \\ S_{rad} = \kappa (G(x) - 4n^2 \sigma T^4) \end{cases} \quad (4.114)$$

Dans la littérature, la validation du couplage conduction radiation s'effectue le plus souvent en ramenant les équations concernées sous la forme adimensionnelle.

On pose les variables et paramètres adimensionnelles suivantes :

$$\theta = \frac{T}{T_{ref}} ; N = \frac{\kappa \cdot k}{4\sigma T_{ref}^3} ; H = \frac{G}{4n^2 \sigma T_{ref}^4} ; \tau_L = \kappa \cdot L ; \xi = \frac{kt}{\rho C_p L^2} ; x^* = \frac{x}{L} \quad (4.115)$$

N étant le paramètre de conduction-radiation (nombre de Stark) et  $\tau_L$  l'épaisseur optique.

En substituant ces nombres adimensionnels équation (4.115) dans l'équation (4.114), on en déduit l'équation adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} = \frac{\tau_L^2}{N} [H - \theta^4] \quad (4.116)$$

On pose le terme source adimensionnel suivant :

$$S_{rad}^* = \frac{\tau_L^2}{N} [H - \theta^4] \quad (4.117)$$

Sous la forme linéarisée avec incrémentale le terme source adimensionnelle s'écrit :

$$S_{rad}^* = S_C^* + S_p^* * \theta_p \quad (4.118)$$

Avec

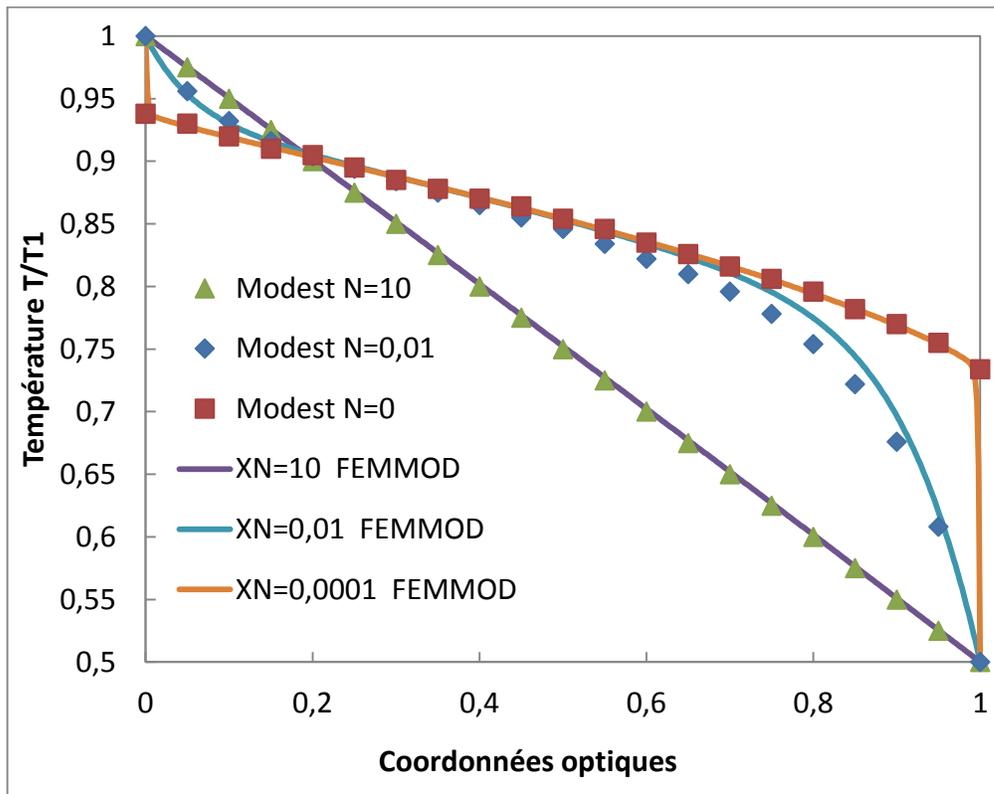
$$S_C^* = \frac{\tau_L^2}{N} [H + 3\theta_p^{*4}] \quad \text{et} \quad S_p^* = -4 \frac{\tau_L^2}{N} \theta_p^{*3}$$

$\theta_p$  : est la température à calculer et  $\theta_p^*$  : la température de l'itération précédente.

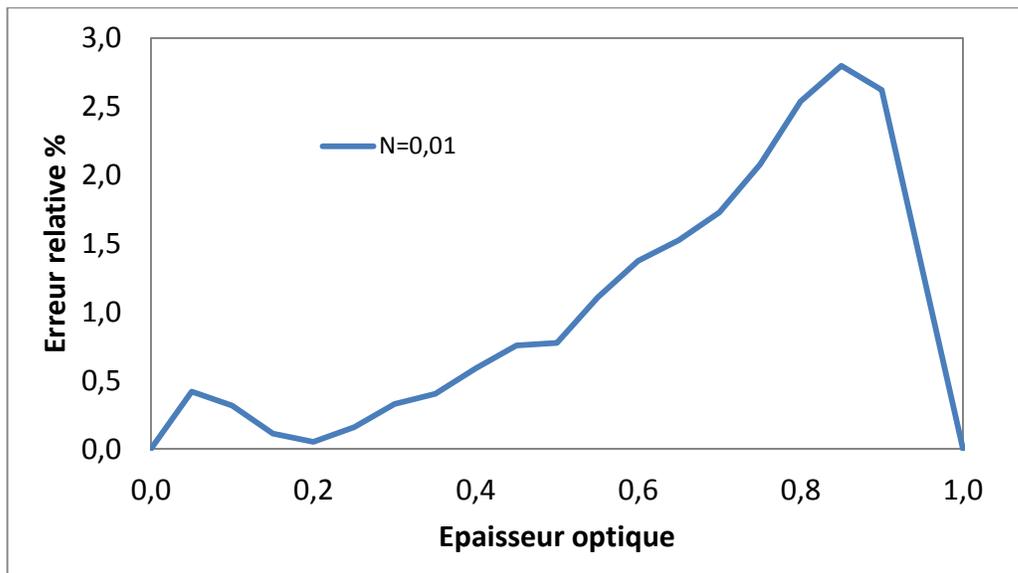
### Cas du régime stationnaire

On considère le problème de deux plaques noires à températures constantes  $T_1=1$  K et  $T_2=0.5$  K confinées entre un milieu gris, émettant, absorbant et non diffusant. L'épaisseur  $L=1$ , le coefficient d'absorptivité  $\kappa=1$  m<sup>-1</sup>, la conductivité thermique  $k=1$  w/m<sup>2</sup>K. On a considéré  $T_{ref} = T_1$ . Dans la **figure 4-13**, on a tracé la distribution de la température adimensionnelle pour trois valeurs du nombre de Stark ( $N=10, 0.01$  et  $0.00001$ ) et comparé les valeurs avec les résultats pris dans (Modest, 2013). Nos solutions sont similaires avec ceux prises dans la littérature. On a appliqué un maillage 1D linéaire, avec 500 éléments et le nombre d'itération minimale pour la MOD est de 500 avec une quadrature  $S_4$ . Les solutions

convergent avec la méthode itérative non linéaire de Picard pour différents nombres d'itérations selon le nombre de Stark (voir **tableau 4-7**). Aussi, les résultats des températures semblent être en bon accord avec la physique du problème. On constate que plus le nombre de Stark est grand ( $N=10$ ), ce qui traduit un phénomène physique proche de la conduction pure, plus le nombre d'itérations est petit. On a en effet 3 itérations pour converger. Pour  $N=0.0001$ , le rayonnement l'emporte sur la conduction. La solution s'apparente avec celle donnée à l'équilibre radiatif pour un problème purement radiatif. Pour ce cas, 28 itérations sont nécessaires pour assurer la convergence. Pour  $N=0,01$ , on est entre la conduction et la radiation, on observe un léger décalage de la température. Ceci pourrait être dû au phénomène de radiation qui introduit de fort gradient de température par rapport à la conduction. Mais l'erreur relative reste inférieure à 3% (voir **Fig. 4.14**). Par contre, pour  $N=10$  l'erreur relative est encore plus petite, inférieure à 0,2 % et pour  $N=0,0001$  elle reste inférieure à 0,45% si on ne tient pas compte des valeurs aux bords (voir **tableau 4-8** et **figure 4-15**).



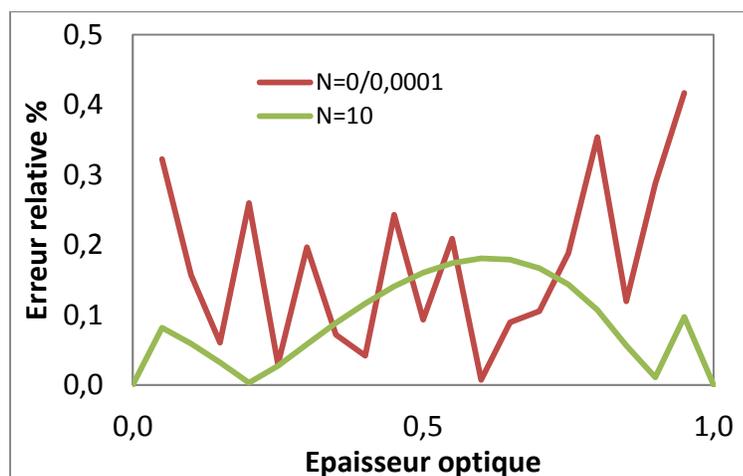
**Figure 4-13 :** Distribution de la température pour différentes valeurs de N



**Figure 4-14 :** Erreur relative sur le calcul de la température pour  $N=0,01$

**Tableau 4-7** : Comparaison des températures adimensionnelles pour  $N=0,01$  ;  $0/0,00001$  et 10 avec celles issues de la référence (REF=Modest, 2013).

Épaisseur optique	FEMMOD N=0.01 (12 itérations)		FEMMOD N=0.0001 (28 itérations)		FEMMOD N=10 (3 itérations)	
	(REF) N=0.01	(REF) N=0	(REF) N=0	(REF) N=10	(REF) N=10	(REF) N=10
0	1	1	1	0.938	1	1
0.05	0.95198	0.956	0.92700	0.93	0.97420	0.975
0.1	0.92904	0.932	0.91855	0.92	0.94944	0.95
0.15	0.91496	0.916	0.91055	0.91	0.92470	0.925
0.2	0.90447	0.904	0.90265	0.905	0.89997	0.9
0.25	0.89543	0.894	0.89473	0.895	0.87524	0.875
0.3	0.88691	0.884	0.88674	0.885	0.85050	0.85
0.35	0.87853	0.875	0.87863	0.878	0.82573	0.825
0.4	0.87009	0.865	0.87036	0.87	0.80093	0.8
0.45	0.86146	0.855	0.86190	0.864	0.77609	0.775
0.5	0.85255	0.846	0.85320	0.854	0.75120	0.75
0.55	0.84323	0.834	0.84423	0.846	0.72626	0.725
0.6	0.83329	0.822	0.83494	0.835	0.70127	0.7
0.65	0.82236	0.81	0.82526	0.826	0.67621	0.675
0.7	0.80976	0.796	0.81514	0.816	0.65109	0.65
0.75	0.79417	0.778	0.80448	0.806	0.62590	0.625
0.8	0.77314	0.754	0.79318	0.796	0.60064	0.6
0.85	0.74221	0.722	0.78106	0.782	0.57532	0.575
0.9	0.69372	0.676	0.76779	0.77	0.54994	0.55
0.95	0.61593	0.608	0.75185	0.755	0.52449	0.525
1	0.5	0.5	0.5	0.734	0.5	0.5



**Figure 4-15** : Erreur relative sur le calcul de température pour  $N=10$  et  $N= 0/0.00001$

**Tableau 4-8** : Erreur relative en % sur le calcul de la température par rapport à la solution de référence (Modest, 2013)

Épaisseur optique	ERREUR relative %		
	N=0.01	N=0/0.0001	N=10
0.000	0.000	6.610	0.000
0.050	0.420	0.322	0.082
0.100	0.318	0.157	0.059
0.150	0.113	0.060	0.033
0.200	0.052	0.260	0.003
0.250	0.160	0.030	0.027
0.300	0.329	0.197	0.058
0.350	0.404	0.072	0.089
0.400	0.588	0.042	0.116
0.450	0.756	0.243	0.141
0.500	0.775	0.093	0.160
0.550	1.107	0.209	0.174
0.600	1.373	0.008	0.181
0.650	1.526	0.089	0.179
0.700	1.728	0.106	0.167
0.750	2.078	0.188	0.144
0.800	2.538	0.354	0.107
0.850	2.799	0.120	0.056
0.900	2.621	0.287	0.011
0.950	1.305	0.417	0.097
1.000	0.000	31.880	0.000

**Calcul de la densité de flux total adimensionnel**

La densité de flux total est donnée par la somme de la densité de flux de conduction et de la densité de flux de radiation

$$q = q_{\text{cond}} + q_{\text{rad}} = \text{constante} \quad (4.119)$$

Elle est constante en régime stationnaire, car sa divergence est nulle d'après le principe de conservation de l'énergie.

Sachant que le flux de conduction est régi par la loi de Fourier par son gradient de température, on peut aussi exprimer le flux de radiation par son gradient de l'irradiation incidente par rapport à son épaisseur optique. La densité de flux totale peut s'écrire alors :

$$q = -k \frac{dT}{dx} + -\frac{1}{3} \frac{dG}{d\tau} \quad (4.120)$$

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes

$$\theta = \frac{T}{T_{ref}} ; N = \frac{\kappa \cdot k}{4\sigma T_{ref}^3}; H = \frac{G}{4n^2\sigma T_{ref}^4}; \tau = \kappa \cdot x \quad (4.121)$$

La densité de flux total s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\Psi = \frac{q}{4\sigma T_{ref}^4} = -4N \frac{d\theta}{d\tau} - \frac{4}{3} \frac{dH}{d\tau} \quad (4.122)$$

En appliquant une différence centrée d'ordre 2, on peut simuler numériquement le flux total par la formulation suivante :

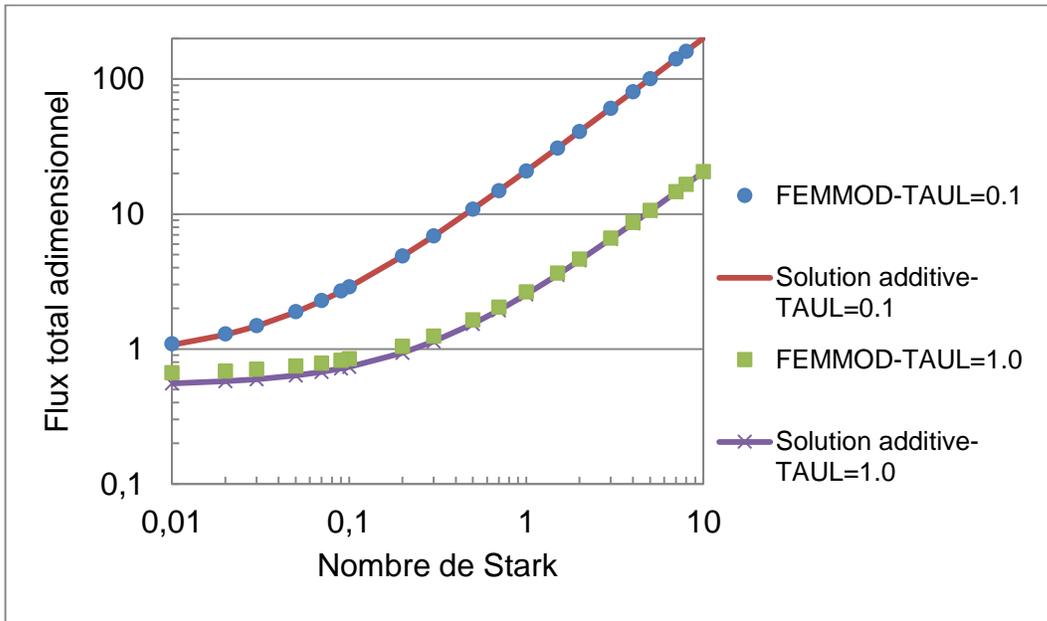
$$\Psi_i = \frac{2N}{\Delta\tau} (\theta_{i-1} - \theta_{i+1}) + \frac{2}{3\Delta\tau} (H_{i-1} - H_{i+1}) \quad (4.123)$$

La solution approximative du flux total pour un milieu gris, absorbant et non émettant confiné entre deux plaques noires à températures constantes  $T_1 = 1$  K et  $T_2 = 0.5$  K est donnée par la solution additive suivante (Modest, 2013):

$$\Psi = \frac{q}{4\sigma T_{ref}^4} \approx \frac{4N}{\tau_L} (1 - \theta_L) + \frac{1 - \theta_L^4}{1 + \frac{3}{4}\tau_L} \quad (4.124)$$

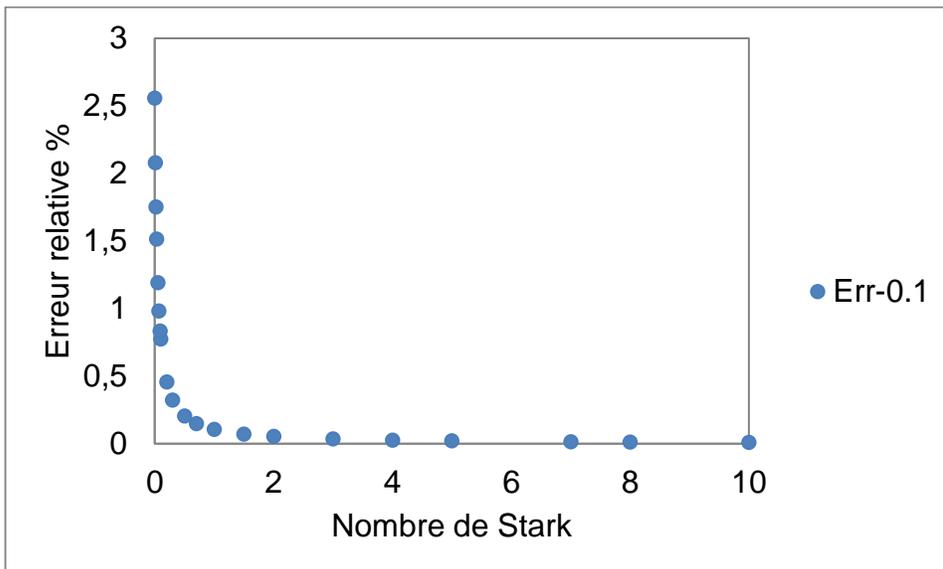
$$\text{avec } \theta_L = \frac{T_2}{T_1} = 0.5 ; \tau_L = \kappa \cdot L$$

On a tracé à l'échelle logarithmique dans la **figure 4-16** le flux total adimensionnel numérique issu de notre code FEMMOD et comparé avec la solution additive.



**Figure 4-16 :** Flux total adimensionnel pour différentes valeurs de  $N$

Pour  $\tau_L = 0.1$ , la solution numérique s'apparente bien avec la solution approximative avec une erreur inférieure à 2.6%. (Voir **Fig. 4-17** et **tableau 4-9**).



**Figure 4-17 :** Erreur relative sur le calcul des flux adimensionnels pour  $\tau_L=0.1$

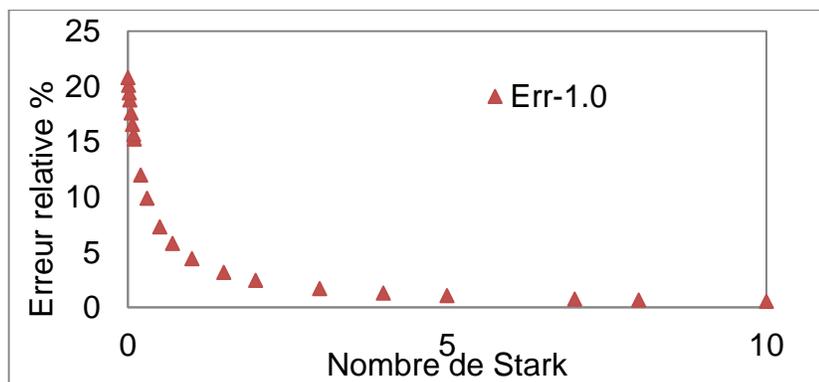
**Tableau 4-9** : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD/ Solution additive pour une épaisseur optique  $\tau_L=0.1$  et erreur relative en % pour différentes valeurs de Nstark

Nstark	FEMMOD TAUL=0.1	Solution additive TAUL=0.1	Erreur relative %
10	200.8944	200.8721	0.0111
8	160.8944	160.8721	0.0139
7	140.8944	140.8721	0.0158
5	100.8944	100.8721	0.0221
4	80.8944	80.8721	0.0276
3	60.8944	60.8721	0.0366
2	40.8944	40.8721	0.0545
1.5	30.8944	30.8721	0.0722
1	20.8944	20.8721	0.1068
0.7	14.8944	14.8721	0.1499
0.5	10.8944	10.8721	0.2051
0.3	6.8944	6.8721	0.3244
0.2	4.8944	4.8721	0.4576
0.1	2.8944	2.8721	0.7762
0.09	2.6944	2.6721	0.8343
0.07	2.2944	2.2721	0.9812
0.05	1.8944	1.8721	1.1909
0.03	1.4944	1.4721	1.5145
0.02	1.2944	1.2721	1.7526
0.01	1.0944	1.0721	2.0795
0.00001	0.8946	0.8723	2.5558

Par contre cette erreur relative devient inférieure à 21% pour  $\tau_L = 1.0$  (voir **tableau 4-10** et **Fig. 4-18**). On constate également que plus le nombre de Stark est petit plus l'erreur relative augmente.

**Tableau 4-10** : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD/ Solution additive pour une épaisseur optique  $\tau_L=1.0$  et erreur relative en % pour différentes valeurs de Nstark

Nstark	FEMMOD TAUL=1.0	Solution additive TAUL=1.0	Erreur relative %
10	20.6478	20.5357	0.5458
8	16.6478	16.5357	0.6779
7	14.6478	14.5357	0.7711
5	10.6478	10.5357	1.0639
4	8.6478	8.5357	1.3132
3	6.6478	6.5357	1.7151
2	4.6478	4.5357	2.4714
1.5	3.6478	3.5357	3.1705
1	2.6478	2.5357	4.4209
0.7	2.0478	1.9357	5.7914
0.5	1.6478	1.5357	7.3
0.3	1.2478	1.1357	9.8707
0.2	1.0478	0.9357	11.979
0.1	0.8477	0.7357	15.2279
0.09	0.8277	0.7157	15.6517
0.07	0.7877	0.6757	16.5733
0.05	0.7477	0.6357	17.6081
0.03	0.7076	0.5957	18.7762
0.02	0.6875	0.5757	19.4168
0.01	0.6674	0.5557	20.0967
0.00001	0.6471	0.5357	20.7843



**Figure 4-18** : Erreur relative sur le calcul des flux adimensionnels pour  $\tau_L=1.0$

Aussi, nous avons confronté nos solutions numériques du calcul des flux adimensionnels totaux FEMMOD avec deux solutions numériques issues de la littérature (voir **tableau 4-11**). Pour les quatre valeurs du nombre de Stark  $N=0.01; 0.1, 1$  et  $10$  nos solutions sont presque similaires à celles données par celles de Viskanta (1965) [REF 1] et de Siegel et Howel, (2001) [REF 2].

**Tableau 4-11** : Comparaison des flux adimensionnels totaux FEMMOD avec les modèles numériques de Viskanta et de Siegel pour  $\tau_L=0.1$  et  $\tau_L=1.0$  et  $N_{\text{stark}}=0.01 ; 0.1$  et  $1.0$

	[REF 1]	[REF 2]	FEMMOD	[REF 1]	[REF 2]	FEMMOD
N	$\tau_L = 0.1$			$\tau_L = 1.0$		
0.01	1.07	1.074	1.0944	0.6	0.596	0.6674
0.1	2.88	2.88	2.8944	0.8	0.798	0.8477
1	20.88	20.88	20.8944	2.6	2.6	2.6478
10	200.88	200.88	200.894	20.6	20.6	20.6478

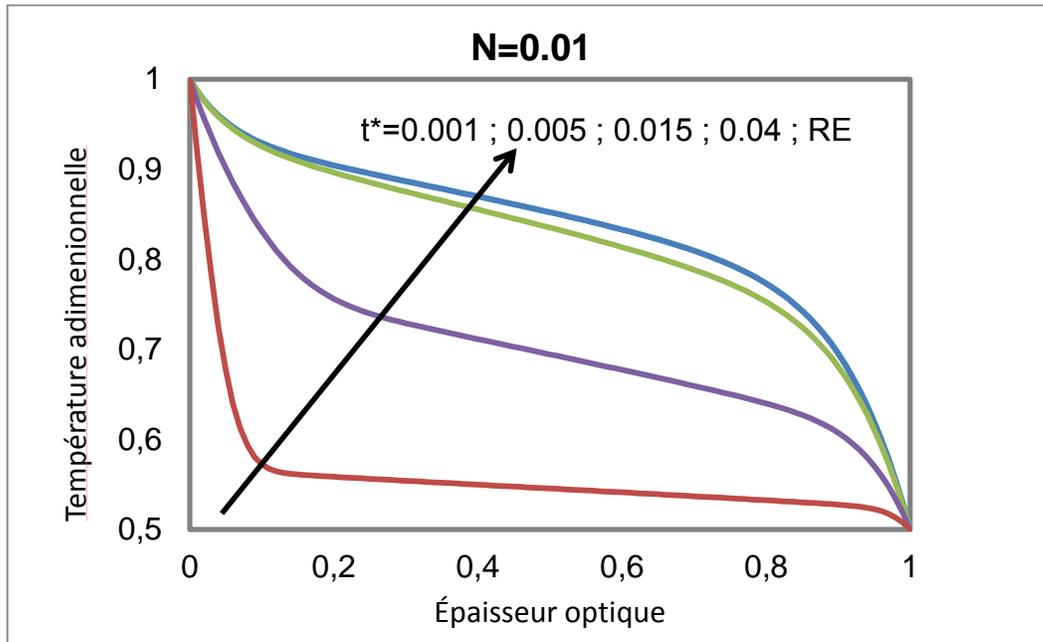
### Cas du régime transitoire

On considère le même problème que précédemment mais pris en régime transitoire de deux plaques noires à températures constantes  $T_1=1$  K et  $T_2=0.5$  K confinées entre un milieu gris, émettant, absorbant et non diffusant. L'épaisseur  $L=1$ , le coefficient d'absorptivité  $\kappa=1$   $\text{m}^{-1}$ , la conductivité thermique  $k=1$   $\text{w/m}^2\text{K}$ . On considère  $T_{ref}=T_1$ . La température initiale  $T_{\text{init}}=T_2=0.5$  K. Le pas de temps adimensionnel est  $\Delta t^*=10^{-4}$ . Le critère de convergence sur la température pour atteindre le régime stationnaire à partir du régime transitoire est de  $10^{-5}$ .

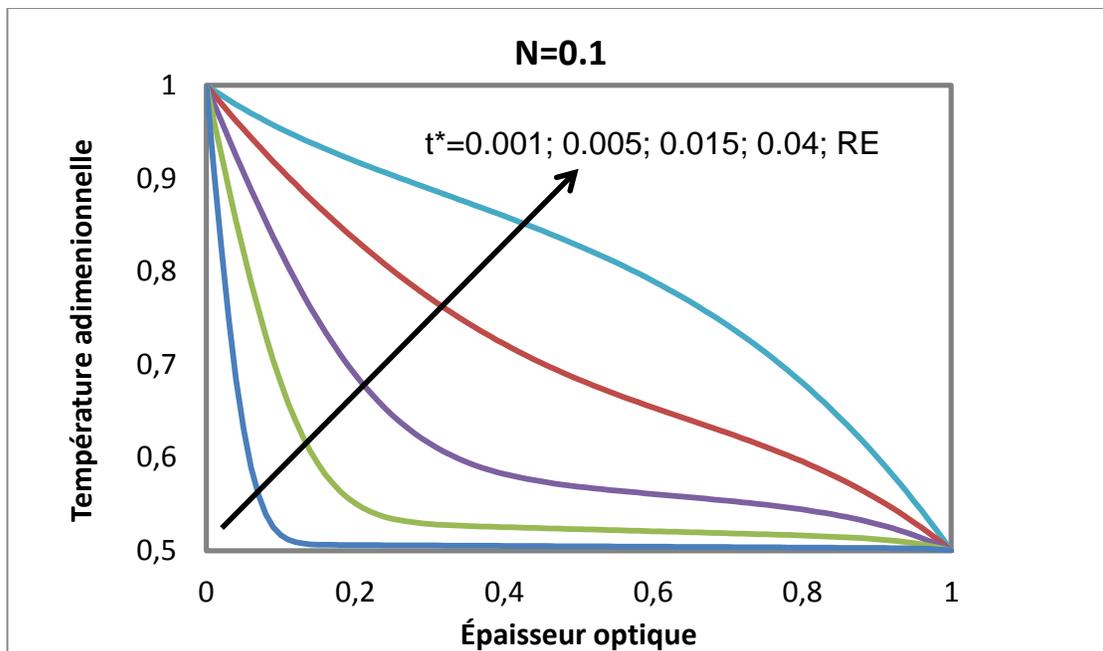
Dans les **figures 4-19, 4-20 et 4-21**, on a tracé l'évolution de la température adimensionnelle pour différents temps adimensionnels pour respectivement les trois valeurs du nombre de Stark  $N=0.01, 0.1$  et  $1.0$ . Nos solutions sont similaires avec celles données dans la littérature (Chaabane et al., 2011). (Chaabane et al., 2011) ont utilisé un maillage 2D avec deux méthodes de couplage des lattices de Boltzman (LBM-CVFEM et LBM\_CDM). Pour notre méthode FEMMOD, on a appliqué un maillage 1D linéaire, avec 100 éléments et le nombre d'itération minimale pour la MOD est de 500 avec une quadrature S4.

Pour  $N=0.01$ , le nombre d'itérations (de pas de temps) pour atteindre le régime établi (courbe RE) (avec  $\Delta t^*=10^{-4}$ ) est de 342 ce qui correspond à un temps adimensionnel de  $t^*=0.0342$ . C'est la raison pour laquelle dans la **figure 4-19**, la courbe du régime stationnaire (courbe RE) est confondue à la courbe  $t^*=0.04$ . Pour ces courbes (figure 4-19) les paliers sont plus prolongés montrant l'influence de la radiation. Les courbes dans l'évolution du temps tendent vers le régime établi (RE).

Pour  $N=0.1$ , le nombre d'itérations (de pas de temps) pour atteindre le régime stationnaire (avec  $\Delta t^*=10^{-4}$ ) est 1751 ce qui correspond à un temps adimensionnel de  $t^*=0.1751$ . Dans la **figure 4-20**, on remarque que à  $t^*=0.04$ , le régime établi n'est pas encore atteint, ce qui explique la raison pour laquelle les courbes ne sont plus confondues comme c'était le cas pour  $N=0.01$ .



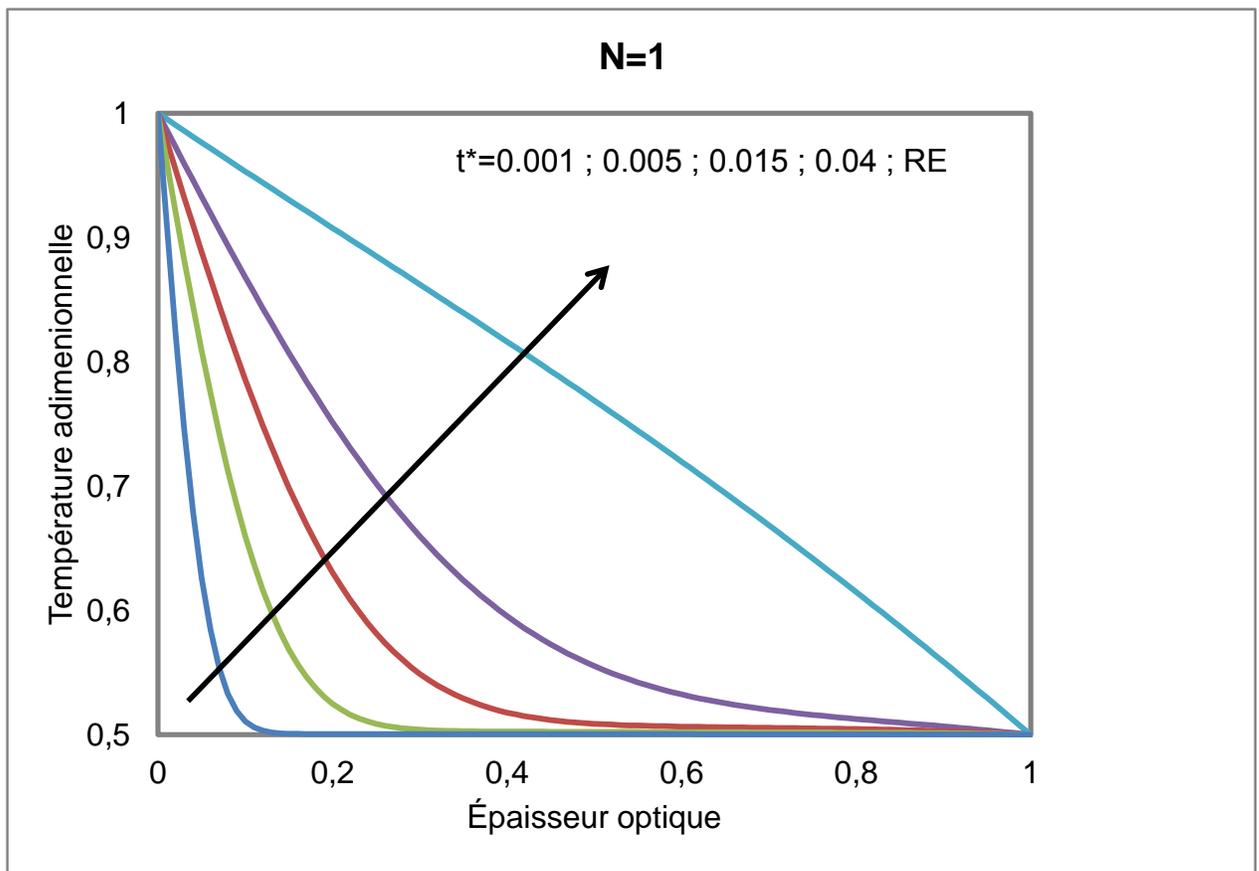
**Figure 4-19 :** Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark  $N=0.01$



**Figure 4-20 :** Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark  $N=0.1$

Pour ces courbes (**figure 4-20 et 4-21**) l'effet du rayonnement est moins accentué, le temps pour atteindre le régime établi est plus long.

Pour  $N=1.0$ , (avec  $\Delta t^*=10^{-4}$ ), le nombre de pas de temps pour atteindre le régime stationnaire est 3454. Ce qui correspond à un temps adimensionnel de  $t^*=0.3454$ .



**Figure 4-21 :** Comparaison des températures adimensionnelles pour différents temps adimensionnels jusqu'au stationnaire avec le nombre de Stark  $N=1.0$ .

À titre indicatif, on a dressé sur le **tableau 4-12** une comparaison des nombres d'itérations de pas de temps avant d'atteindre le régime stationnaire pour notre modèle FEMMOD vis-à-vis des modèles LBM-CVFEM et LBM-CDM (Chaabane et al., 2011). Dans l'ensemble,

notre modèle FEM1D/MOD1D présente une bonne évolution du champ de température.

Développons maintenant le modèle hybride FEM3D/MOD1D.

**Tableau 4-12** : Comparaison des nombres d'itérations avant d'atteindre le régime stationnaire pour trois différents modèles numériques

N	LBM-CDM (Chaabane et al.,2011)	LBM-CVFEM (Chaabane et al.,2011)	FEMMOD
0.01	642	670	342
0.1	1682	1772	1751
1	1894	2078	3454

#### 4.3.11.3 Validation 3 : Code FEM 3D et 1D cas d'une plaque en absence de source radiative.

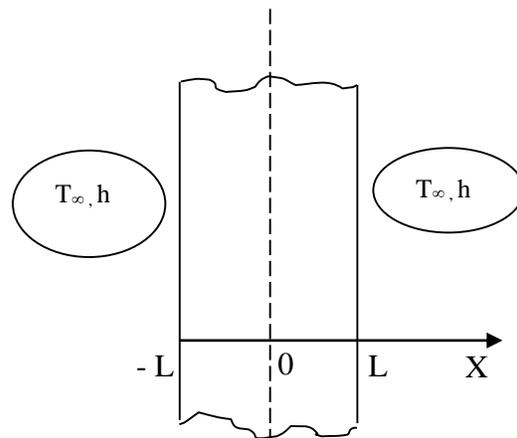
Dans cette partie, on s'intéresse à la validation de notre programme éléments finis 3D. Comme matériau, on considère une plaque de PET. Deux situations avec des conditions aux limites spécifiques sont étudiées. Une comparaison est faite avec les solutions analytiques 1D et leurs solutions numériques éléments finis 1D correspondantes.

Cette étude est menée dans le but de s'assurer de la validité du code de calcul. Elle est réalisée à partir de l'équation de chaleur transitoire 1D, sans source interne et sans radiation à travers une plaque plane infinie (voir **Fig. 4-22**) d'un matériau PET d'épaisseur  $2L$ , donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{k}{\rho \cdot C} \quad (4.125)$$

avec  $T$  : la température,  $t$  : le temps

$x$  : variable de position suivant l'axe  $X$



**Figure 4-22 :** Chauffage d'une plaque plane infinie

L'absorption d'énergie dans le matériau thermoplastique PET est négligée. La plaque à l'instant initial a une température uniforme  $T_{ini}$ . Elle est plongée dans un fluide à la température  $T_{\infty} \neq T_{ini}$ .

Les conditions aux limites de Newton (conditions aux limites de troisième genre) sont considérées. Elles traduisent l'échange de chaleur par convection sur les surfaces exposées (Fig.4-22) s'exprimant par :

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\pm L} = h(T - T_{\infty}) \quad (4.126)$$

où

$h$  : le coefficient de convection

$k$  : la conductivité thermique du PET

En tenant compte de la symétrie géométrique, on impose les conditions aux limites suivantes : un flux nul pour  $x = 0$  (milieu de la plaque) et un flux de convection à l'autre extrémité de la surface de la plaque ( $x=L$ ).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T - T_{\infty}) \quad (4.127)$$

La solution analytique de l'équation (4.125) associée au problème posé s'écrit (Leontiev, 1985) :

$$T_{\infty} - T = (T_{\infty} - T_{ini}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n_i)}{n_i + \sin(n_i) \cos(n_i)} \cdot \cos(n_i \cdot \frac{x}{L}) \cdot \exp^{-n_i^2 Fo} \quad (4.128)$$

Les propriétés thermophysiques du PET ainsi que les propriétés géométriques et de simulation sont fournies au **tableau 4-13**.

**Tableau 4-13** : Propriétés thermophysiques du PET

$\rho$ (Densité) [kg·m <sup>-3</sup> ]	1400
C (Capacité calorifique) [J kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	1750
k (Conductivité thermique) [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	0.29
$\alpha$ (Diffusivité thermique) [m s <sup>-2</sup> ]	1.183·10 <sup>-7</sup>
L (Demi-épaisseur de la plaque) [m]	0.0015
h (Coefficient de convection) [W °C <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> ]	10
$T_{\infty}$ (Température du milieu ambiant) [°C]	25
$T_{ini}$ (Température initiale de la plaque) [°C]	100
$\Delta T$ (Pas d'intégration temporel) [s]	0.05
N (Nombre d'éléments suivant l'épaisseur)	10

On considère pour le maillage éléments finis 1D, des éléments linéaires et pour le maillage 3D, des éléments hexaédriques linéaires. Afin de s'assurer de la bonne connectivité des éléments pour le modèle 3D, deux maillages (maillage 1 et maillage 2) sont considérés (**Fig.4.23** et **Fig.4.24**).

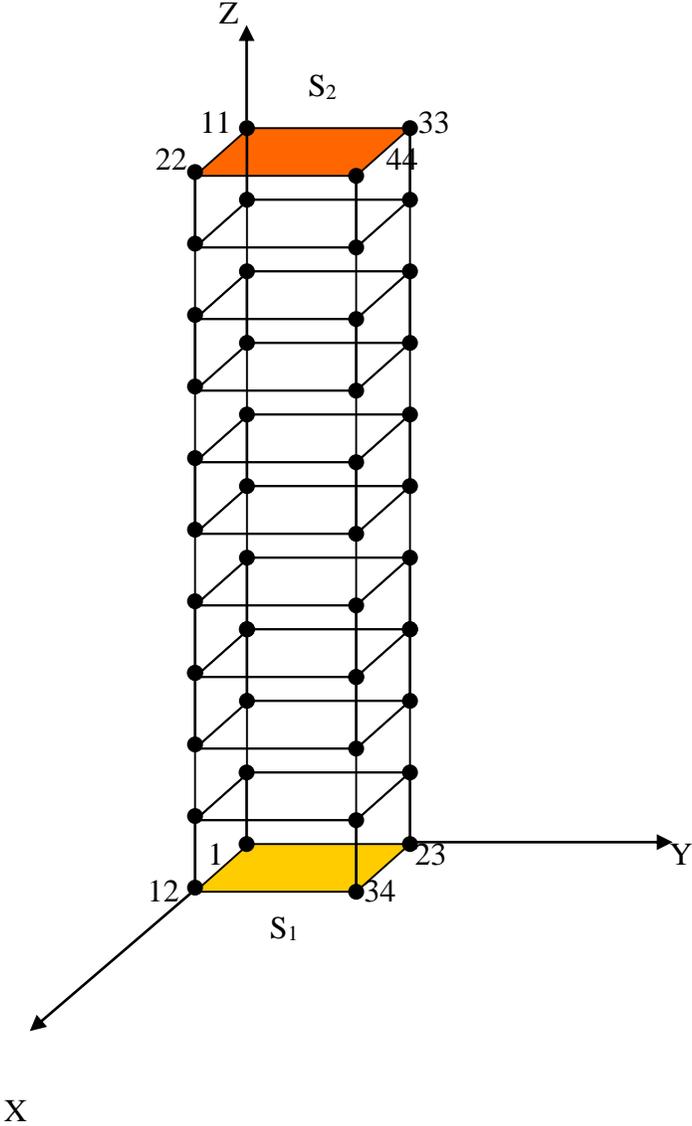
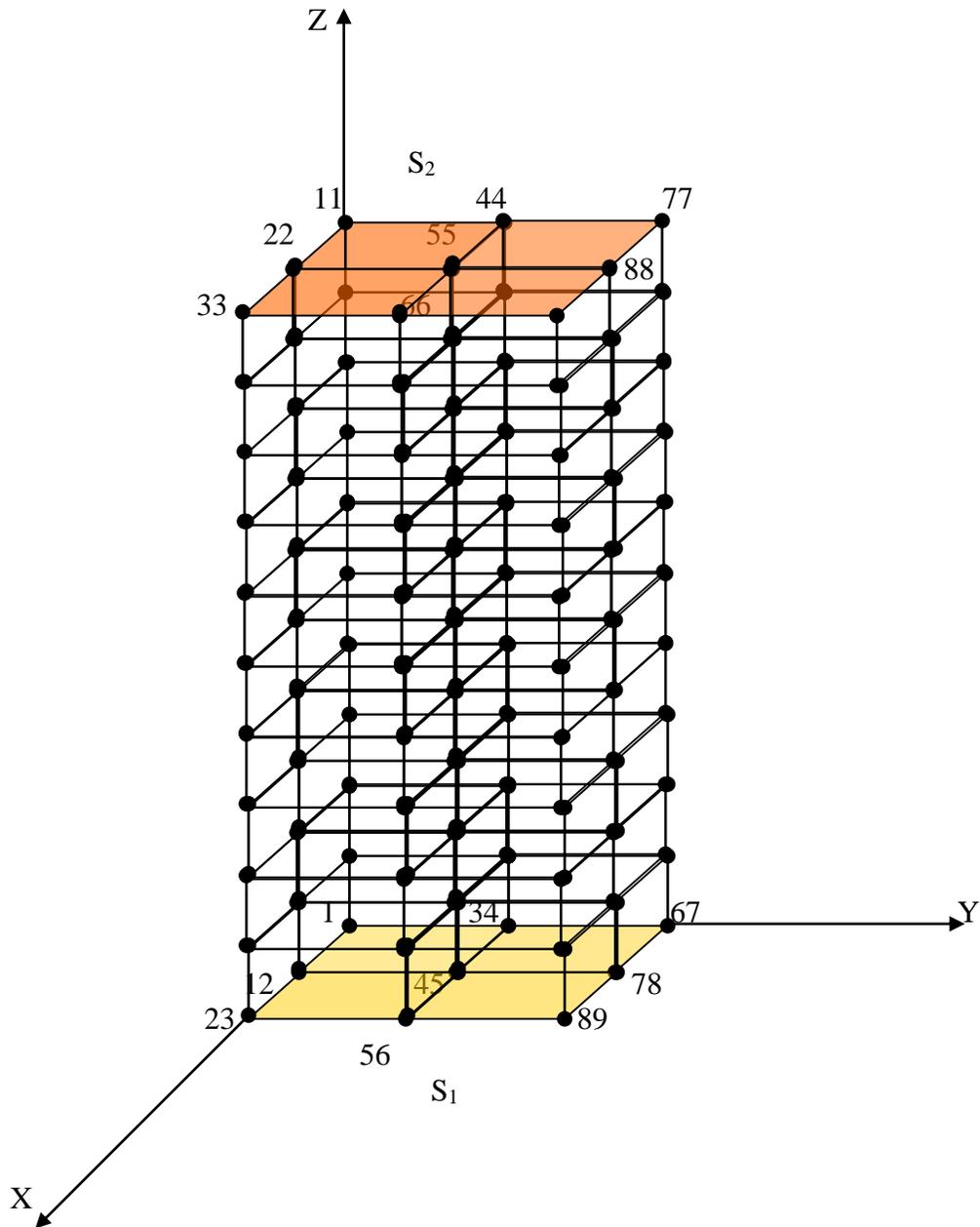
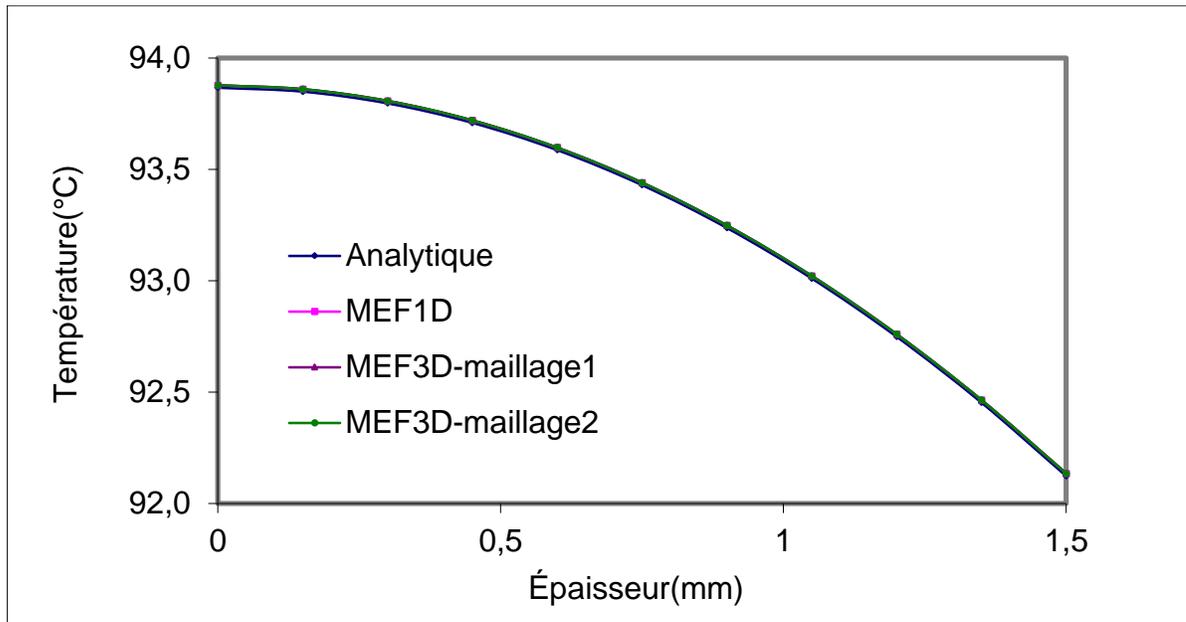


Figure 4-23 : Maillage 1 (1x1x10) par MEF 3D



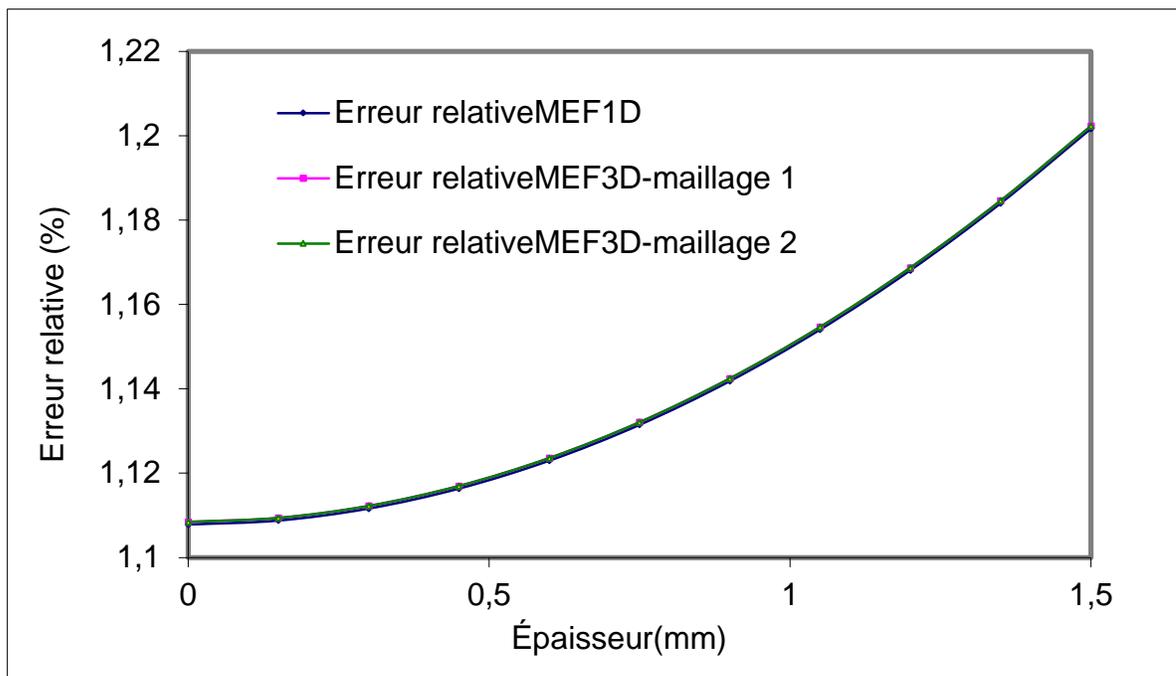
**Figure 4-24 :** Maillage 2 (2x2x10) par MEF 3D

Dans la **figure 4.25**, les résultats numériques et analytiques obtenus pour le profil de température à travers l'épaisseur à l'instant  $t = 35$  s sont présentés.

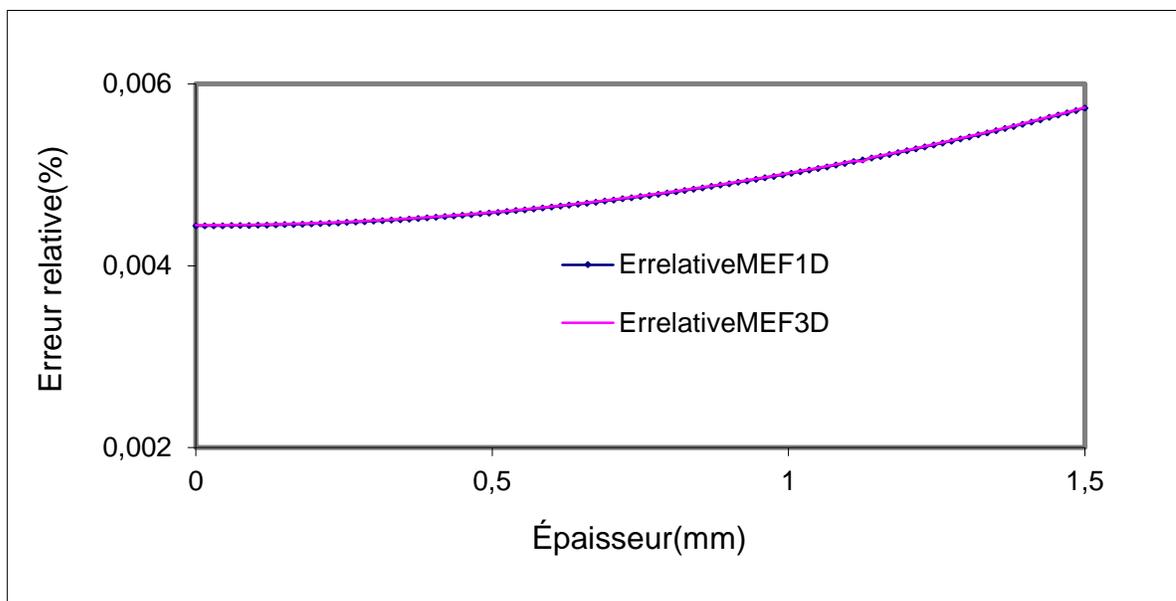


**Figure 4-25** : Validation des solutions MEF1D et MEF3D (N=10, t=35s)

Dans les deux modèles numériques 1D et 3D, on observe une excellente corrélation entre les résultats numérique et analytique. Le maximum des erreurs relatives entre les solutions analytique et numérique 1D et 3D reste inférieur ou égal à 1.2% pour 10 éléments suivant l'épaisseur (**Fig.4.26**) et inférieur ou égal à 0.006% pour 100 éléments suivant l'épaisseur (**Fig.4.27**). Par conséquent, plus l'épaisseur d'un élément fini est réduite en augmentant le nombre d'éléments suivant l'épaisseur, plus la solution numérique converge avec une erreur relative presque nulle.



**Figure 4-26** : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D (N=10, t=35s)



**Figure 4-27** : Précision des calculs des solutions MEF1D et MEF3D (N=100, t=35s)

#### 4.4 VALIDATION NUMÉRIQUE DE LA RÉCHAUFFE D'UNE PRÉFORME PET

##### 4.4.1 Cas linéaire : Couplage MEF3D et Beer-Lambert 1D

Pour ce qui est de la validation numérique, nous avons considérés un milieu semi infini en PET soumis à une densité de flux radiatif incident uniforme  $q_0$ . Les frontières du milieu semi transparent sont considérées adiabatiques. Les propriétés thermophysiques et géométriques sont fournies dans le **tableau 4-14**.

**Tableau 4-14** : Propriétés thermophysiques et conditions initiales du PET

Densité, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1400
Conductivité thermique, $k$ (W/m/°C)	0.29
Chaleur spécifique, $C_p$ (J/kg/°C)	1750
Coefficient d'absorption, $\kappa$ (m <sup>-1</sup> ) pour $\lambda$ compris dans l'intervalle [0.2–10] $\mu\text{m}$	2660
Épaisseur, $h_0$ (mm)	10
Flux, $q_0$ (W/m <sup>2</sup> )	10000
Température initiale, $T$ (°C)	25
Temps de chauffage, $t$ (sec.)	35

La solution de ce modèle est obtenue par la résolution de l'équation de la chaleur 3D, en considérant l'atténuation d'une source volumique ( $q_0'' \cdot \kappa$ ) en fonction de l'épaisseur ( $z$ ), selon la loi de Beer-Lambert.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \nabla \left( \frac{q_0'' \cdot e^{-A \cdot z}}{k} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.129)$$

La densité  $q_0''$  est supposée être constante. Les conditions aux limites et initiales sont :

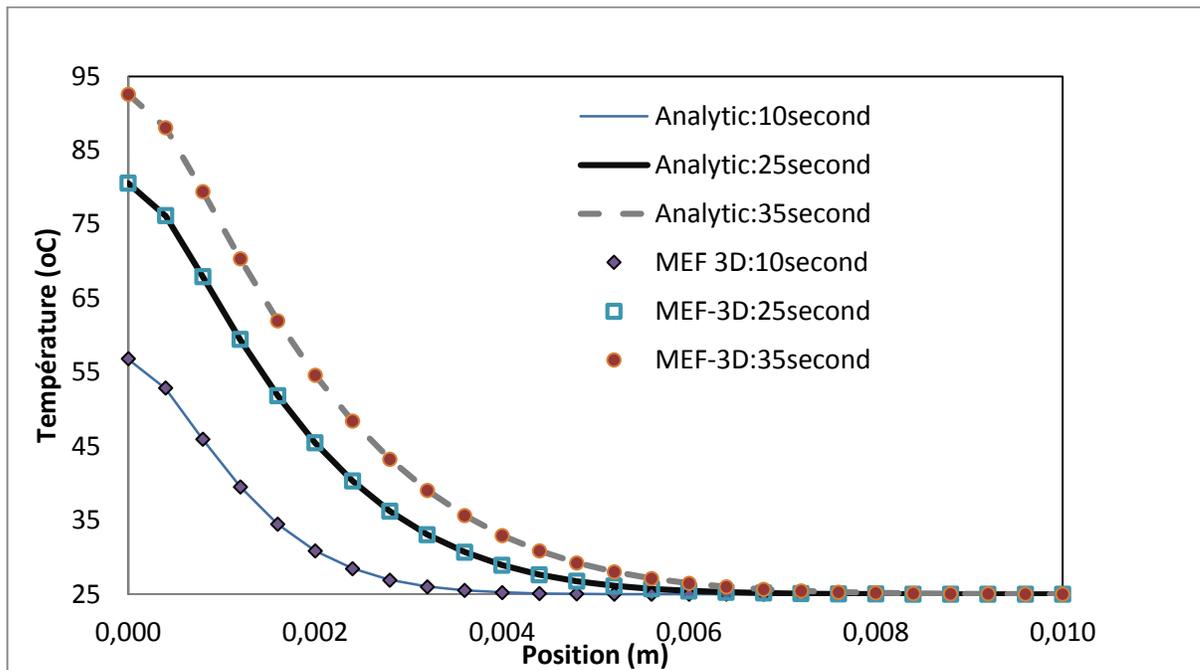
$$T(z, t = 0) = T_{ini}; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = q_0''; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T(z, t) = T_{ini} \quad (4.130)$$

L'équation de Laplace monodimensionnelle qui caractérise ce transfert radiatif de chaleur est résolue analytiquement à l'aide des transformées de Laplace. L'évolution de la température  $T(z, t)$  à travers la profondeur  $z$  du milieu semi transparent est donnée par la solution analytique suivante (De Vriendt, 1984) :

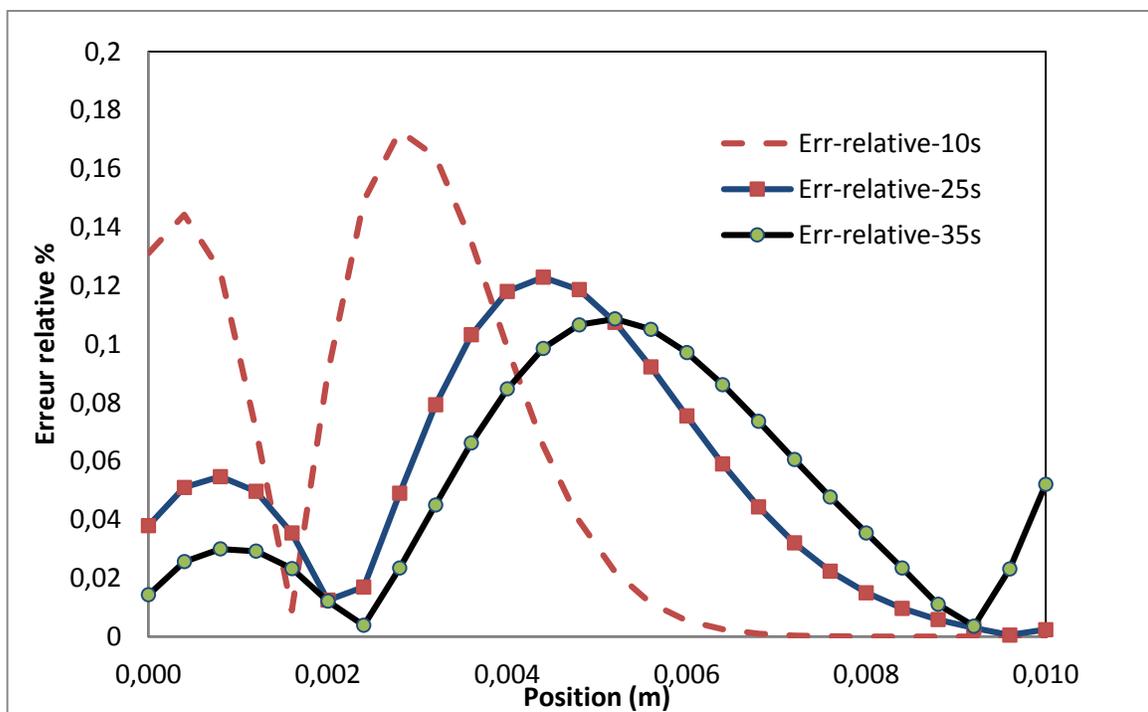
$$T(z, t) = T_0 - \frac{q_0}{k\kappa} e^{-\kappa z} + 2 \frac{q_0}{k} \sqrt{\alpha t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \frac{q_0}{2k\kappa} e^{\kappa^2 \alpha t + \kappa z} \operatorname{erfc} \left( \kappa \sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + \frac{q_0}{2k\kappa} e^{\kappa^2 \alpha t - \kappa z} \operatorname{erfc} \left( \kappa \sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (4.131)$$

Dans le cas d'une feuille de PET considérée semi-infinie, l'épaisseur 10 mm est suffisamment grande pour que la perturbation du flux appliquée sur la face supérieure ne soit pas ressentie par la face inférieure.

Dans la **figure 4-28** (Erchiqui, Hamani, et Charette, 2009), on a représenté les résultats analytiques et numériques (cas MEF 3D avec le maillage 1 à 25 éléments suivant l'épaisseur) obtenus de l'évolution de la température aux instants  $t = 10$  s,  $t = 25$  s et  $t = 35$  s pour une profondeur de 10mm. Dans les trois cas, nous remarquons que l'erreur relative entre les résultats numériques et analytiques est inférieure à 0.18 % (Hamani et al, 2009) (voir **Fig. 4-29**).



**Figure 4-28 :** Comparaison Solution Analytique/MEF3D, épaisseur de 10 mm



**Figure 4-29 :** Erreur relative entre Analytique/MEF3D, épaisseur de 10 mm

#### 4.4.2 Cas non-linéaire : Couplage MEF1D avec MOD1D

Considérons le problème précédent en substituant dans le terme source la formulation de Beer-Lambert par la divergence du flux radiatif déterminée par la MOD1D. Cela revient à résoudre numériquement le couplage non-linéaire de l'ECE par la MEF et de l'ETR par la MOD1D. Les équations différentielles du système à résoudre sont données par les équations (4-53 à 4-58) déjà préétablies. L'équation de conservation de l'énergie en une dimension s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \kappa \left[ 4n^2 \sigma T^4(x,t) - 2\pi \int_{-1}^1 I(x,\mu) d\mu \right] \quad (4.132)$$

Dans le cas du chauffage d'une feuille semi transparente en PET semi-transparent exposée à une source infrarouge à haute température, on posera  $q_0(T_s)$  le rayonnement total intercepté par la surface de plastique. Il en résulte, les conditions aux limites radiatives pour la résolution de l'ETR sur les faces du haut et du bas supposées exposées aux émetteurs infrarouges :

$$I(x=0) = \varepsilon_B n_B^2 \frac{q_0(T_B)}{\pi} + 2(1-\varepsilon_B) \int_{-1}^0 I(x=0,\mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu > 0 \quad (4.133)$$

$$I(x=L) = \varepsilon_H n_H^2 \frac{q_0(T_H)}{\pi} + 2(1-\varepsilon_H) \int_0^1 I(x=L,\mu') |\mu'| d\mu', \quad \mu < 0 \quad (4.134)$$

Les équations discrétisées élémentaires par la MEF de Galerkin sont données par les équations (4-72). Le flux incident radiatif  $G = 2\pi \sum_{m=1}^M w_m I^m$  est préalablement calculer par la MOD après itération sur l'intensité radiative à travers l'épaisseur avec l'hypothèse du rayonnement unidirectionnel. La solution est ensuite introduite sous forme d'un vecteur élémentaire ELDIV dans le terme source radiatif élémentaire linéarisé dont une partie

apparaît dans le vecteur élémentaire généralisé et l'autre terme dans la matrice de conductivité élémentaire que nous avons déjà établies dans l'équation (4-72) :

$$\{F_{source}\}^e = \int_{\Omega^e} S_C [N]^T dV; \quad [K_p]^e = - \int_{\Omega^e} S_p [N]^T [N] dV$$

$$\begin{cases} S_C = \kappa(ELDIV + 12\sigma(T^0)^4) \\ S_p = -16\kappa\sigma(T^0)^3 \end{cases}$$

Après assemblage des matrices et vecteurs élémentaires de l'équation (4-72), nous avons appliqué une méthode d'intégration temporelle monopas implicite du type Crank-Nicholson ( $\theta=1/2$ ), inconditionnellement stable. Chaque pas de temps requiert l'application d'une méthode itérative de type Picard résolvant la non-linéarité jusqu'à la convergence sur la température selon un seuil de tolérance sur l'erreur relative de  $10^{-5}$ . Les équations discrétisées sous forme de systèmes algébriques sont résolues par la méthode des systèmes tri-diagonaux T.D.M.A.

Pour la validation du couplage MEF-MOD, nous avons considéré la MEF1D au lieu du 3D car sous l'hypothèse du rayonnement unidirectionnel avec les conditions aux limites adiabatiques aux frontières, les solutions sont identiques. Par contre dans les applications au thermoformage à venir (voir chapitre 5) la MEF3D sera considérée couplée avec la MOD1D.

#### 4.4.3 Simulation du couplage MEF1D / MOD1D

On considère le problème d'une feuille de PET supposée semi-infinie. Les propriétés thermophysiques et les conditions initiales du PET sont données dans le **tableau 4-14**. Dans les **tableaux 4-15**, on a vérifié l'influence de la tolérance sur la répartition de la température à la surface de la préforme PET. On a tabulé les valeurs de la température de la surface

exposée à la source à l'instant  $t = 35$  s pour des maillages linéaires 1D de NEM=25, 50, 100, 200, 400 et 500 éléments à travers une épaisseur de 1 cm et pour différentes densités de flux à la surface de la préforme :  $q_0=5000$  W/m<sup>2</sup> ;  $q_0=10000$  W/m<sup>2</sup> et  $q_0=25000$  W/m<sup>2</sup>. Le coefficient d'absorptivité du PET est supposé constant  $\kappa=2660$  m<sup>-1</sup>.

Pour une tolérance de 0.01, toutes les températures de surface sont obtenues dès la première itération. Les solutions semblent très proches de Beer-Lambert. En effet, à la première itération HR=0, pour NEM=500, la solution initiale obtenue via la MOD converge vers celle de Beer-Lambert (voir **tableau 4-16**).

Or pour tenir compte de l'influence de l'indice de réfraction  $n=1.64$  du milieu PET ainsi que de la température moyenne dans chaque élément au niveau du terme source, il faut nécessairement choisir une tolérance qui permet à la programmation non-linéaire d'effectuer plus d'une itération. Notre choix s'est porté sur la tolérance  $10^{-4}$  qui permet d'effectuer au plus 3 itérations mais les solutions ne diffèrent pas grandement par rapport à celle donnée à la tolérance de  $10^{-4}$ .

Dans la **figure 4-30**, on peut remarquer que quel que soit la valeur du flux, les tolérances de  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  donnent pratiquement les mêmes solutions de température de surface exposée à la source. Toutefois, la tolérance  $10^{-5}$  permet d'effectuer plus de 3 itérations avant de converger à la solution.

**Tableau 4-15 : Influence de la tolérance sur la température de surface à t=35s**

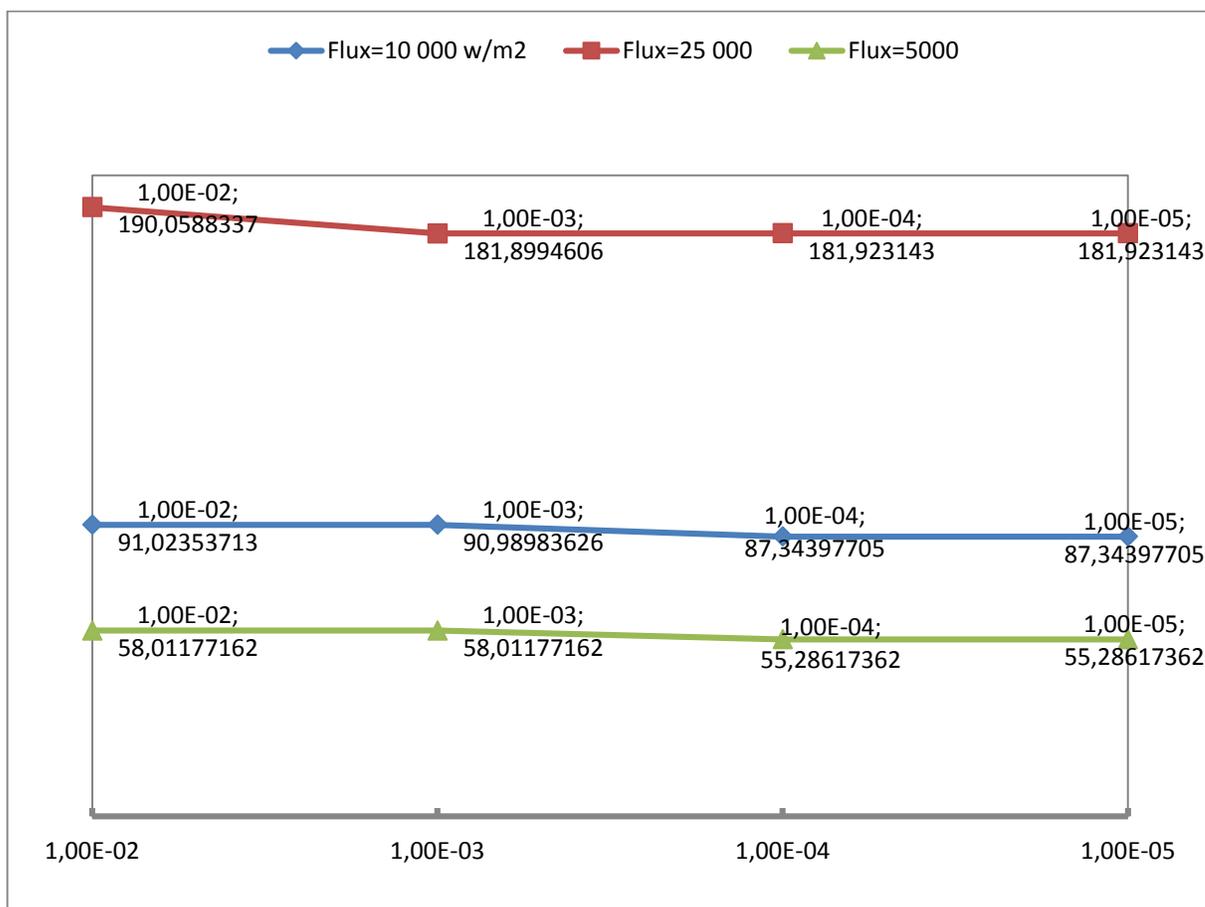
	<b>TOLERANCE</b>	<b>1.00E-02</b>				
	<b>Flux=5000</b>		<b>Flux=10000</b>		<b>Flux=25000</b>	
<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>maillage</b>
<b>1</b>	66.130	<b>1</b>	107.250	<b>1</b>	230.640	<b>25</b>
<b>1</b>	60.610	<b>1</b>	96.220	<b>1</b>	203.060	<b>50</b>
<b>1</b>	58.790	<b>1</b>	92.580	<b>1</b>	193.940	<b>100</b>
<b>1</b>	58.210	<b>1</b>	91.420	<b>1</b>	191.050	<b>200</b>
<b>1</b>	58.030	<b>1</b>	91.070	<b>1</b>	190.170	<b>400</b>
<b>1</b>	58.010	<b>1</b>	91.020	<b>1</b>	190.060	<b>500</b>

	<b>TOLERANCE</b>	<b>1.00E-03</b>				
	<b>Flux=5000</b>		<b>Flux=10000</b>		<b>Flux=25000</b>	
<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>maillage</b>
<b>1</b>	27.902	<b>3</b>	56.580	<b>3</b>	130.307	<b>25</b>
<b>1</b>	60.560	<b>3</b>	66.870	<b>3</b>	143.910	<b>50</b>
<b>1</b>	58.790	<b>3</b>	76.208	<b>3</b>	159.810	<b>100</b>
<b>1</b>	58.210	<b>1</b>	90.882	<b>3</b>	172.180	<b>200</b>
<b>1</b>	58.034	<b>1</b>	91.015	<b>3</b>	180.130	<b>400</b>
<b>1</b>	58.012	<b>1</b>	90.990	<b>2</b>	181.900	<b>500</b>

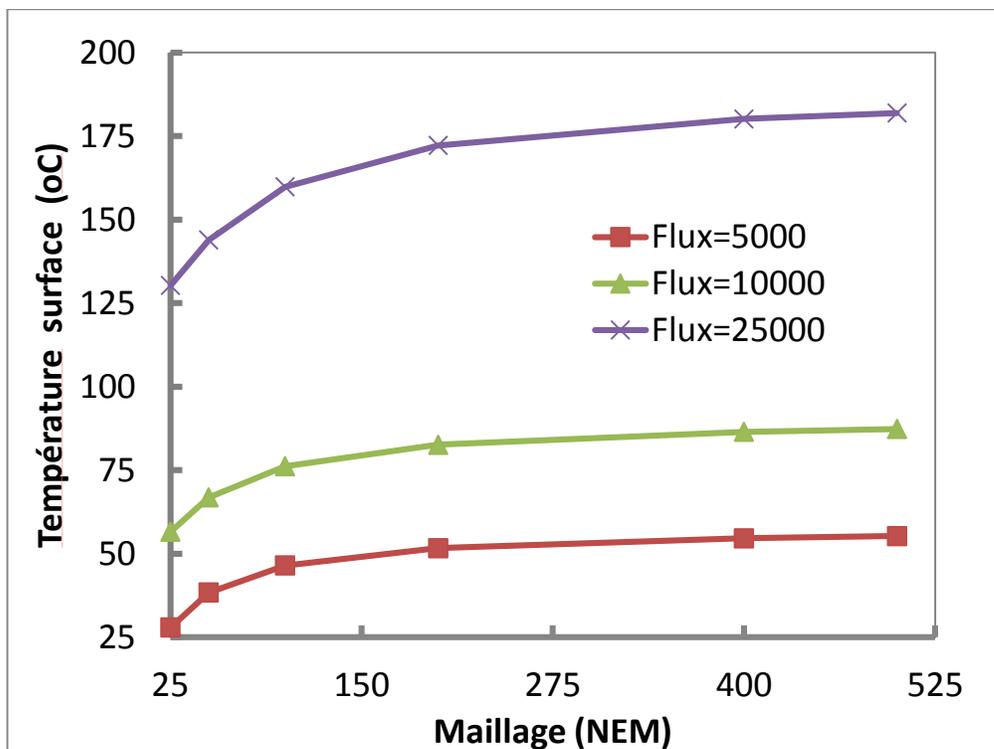
	<b>TOLERANCE</b>	<b>1.00E-04</b>				
	<b>Flux=5000</b>		<b>Flux=10000</b>		<b>Flux=25000</b>	
<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>maillage</b>
<b>3</b>	27.90220567	<b>3</b>	56.5797119	<b>3</b>	130.307813	<b>25</b>
<b>3</b>	38.40511985	<b>3</b>	66.8696699	<b>3</b>	143.909979	<b>50</b>
<b>3</b>	46.49316873	<b>3</b>	76.2121557	<b>3</b>	159.811707	<b>100</b>
<b>3</b>	51.67269752	<b>3</b>	82.6531431	<b>3</b>	172.180831	<b>200</b>
<b>3</b>	54.65202809	<b>3</b>	86.5084509	<b>3</b>	180.139782	<b>400</b>
<b>3</b>	55.28617362	<b>3</b>	87.343977	<b>3</b>	181.923143	<b>500</b>
	<b>TOLERANCE</b>	<b>1.00E-05</b>				
	<b>Flux=5000</b>		<b>Flux=10000</b>		<b>Flux=25000</b>	
<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>Nbre Itéra.</b>		<b>maillage</b>
<b>3</b>	27.90220567	<b>3</b>	56.5797119	<b>4</b>	130.305277	<b>25</b>
<b>3</b>	38.40511985	<b>3</b>	66.8696699	<b>4</b>	143.90799	<b>50</b>
<b>3</b>	46.49316873	<b>3</b>	76.2121557	<b>4</b>	159.810555	<b>100</b>
<b>3</b>	51.67269752	<b>3</b>	82.6531431	<b>4</b>	172.180577	<b>200</b>
<b>3</b>	54.65202809	<b>3</b>	86.5084509	<b>3</b>	180.139782	<b>400</b>
<b>3</b>	55.28617362	<b>3</b>	87.343977	<b>3</b>	181.923143	<b>500</b>

**Tableau 4-16** : Température de surface à t=35s (FEM/Beer-Lambert)

FLUX	5000	10000	25000
<b>Maillage1D linéaire (NEM)</b>			
<b>25</b>	58.7940012	92.5879964	193.969982
<b>50</b>	58.7875533	92.5751005	193.937742
<b>100</b>	58.7829181	92.56583	193.914566
<b>200</b>	58.7815618	92.5631175	193.907784
<b>400</b>	58.7812102	92.5624144	193.906027
<b>500</b>	58.7811677	92.5623293	193.905814

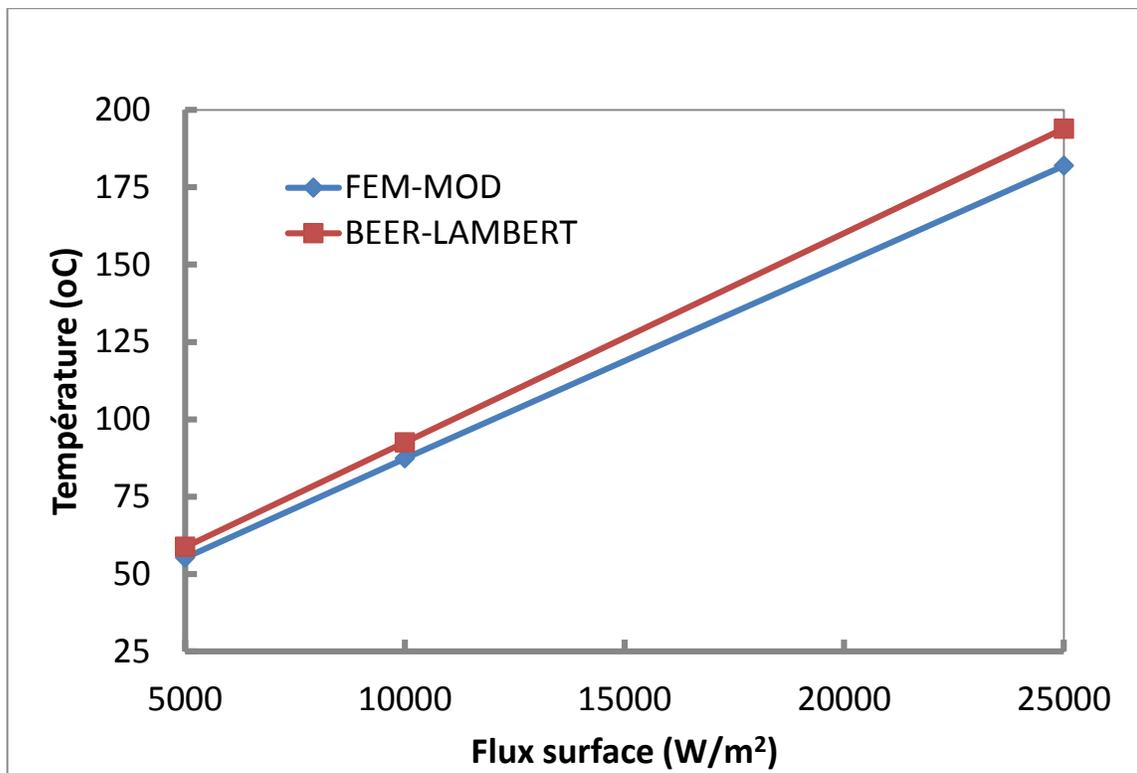
**Figure 4-30** : Influence de la tolérance sur la température de surface exposée à la source pour trois valeurs de flux pour NEM=500

Dans la **figure 4-31**, en fixant la tolérance à  $10^{-4}$ , on a varié le nombre d'éléments du maillage 1D linéaire de 25 à 500 éléments. On constate que la valeur de la température croît avec l'augmentation du nombre d'éléments. Dans l'intervalle de 400 à 500 éléments, on remarque que quel que soit la valeur du flux 5000, 10000 ou 25000  $W/m^2$ , la différence de température n'est plus significative. Par la suite, on fixera le maillage à NEM=500.



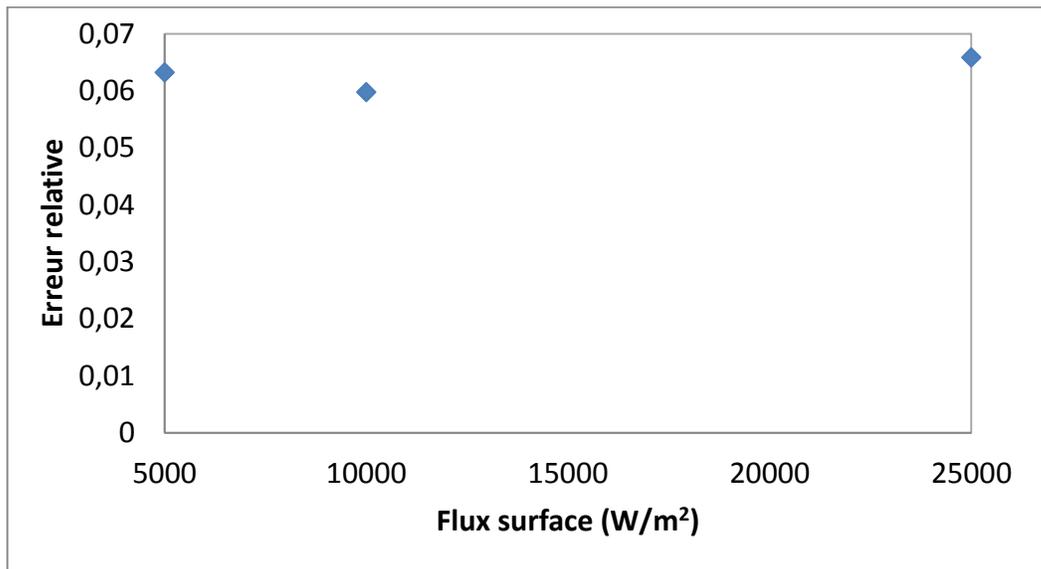
**Figure 4-31** : Influence du nombre d'élément du maillage sur la température de surface exposée à la source

En fixant le NEM à 500 et la tolérance à  $10^{-4}$ , on a comparé dans la **figure 4-32**, la solution de la température de surface donnée par FEM/MOD et FEM/BEER-LAMBERT.

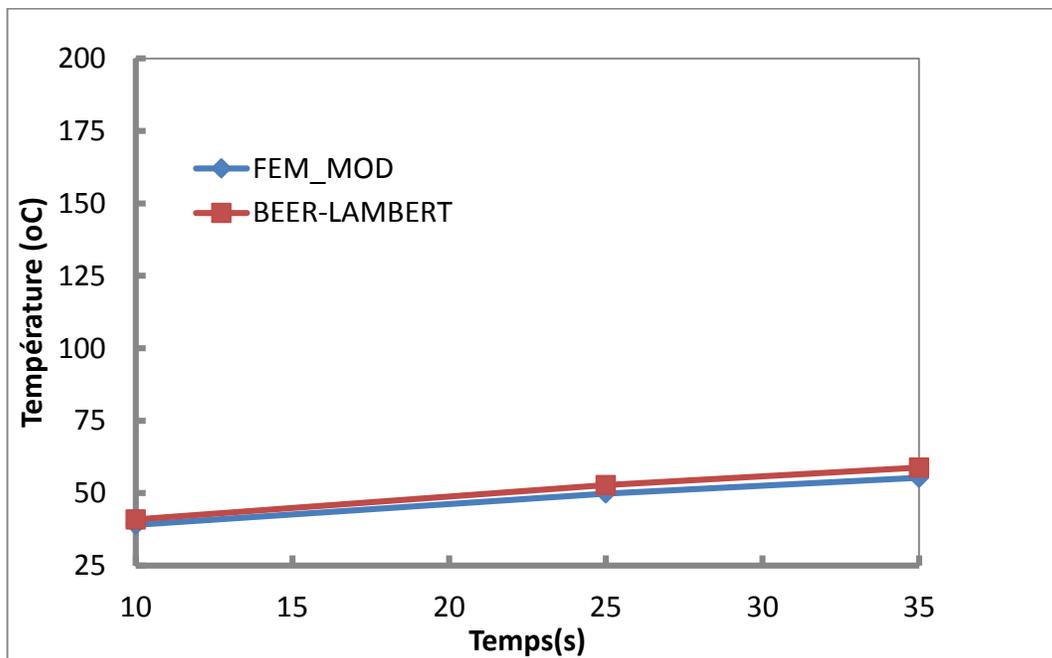


**Figure 4-32 :** Comparaison de la température de surface exposée à la source pour trois valeurs de flux de surface à  $t=35s$  de chauffage

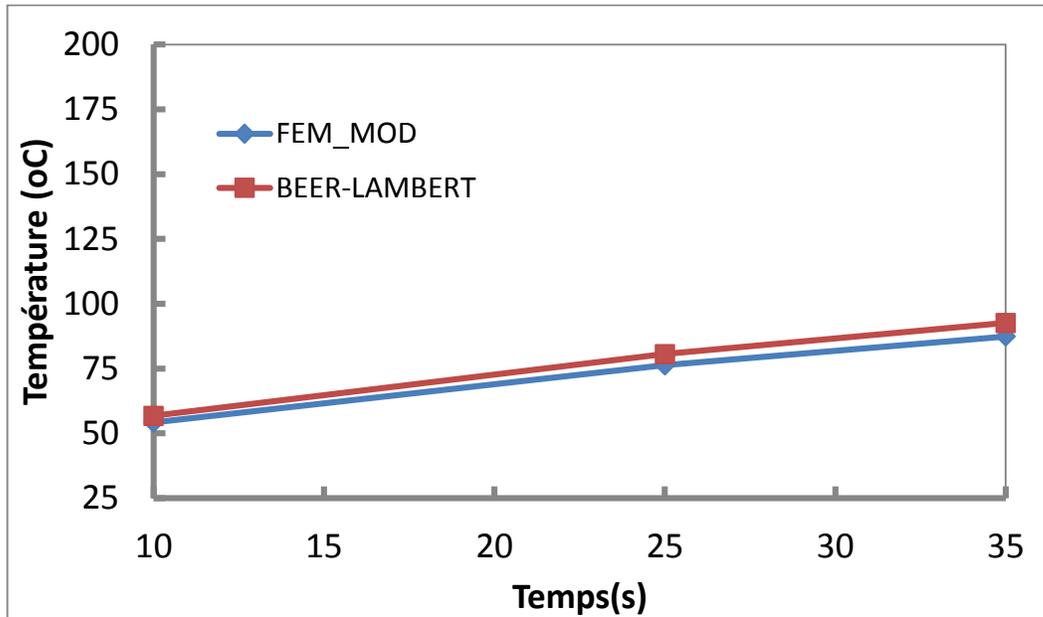
On remarque que l'erreur relative moyenne tenant compte des trois flux entre les deux températures est à peu près de 6.3% (voir **Fig.4-33**). Les évolutions de la température de surface de la préforme exposée à la source pour les flux 5000, 10000 ou 25 000 W/m<sup>2</sup> au temps  $t=10s$ , 25s et 35s sont respectivement représentées sur les **figures 4-34, 4-35 et 4-36**. Au flux de surface de 5000 W/m<sup>2</sup> (**Fig.4-34**), on constate que la température à la fin du chauffage est inférieure à 70°C. Ceci implique que l'intensité du flux à la surface de 5000 W/m<sup>2</sup> est insuffisante pour la préforme du PET dont la température de mise en forme devrait dépasser la température de transition vitreuse en vue du thermoformage.



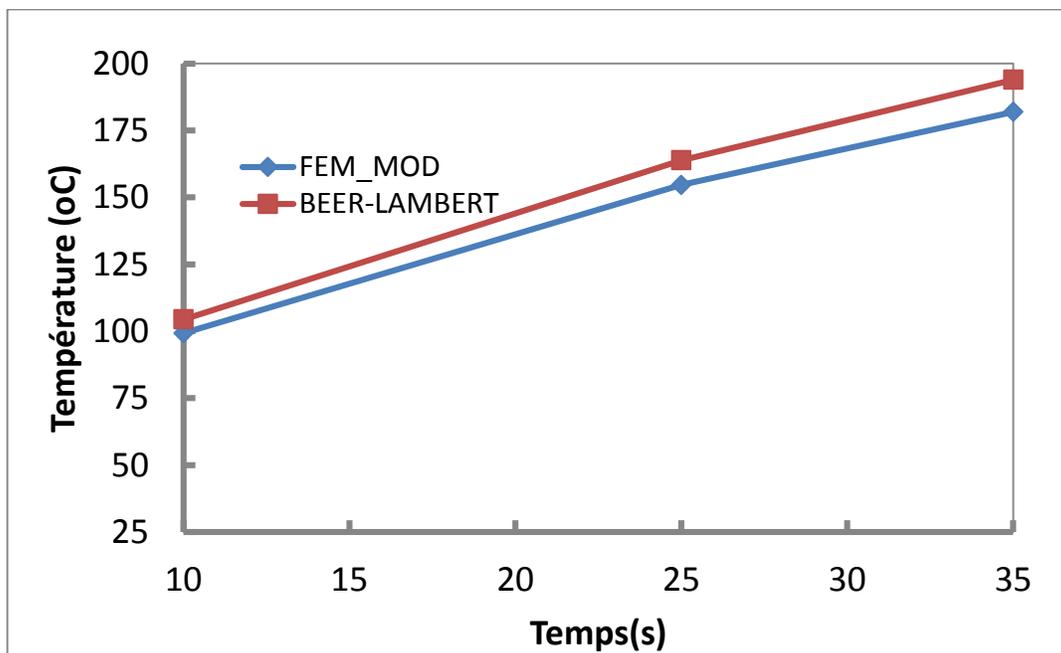
**Figure 4-33 :** Erreur relative sur la température de surface exposée à la source entre FEM-MOD et FEM-BEER



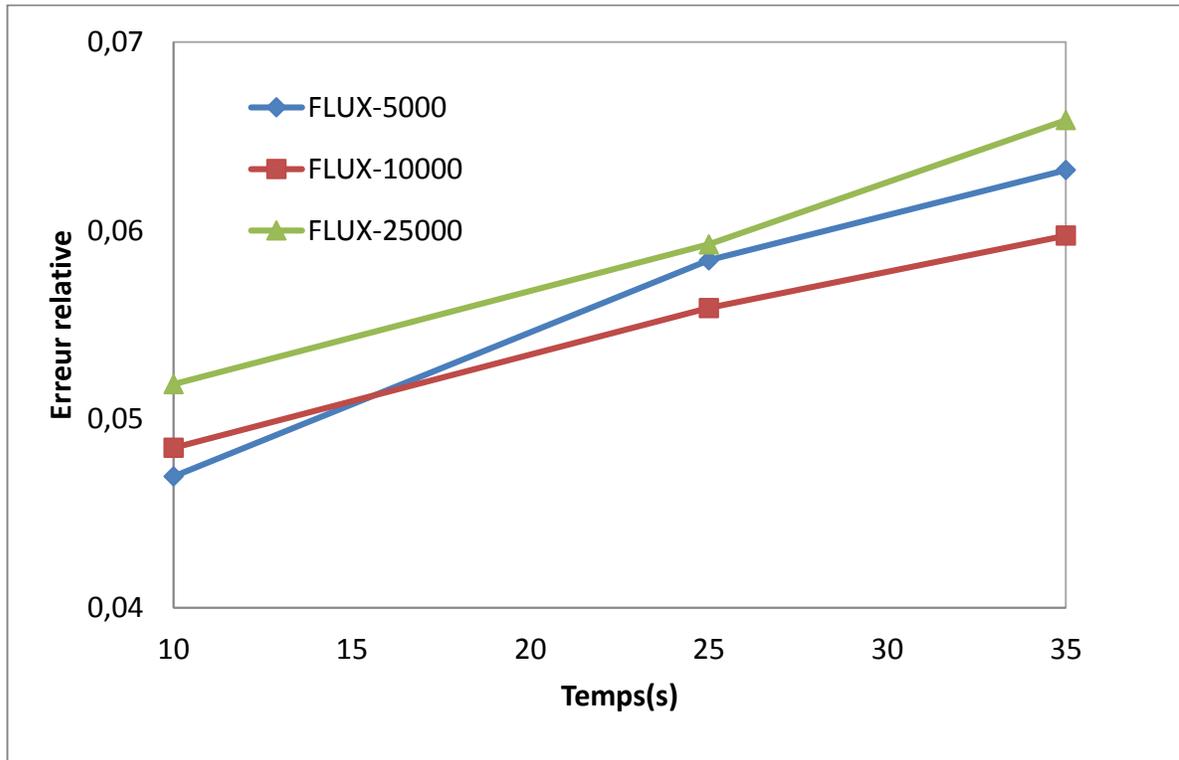
**Figure 4-34 :** Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 5000 W/m<sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s.



**Figure 4-35 :** Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 10000 W/m<sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s



**Figure 4-36 :** Évolution de la température de surface exposée à la source au flux= 25000 W/m<sup>2</sup> au temps t=10, 25 et 35s



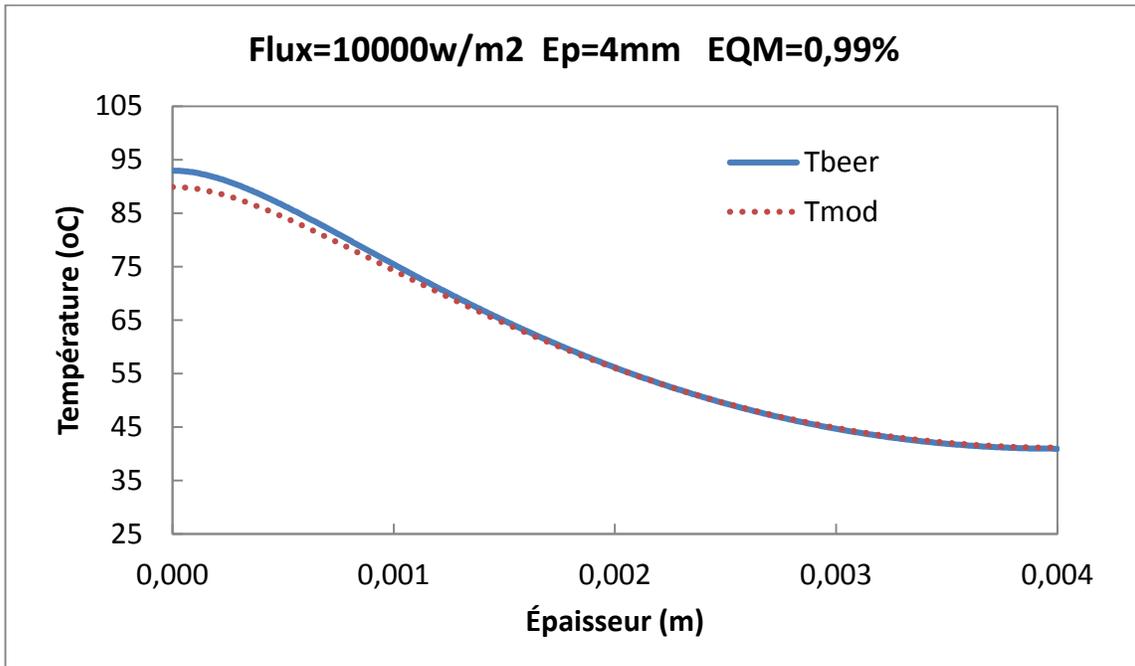
**Figure 4-37** : Évolution de l'erreur relative sur la température de surface exposée à la source entre FEM-MOD et FEM-BEER au temps  $t=10, 25$  et  $35s$ .

Par contre, les flux de surface de  $10000 \text{ W/m}^2$  et de  $25\ 000 \text{ W/m}^2$  (**Fig.4-35** et **Fig.4-36**, respectivement) offre un meilleur compromis pour la mise en forme par rapport au flux de  $5000 \text{ W/m}^2$ , en température vs temps de chauffage. En effet, il faudra ajuster le temps de chauffage selon le flux de surface afin d'avoisiner la température généralement admise en fin de chauffage entre  $120$  à  $180^\circ\text{C}$ . En comparant l'évolution dans le temps des erreurs relatives sur les températures de surface exposée à la source, pour les trois flux  $5000, 10\ 000$  et  $25\ 000 \text{ W/m}^2$ , on constate une faible une croissance de l'erreur relative dont la moyenne se situe entre  $5$  à  $6\%$  (voir **Fig.4-37**).

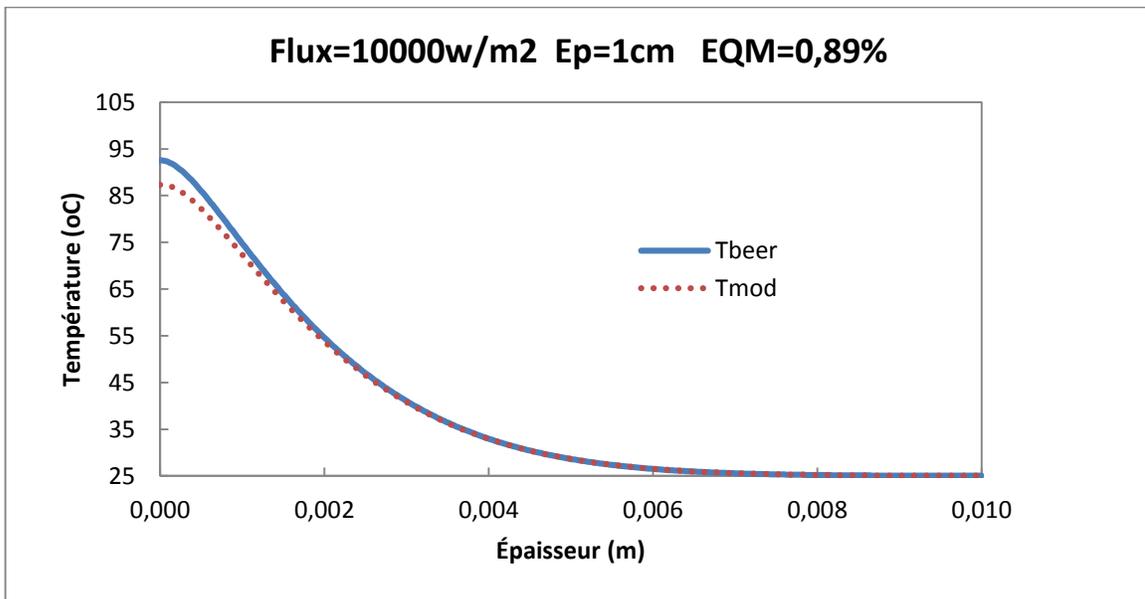
Aux **figures 4-38** et **4-39** on a comparé les distributions de températures à travers l'épaisseur entre les deux solutions numériques FEM1D-BEER-LAMBERT (linéaire) représentant un milieu absorbant froid et non diffusant et FEM1D-MOD1D (non linéaire) donnés par le même domaine sous l'hypothèse d'un milieu non froid. Pour l'analyse des courbes obtenues, nous avons déterminé pour chaque cas l'erreur relative quadratique moyenne entre les deux solutions par l'équation :

$$ERQM = 100 * \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{TBEER(x) - TMOD(x)}{TMOD(x)} \right]^2 dx} \quad (4-135)$$

On constate, d'après les **figures 4-38** et **4-39**, que l'ERQM diminue avec l'augmentation de l'épaisseur. En effet, pour une épaisseur de 0.004m, l'erreur ERQM =0.99% (voir Fig.4-38) par contre pour une épaisseur de 0.01 m, l'ERQM diminue (0.89%) (voir **Fig.4-39**). Pour des ERQM est inférieure à 1% on peut supposer que les deux solutions numériques sont pratiquement confondues. Pour l'épaisseur de 1cm, on remarque d'après le profil de température que le matériau se comporte comme un milieu semi-infini comparativement à la solution donnée par l'épaisseur de 4mm ou tous les nœuds sont thermiquement sollicités.



**Figure 4-38** : Comparaison du profil de température de surface exposée à la source à 35s de chauffage entre FEM-BEER et FEM-MOD pour une épaisseur de 4 mm



**Figure 4-39** : Comparaison du profil de température de surface exposée à la source à 35s de chauffage entre FEM-BEER et FEM-MOD pour une épaisseur de 1cm

#### 4.5 MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU CHAUFFAGE INFRAROUGE DU PET

Pour la modélisation numérique, nous avons considéré une feuille polymérique en PET amorphe. La géométrie de la membrane est un carré de 20.0 cm de côté et de 1.5 mm d'épaisseur. Ses faces latérales sont considérées adiabatiques. Pour la modélisation numérique par la méthode des éléments finis 3D, la feuille est maillée à l'aide des éléments hexaédriques identiques à huit nœuds (41x41x10 nœuds formant la feuille). Les paramètres thermophysiques utilisés dans cette étude sont donnés dans (Monteix, 2001) et le temps de réchauffe est de 35 secondes, avec un coefficient d'échange  $h$  sur les faces avant et arrière de  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{k}^{-1}$ .

L'émetteur infrarouge considéré dans ce travail est celui fourni dans (Monteix, 2001). Il s'agit d'une lampe L400 dont le réflecteur est constitué d'un dépôt de céramique sur la surface arrière d'un tube en quartz. En régime permanent, le filament de tungstène constituant la lampe atteint la température de 1700 K. Le diamètre de l'hélice du filament est égal à 4 mm et sa longueur est de 64 mm. Un seul émetteur est utilisé à une distance de 5 cm du centre de la membrane thermoplastique. Pour la modélisation nous avons considéré la surface équivalente du filament, soit  $S_{fil} = \pi d L$ . Pour plus de détail sur le dispositif de mesure de température voir dans (Monteix, 2001).

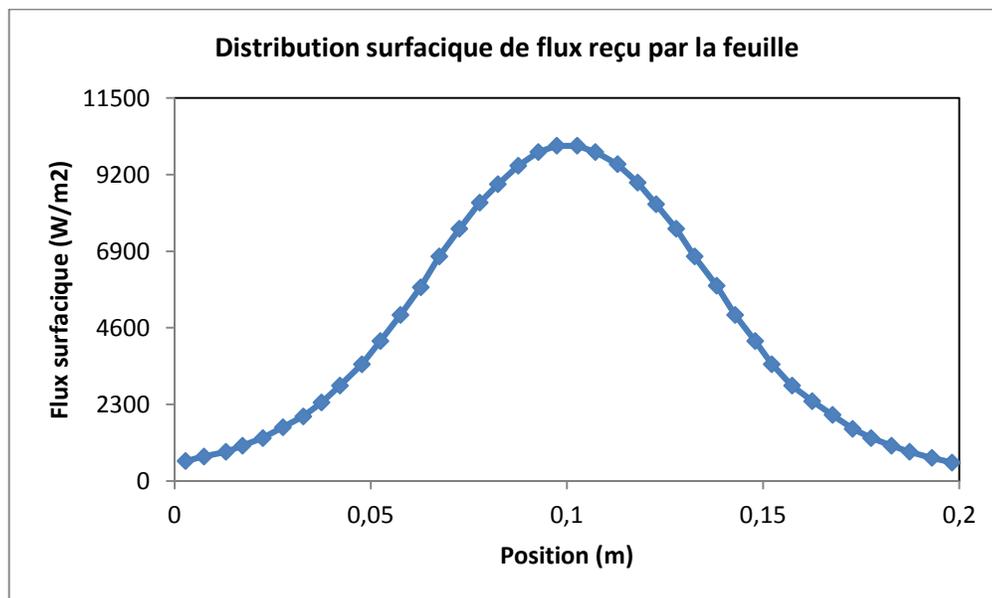
##### 4.5.1 Flux de chaleur reçu par la préforme lors du chauffage

Pour déterminer la distribution induite du flux à la surface réceptrice de la membrane polymérique, nous avons dans un premier temps calculé les facteurs de formes entre chaque paire de surface émetteur-récepteur et ensuite calculé la distribution de flux, via l'équation :

$$q_0(T_s) = F_{ij} \frac{A_i}{A_j} \bar{\varepsilon}_\lambda(T_s) \sigma T_s^4 \quad (4.136)$$

$F_{ij}$  : Facteur de forme calculé par la méthode semi-analytique (Erchiqui et Dituba, 2007).

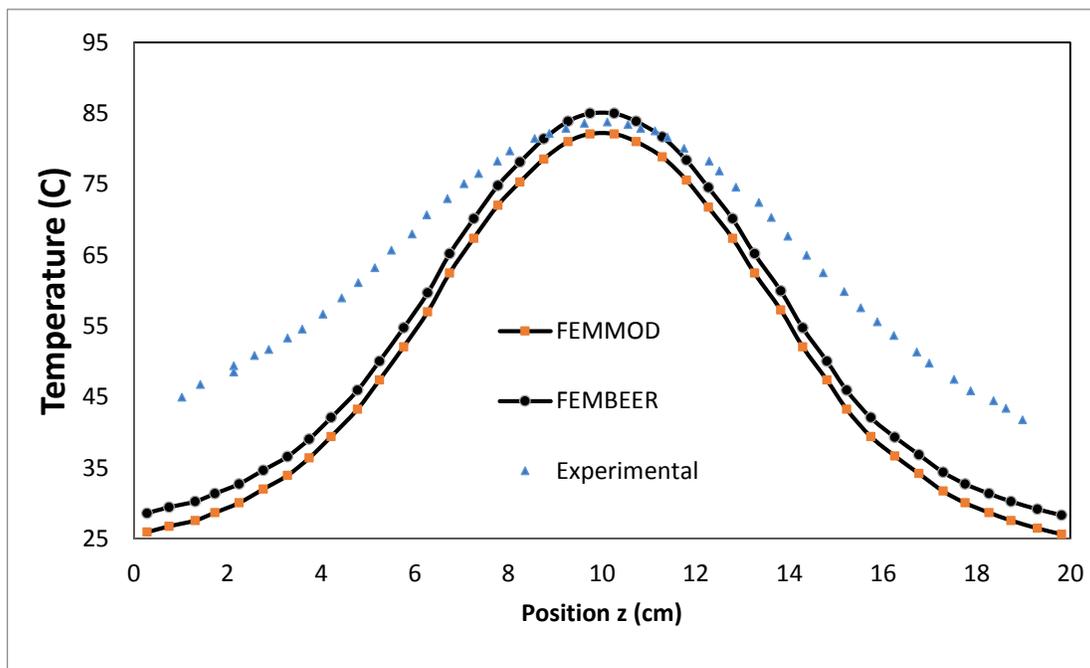
La **figure 4.40** illustre la distribution de flux sur la trace de la surface réceptrice de la membrane. Nous constatons, dans les résultats numériques, que la distribution de ce flux n'est pas uniforme et possède une symétrie. Ces résultats sont cohérents aux considérations déjà établies ; puisque l'émetteur est situé à une distance centrale par rapport à la surface de la membrane et sa température est supposée uniforme. Soulignons que le flux maximal ( $10022 \text{ W/m}^2$ ) se situe au centre de la membrane et les minimums ( $647 \text{ W/m}^2$ ) à ses bords.



**Figure 4-40** : Flux surfacique sur la trace de la face avant de la feuille PET

#### 4.5.2 Validation avec les résultats expérimentaux

La **figure 4.41** illustre les résultats numériques obtenus par la simulation, via FEM3D/BEER et FEM3D/MOD1D avec ceux obtenus expérimentalement. On remarque que les solutions numériques semblent plus proches de la solution expérimentale au centre de la feuille qu'aux bords. L'erreur relative au milieu de la trace pour FEM3D/BEER est de 1.4% par rapport à l'expérimental, tandis que pour FEM3D/MOD1D l'erreur relative est de 2%.



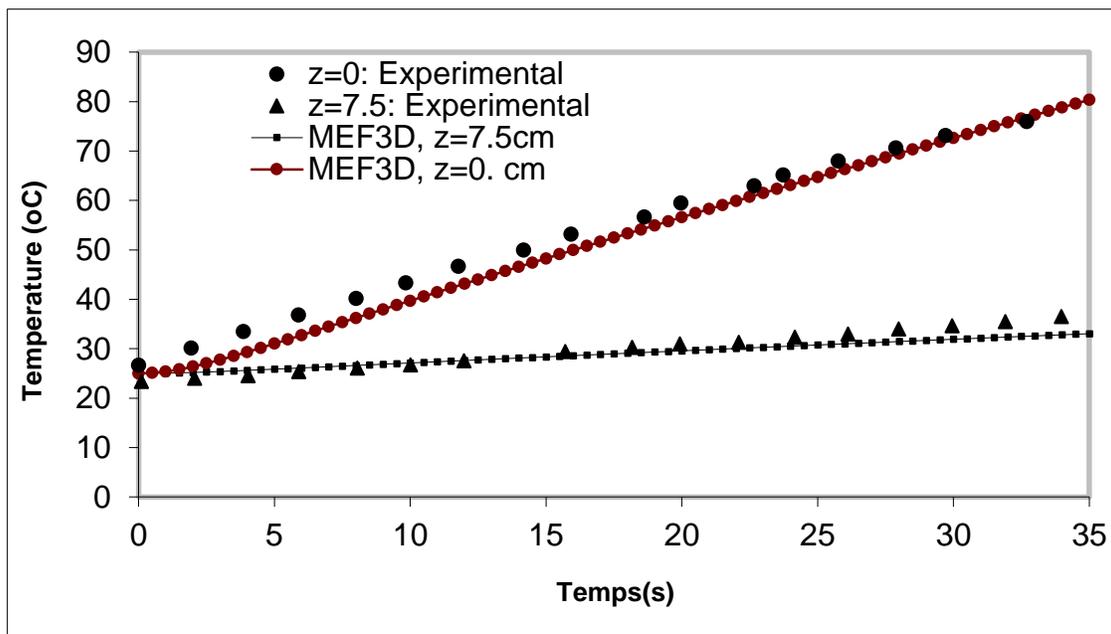
**Figure 4-41** : Comparaison des températures de la face de la trace face avant données par FEMBEER, FEMMOD avec l'expérimentale

Toutefois, on constate une légère asymétrie, dans les résultats expérimentaux, aux bords de la membrane, ceci peut s'expliquer par l'effet des forces de gravité qui tendent, sous l'effet de la chaleur, à faire couler la matière du plastique vers le bas. La prise en compte des

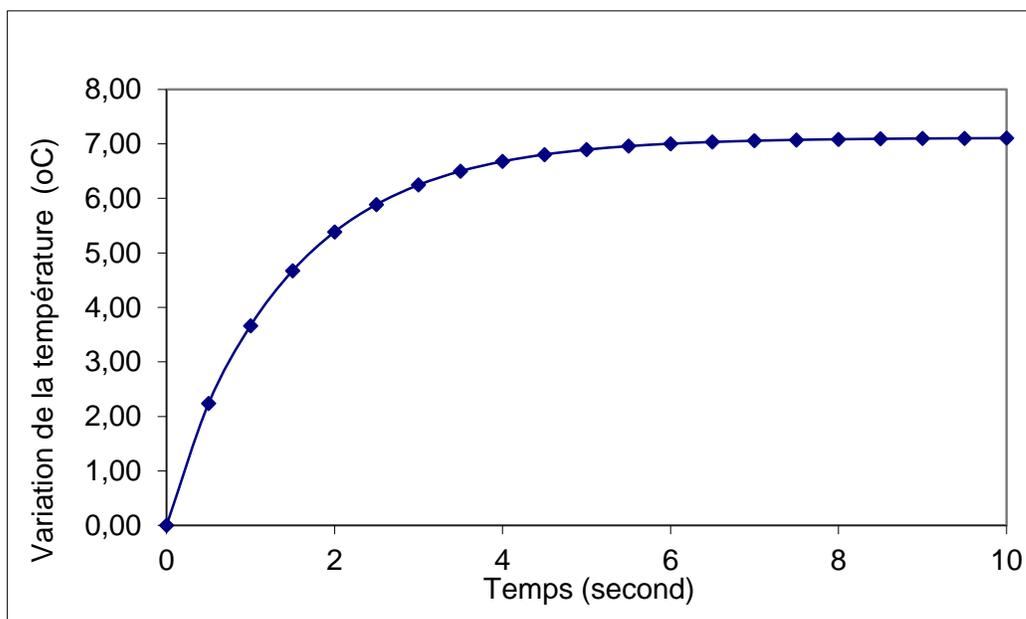
variations des propriétés thermophysiques avec la température et le couplage des équations de la chaleur avec les équations de mouvement devrait, en principe, expliquer cette asymétrie. Aussi, l'écart relatif entre les résultats numériques et expérimentaux est très important. Cet écart relatif aux bords de la feuille PET atteint 28 % pour FEM3D/BEER et de 34% pour FEM3D/MOD1D.

Finalement, les résultats des simulations numériques montrent bien que le recours à la loi de Beer-Lambert, pour le terme source radiatif, dans l'équation tridimensionnelle de la conservation d'énergie, n'affecte pas considérablement la précision des calculs, donc permet une économie de temps.

La **figure 4.42** concerne l'évolution de la température sur la face avant de la feuille (face exposée à la source) en deux points. Finalement, en tenant compte des hypothèses effectuées pour la simulation numérique FEM3D/BEER, nous pouvons considérer dans l'ensemble que ces résultats sont satisfaisants. Sur la face centrale et la face en bas, au centre de la feuille, les températures atteignent, respectivement, 33.2 et 31°C. Ce ralentissement dans le chauffage de la feuille s'explique par le mauvais comportement en conduction thermique du PET. Nous constatons, au centre de la membrane et après 4 secondes de chauffage, l'établissement d'une différence de température de 7°C. Cette valeur reste constante, après les premières 5 secondes de chauffage comme illustré sur la **figure 4.43**

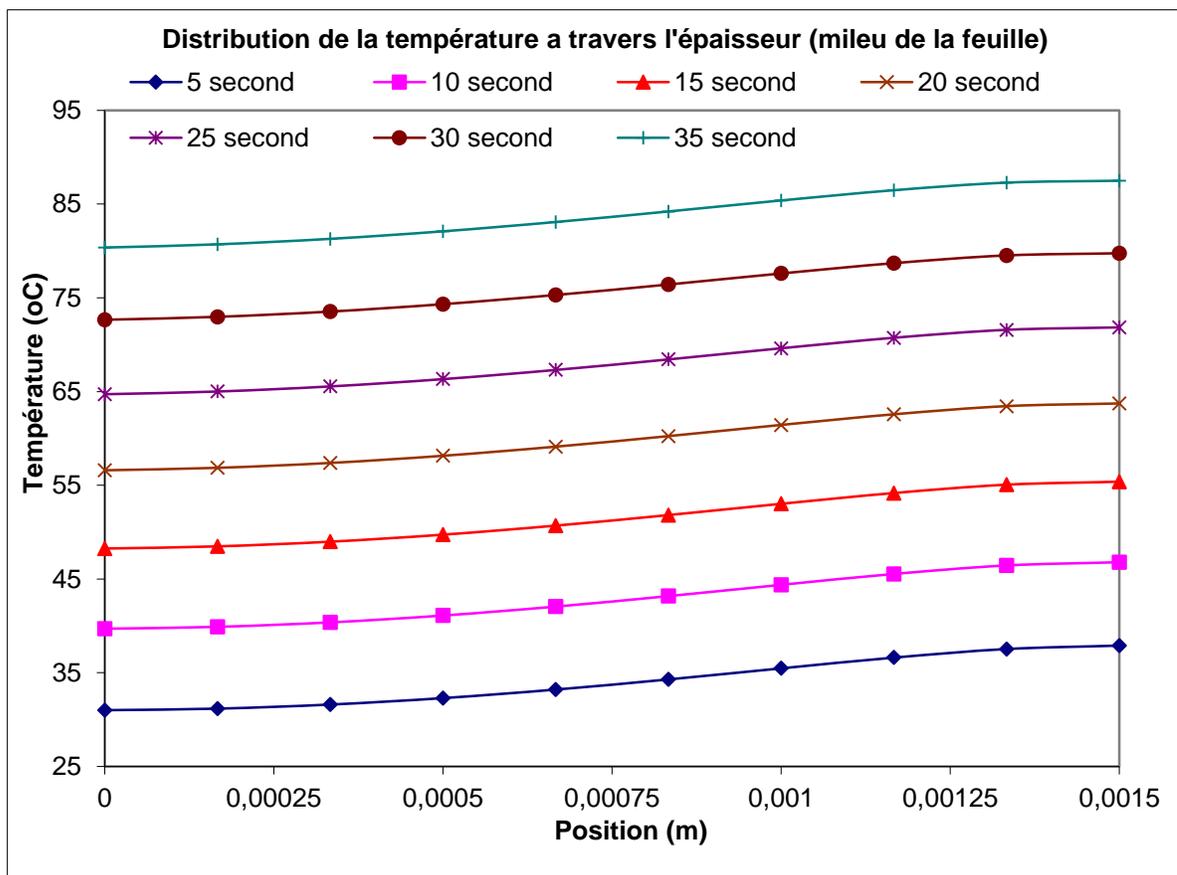


**Figure 4-42 :** Évolution de la température en deux positions de la face avant de la membrane



**Figure 4-43 :** Évolution de la différence de température en position centrale entre les faces avant et arrière de la membrane en PET

Sur la **Figure 4.44** nous avons tracées l'évolution de la température au centre de la membrane en fonction de l'épaisseur, respectivement, pendant les intervalles de temps de [0–4] secondes et de [5–35] secondes. Même remarque que précédemment, le profil de température suivant l'épaisseur induit l'établissement d'une différence de température de l'ordre de 7°C entre les faces avant et arrière à la position centrale de la feuille.



**Figure 4-44** : Distribution de la température à travers l'épaisseur de 5 à 35s

## CHAPITRE 5

### MODÉLISATION DE LA RÉCHAUFFE D'UN COMPOSITE PET-CHANVRE

Ce chapitre traite de la modélisation numérique du chauffage des composites à matrice PET chargé de 1%, 5% et 15% de fibre de chanvre. Dans toute la modélisation, ces matériaux composites sont supposés opaques. Les résultats seront comparés dans les mêmes conditions au PET vierge (à 0% de fibre) considéré comme amorphe et semi-transparent.

#### 5.1 MÉTHODE DE CHAUFFAGE DES PRÉFORMES

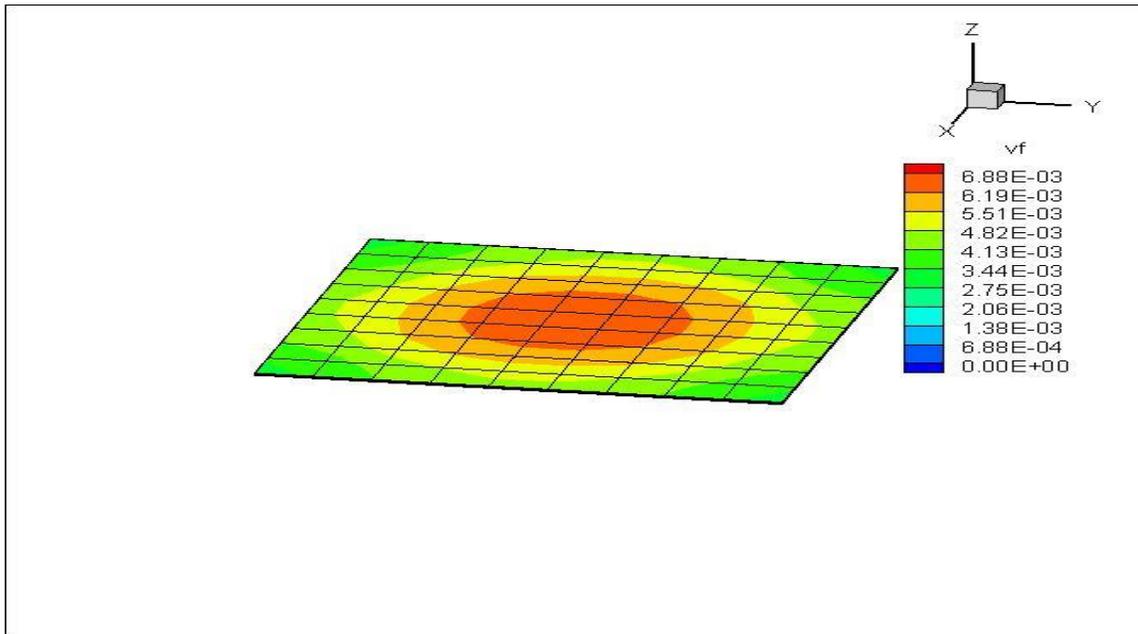
La géométrie des membranes est un carré de 20,0 cm de côté et de 1,5 mm d'épaisseur. Ses faces latérales sont considérées adiabatiques. Pour la modélisation numérique par la méthode des éléments finis 3D, la feuille est maillée à l'aide des éléments hexaédriques identiques à huit nœuds (9x9x19 nœuds formant la feuille). Les paramètres thermophysiques dans cette étude sont donnés dans les tableaux 2-1, 2-2 et 2-3. Le temps de réchauffe est de 30 secondes, avec un coefficient d'échange  $h$  sur les faces avant et arrière de  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{k}^{-1}$ . Le chauffage biface (méthode-sandwich) de la feuille est adopté dans ce travail. Il a pour effet de

raccourcir la durée des cycles de chauffage. La température des émetteurs (panneaux constituées de plaques en céramiques, représentées en bleu dans la figure 5-2) est fixée à 550°C. Deux surfaces émettrices sont placées chacune de part et d'autre de la membrane composite en parallèle à une distance de 5 cm de son centre pour un chauffage simultané des deux côtés de la préforme.

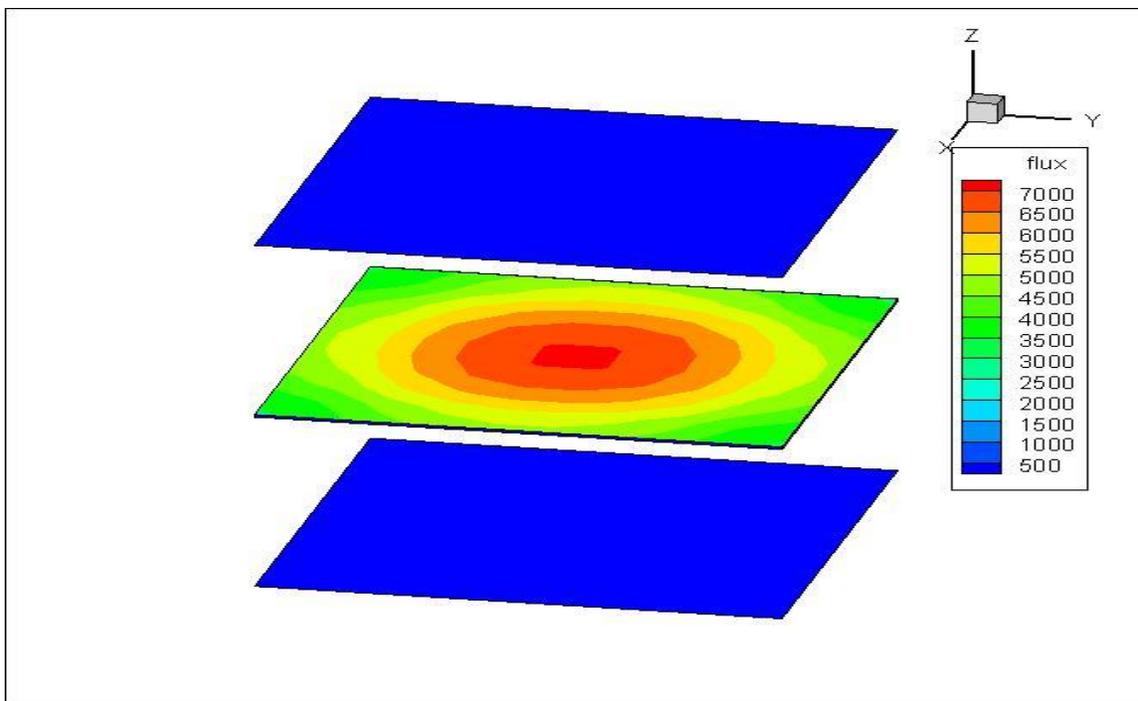
## 5.2 FACTEUR FORME ET FLUX RADIATIF

La **figure 5-1** indique la répartition des valeurs numériques, des facteurs de forme à la surface de la membrane, issues de l'équation 3-21. On remarque que la fraction de l'énergie quittant la surface des émetteurs qui est interceptée par la surface de la membrane est plus importante au centre qu'à la périphérie de la préforme. Cela vient du fait aussi que les plaques en céramique sont situées à une distance centrale par rapport à la surface de la membrane et leurs températures sont supposées uniformes.

À la **figure 5-2**, on observe une similitude entre la distribution des facteurs de forme et la répartition du flux radiatif à la surface de la membrane qui est également plus élevée au centre (avec un flux maximal de 7048 W/m<sup>2</sup>) qu'aux bords (avec un flux minimal de 4847.18W/m<sup>2</sup>). Cela vient du fait que le flux radiatif dépend explicitement du facteur de forme et de la température de la source via l'équation 91.



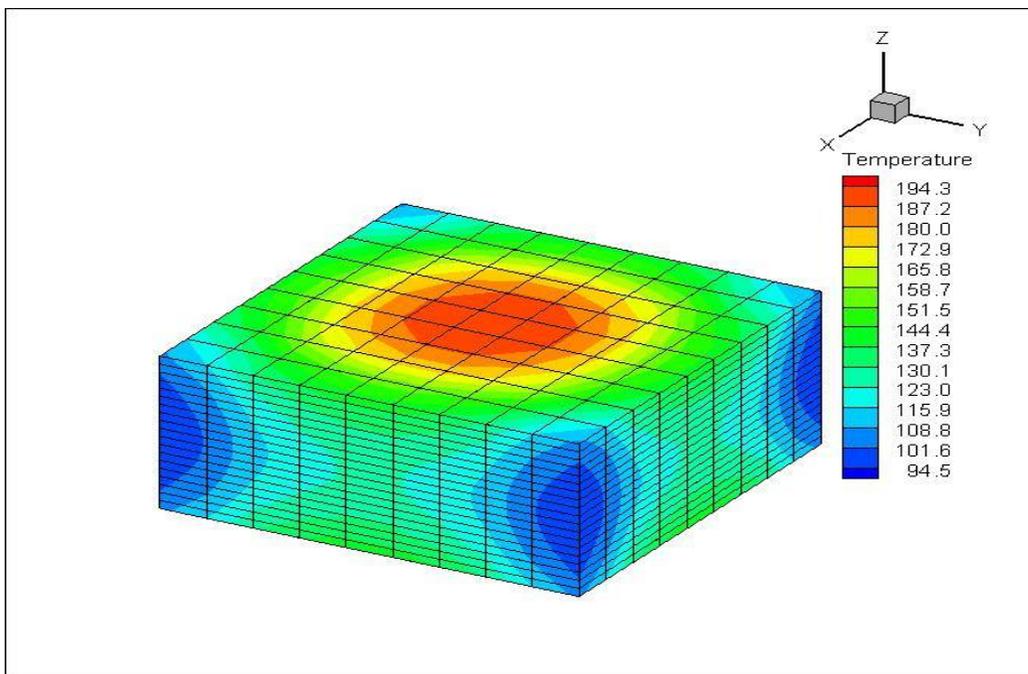
**Figure 5-1** : Facteur de forme à la surface de la préforme PET-Chanvre



**Figure 5-2** : Flux radiatif à la surface de la préforme PET-Chanvre

### 5.3 RÉPRÉSENTATION SPATIALE DE LA DISTRIBUTION DE TEMPÉRATURE

La **figure 5-3** présente la distribution de la température en 3D de la membrane composite chargée de 15% de fibres de chanvre. Le maillage utilisé pour la modélisation numérique par la méthode des éléments finis 3D y est bien illustré. La feuille est maillée à l'aide des éléments hexaédriques identiques à huit nœuds (9x9x19 nœuds formant la feuille).

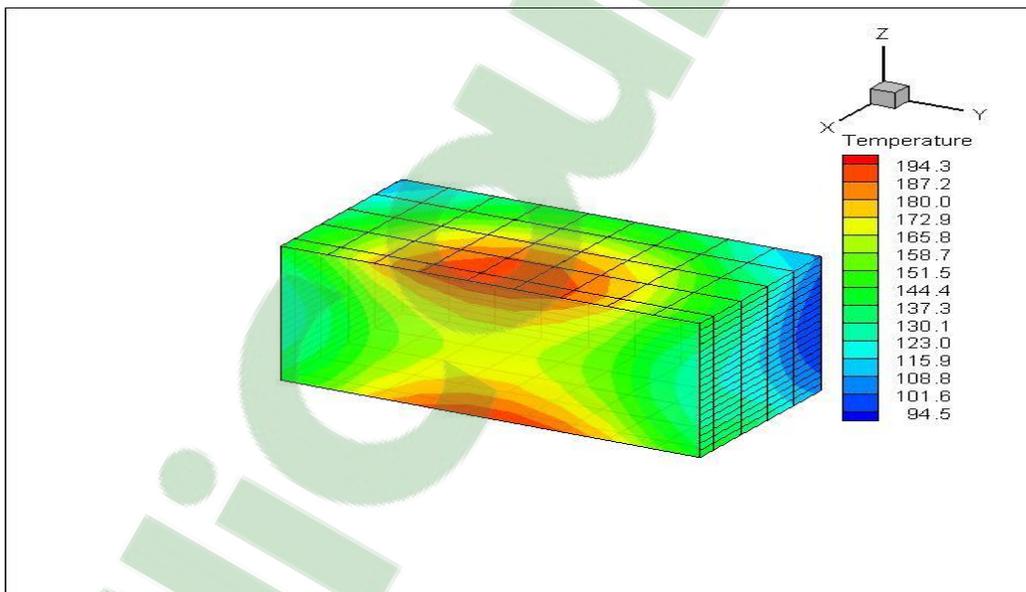


**Figure 5-3** : Distribution de la température en 3D du composite 15% de chanvre

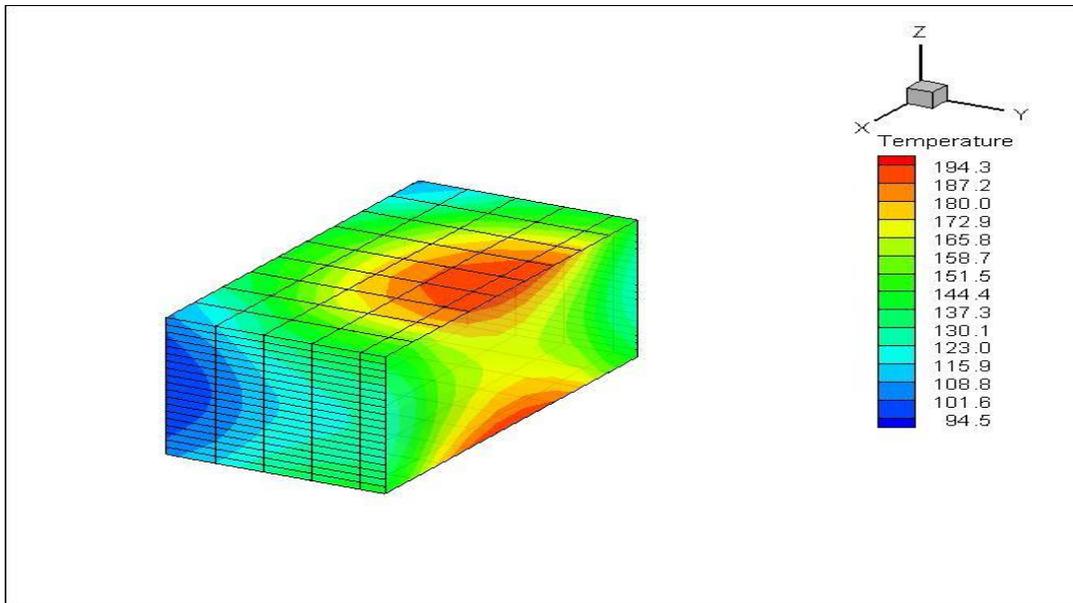
La répartition tridimensionnelle de la température montre qu'en fin de chauffage (30 s) le centre de la feuille est plus sollicité que les bords. La température est maximale au centre avec une valeur de 194.3°C tandis qu'elle est minimale aux coins avec une valeur de 94.5 °C.

Les **figures 5-4** et **5-5** représentent respectivement une coupe orthogonale par rapport à l'axe des X et l'axe des Y, de la répartition tridimensionnelle de la membrane chargée à 15% de fibres de chanvre. Ces figures montrent une symétrie de la température en surface et à l'intérieur de la membrane.

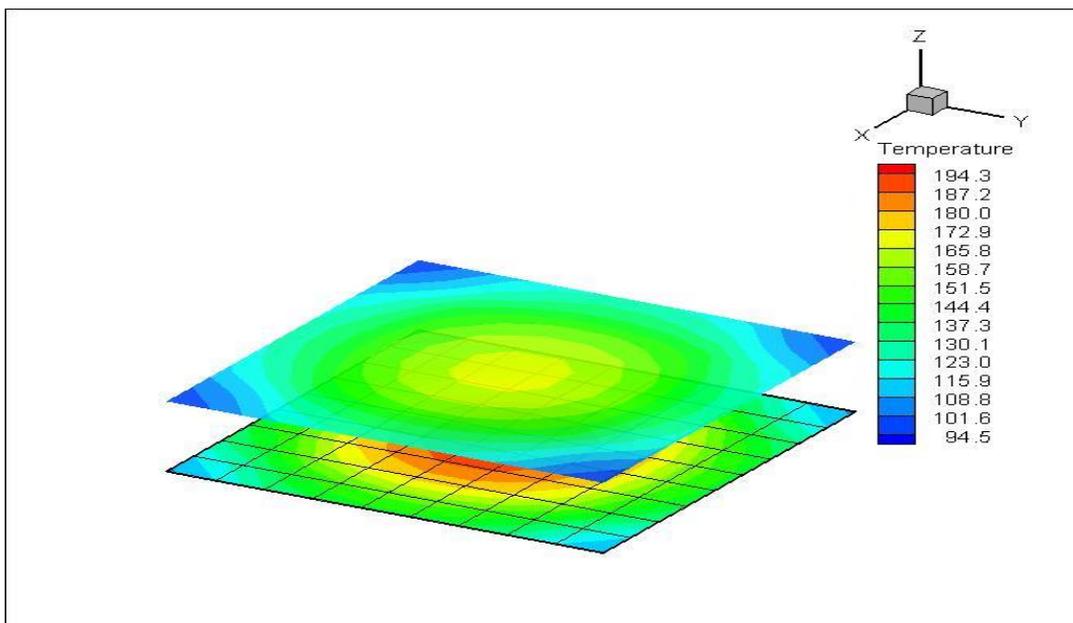
La **figure 5-6**, représente une coupe 2D du milieu de la membrane composite chargé de 15% de fibres de chanvre. On observe qu'avec la symétrie géométrique, le milieu de la feuille est toujours le point le plus culminant en température par rapport aux bords avec une intensité moindre qu'en surface.



**Figure 5-4** : Distribution de la température en 3D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des X)



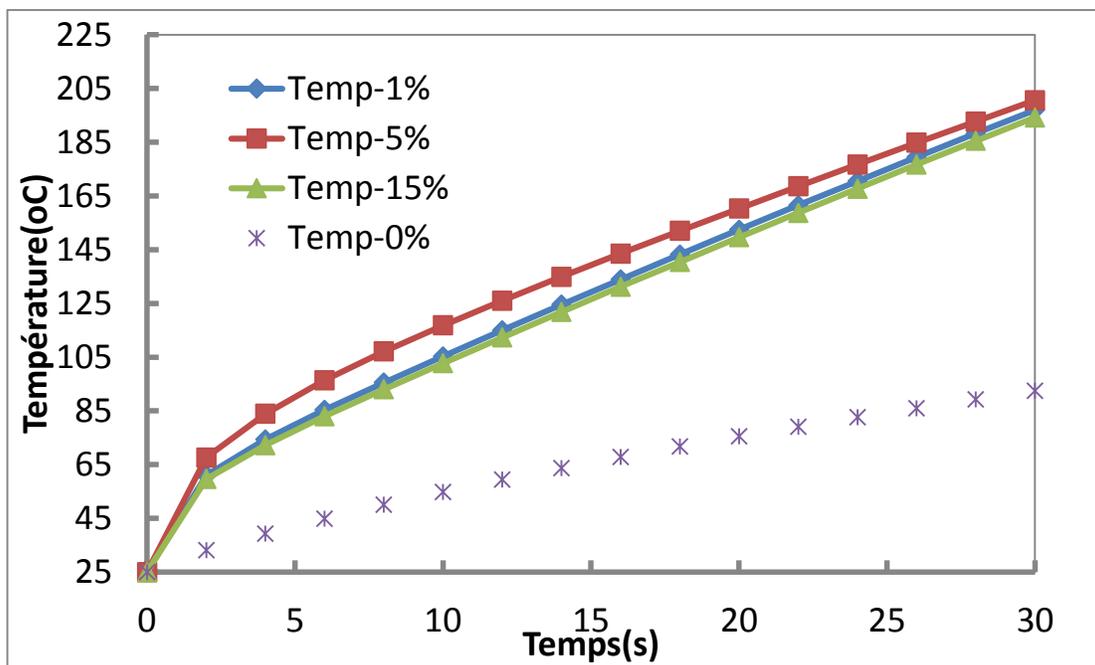
**Figure 5-5** : Distribution de la température en 3D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des Y)



**Figure 5-6** : Distribution de la température en 2D du composite chargé de 15% de fibres de chanvre (coupe orthogonale par rapport à l'axe des Z)

#### 5.4 ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE À TRAVERS LA PRÉFORME

La **figure 5-7** présente une comparaison des évolutions des températures de la face du haut point central de la préforme au cours du temps pour les trois composite PET-chanvre 1%, 5%, 15% et le PET vierge.



**Figure 5-7 :** Évolution de la température face haut, point central de la feuille

On remarque que les composites 1%, 5% et 15% présentent des températures pratiquement superposées tout au long de l'évolution du chauffage. Par contre, la température du PET vierge se situe au-dessous des températures des échantillons composites. Ceci montre l'influence de la semi transparence du PET par rapport à l'opacité des composites.

La comparaison des évolutions de températures montre aussi que l'ajout de fibres dans la matrice PET favorise une accélération du chauffage de la préforme.

La **figure 5-8** montre une comparaison des évolutions des températures du milieu au point central de la préforme au cours du temps pour les trois composite PET-chanvre 1%, 5%, 15% et le PET vierge. La température du PET vierge se situe toujours au-dessous des températures des échantillons composites. Par contre, de la figure 5-7 à 5-8, on remarque que l'écart de température entre le PET vierge et les composites est plus important à la surface qu'au milieu. Aussi, on remarque que les températures du milieu et à la surface de la membrane des composites se chevauchent sans suivre une logique cohérente selon le pourcentage des fibres de chanvre tout au long du chauffage. Cela est probablement dû aux erreurs de calibrage des échantillons des composites utilisés lors du DSC pour la détermination de la capacité calorifique.

Les **figures 5-9 à 5-12**, représentent l'évolution de la température sur la trace avant de la membrane PET vierge, des composites à 1%, 5% et 15% fibres de chanvre, respectivement, au temps 10, 20 et 30 secondes de chauffage. On observe une similitude de la répartition de la température sur la trace pour tous les échantillons.

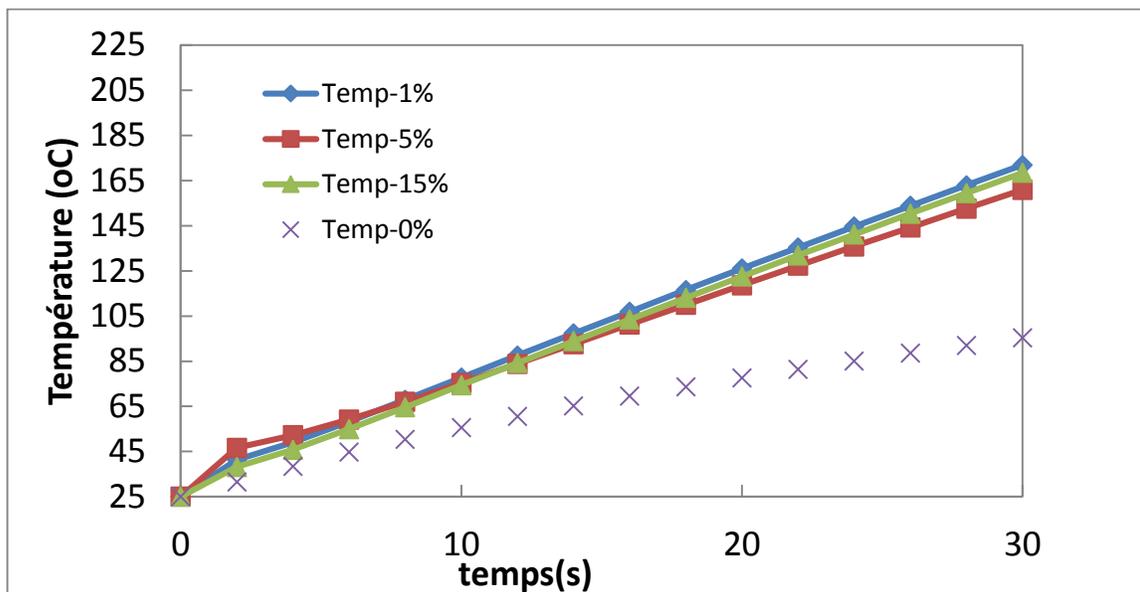


Figure 5-8 : Évolution de la température au milieu, point central de la préforme

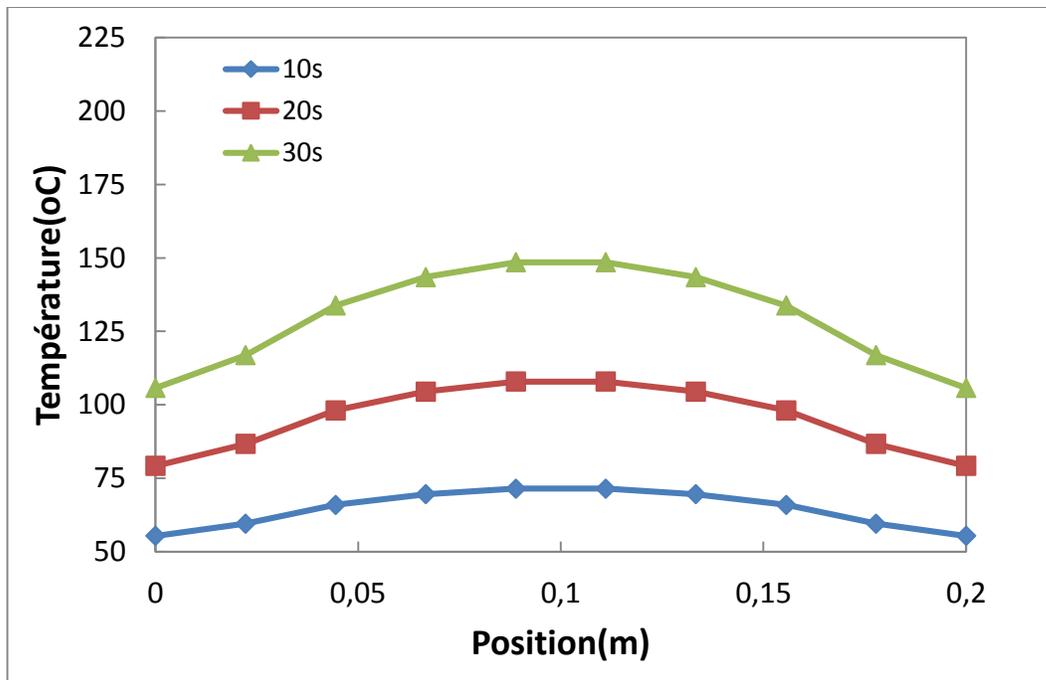


Figure 5-9 : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane PET

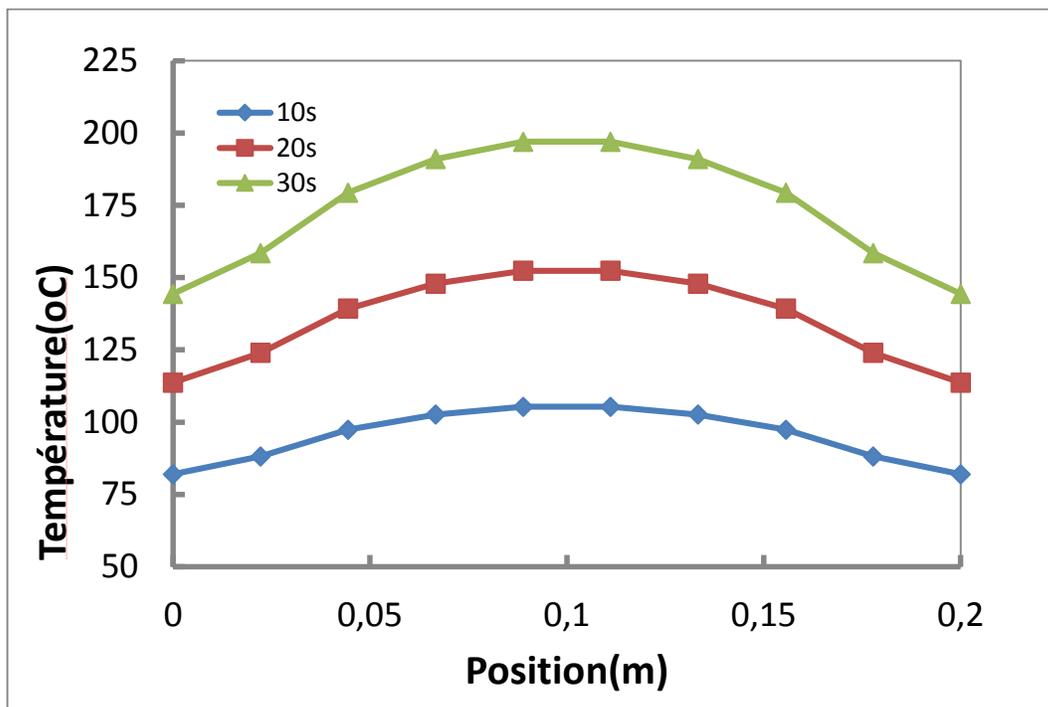


Figure 5-10 : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 1%

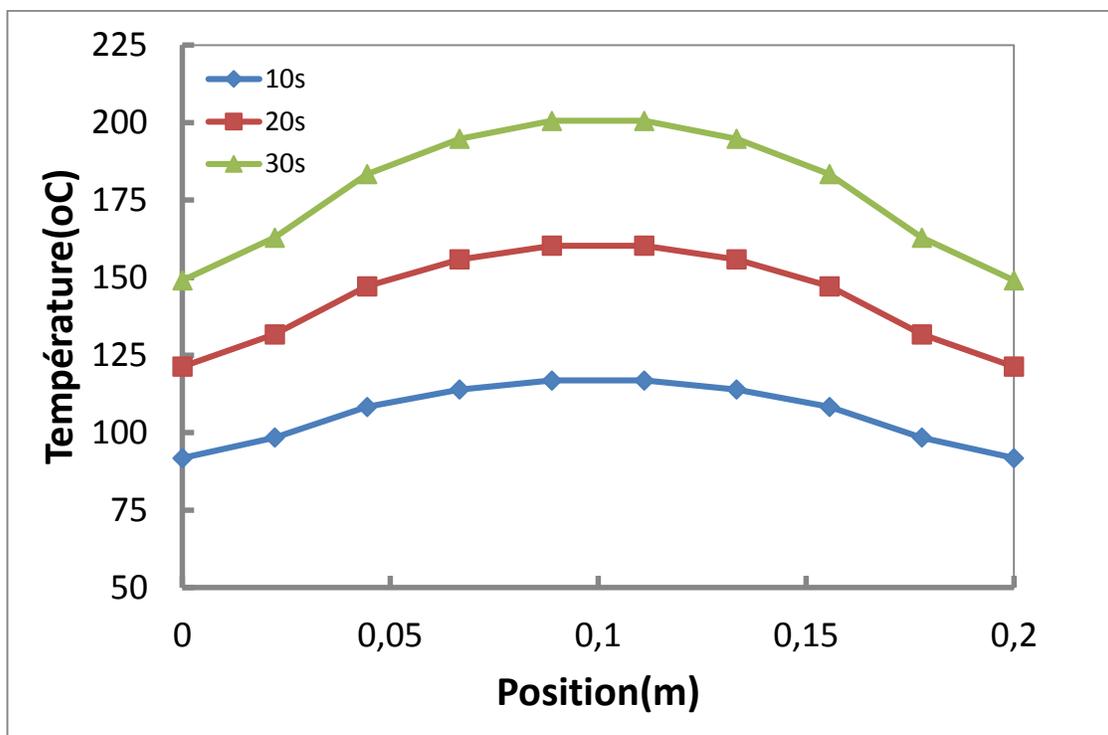
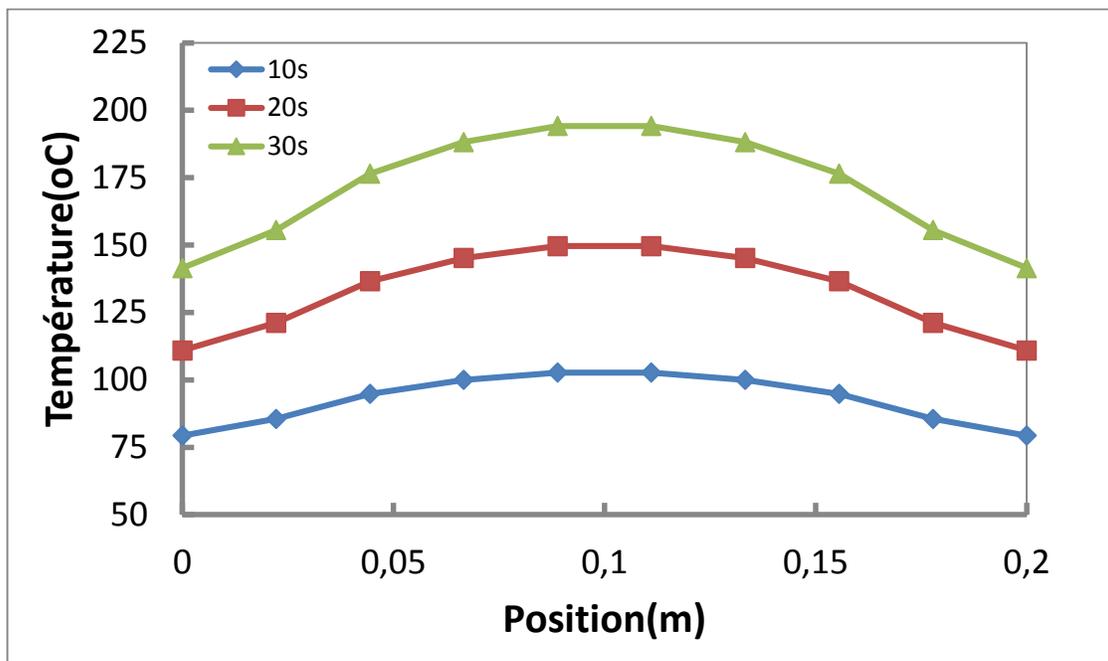


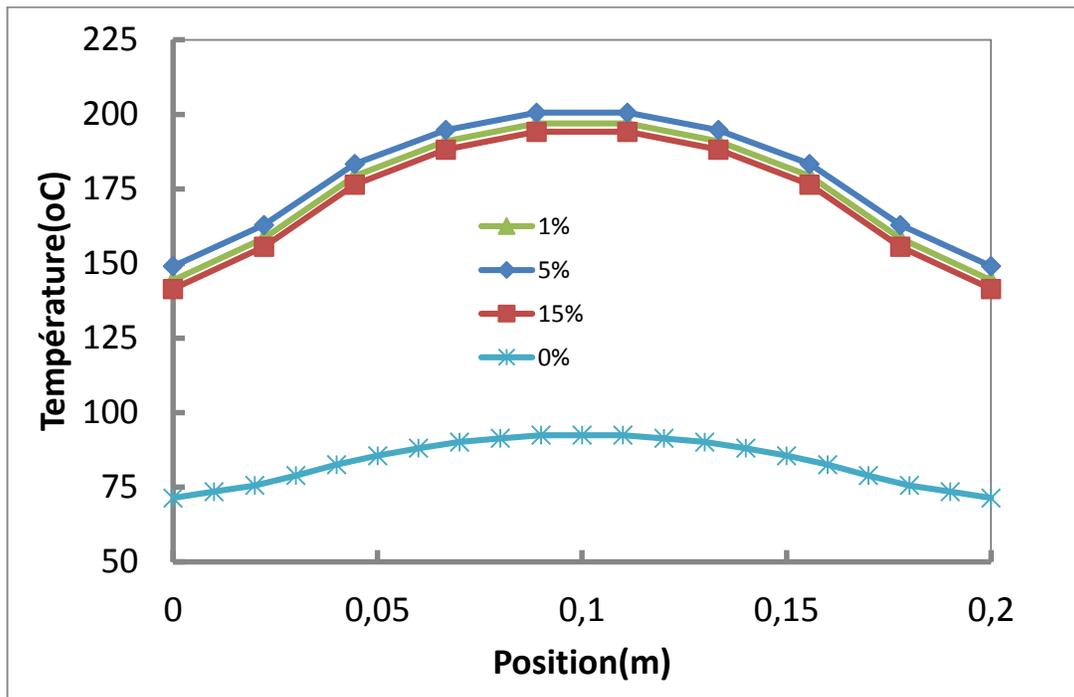
Figure 5-11 : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 5%



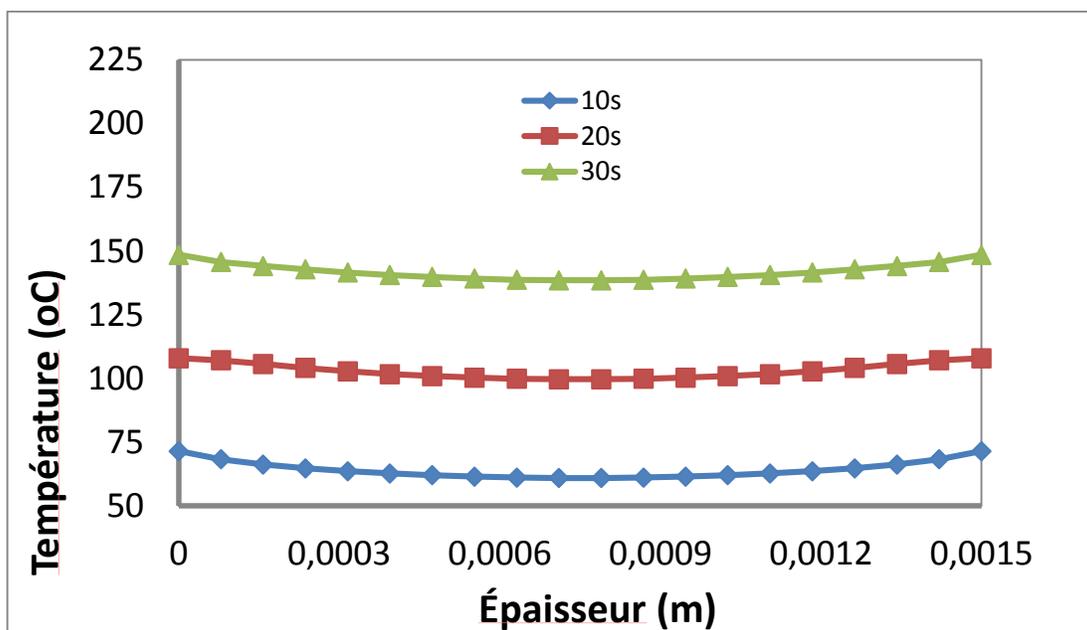
**Figure 5-12** : Évolution de la température sur la trace avant de la membrane 15%

### 5.5 RÉPARTITION DE LA TEMPÉRATURE À DES TEMPS DE CHAUFFAGE DONNÉS

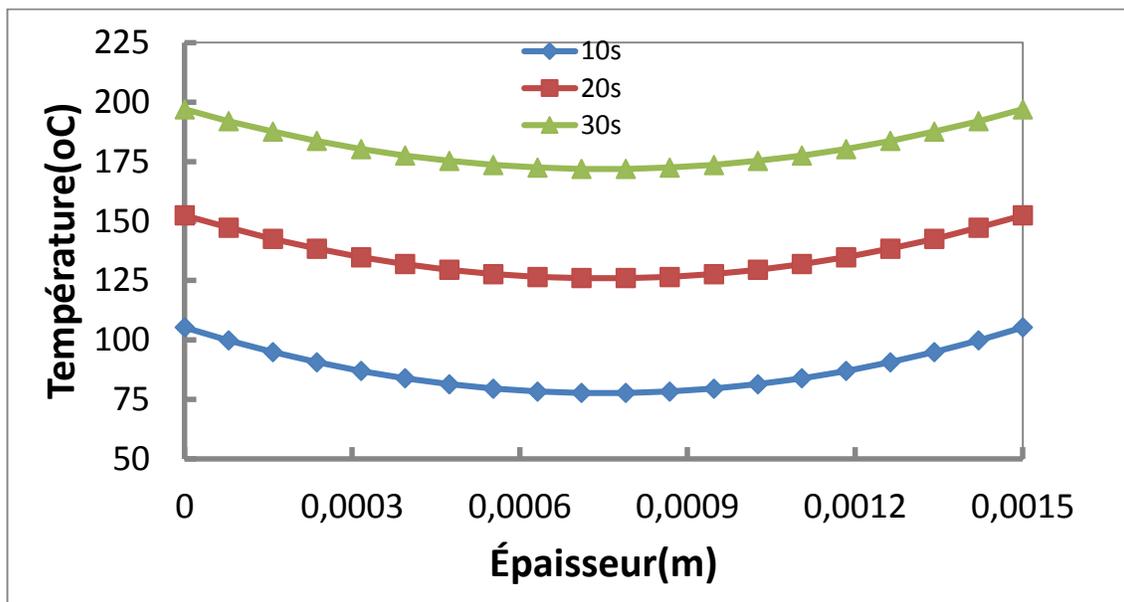
Les températures au milieu de la trace sont plus élevées qu'aux extrémités. La comparaison des températures sur la trace avant des différents échantillons est représentée à la **figure 5-13** au temps  $t = 30$  s de chauffage. La tendance est identique à celle observée à la **figure 5-6**. On remarque que les composites 1%, 5% et 15% présentent des températures pratiquement superposées tout au long de l'évolution du chauffage sur la trace avant. Par contre, la température du PET vierge se situe au-dessous des températures des échantillons composites.



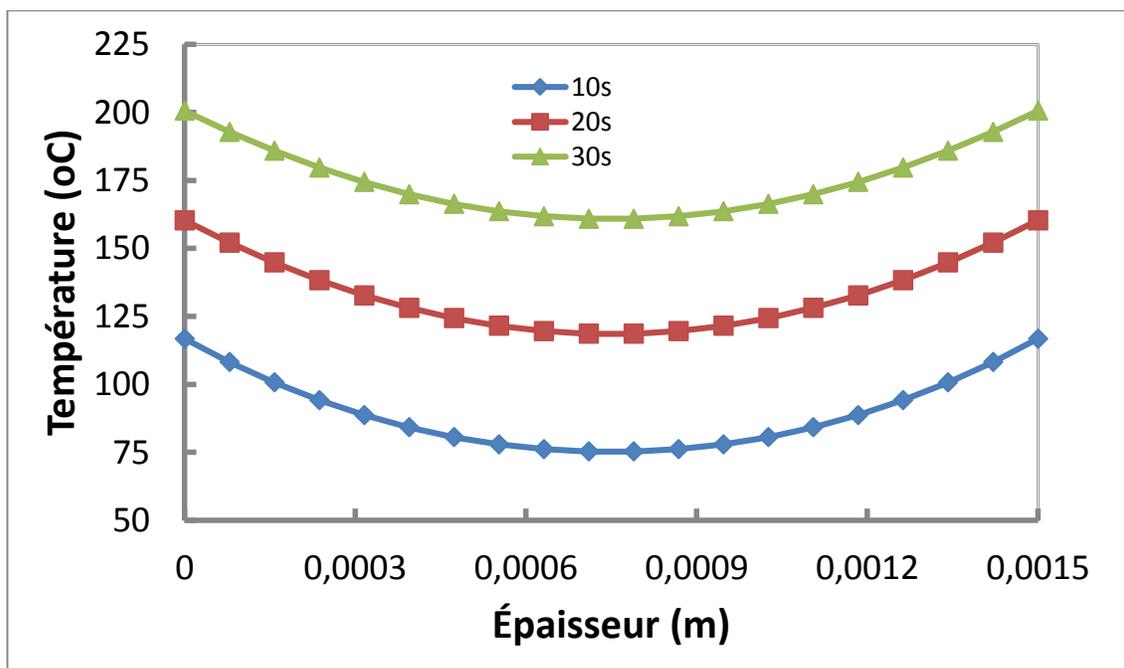
**Figure 5-13** : Distribution de la température sur la trace avant des membranes à 0%,1%, 5%, 15% à 30s de chauffage



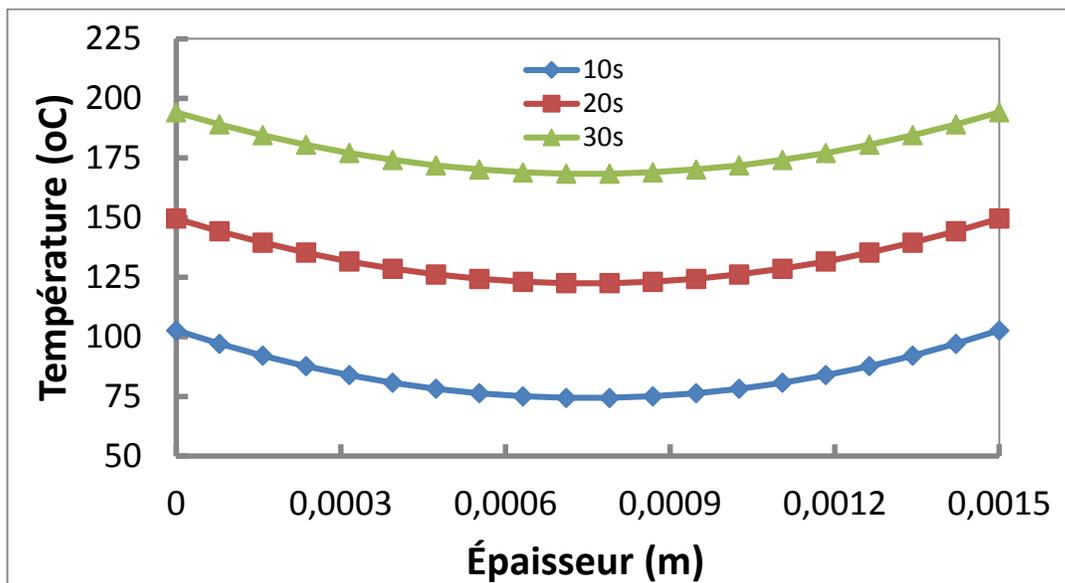
**Figure 5-14** : Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 0% à 10s, 20s et 30s de chauffage



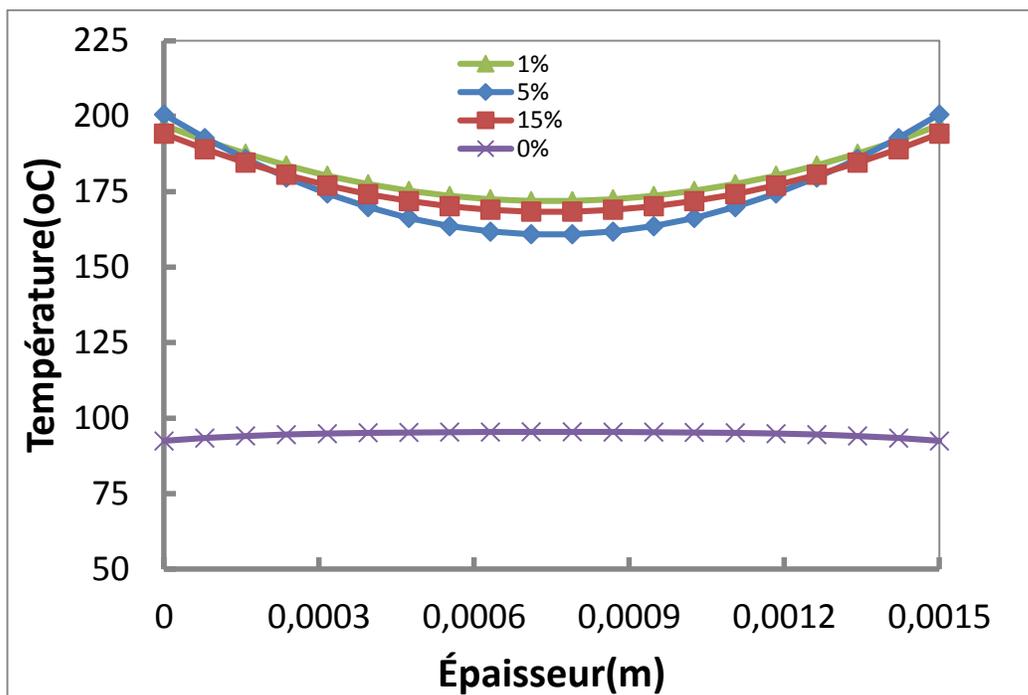
**Figure 5-15 :** Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 1% à 10s, 20s et 30s de chauffage



**Figure 5-16 :** Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 5% à 10s, 20s et 30s de chauffage



**Figure 5-17 :** Distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane à 15% à 10s, 20s et 30s de chauffage



**Figure 5-18 :** Distribution de la température à travers l'épaisseur des membranes à 0%,1%, 5%, 15% à 30s de chauffage

Les **figures 5-14 à 5-17**, représentent la distribution de la température à travers l'épaisseur de la membrane PET vierge, des composites à 1%, 5% et 15% fibres de chanvre, respectivement, au temps 10, 20 et 30 secondes de chauffage.

On observe un profil de température moins prononcé vers le bas pour le PET vierge que pour les composites chargés de fibres de chanvre. La comparaison des évolutions de températures (**Fig. 5-18**) montre que l'ajout de fibres dans la matrice PET affecte l'accélération du chauffage de la préforme.

## CHAPITRE 6

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

#### 6.1 CONCLUSIONS

Pour les secteurs de thermoformage et de soufflage des préformes thermoplastiques minces, semi-transparentes (fibreuses ou non), l'étape du chauffage a une incidence capitale sur la qualité des pièces fabriquées. C'est dans ce cadre que le projet est inscrit et il concerne le développement d'une méthodologie hybride qui permet de modéliser en thermoformage, le chauffage infrarouge des feuilles thermoplastiques minces, chargées ou non de fibres. La méthode hybride proposée dans ce travail couple l'équation d'énergie 3D non linéaire et transitoire à l'équation de transfert radiatif 1D. Pour la modélisation numérique, nous avons considéré la méthode des éléments finis 3D, en implicite, pour l'équation d'énergie et la méthode des ordonnées discrète 1D pour l'équation de transfert radiatif. Le modèle numérique développé tient compte des pertes par convection avec le milieu ambiant.

À des fins de validation, les résultats numériques obtenus par la modélisation hybride sont confrontés et validés avec des résultats analytiques et expérimentaux. Ensuite, dans un premier temps, nous avons étudié l'impact de l'intensité du flux radiatif intercepté par une membrane semi-transparente, de type PET, sur l'évolution transitoire de la température. À cet effet, deux méthodes ont été considérées : la méthode des ordonnées discrètes et le modèle de Beer-Lambert. Les résultats ont montré que l'hypothèse des milieux froids reste a priori valable pour modéliser l'étape de chauffage infrarouge des membranes semi-transparente de

type PET en thermoformage. Finalement, nous avons appliqué la méthode développée pour étudier l'étape de chauffage infrarouge, en thermoformage, de membranes PET chargées de fibres de chanvre. À cet effet, nous avons considérés trois différentes concentrations massiques de chanvre : 5% ; 10% et 15%. Les propriétés des émetteurs infrarouges, les grandeurs spectrales moyennes du PET et l'absorption unidirectionnelle du rayonnement sont considérées dans le modèle hybride. La formulation développée intègre aussi bien l'effet de l'hypothèse d'un milieu non diffusant et non froid.

La thèse est subdivisée en quatre chapitres. Le chapitre 1 introduit le sujet de recherche avec une revue de littérature, la problématique, les objectifs et la méthodologie.

Le chapitre 2 concerne une introduction sur les biocomposites, les méthodes d'élaborations et de caractérisation de ces matériaux. Ensuite, pour les matériaux concernés par ce travail de thèse, une introduction sommaire est présentée sur les composites PET-chanvre. Ses composites sont élaboré au sein du laboratoire de biomatériaux de l'UQAT. Une description sommaire est présentée sur la méthode d'élaboration de ces composites. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux techniques utilisées pour la caractérisation des propriétés thermophysiques des composites PET-Chanvre, propriétés requises pour la simulation numérique du chauffage. Pour la capacité calorifique massique, vis-à-vis la température et le type de composite, nous avons utilisé les résultats issus de DSC (Differential Scanning Calorimetry) pour différents échantillons de PET-Chanvre. Pour les conductivités thermiques effectives de ces composites, nous avons utilisé le modèle de Maxwell. Concernant les masses volumiques des composites, nous avons utilisé la loi des mélanges. Ces propriétés thermophysiques dépendent de la matrice thermoplastique, de la concentration massique en

renfort ainsi que la température. Ces données sont incorporées dans l'équation de l'énergie pour la modélisation du chauffage infrarouge des composites PET-chanvre.

Dans le chapitre 3, différentes méthodes numériques de calcul des facteurs de formes ont été présentées. La méthode semi-analytique a été retenue. Cette méthode a été utilisée pour le calcul de la densité de flux thermique à la surface du récepteur thermoplastique semi-transparent fibreux.

Dans le chapitre 4, les équations qui gouvernent le transfert de chaleur dans les matériaux semi-transparents sont présentées. Pour tenir compte du caractère mince des membranes thermoplastiques, le transfert radiatif interne unidirectionnel est considéré pour la modélisation. Ensuite, une formulation hybride du chauffage infrarouge est développée. Elle consiste à la résolution tridimensionnelle de l'équation de la conservation de l'énergie à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF3D) couplée avec l'équation de transfert radiatif résolue par la méthode des ordonnées discrètes (MOD1D). La formulation intégrale, les discrétisations angulaires, spatiales et temporelles y sont présentées. Les validations numériques (3D et 1D) par rapport aux résultats analytiques dans le cas de chauffage classique ont été effectuées. Pour la validation expérimentale, une description sommaire d'un montage du chauffage infrarouge d'une membrane PET, issue de la littérature, a été présentée. Ensuite, une confrontation des résultats numériques obtenus avec ceux de l'expérimentation est présentée.

Dans le chapitre 5, nous avons étudié, par la modélisation numérique, l'étape de chauffage infrarouge des membranes composite, de type PET-chanvre, en thermoformage. Les profils

de température obtenus pour chaque type de composite sont présentés et comparés entre eux. À cette fin, nous avons considéré quatre cas de simulation de membranes exposées à deux plaques chauffantes en céramique placées en parallèle de part et d'autre de la membrane : PET vierge et PET mélangé à trois cas de concentration massique en fibres de chanvres. Avec l'hypothèse d'un milieu opaque, la comparaison des évolutions de températures montre que l'ajout de fibres dans la matrice PET favorise une accélération du chauffage de la préforme.

La méthode hybride, MEF3D couplée à la MOD1D, présentée dans ce travail de thèse semble être prometteuse pour étudier les problèmes de chauffage infrarouge dans les secteurs de thermoformage et de soufflage des préformes thermoplastiques minces et semi-transparentes. La simulation numérique nous a permis de montrer l'établissement d'un gradient constant de température entre la face avant et arrière de la feuille PET vierge lors du chauffage. Finalement, les résultats des simulations numériques montrent bien que pour des flux modérés, le recours à la loi de Beer-Lambert, pour le terme source radiatif, dans l'équation de la conservation d'énergie, n'affecte pas considérablement la précision des calculs, donc permet une économie de temps.

## 6.2 PERSPECTIVES

C'est sans doute dans les échanges radiatifs en présence d'un milieu semi-transparent que la méthode des ordonnées discrètes (MOD) couplée avec la méthode des éléments finis (MEF) s'exprime le mieux. Le terme source radiatif spectral pourrait être modélisé en 3D par la méthode des ordonnées discrètes en y intégrant la diffusion. Cette méthode pourrait être explorée comme perspective de recherche dans le domaine du chauffage infrarouge des

matériaux semi-transparents chargés de fibres végétales ou minérales. Toutefois, nos intérêts futurs dans le domaine de la modélisation du transfert radiatif en thermoformage et extrusion-soufflage des matériaux semi-transparent s'orientent vers deux aspects :

**a. Au niveau de la modélisation numérique :**

- Identifier la conductivité thermique des biocomposites semi-transparents par la méthode inverse et en fonction de la température ;
- Caractériser la fonction de phase des matériaux thermoplastiques semi-transparents
- Confronter 3D de MOD avec 1D de MOD dans le cas de chauffage infrarouge des membranes minces semi-transparentes.

**b. Au niveau expérimental :**

- Caractériser le spectre radiatif des émetteurs infrarouge (halogènes et céramiques) ;
- Comparer l'impact des émetteurs tubes à halogène par rapport aux émetteurs céramiques sur le chauffage des biocomposites ;
- Caractériser la transmittivité des composites semi-transparents minces en fonction de l'épaisseur ;
- Développer un montage expérimental pour les validations de l'étape de chauffage infrarouge des biocomposites en thermoformage

## RÉFÉRENCES

- Agassant, J. F., & Haudin, J. M., 2012. Mise en forme des polymères thermoplastiques. *Matières plastiques, Propriétés, mise en forme et applications industrielles des matériaux polymères*, 53-110.
- Ahmad, D., 2013. "Analyse et simulation de la déformation de films polymères de décoration au cours de leur mise en forme". Thèse de Doctorat INSA de Lyon.
- Akué-Asseko, C.A., 2014. Modélisation du procédé de soudage laser des composites thermoplastiques. Thèse de doctorat. Université de Lille 1.
- Andrieu, S., 2005. "Étude expérimentale et numérique du chauffage infrarouge de plaques thermoplastiques pour le thermoformage ", Thèse de Doctorat, ENSMP.
- Asllanaj, F., Parent, G., & Jeandel, G., 2007. Transient radiation and conduction heat transfer in a gray absorbing-emitting medium applied on two-dimensional complex-shaped domains. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 52(2), 179-200.
- Aziz, S. H., & Ansell, M. P., 2004. "The effect of alkalization and fibre alignment on the mechanical and thermal properties of kenaf and hemp bast fibre composites": Part 1 - polyester resin matrix. *Composites Science and Technology*, 64(9), 1219-1230. doi: 10.1016/j.compscitech.2003.10.001
- Ambirajan, A. & Venkateshan, S. P. 1993. "Accurate determination of diffuse view factors between planar surfaces". *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 36, no 8.
- Baek, S. W., & Kim, T. Y., 1990. The conductive and radiative heat transfer in rectangular enclosure using the discrete ordinates method. *Heat Transfer*, 433-438.
- Baïlon, J.P. & Dorlot, J.M. 2005. "Des matériaux" troisième édition. Presses internationales Polytechniques, école Polytechnique de Montréal.
- Balasuriya, P.W., Ye, L., Mai, Y.-W., 2001. « Mechanical properties of wood flake-polyethylene composites. Part I: effects of processing methods and matrix melt flow behaviour, *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufact.*, 32, 619-629.
- Balima, O. F., 2010. « Comparison of light transport models based on finite element and the discrete ordinates methods in view of optical tomography applications." *Journal of computational and applied mathematics* 234(7): 2259-2271.
- Bayazitoglu, Y. & Higenyi, O., 1980. « Higher-order differential equations of radiative transfer : P-3 approximation. *AIAAJ.*, 17, n ° 4, p. 424-431.
- Behzad, T., & Sain, M., 2007. Measurement and prediction of thermal conductivity for hemp fiber reinforced composites. *Polymer Engineering & Science*, 47(7), 977-983.
- Bendada, A., & Degiovanni, A, 1996. "Identification de la diffusivité thermique par méthode flash d'échantillons opaques et transparents de résine époxy", Pont à Mousson S.A, 1996.
- Bengtsson, M., Gatenholm, P. and Oksman, K., 2005. «The Effect of Crosslinking on the Properties of Polyethylene/wood Flour Composites, *Composites Science and Technology*, 65: 1468–1479.
- Bledzki, A.K., Reihmane, S., Gassan, J., 1998. « Thermoplastics reinforced with wood fillers: a literature review, *Polym. Plast. Technol. Eng.*, 37, 451-468.

- Bledzki, A.K., Fink, H.-P. & Specht, K., 2004. « Unidirectional hemp and flex EP-and PP-composites: Influence of defined fiber treatments; *Journal of applied polymer science* vol 93, 2150-2156
- Bordival, M., 2009. « Modélisation et optimisation numérique de l'étape de chauffage infrarouge pour la fabrication de bouteilles en PET par injection-soufflage ». Thèse de Doctorat de l'école des mines de Paris, France.
- Bourai, K., 2010. Étude du comportement thermique d'un composite bois-polymère pour une application en rotomoulage. Thèse de doctorat, Université Laval.
- Bourai, K., Riedl, B., & Rodrigue, D., 2013. Effect of Temperature on the Thermal Conductivity of Wood-Plastic Composites. *Polymers & Polymer Composites*, 21(7), 413.
- Boyard, N., 2016. Heat Transfer in Polymer Composite Materials: Forming Processes. John Wiley & Sons.
- Bunyon, R., 2003. « An Investigation of Initial Polymer Sheet Heating Processes During Intelligent Thermoforming. Thèse de doctorat, Lehigh University, 125 p.
- Cantero, G., Arbelaiz, A., Llano-Ponte, R., & Mondragon, I., 2003. « Effects of fibre treatment on wettability and mechanical behaviour of flax/polypropylene composites. *Composites Science and Technology*, 63(9), 1247-1254. doi: 10.1016/s0266-3538(03)00094-0.
- Carlson, B. G. & Lathrop, K. D., 1968. « Transport theory", hi H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, editors, *Computing methods in reactor physics*. Gordon and Breach.
- Chaabane, R., Askari, F., & Nasrallah, S. B., 2011. « A New Hybrid Algorithm for Solving Transient Combined Conduction Radiation Heat Transfer Problems. *THERMAL SCIENCE*, Year 2011, Vol. 15, No. 3, pp. 649-66
- Champin, C., 2007. « Modélisation 3D du chauffage par rayonnement infrarouge et de l'étirage soufflage de corps creux en P.E.T. », Thèse de doctorat, ENSMP, France.
- Chandrasekhar, S., 1960. « Radiative transfer", Dover Publications, New York.
- Charette, A., Erchiqui, F. & Kocaefe, Y.S., 1989. The imaginary planes method for the calculation of radiative heat transfer in industrial furnaces, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 67, pp. 378-384.
- Chung, T.J., & Kim, J.Y., 1982. Radiation view factors by finite elements, *J. Heat Transfer* 14 (1982) 792-795.
- Clegg, D.W., & Collyer, A.A., 1986. *Mechanical Properties of reinforced thermoplastics*, Elsevier, ISBN0-85334-433-7.
- Coelho, P. J., 2014. Advances in the discrete ordinates and finite volume methods for the solution of radiative heat transfer problems in participating media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 145, 121-146.
- Cosson, B., Schmidt, F., Le Maout, Y., & Bordival, M., 2011. Infrared heating stage simulation of semi-transparent media (PET) using ray tracing method. *International Journal of Material Forming*, 4(1), 1-10.
- Debard, Y., 2009. Méthode des éléments finis: thermique. Master Modélisation Numérique et Réalité Virtuelle, Université Lemans, France.
- Degiovanni, A., 1994. Conductivité et diffusivité thermique des solides. Ed. Techniques Ingénieur.

- De Vriendt A. B. 1984. La transmission de la chaleur. Ed. Gaëtan Morin . Vol. 1, Tome 1. Chicoutimi, Québec.
- Dhatt G. & Touzot G. 1984. "Une présentation de la méthode des éléments finis". Collection Université de Compiègne, 2 ième éd.
- Dokainish, M.A. & Subbaraj, K. 1989. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - I. Explicit methods, Computers & Structures, Vol 32(6), pp 1371-1386.
- Drapier, S., & Fortunée, R., 2015. Méthodes Numériques d'Approximations et de Résolution en Mécaniques. École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne et École Nationale d'Ingénieurs de Saint-Étienne.
- Duarte, F.M. & Covas, J.A. 2002. "IR sheet heating in roll fed thermoforming Part 1 – Solving direct and inverse heating problems. *Plastics, Rubber and Composites*, vol. 31: 307.
- Ehlert, J.R. & Smith, T.F. 1993. View Factors for Perpendicular and Parallel, Rectangular Plates. *J. Thermophys. Heat Trans.*, vol. 7: 173-174.
- El Bahri, F. Z., Erchiqui, F., Bendada, A. & Bourihane, A., 2010. "Problème inverse d'identification de la diffusivité thermique des bio-composites thermoplastiques par la méthode flash", in 78ème congrès de l'ACFAS / Communication abstract, (Montreal), Mai.
- Ellison, G.C., Mcnaught, R., Eddleston, E.P., (2000), The use of natural fibres in non woven structures for applications as automotive component substrates, UK ministry of agriculture, fisheries and food Agri-Industrial materials, RD report.
- El-Wakil, N., 1991. Etude de Transferts de Chaleur par Conduction, Convection et Rayonnement Couplés dans des Milieux Semi-Transparentes Fluides ou Poreux. Elaboration de Modules de Simulation en Géométrie Bidimensionnelle. Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, France: Order, (91).
- Erchiqui, F. & Dituba, N.G., 2007. Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes pour des surfaces à contours rectilignes, *Internat. J. Thermal Sci.* 46- 284–293.
- Erchiqui, F., Godard, F., A. Koubba & H. Kaddami, 2009-a. Investigation of relaxation properties and potentiality of the thermoformability of HDPE charged by wood fibers, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol.28, No.10.
- Erchiqui, F., Hamani I. & A. Charrette, 2009-b. Modélisation du chauffage infrarouge des membranes thermoplastiques semi-transparentes par la méthode des éléments finis, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 28, pp. 73-84.
- Erchiqui, F., A.S. Fotso Talla & H. Kaddami, 2016. A Numerical Investigation of the use of Novel Melt Processed PET-Hemp Fiber Composites for Thermoforming Applications. *Polymer Engineering and Science*, DOI 10.1002/pen.
- Esser, K., Haberstroh, E., Hüsgen, U. & Weinand, D., 1987. Infrared Radiation in the Processing of Plastics: Precise Adjustment-the Key to Productivity». *Advances in Polymer Technology*, vol.7: 89-128.
- Feingold, A. 1966. Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces. *Proc. Roy. Soc. London, ser. A*, vol. 292: 51-60.
- Field, N. D., Chien, M-C., (1985). " Poly(ethylene Terephthalate)/Cellulose Blends"; *Journal of polymer Science*, vol 30, 2105-2113.

- Filali, M., 2006. Conductivité thermique apparente des milieux granulaires soumis à des contraintes mécaniques: modélisation et mesures. Thèse de doctorat INP de Toulouse.
- Fiveland, W.A., 1982. "A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures ", ASME Paper, 82-HTD-20
- Fiveland, W.A., 1987. "Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. ", Journal of Heat Transfer, August 1987, 109,809-812
- Fotso-Talla S, 2008. « Conception d'une poutre composite en « I » de PET renforcée de chanvre» mémoire de maîtrise, Collège Militaire Royal du Canada, Kingston, Ontario, Canada.
- Fotso-Talla A.S., Erchiqui F., & Godard F., 2013. Thermal properties and stability of PET-Hemp fibers composites, 19th International conference on composite materials, 28 July-2 August, Montréal (Canada)
- Fotso-Talla, A.S., Erchiqui, F., Kocaeffe, D., & Godard, F., 2013b. Élaboration et caractérisation des propriétés thermophysiques des composites PET-fibres de chanvre, 81<sup>ème</sup> Congrès de l'ACFAS, Université Laval, Canada, 6-10 mai.
- Fotso-Talla, A.S., Erchiqui, F., Kocaeffe, & D., Kaddami, H., 2014. "Effect of Hemp Fiber on PET/Hemp Composites". J. Renew. Mater., Vol. 2, No. 4, December.
- Fotso-Talla, A. S., Erchiqui, F., Kaddami, H., & Kocaeffe, D., 2015. "Investigation of the thermostability of poly(ethylene terephthalate)-hemp fiber composites: Extending natural fiber reinforcements to high-melting thermoplastics". Journal of Applied Polymer Science, Volume 132, Issue 37.
- Fotso-Talla, A.S., Erchiqui, F., Godard, F., & Kocaeffe, D., 2016. "An evaluation of the thermal degradation kinetics of novel melt processed PET-hemp fiber composites". Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 1-10.
- Godard, F., Vincent, M., Agassant, J.-F., & Vergnes. B., 2008. Étude du comportement rhéologique et des propriétés mécaniques de composites sciures de bois-polyéthylène haute densité. *Rhéologie*, Vol. 13, 9-21.
- Godard, F., Vincent, M., Agassant, J.-F., & Vergnes. B., (2009). "Rheological behavior and mechanical properties of sawdust/polyethylene composites." Journal of applied polymer science 112(4): 2559-2566.
- Gresho, P. M., Lee, R. L., & Sani, R. L., 1980 "On the Time Dependent Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Two and Three Dimensions," Recent Advances in Numerical Methods in Fluids, Volume 1, Pineridge Press, Swansea, U.K., 27-81.
- Hamani, I., Erchiqui F., & Dituba G. N., 2009. «Modélisation simplifiée de chauffage infrarouge de membranes semi-transparentes de type PET» Société marocaine des Sciences Mécaniques, 9<sup>ème</sup> Congrès de mécanique, Marrakech, Maroc, 21-24 avril 2009.
- Hamani, I, Erchiqui, F., & Dituba, G. N. , 2010. «Modélisation de l'étape de chauffage infrarouge des thermoplastiques semi-transparentes chargés de fibres végétales en thermoformage». 78<sup>ème</sup> Congrès de l'ACFAS, Université de Montréal, École Polytechnique et HEC, 10-14 mai.
- Hamani, I, Erchiqui F., & Hasnaoui, S., 2011. «Caractérisation et modélisation axisymétrique non isotherme de transfert de chaleur dans les bio-composites

- thermoplastiques». 79ième Congrès de l'ACFAS, Université de Sherbrooke et Université Bishops, 9-13 mai 2011.
- Hamani, I, Erchiqui F., & Hasnaoui, S., 2013. «Investigation sur la modélisation de transfert de chaleur par rayonnement infrarouge dans les bio-composites thermoplastiques». 81ième Congrès de l'ACFAS, Université Laval, 6-10 mai 2013.
- Hamilton, D.C., & Morgan, W.R., 1952. Radiant-interchange configuration factors, NASA TN 2836.
- Hanks, A., 2002. Canada: Hemp Industry-In-Progress 1998-2002. *Journal of Industrial Hemp*, 7(2), 87-93.
- Hartwig, K., 1996. Simulation of the stretch-Blow molding process and characterization of the relevant material behavior, Dissertation, RWTH, Aachen.
- Heaslet, M. A., & Warming, R. F., 1965. Radiative transport and wall temperature slip in an absorbing planar medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8(7), 979-994.
- Huang, H.-X., Deng, Y.-H. , & Huang, Y.-F., 2005. "Temperature profiles within reheated preform in stretch blow molding", ANTEC'05 (Boston, Massachusetts), May
- Hottel, H.C. 1931. Radiant heat transmission between surfaces separated by non-absorbing media», *Trans. ASME*, vol. 53, FSP-53-196: 265-273.
- Hottel, H.C. & Sarofim, A.F. 1967 - Radiative transfer. Mc Graw Hill, New York.
- Idicula, M., Boudenne A., Umadevi L., Ibos L., Candau Y., Thomas, S., 2006. Thermophysical properties of natural fiber reinforced polyester composites *Comp. Sci. Tech.*, 66 (15), 2719-2725.
- Incropera, F.P., & Dewitt, D.P., 2001. Introduction to Heat Transfer John Wiley & Sons, New York .
- Islam, M. R., & Pramila, A., 1999. Thermal conductivity of fiber reinforced composites by the FEM. *Journal of Composite Materials*, 33(18), 1699-1715.
- Jamaluddin, A. S., & Smith, P. J., 1988. Predicting radiative transfer in axisymmetric cylindrical enclosures using the discrete ordinates method. *Combustion Science and Technology*, 62(4-6), 173-186.
- Jannot, Y., & Meukam, P. , 2004. Simplified estimation method for the determination of the thermal effusivity and thermal conductivity using a low cost hot strip. *Measurement Science and Technology*, 15(9), 1932.
- Kabir, M. M., Wang, H., Lau, K. T., Cardona, F., & Aravinthan, T., 2011. Mechanical properties of chemically-treated hemp fiber reinforced sandwich composites. *Composites Part B: Engineering*, In Press, Corrected Proof. doi: 10.1016/j.compositesb.2011.06.003.
- Kaemmerlen, A., Asllanaj, F., Sallée, H., Baillis, D., & Jeandel, G., 2010. Transient modeling of combined conduction and radiation in wood fibre insulation and comparison with experimental data. *International Journal of Thermal Sciences*, 49(11), 2169-2176.
- Khalil, E. & Truelove, J., 1977. Calculations of radiative heat transfer in a large gas filled furnace. *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 4, p. 353-365.
- Kreith, F. 1959. Principles of heat transfer . International Textbook, Scranton.
- Krishnaprakas, C.K. 1998. View-Factor evaluation by quadrature over triangles. *J. Thermophysics*, vol. 12, no. 1.

- Kumar, R. B., Amma, M. L. G., & Thomas, S., 1995. "Short sisal fiber reinforced styrene-butadiene rubber composites". *J. Applied Polymer Science*, 58, 597-612.
- Kunc, T., Lallemand, M., & Saulnier, J. B., 1984. Some new developments on coupled radiative-conductive heat transfer in glasses—experiments and modelling. *International journal of heat and mass transfer*, 27(12), 2307-2319.
- Lappin, J.F. & Martin, P.J. 1996. Sheet Temperature Measurement in Thermoforming. ANTEC'96, Society of Plastic engineers, p. 878-882.
- Lallemand, M. & Sacadura, J.F, 1988. - Transferts radiatifs dans les milieux semi-transparents et couplage avec la conduction et la convection naturelle. *Coll.de Therm. des Systèmes et des Procédés*, p. 205-223.
- Lathrop, K. D., & Carlson, B. G., 1964. Discrete ordinates angular quadrature of the neutron transport equation (No. LA-3186). Los Alamos Scientific Lab., N. Mex..
- Lebaudy, P., 1989. Etude et simulation de la répartition des températures dans un cylindre creux de PET soumis à un rayonnement infrarouge. Université de Rouen.
- Le Maout, Y., Schmidt, F. & El Hafi M. 1997. Measurement and calculation of Preform infrared Heating. 4th International Workshop on advanced Infrared Technology and Application- Firenze, p, 321, Sept.
- Leontiev A. 1985. Théorie des échanges de chaleur et de masse. Ed MIR. Moscou
- Liu, K., Takagi, H., & Yang, Z., 2011. Evaluation of transverse thermal conductivity of Manila hemp fiber in solid region using theoretical method and finite element method. *Materials & Design*, 32(8), 4586-4589.
- Lu, M., (1997). "Wood fiber reinforced polypropylene composites". Ph.D. thesis, Dept. Chemical Engineering, Louisiana State University (1997). Bas du formulaire
- Luo, Y. M., 2012. Modélisation thermo-visco-hyperélastique du comportement du PET dans les conditions de vitesse et de température du procédé de soufflage. Thèse de doctorat. Université Paris-Est.
- Luo, Y., Chevalier, L., Utheza, F., & Nicolas, X., 2014. Simplified Modelling of the Infrared Heating Involving the Air Convection Effect before the Injection Stretch Blowing Moulding of PET Preform. In *Material Forming ESAFORM 2014* (Vol. 611, pp. 844-851). Jari Larkiola.
- Ly, E. H. B., 2008. « Nouveaux matériaux composites thermoformables à base de fibres de cellulose », thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, France.
- Marco, Y., 2003. "Caractérisation multi-axiale du comportement et de la microstructure d'un semi-cristallin : application au cas du PET", Thèse de Doctorat, ENS Cachan, France.
- Maxwell, J.C., 1954. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, 3rd Ed., New York.
- Mazumder, S., Ravishankar, M., 2012. General procedure for calculation of diffuse view factors between arbitrary planar polygons, *Int. J. Heat Mass Transfer* 55 (23-24) 7330–7335.
- Michaeli, W., Papst, W., (2004). "FE-analysis of the two-step stretch blow moulding process", ANTEC'04 Tech Papers 30.
- Michaud, F., 2003. « Reologie de panneaux composites bois/thermoplastiques sous chargement thermomécanique: Aptitude au thermoformage », thèse de doctorat, universités de Laval, Québec et Bordeaux I, France

- Milošević, N., 2008. Mesure de la diffusivité thermique et de la résistance de contact thermique des couches minces sur des substrats par la méthode impulsivienne (Doctoral dissertation, Villeurbanne, INSA).
- Mishra, S. C., & Roy, H. K., 2007. Solving transient conduction and radiation heat transfer problems using the lattice Boltzmann method and the finite volume method. *Journal of Computational Physics*, 223(1), 89-107.
- Mishra, S. C., Krishna, C. H., & Kim, M. Y., 2011. Analysis of conduction and radiation heat transfer in a 2-D cylindrical medium using the modified discrete ordinate method and the lattice Boltzmann method. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 60(3), 254-287.
- Mirhosseini, M., & Saboonchi, A., 2011. View factor calculation using the Monte Carlo method for a 3D strip element to circular cylinder, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 36 (6) 821–826.
- Modest, M. F., 2013. "Radiative Heat Transfer", Third edition, Academic Press, New York.
- Monteix, S., 2001. "Modélisation du chauffage convecto-radiatif de préformes en P.E.T. pour la réalisation de corps creux", Thèse de Doctorat, ENSMP, 2001.
- Morin, J.C. 2000. Guide de l'utilisateur des profils plastiques, syndicat national des profilés plastiques, Paris, France.
- Moura, L. M., 1998. Identification des propriétés radiatives des matériaux semi-transparents diffusants en situation de non-symétrie azimutale du champ radiatif. Thèse de doctorat. INSA de Lyon.
- Nakouzi, S. 2012. "Modélisation du procédé de cuisson de composites infusés par chauffage infra rouge". Thèse de doctorat. Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
- Narayanaswamy, A., 2015. An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 91. 841–847
- Niezgoda, M., Rochais, D., Enguehard, F., Echegut, P., & Rousseau, B. , 2011. Modeling of time-resolved coupled radiative and conductive heat transfer in multilayer semitransparent materials up to very high temperatures. *Applied Physics Letters*, 99(22), 224101.
- Osso, D., Tillement, O., Fleurentin, P., & Guichard, J-L., 1999. Physico-chimie de l'interface bois polymère. Rapport CST 99/001 CAP Sciences & Techniques, Dombasle, France.
- Oza, S., Wang, R., & Lu, N., 2011. «Thermal and Mechanical Properties of Recycled High Density Polyethylene/hemp Fiber Composites ». *International Journal of Applied Science and Technology* Vol. 1 No. 5; September 2011
- Ozisik, M. N., 1993. *Heat Conduction*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, N.Y.
- Patankar, S.V., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Ed, McGraw-Hill, New York.
- Pracella, M., Chionna, D., Anguillesi, I., Kulinski, Z., & Piorowska, E. 2006. Functionalization, compatibilization and properties of polypropylene composites with Hemp fibres. *Composites Science and Technology*, 66(13), 2218-2230. doi: 10.1016/j.compscitech.2005.12.006.

- Rachik, M., 2003. Simulation numérique des procédés de mise en forme et d'assemblage. Thèse de doctorat. Université de Technologie de Compiègne.
- Rammohan, R. 1996. Efficient Evaluation of Diffuse View Factors for radiation, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.39: 1281-1286.
- Razzaque, M. M., Howell, J. R., & Klein, D. E., 1983. "Coupled radiative and conductive heat transfer in a two-dimensional enclosure with gray participating media using finite elements," in *Proceedings of the First JSME/ASME Joint Thermal Conference, Honolulu*, vol. 4, pp. 41-48.
- Reddy, J. N. 1993. *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill, 2 edition.
- Reddy, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. 2004.
- Reddy, J.N. and Gartling, D. K. 2010. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*, 3rd ed., CRC Press, FL, 2010. ISBN 1-42-008598-0.
- Reddy, J. N., 2014. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford.
- Rodiet, C., 2014. *Mesure de Température par Méthodes Multi-Spectrales et Caractérisation Thermique de Matériaux Anisotropes par Transformations Intégrales: «Aspects Théoriques et Expérimentaux»* (Doctoral dissertation, Université de Lorraine; Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)).
- Rosseland, S., 1936. *Theoretical Astrophysics: Atomic Theory and the Analysis of Stellar Atmospheres and Envelopes*, Clarendon Press, Oxford.
- Roudier, A. 2012. "Analyse multi-échelle du comportement hygro-mécanique des fibres de lin". Thèse. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.
- Sadat, H., Wang, C. A., & Le Dez, V., 2012. Meshless method for solving coupled radiative and conductive heat transfer in complex multi-dimensional geometries. *Applied Mathematics and Computation*, 218(20), 10211-10225.
- Safavisoohi, B., Sharbati, E., Aghanajafi, C., & Firoozabadi, S. R. K., 2009. Finite difference solution for radiative-conductive heat transfer of a semitransparent polycarbonate layer. *Journal of applied polymer science*, 112(6), 3313-3321.
- Saheb, D.N., Jog, J.P., 1999. Natural fiber polymer composites: A review, *Adv. Polym. Tech.*, 18, 351-363.
- Sakami M., Charette A. & Le Dez V., 1996. " Application of the discrete ordinates method to combined conductive and radiative heat transfer in a two dimensional complex geometry", *JQSRT*, 1996.
- Shapiro, A.B. 1985. Computer implementation, accuracy and timing of radiation view factor algorithms. *J. Heat Transfer*, vol. 107: 730-732.
- Shelby, M.D., 1991. Effects of Infrared Lamp Temperature and Other Variables on the Reheat Rate of PET. *Proceedings of the Conference, ANTEC'91*, pp. 1420-1424.
- Siegel, R., 1998. Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials. *International Journal of Engineering Science*, 36(12), 1701-1739.
- Siegel, R. & Howel, J.R., 2001. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Fourth Ed Hemisphere/Taylor and Francis, Washington.
- Sparrow, E.M. 1963. A New and Simpler Formulation for Radiative Angle Factors. *ASME Journal of heat Transfer*, p.81.
- Steward, F.R. & Cannon, P., 1971. The calculation of radiative heat flux in a cylindrical furnace using the Monte-Carlo method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, t4, p. 245-261.

- Sweeting, R. D., & Liu, X. L., 2004. Measurement of thermal conductivity for fibre-reinforced composites. *Composites Part A: applied science and manufacturing*, 35(7), 933-938.
- Tan, H.P., Maestre, B. & Lallemand, M., 1991 -Transient and steady state combined heat transfer in semi-transparent materials subjected to a pulse or a step irradiation. *J. Heat Transfer*, vol. t 13, n ° 1, p. 166-173.
- Taylor, C.A.D. & Kazmer, D.O. 1992. Experimental and numerical investigations of the vacuum-forming. *Polymer Engineering and Science*, 32(16), p. 1163-1173.
- Thurgood, C.P., Pollard, A. & Becker, H.A, 1995. " The TN quadrature set for the Discrete Ordinates Method " . *Journal of Heat Transfer*, 117 :1068–1070, 1995.
- Thrasher, M.A. 1996. Finite Element Modeling of Radiant Heating on Polymeric Materials. *SPE ANTEC Tech. Papers*, p. 854-857.
- Throne, J.L. 1996. Pattern Heating Polymer Sheet For Thermoforming (TF 501 & TF 505). *Sherwood Technologies, Inc.: Hinckley, OH.*, 1996.
- Trovalet, L. 2011. Résolution numérique des transferts par rayonnement et conduction au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe. Thèse de doctorat. Nancy 1.
- Truelove, J.S., 1987. Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation. *Journal of Heat Transfer*, 109(4), 1048-1051.
- Tsai, J. R., Özişik, M. N., & Santarelli, F., 1989. Radiation in spherical symmetry with anisotropic scattering and variable properties. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 42(3), 187-199.
- Venkateswaran, G., Cameron, M. R. & Jabarin, S. A. 1997. Effect of Temperature Profiles Trough Preform Thickness on the Properties of Reheat-Blown PET Containers. *Advances in Polymer Technology*, vol.17, no.3, p. 237-249.
- Villière, M., Lecoite D., Sobotka, V., 2013. "Experimental determination and modeling of thermal conductivity tensor of carbon/epoxy composite", *Composites: Part A*, vol. 46, pp. 60–68, 2013.
- Viskanta, R. & Anderson, E.E., 1975. "Heat Transfer in Semitransparent Solids", *Advances in heat Transfer* 11, p. 317-441.
- Vujicic, M.R., Lavery, N.P., Brown, S.G.R., 2006. View factor calculation using the Monte Carlo method and numerical sensitivity, *Commun. Numer. Methods Eng.* 22 (3) 197–203.
- Wang, B., Sain, M. & Oksman, K., 2007. Study of the structural morphology of hemp fiber from the micro to the nanoscale; *Appl Compos Mater* 14: 89-103.
- Wang, C. A., Sadat, H., & Tan, J. Y., 2016. Meshless method for solving coupled radiative and conductive heat transfer in refractive index medium. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 676, No. 1, p. 012024). IOP Publishing.
- Wertz, J. L., 2014. Les biocomposites et composites polymère-chanvre en particulier. [valbiom.be](http://valbiom.be).
- Yucel, A., Acharya, S., & Williams, M. L., 1988. Combined natural convection and radiation in a square enclosure. In *Proceedings of the 1988 National Heat Transfer Conference* (pp. 209-218).
- Zare, M., & Nassab, S. G. , 2014. Combined radiative-conduction heat transfert in two dimensional complex géométries with variable thermal conductivity. *IJST*, 38(M2), 275-288.

- Zheng, G. Y. , 2014. Numerical investigation of characteristic of anisotropic thermal conductivity of natural fiber bundle with numbered lumens. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L., 2000. *The finite element method: solid mechanics (Vol. 2)*. Butterworth-heinemann.