

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE EN  
GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M. ING.

PAR  
MOUAMAR YASSER KARNIB, ing. jr.

CALCUL DES DÉRIVÉES DE STABILITÉ POUR LES INTERACTIONS  
AÉROSERVOÉLASTIQUES

MONTREAL, LE 20 AVRIL 2004

© 2004 droits réservés de Mouamar Yasser Karnib, ing. jr.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ruxandra Botez, directrice du mémoire  
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M Stéphane Hallé, président du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M Abdoune Moussa, membre externe du jury  
Spécialiste en navigation, CAE Inc.

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE, 15 AVRIL 2004  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# CALCUL DES DÉRIVÉES DE STABILITÉ POUR LES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES

Mouamar Yasser Karnib

## SOMMAIRE

Le sujet de cette thèse porte sur la recherche dans le domaine multidisciplinaire des interactions aéroservoélastiques qui concernent les interactions des forces aérodynamiques, des forces structurelles d'un avion et de système de commande.

L'aéroservoélasticité s'intéresse à deux aspects différents de la dynamique de l'avion : l'aéroélasticité et la dynamique de vol. L'aéroélasticité porte sur la nature flexible de l'avion et étudie les phénomènes de couplage entre les forces structurelles et forces aérodynamiques tandis que la dynamique de vol considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion.

Une des applications de l'aéroservoélasticité est la suppression active des phénomènes de battement, phénomènes de vibration instables issus du couplage des forces structurelles et aérodynamiques. De telles instabilités peuvent provoquer la perte de contrôle de l'avion, l'affaiblissement de la structure et même entraîner la destruction d'une partie ou de la totalité de l'avion.

Le travail dans cette thèse consiste à établir la théorie de rapprochement des modèles aérodynamiques issus des théories d'aéroélasticité et de la dynamique de vol dans le but d'étudier les interactions aéroservoélastiques en calculant surtout les vitesses de battement.

On présente ici la formulation commune des forces aérodynamiques agissant sur l'avion rigide (en six degrés de liberté) où les forces aérodynamiques sont calculées par les méthodes de Newton, et sur l'avion flexible (modélisé par des théories des éléments finis) où les forces aérodynamiques sont calculées par les méthodes de doublets. Une comparaison entre le calcul des dérivées de stabilité en littérature et nos calculs des dérivées de stabilité a été présentée dans cette thèse en détail et appliquée sur le F-18.

# **DIFFERENTIAL COEFFICIENTS OF STABILITY CALCULATION FOR AEROSERVOELASTIC INTERACTIONS**

Mouamar Yasser Karnib

## **ABSTRACT**

The subject of this thesis shows the research in the multidisciplinary domain of aeroservoelastic interactions which concern the interactions between the aerodynamic forces, structural forces and control systems.

The aeroservoelasticity studies two different aspects of the aircraft dynamics : aeroelasticity and flight dynamics. The aeroelasticity studies the flexible structure of the aircraft and the coupling phenomenon between the structural and aerodynamic forces while the flight dynamics considers the aircraft as a rigid in a feedback configuration and studies the influence of controls on the aircraft dynamics.

One of aeroservoelasticity applications is the active flutter suppression, which are unstable vibrations issued from structural and aerodynamic forces coupling. These types of instabilities may provoke the lost of aircraft control, weakness of the structure and the destruction of one part or the whole aircraft.

In this thesis, we need to establish the theory of fusion of aerodynamic models issued from the aeroelasticity and flight dynamics theories in the aim to study the aeroservoelastic interactions by calculating the flutter speeds.

We present here the common formulation of aerodynamic forces acting on a rigid aircraft (six degrees of freedom) where the aerodynamic forces are calculated by Newton's laws, and on a flexible aircraft (modelled by finite element methods) where the aerodynamic forces are calculated by the Doublet Lattice Methods.

One comparison between the stability derivatives calculations in the literature and our own calculations of these stability derivatives is presented here in detail on the F-18 aircraft.

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin pour faire de ce projet un succès.

J'ai apprécié travailler avec les directeurs des mes travaux, Mme Ruxandra Botez et Mr Adrian Hiliuta, qui ont su me guider, me motiver et me supporter tout au long de mon projet.

Je dédie ce travail à ma famille qui m'a soutenu tout au long de mon projet.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
LISTE DES TABLEAUX .....	vi
LISTE DES FIGURES .....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	xx
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 Recherche bibliographique .....	3
1.1 Introduction .....	3
1.2 Description des logiciels ADAM, ISAC, FAMUSS, ASTROS, AERO, STARS et MSC/NASTRAN .....	6
1.2.1 ADAM (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method) .....	6
1.2.2 ISAC (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls) .....	9
1.2.3 FAMUSS (Flexible Aircraft Modeling Using State Space) .....	12
1.2.4 ASTROS (Automated STRuctural Optimisation System) .....	14
1.2.5 ZAERO .....	14
1.2.6 STARS (STRuctural Analysis RoutineS) .....	15
1.2.7 MSC/Nastran .....	16
CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DE STABILITÉ DE L'AVION .....	18
2.1 Introduction à la stabilité .....	18
2.2 Stabilité statique .....	19
2.3 Stabilité dynamique .....	21
2.4 Le calcul vectoriel de la force totale et de moment total qui agissent sur l'avion rigide .....	26
2.4.1 Les forces agissant sur l'avion .....	26
2.4.2 Les moments agissant sur l'avion .....	29
2.4.3 L'orientation et la position de l'avion (angles d'Euler) .....	32
2.4.4 Introduction des forces de gravité .....	38
2.4.5 La théorie des petites perturbations .....	39
CHAPITRE 3 CALCUL DES COEFFICIENTS DE STABILITE DE L'AVION POUR LE MOUVEMENT LONGITUDINAL.....	49
3.1 Coefficients de stabilité pour l'avion dans le système de référence $a$ ...	49

3.1.1	Introduction sur la méthode de calcul .....	49
3.1.2	Équation pour la force totale $\Delta X$ sur l'axe des $X_a$ .....	53
3.1.3	Équation pour la force totale $\Delta Z$ sur l'axe des $Z_a$ .....	55
3.1.4	Équation pour le moment total $\Delta M$ autour de l'axe des $Y_a$ .....	57
3.2	Équations de l'avion en mouvement longitudinal dans le système des axes inertiels $T$ .....	59
3.2.1	Calcul des forces $\Delta X$ et $\Delta Z$ et moments $\Delta M$ .....	59
3.2.2	Tableau des dérivées de stabilité dans les équations du mouvement longitudinal dans les axes inertiels $T$ .....	62
CHAPITRE 4 LE MOUVEMENT LATÉRAL DE L'AVION DANS LE SYSTEME DES AXES INERTIELLES $T$ .....		64
4.1	Introduction sur le mouvement latéral .....	64
4.2	La force latérale $\Delta Y$ sur l'axe $y_T$ .....	65
4.3	Les moments $\Delta L$ et $\Delta N$ autour des axes $x_T$ et $z_T$ .....	68
4.4	Tableau pour le mouvement latéral de l'avion par rapport aux axes inertiels $T$ .....	71
CHAPITRE 5 DESCRIPTION DE LA METHODE DE CALCUL DES INTERACTIONS AEROSERVOELASTIQUES .....		74
5.1	Équation générale de la dynamique aéroélastique de l'avion .....	74
5.2	Dynamique aéroélastique de l'avion (le calcul de vitesses de battement sur l'avion) .....	78
5.3	Équation de la dynamique aéroélastique de l'avion par rapport aux axes liés à l'avion $a$ (utile aux calcul des manœuvres) .....	82
5.3.1	Matrice de masse des modes rigides $M_{rr}$ .....	82
5.3.2	Équations de la dynamique du vol des modes rigides .....	83
5.3.3	Équation de la dynamique de vol aux petits angles .....	84
5.3.4	Équation de la fusion des théories de l'aérodynamique pour l'avion rigide avec l'aérodynamique pour l'avion flexible .....	87
CHAPITRE 6 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS .....		89
6.1	Résultats .....	89
6.2	Discussion .....	94
6.3	Différences entre nos calculs et les calculs [11] .....	95
6.4	Résultats représentés graphiquement .....	96
CONCLUSION .....		175
ANNEXE 1 : Résultats des simulations et la différence avant et après modification du programme .....		176
BIBLIOGRAPHIE .....		196

## LISTE DES TABLEAUX

### Mouvement longitudinal

Tableau I	La rigidité <b>K</b> (Terme aérodynamique $Q_R$ ).....	62
Tableau II	L'amortissement <b>D</b> (Terme aérodynamique $Q_I$ ).....	62
Tableau III	La masse <b>M</b> .....	63

### Mouvement latéral

Tableau IV	La rigidité <b>K</b> (Terme aérodynamique $Q_R$ ).....	72
Tableau V	L'amortissement <b>D</b> (Terme aérodynamique $Q_I$ ).....	72
Tableau VI	La masse <b>M</b> .....	73
Tableau VII	Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement longitudinal de l'avion dans le système lié à l'avion ( <b>Matrice généralisée aérodynamique de la rigidité</b> ) .....	95
Tableau VIII	Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement longitudinal de l'avion dans le système lié à l'avion ( <b>Matrice généralisée aérodynamique de l'amortissement</b> ) .....	95
Tableau IX	Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion dans le système lié à l'avion ( <b>Matrice généralisée aérodynamique de la rigidité</b> ) .....	95
Tableau X	Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion dans le système lié à l'avion ( <b>Matrice généralisée aérodynamique de l'amortissement</b> ) .....	96
Tableau XI	Résultats des simulations et la différence avant et après modification du programme .....	177

## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1.1	Triangle d'interaction des disciplines.....	3
Figure 1.2	Architecture du logiciel ADAM.....	6
Figure 1.3	Architecture du logiciel ISAC.....	9
Figure 1.4	Architecture du module ASE de ZAERO.....	15
Figure 1.5	Architecture du logiciel STARS.....	15
Figure 2.1	Schéma d'un avion équipé avec des actionneurs et capteurs.....	18
Figure 2.2	Schéma de stabilité statique de l'avion.....	20
Figure 2.3.a	Mouvement de stabilité dynamique positive non-oscillatoire.....	21
Figure 2.3.b	Mouvement de stabilité dynamique négative non-oscillatoire ( <i>divergence</i> ).....	22
Figure 2.3.c	Mouvement de stabilité dynamique neutre non-oscillatoire.....	22
Figure 2.3.d	Mouvement de stabilité dynamique positive oscillatoire ( <i>amorti</i> ).....	22
Figure 2.3.e	Mouvement de stabilité dynamique neutre oscillatoire ( <i>non – amorti</i> )....	23
Figure 2.3.f	Mouvement de stabilité dynamique négative oscillatoire ( <i>divergence</i> )..	23
Figure 2.4	Les systèmes de référence liés à la Terre $T$ et à l'avion $a$ .....	26
Figure 2.5	Les rotations subies par l'avion par rapport à la Terre $T$ .....	33
Figure 2.6	La rotation autour de l'axe $z$ .....	33
Figure 2.7	Forces de gravité agissant sur l'avion sur les trois axes : $x$ , $y$ et $z$ .....	38
Figure 3.1	Les perturbations des forces de portance $R_z$ et de traînée $R_x$ dues aux perturbations dans l'angle de l'attaque $\alpha$ .....	52
Figure 4.1	La configuration géométrique pour le mouvement latéral de l'avion.....	64
Figure 6.1	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	97
Figure 6.2	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	97
Figure 6.3	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $z'$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	97

Figure 6.4	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	98
Figure 6.5	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	98
Figure 6.6	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	98
Figure 6.7	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	99
Figure 6.8	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	99
Figure 6.9	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	99
Figure 6.10	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	100
Figure 6.11	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	100
Figure 6.12	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	100
Figure 6.13	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	101
Figure 6.14	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	101
Figure 6.15	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	101
Figure 6.16	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	102
Figure 6.17	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	102
Figure 6.18	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	102
Figure 6.19	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	103
Figure 6.20	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	103
Figure 6.21	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	103
Figure 6.22	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	104
Figure 6.23	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	104
Figure 6.24	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	104

Figure 6.25	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	105
Figure 6.26	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	105
Figure 6.27	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	105
Figure 6.28	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	106
Figure 6.29	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	106
Figure 6.30	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	106
Figure 6.31	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	107
Figure 6.32	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	107
Figure 6.33	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	107
Figure 6.34	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	108
Figure 6.35	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	108
Figure 6.36	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	108
Figure 6.37	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	109
Figure 6.38	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	109
Figure 6.39	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	109
Figure 6.40	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	110
Figure 6.41	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	110
Figure 6.42	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	110
Figure 6.43	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	111
Figure 6.44	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	111
Figure 6.45	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	111

Figure 6.46	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	112
Figure 6.47	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	112
Figure 6.48	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	112
Figure 6.49	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	113
Figure 6.50	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	113
Figure 6.51	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	113
Figure 6.52	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	114
Figure 6.53	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	114
Figure 6.54	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	114
Figure 6.55	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	115
Figure 6.56	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	115
Figure 6.57	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	115
Figure 6.58	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	116
Figure 6.59	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	116
Figure 6.60	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	116
Figure 6.61	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	117
Figure 6.62	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	117
Figure 6.63	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	117
Figure 6.64	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	118
Figure 6.65	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	118
Figure 6.66	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	118

Figure 6.67	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	119
Figure 6.68	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	119
Figure 6.69	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	119
Figure 6.70	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	120
Figure 6.71	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	120
Figure 6.72	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	120
Figure 6.73	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	121
Figure 6.74	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	121
Figure 6.75	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	121
Figure 6.76	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	122
Figure 6.77	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	122
Figure 6.78	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	122
Figure 6.79	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	123
Figure 6.80	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	123
Figure 6.81	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	123
Figure 6.82	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	124
Figure 6.83	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	124
Figure 6.84	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	124
Figure 6.85	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	125
Figure 6.86	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	125

Figure 6.87	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	125
Figure 6.88	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	126
Figure 6.89	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	126
Figure 6.90	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'angle d'attaque $\alpha$ .....	126
Figure 6.91	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	127
Figure 6.92	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	127
Figure 6.93	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	127
Figure 6.94	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	128
Figure 6.95	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	128
Figure 6.96	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	128
Figure 6.97	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	129
Figure 6.98	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	129
Figure 6.99	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	129
Figure 6.100	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	130
Figure 6.101	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	130
Figure 6.102	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	130
Figure 6.103	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	131
Figure 6.104	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	131
Figure 6.105	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	131
Figure 6.106	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	132

Figure 6.107	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	132
Figure 6.108	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	132
Figure 6.109	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	133
Figure 6.110	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	133
Figure 6.111	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	133
Figure 6.112	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	134
Figure 6.113	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	134
Figure 6.114	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	134
Figure 6.115	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	135
Figure 6.116	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	135
Figure 6.117	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	135
Figure 6.118	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	136
Figure 6.119	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	136
Figure 6.120	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	136
Figure 6.121	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	137
Figure 6.122	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	137
Figure 6.123	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	137
Figure 6.124	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	138
Figure 6.125	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	138

Figure 6.126	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	138
Figure 6.127	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	139
Figure 6.128	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	139
Figure 6.129	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	139
Figure 6.130	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	140
Figure 6.131	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec l'altitude .....	140
Figure 6.132	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec l'altitude .....	140
Figure 6.133	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	141
Figure 6.134	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	141
Figure 6.135	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	141
Figure 6.136	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	142
Figure 6.137	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	142
Figure 6.138	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	142
Figure 6.139	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	143
Figure 6.140	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	143
Figure 6.141	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	143
Figure 6.142	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	144
Figure 6.143	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	144
Figure 6.144	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	144

Figure 6.145	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	145
Figure 6.146	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	145
Figure 6.147	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	145
Figure 6.148	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	146
Figure 6.149	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	146
Figure 6.150	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	146
Figure 6.151	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	147
Figure 6.152	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	147
Figure 6.153	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	147
Figure 6.154	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	148
Figure 6.155	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	148
Figure 6.156	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	148
Figure 6.157	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	149
Figure 6.158	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	149
Figure 6.159	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	149
Figure 6.160	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	150
Figure 6.161	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	150
Figure 6.162	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	150
Figure 6.163	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	151
Figure 6.164	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	151

Figure 6.165	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	151
Figure 6.166	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	152
Figure 6.167	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	152
Figure 6.168	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	152
Figure 6.169	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	153
Figure 6.170	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	153
Figure 6.171	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	153
Figure 6.172	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	154
Figure 6.173	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	154
Figure 6.174	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	154
Figure 6.175	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	155
Figure 6.176	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	155
Figure 6.177	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	155
Figure 6.178	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	156
Figure 6.179	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	156
Figure 6.180	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	156
Figure 6.181	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	157
Figure 6.182	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	157
Figure 6.183	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	157
Figure 6.184	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	158

Figure 6.185	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	158
Figure 6.186	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	158
Figure 6.187	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	159
Figure 6.188	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	159
Figure 6.189	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	159
Figure 6.190	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	160
Figure 6.191	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	160
Figure 6.192	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	160
Figure 6.193	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	161
Figure 6.194	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	161
Figure 6.195	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	161
Figure 6.196	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	162
Figure 6.197	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	162
Figure 6.198	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	162
Figure 6.199	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	163
Figure 6.200	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	163
Figure 6.201	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	163
Figure 6.202	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	164
Figure 6.203	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	164
Figure 6.204	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	164

Figure 6.205	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	165
Figure 6.206	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	165
Figure 6.207	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $z'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	165
Figure 6.208	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	166
Figure 6.209	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	166
Figure 6.210	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	166
Figure 6.211	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	167
Figure 6.212	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	167
Figure 6.213	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $z'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	167
Figure 6.214	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	168
Figure 6.215	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	168
Figure 6.216	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	168
Figure 6.217	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	169
Figure 6.218	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	169
Figure 6.219	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $z'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	169
Figure 6.220	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	170
Figure 6.221	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	170
Figure 6.222	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $y'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	170
Figure 6.223	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	171
Figure 6.224	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	171
Figure 6.225	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $z'$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	171

Figure 6.226	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	172
Figure 6.227	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	172
Figure 6.228	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	172
Figure 6.229	Variation du $\partial F_x$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	173
Figure 6.230	Variation du $\partial F_z$ par rapport à l'angle de tangage $\theta$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	173
Figure 6.231	Variation du $\partial F_z$ par rapport à la vitesse verticale $\dot{z}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	173
Figure 6.232	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de roulis $\Phi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	174
Figure 6.233	Variation du $\partial F_y$ par rapport à l'angle de lacet $\Psi$ (slugs.pi/s <sup>2</sup> ) avec le nombre de Mach .....	174
Figure 6.234	Variation du $\partial F_y$ par rapport à la vitesse latérale $\dot{y}$ (slugs/s) avec le nombre de Mach .....	174

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

### Abréviations

AE	Aéroélasticité
ASE	Aéroservoélasticité
NASA	National Aeronautics and Space Administration
ADAM	Analog and Digital Aeroservoelasticity Method
FAMUSS	Flexible Aircraft Modeling Using State Space
ISAC	Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls
ASTROS	Automated STRuctural Optimisation System
ZAERO	Zona Aerodynamics, de ZONA Technology Inc.
STARS	STRuctural Analysis RoutineS
AFWAL	Air Force Wright Aeronautical Laboratories
MIMO	Multi Input Multi Output (Entrées multiples, sorties multiples)
SAS	Stability Augmentation System (Système d'augmentation de la stabilité)
LS	Least Square (Moindres carrées)
PIO	Pilot Induced Oscillation (Oscillations induites par le pilote)

### Sigles

$c_g$	Centre de gravité
$\alpha$	Angle d'attaque
$\alpha_0$	Angle d'attaque à l'équilibre
$\Delta$	Variation dynamique dans le temps.
$s$	Variable de Laplace avec $s = j\omega$ où $j = \sqrt{-1}$ et $\omega$ est la fréquence naturelle
$U_0$	Vitesse par rapport au sol
$V_{TAS}$	Vitesse vraie (True Air Speed)
$u$	Vitesse selon la direction du nez de l'avion sur l'axe des x
$v$	Vitesse selon la direction de l'aile droite sur l'axe des y

$w$	Vitesse verticale sur l'axe des $z$ , selon la direction perpendiculaire au plan $uv$ ( $xy$ )
$u_0, v_0, w_0$	Vitesses d'équilibre de l'avion
$C_x$	Coefficient de traînée
$C_z$	Coefficient de portance
$C_m$	Coefficient du moment
$b$	Demi longueur de la corde
$c$	Longueur de la corde de l'aile
$D$	Matrice modale d'amortissement
$D_e$	Matrice modale d'amortissement pour $n$ modes élastiques
$D_{N,N}$	Matrice modale d'amortissement pour $N$ nœuds
$k$	Fréquence réduite
$K$	Matrice modale rigidité
$K_e$	Matrice modale rigidité
$K_{N,N}$	Matrice modale de rigidité structurelle pour $N$ nœuds
$M$	Matrice modale de masse
$Mach$	Nombre de Mach
$M_{N,N}$	Matrice modale de masse pour $N$ nœuds
$M_e$	Matrice modale de masse pour $n$ modes élastiques
$q$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles en fonction du temps
$Q$	Matrice modale des forces aérodynamiques généralisées
$q_c$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes de commande
$q_d$	Pression dynamique
$q_e$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes élastiques
$Q_I$	Partie imaginaire de $Q$
$Q_{N,N}$	Matrice modale des forces aérodynamiques généralisées pour $N$ nœuds
$q_r$	Coordonnées généralisées non dimensionnelles pour les modes rigides
$Q_R$	Partie réelle de $Q$

$x_s$	Localisations des capteurs
$\delta_r$	Matrice modale des coefficients d'amortissement
$\eta$	Coordonnées généralisées en fonction de la fréquence
$\eta_c$	Coordonnées généralisées des modes de contrôle
$\eta_e$	Coordonnées généralisées des modes élastiques
$\eta_r$	Coordonnées généralisées des modes rigides
$\Phi$	Matrice modale de forme
$\omega$	Fréquence naturelle
$\rho$	Densité de l'air
$\rho_0$	Densité de l'air au niveau de la mer

## INTRODUCTION

Dans le chapitre 1, nous allons introduire le sujet des interactions aéroserveoélastiques (ASE), donc des interactions entre les forces aérodynamiques, les systèmes de commande et la structure flexible de l'avion. Nous allons décrire les logiciels de calcul de ces types d'interactions aéroserveoélastiques par des éléments finis tels qu'ADAM, ISAC, FAMUSS, ASTROS, ZAERO, STARS et MSC/Nastran. Pour cette thèse, on a utilisé les logiciels STARS et Matlab.

Dans le chapitre 2, nous procéderons à la définition des équations de la stabilité statique et la stabilité dynamique de l'avion. Ces équations incluent les calculs des forces et moments par les lois de Newton, ainsi que les calculs des forces gravitationnelles. On va procéder ensuite à la linéarisation des équations par la théorie des petites perturbations autour de la position d'équilibre de l'avion.

Nous présenterons dans le chapitre 3 les calculs des coefficients de stabilité de l'avion pour le mouvement longitudinal tandis qu'au chapitre 4 les calculs des coefficients de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion. Dans les deux chapitres, ces deux types de calculs (latéral et longitudinal) ont été réalisés premièrement dans le système de coordonnées lié à l'avion  $a$  et deuxièmement dans le système de coordonnées lié à la terre  $T$  (système inertiel).

Dans le chapitre 5, nous présenterons la fusion des équations de la théorie de la dynamique de vol (en Matlab) avec les équations des modélisations aéroélastiques (AE) de l'avion (en STARS). On a besoin de cette présentation car les coefficients de stabilité de l'avion calculés aux chapitres 3 et 4 et entrant dans les calculs des forces et moments sur l'avion rigide (en Matlab) vont remplacer les calculs des forces aérodynamiques par la méthode des doublets sur un avion flexible modélisé par des éléments finis (en STARS).

Dans le chapitre 6, nous présenterons graphiquement les résultats obtenus par nos calculs versus les résultats obtenus par nos collaborateurs [11] pour les coefficients de stabilité. Finalement, nous présenterons en annexe les tableaux des résultats obtenus.

# CHAPITRE 1

## RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

L'aéroservoélasticité (ASE) ou la commande active de stabilité aéroélastique a été un des domaines de la recherche aéronautique les plus actifs pendant les vingt dernières années. L'aéroservoélasticité est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques stationnaires et non-stationnaires qui résultent de mouvement de l'avion et les systèmes de commande de vol.

On peut illustrer l'interaction de ces disciplines par la figure 1.1. Le battement classique, celui qui n'inclut pas l'interaction avec la dynamique du système de commande, est représenté par le côté gauche de triangle d'interaction (*Aéroélasticité*). Le côté horizontal (*Aéroservodynamique*) représente la synthèse de système de commande de vol pour un avion rigide, soit la dynamique du vol.

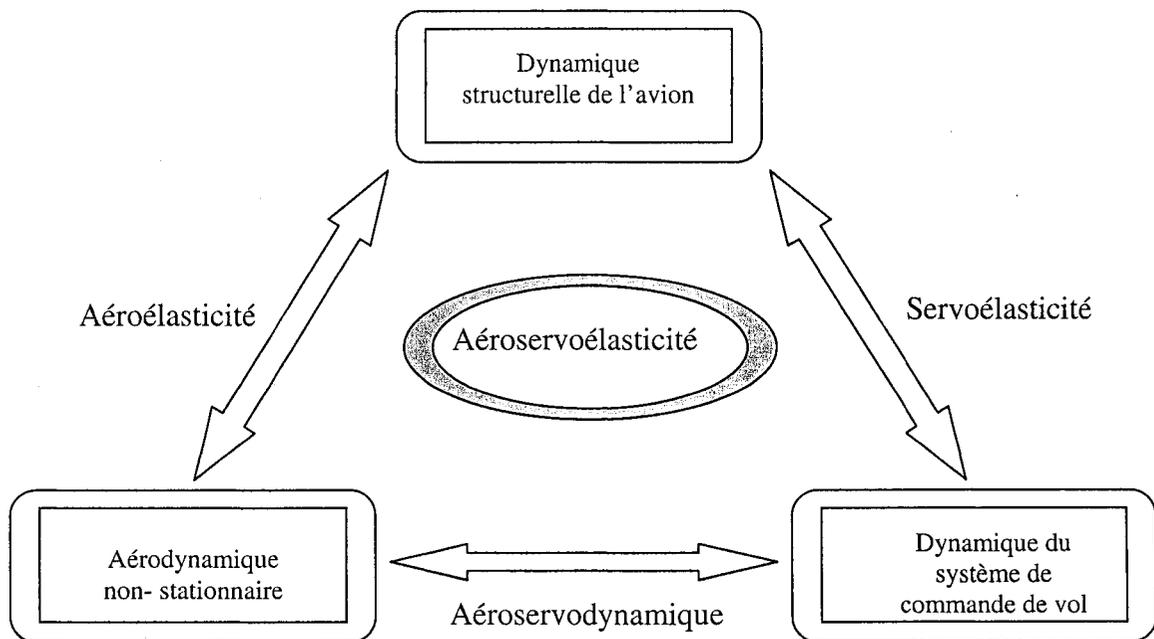


Figure 1.1 Triangle d'interaction des disciplines

Historiquement, la conception des avions a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids, et par l'utilisation des systèmes de commande de vol avec une réponse rapide et une grande autorité. Les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion, ont fait augmenter la flexibilité de la structure.

D'un autre côté, les ingénieurs de la commande de vol ont développé des nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité, et les qualités du vol. Malheureusement, ces efforts sont généralement indépendants les uns des autres – jusqu'à ce que les premières analyses aéroélastiques aient été effectuées.

Les techniques classiques d'analyse de battement sont basées sur des modèles mathématiques détaillés de la répartition de la masse de l'avion, de la rigidité, et de la géométrie. Les caractéristiques structurales dynamiques d'un avion sont représentées par les matrices de masse généralisées et les matrices de rigidité associées aux coordonnées généralisées (modes de vibration), déduites des analyses de vibrations libres.

Dans l'hypothèse de mouvements harmoniques simples, les forces aérodynamiques non-stationnaires dépendent de la fréquence des oscillations, soit des modes de vibration. Elles sont calculées pour une gamme de fréquence couvrant tous les modes de vibration et assemblées dans les matrices des forces aérodynamiques généralisées. Les forces aérodynamiques non-stationnaires, dépendantes de la vitesse et de l'altitude, ont pour effet d'altérer les modes de vibration avec les changements de vitesse et d'altitude.

Ainsi, à cause des effets de l'aérodynamique non-stationnaire sur la structure de l'avion, les variations de vitesse et d'altitude peuvent rendre un des modes de vibration instable et déstabiliser l'avion. Il faut donc investiguer toute l'enveloppe de vol d'un avion, où

l'enveloppe est paramétrée par la vitesse et l'altitude, pour s'assurer de la stabilité de l'avion en tout temps.

De plus, les phénomènes de battements peuvent aussi être déclenchés lors du couplage du système de commande de vol avec les forces aérodynamiques et la flexibilité de l'avion. On s'aperçoit très vite que les analyses aéro-servoélastiques peuvent s'avérer être des problèmes très complexes où la détermination de la stabilité de l'avion n'est pas toujours aisée.

Des modèles mathématiques détaillés et plus complexes seront conçus pour prédire les interactions aéro-servoélastiques et concevoir les systèmes actifs de commande pour les applications sur avions flexibles.

Des applications à la NASA Langley Research Center ont été réalisées sur les avions YF-16 et F-18 et des interactions adverses aéroélastiques ont été découvertes entre les caractéristiques aéroélastiques de la structure et les systèmes de commande de vol. De même l'avion X-29 a été trouvé instable sur une grande partie de son enveloppe de vol.

Plusieurs logiciels de calcul par ordinateur ont été développés dans le but d'analyser les interactions aéro-servoélastiques entre la structure flexible de l'avion et les systèmes de commande de l'avion. Ces logiciels sont ISAC<sup>1</sup>, ADAM<sup>2</sup>, FAMUSS<sup>3</sup>, ASTROS<sup>4</sup>, ZAERO<sup>5</sup>, STARS<sup>6</sup> et MSC/Nastran<sup>7</sup>.

On va décrire la manière dans laquelle les équations de mouvement sont incluses dans ces logiciels de calcul aéro-servoélastiques. Dans la description de la plupart de ces logiciels, les théories de la formulation de l'aérodynamique commune pour l'avion rigide avec l'aérodynamique de l'avion flexible n'ont pas été décrites. Cette nouvelle théorie a été décrite seulement dans le logiciel STARS qu'on va présenter en dernier dans ce chapitre, et les résultats obtenus par notre théorie seront comparés aux résultats obtenus en STARS.

## 1.2 Description des logiciels ADAM, ISAC, FAMUSS, ASTROS, ZAERO, STARS et MSC/NASTRAN

Plusieurs logiciels d'analyse en aéroserveélasticité sont utilisés dans l'industrie aéronautique tels que ADAM<sup>1</sup> (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method), FAMUSS<sup>2</sup> (Flexible Aircraft Modeling Using State Space), ISAC<sup>3</sup> (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls), ASTROS<sup>4,5,6</sup> (Automated STRuctural Optimisation System), ZAERO<sup>7</sup> de Zona Technologies et STARS<sup>8</sup> (STRuctural Analysis RoutineS).

Nous allons décrire brièvement ces logiciels dans les paragraphes suivants. Il faudrait souligner le fait que notre description est organisée en ordre chronologique, c'est-à-dire qu'elle commence par le plus ancien logiciel ADAM et finit par les plus récents logiciels. Le logiciel utilisé dans notre thèse est STARS.

### 1.2.1 ADAM (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method)

L'architecture du logiciel ADAM est donnée dans la figure 1.2 suivante.

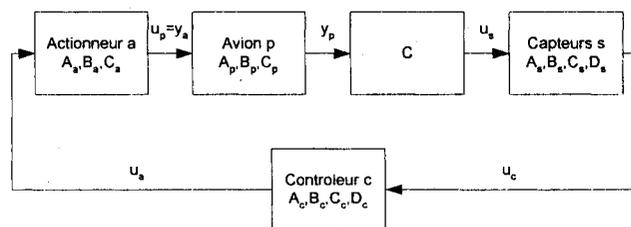


Figure 1.2 Architecture du logiciel ADAM

Le logiciel ADAM<sup>1</sup>, développé par AFWAL (Air Force Wright Aeronautical Laboratories), combine les méthodes d'analyse des forces aérodynamiques non stationnaires agissant sur des systèmes de commande avec plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO) avec la dynamique structurelle d'un avion dans un module conçu pour l'analyse interactive.

Les équations de mouvement aéroélastiques sont :

$$[M_{re}][\ddot{\eta}_{re}] + [C_{re}][\dot{\eta}_{re}] + [K_{re}][\eta_{re}] + q_{dyn}[Q_{re}(k)][\eta_{re}] = -[M_{\delta}][\ddot{\eta}_{\delta}] - q_{dyn}[Q_{\delta}(k)][\eta_{\delta}] \quad (1.1)$$

où  $[M_{re}]$ ,  $[C_{re}]$ ,  $[K_{re}]$ ,  $[Q_{re}]$  sont les matrices généralisées de masse, amortissement, rigidité et aérodynamiques pour les modes rigides  $r$  et élastiques  $e$ ,  $[M_{\delta}]$  et  $[Q_{\delta}]$  sont les matrices généralisées de masse et aérodynamiques pour les modes de contrôle  $\delta$ ,  $[\eta_{re}]$  sont les coordonnées généralisées correspondantes aux modes rigides  $r$  et élastiques  $e$  et  $[\eta_{\delta}]$  sont les rotations des surfaces de contrôle.

Les modes associés avec les instabilités de battement et ceux dans la marge du système de contrôle sont inclus. Ces modes incluent les modes de flexion et torsion des ailes, les modes de flexion de fuselage et les modes de l'empennage.

On calcule la transformée de Laplace de l'équation (1.1) en assumant les conditions initiales nulles, les équations de mouvement sont converties dans des fonctions en  $s = j\omega$ . Ceci résulte en :

$$(s^2[M_{re}] + s[C_{re}] + [K_{re}] + q_{dyn}[Q_{re}(s)])[\eta_{re}(s)] = (-s^2[M_{\delta}] - q_{dyn}[Q_{\delta}(s)])[\eta_{\delta}(s)] \quad (1.2)$$

Les coefficients des forces aérodynamiques non – stationnaires généralisées dans le domaine de la fréquence réduite  $k$  sont des entrées au logiciel ADAM et seront transformés dans le domaine de Laplace  $s$  en utilisant des approximations sous forme des polynômes de Padé et Moindres Carrés (Least Squares LS). On approche les polynômes de Padé par des fractions rationnelles  $[4, 2]$  c'est-à-dire que l'ordre du numérateur est 4 et l'ordre de dénominateur est 2, et on obtient :

$$Q_{ij}(k) = \frac{N_0 + N_1\left(\frac{bs}{V}\right) + N_2\left(\frac{bs}{V}\right)^2 + N_3\left(\frac{bs}{V}\right)^3 + N_4\left(\frac{bs}{V}\right)^4}{1 + D_1\left(\frac{bs}{V}\right) + D_2\left(\frac{bs}{V}\right)^2} \text{ pour chaque } ij \quad (1.3)$$

On combine les équations (1.2) et (1.3), alors l'équation (1.4) est obtenue :

$$\left([I]s^4 + [a_3]s^3 + [a_2]s^2 + [a_1]s + [a_0]\right)[\eta_{re}(s)] = \left([b_4]s^4 + [b_3]s^3 + [b_2]s^2 + [b_1]s + [b_0]\right)[\eta_{\delta}(s)] \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) est transformée dans le domaine de temps et elle est écrite sous la forme d'espace d'état. Les équations (1.1) deviennent :

$$[\dot{x}_p] = [A_p][x_p] + [B_p][u_p], [y_p] = [C_p][x_p] + [D_p][u_p], [u_s] = [C][y_p] \quad (1.5)$$

où  $[\eta_{re}]$  correspond à  $[x_p]$  et  $[\eta_{\delta}]$  correspond à  $[u_p]$ ,  $[A_p]$  est la dynamique structurelle et l'aérodynamique non stationnaire,  $[B_p]$  est l'influence des surfaces de commande sur la dynamique de l'avion,  $[C_p]$  identifie les états du système qui représentent les sorties,  $[C]$  est la matrice modale de participation qui définit la quantité avec laquelle chaque mode participe dans le mouvement de l'avion pour la position des capteurs et  $[D_p]$  est la matrice calculée pour que la fonction de transfert a l'ordre de son numérateur égal à l'ordre de son dénominateur.

Le système de commande de vol MIMO (Multiple Input Multiple Output) est défini par les segments : capteur, contrôleur ou actionneur. Chaque segment est une entrée sous la forme d'une série des blocs des fonctions de transfert. Après avoir assemblé ces blocs pour définir la matrice des fonctions de transfert MIMO pour chaque segment, ces équations sont transformées sous la forme d'espace d'état.

### 1.2.2 ISAC (Interaction of Structures, Aerodynamics and Controls)

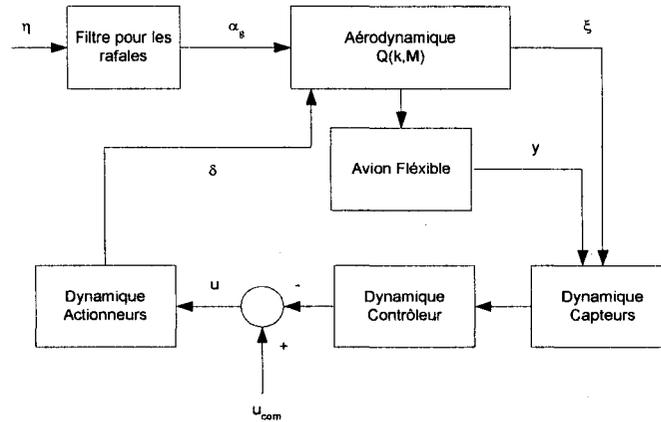


Figure 1.3 Architecture du logiciel ISAC

Le logiciel ISAC<sup>2</sup> est développé par les laboratoires de la NASA Langley Research Center et permet d'étudier et d'analyser les interactions entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques et les systèmes de commande active d'un avion.

La figure 1.3 montre le modèle d'avion en boucle fermée modélisé dans le logiciel ISAC où l'on retrouve les informations suivantes :  $\eta$  est un bruit blanc à l'entrée du système qui génère un angle d'incidence  $\alpha_g$  pour la rafale;  $\delta$  est la déflexion des surfaces de commande;  $u$  est la commande des actionneurs;  $u_{com}$  est le vecteur de commande externe;  $\xi$  est le vecteur de coordonnées généralisées et  $y$  est le vecteur de sortie du système.

Les équations de mouvement écrites dans le domaine de Laplace sont implantées dans un système inertiel de coordonnées attaché aux axes de battement, comme suit :

$$\begin{bmatrix} G_{r\theta}(s) & G_\delta(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{re} \\ \eta_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{dyn} Q_\delta(s) & 0 \\ 0 & T_\delta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_g \\ u \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

où

$$G_{r\theta} = M_{r\theta}s^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{r\alpha}(s)k_{r\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_{r\theta} - q_{dyn}Q_{r\theta} \quad (1.7)$$

et

$$G_{\delta} = M_{\delta}s^2 - q_{dyn}Q_{\delta} \quad (1.8)$$

$$y = T_s(s)C(s)\vartheta = T_s(s)[C_{re}(s)\eta_{re} + C_{\delta}(s)\eta_{\delta} + C_g(s)\alpha_{\delta}] \quad (1.9)$$

Dans les équations ci - haut mentionnées,  $\alpha_g$  est l'angle d'incidence aux rafales,  $u$  sont les commandes aux actionneurs et  $y$  est le vecteur des sorties.  $T_{\delta}(s)$  est une matrice diagonale de la dynamique,  $T_s(s)$  est la matrice de la dynamique des capteurs (en anglais : *sensors*),  $C(s)$  et  $\vartheta$  sont définies en fonction de leurs composantes et le souscrit  $g$  est pris pour les entrées dues aux rafales (en anglais : *gusts*).

Les éléments de  $C(s)$  sont les contributions de la sortie  $y$  par unité de déplacements de coordonnées généralisées, déflexions des surfaces de contrôle, et les angles d'incidence dues aux turbulences. La variable  $Q(M, bs/V)$  représente les forces aérodynamiques généralisées provenant du mouvement des coordonnées généralisées de la structure, des déflexions des surfaces de contrôle et des entrées des vitesses des rafales,  $k_{rei}$  est le  $i$ -ème élément diagonal de la matrice  $K_{re}$ .

Les analyses en boucle fermée sont accomplies en remplaçant  $u$  par l'équation suivante :

$$u = -T_C(s)P_{Cy}y + u_{com} \quad (1.10)$$

où  $P_{Cy}$  est une matrice rectangulaire des uns (1) et zéros (0) qui sélectionnent un set des sorties,  $T_C(s)$  est une représentation des matrices de transfert d'un contrôleur MIMO, et

$u_{com}$  est un vecteur des commandes externes aux actionneurs. Les forces aérodynamiques sont approchées par des fonctions rationnelles :

$$Q(s) = A_0 + A_1 \left( \frac{bs}{V} \right) + A_2 \left( \frac{bs}{V} \right)^2 + \sum_{j=1}^l A_{2+j} \left( \frac{s}{s + \frac{V\beta}{b}} \right) \quad (1.11)$$

Cette approximation, ensemble avec les représentations rationnelles des capteurs, des actionneurs et de la dynamique des rafales permet de générer le modèle sous forme d'espace d'état d'un véhicule aéroélastique. Dans les équations (1.12) et (1.13),  $\eta$  représente les entrées de bruits blancs qui, en passant par les filtres de rafales, produisent des angles d'incidence aux rafales  $\alpha_g$ .

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_g \eta \quad y = Cx + D_u u + D_g \eta \quad (1.12)$$

Le vecteur d'état est :

$$x^T = (\eta_s^T, \dot{\eta}_s^T, x_a^T, x_s^T, x_A^T, x_g^T) \quad (1.13)$$

Les souscrits  $a$ ,  $s$ ,  $A$  et  $g$  se réfèrent aux états dues aux approximations des fonctions rationnelles aérodynamiques (*aerodynamics* =  $a$ ), dynamique des capteurs (*sensors* =  $s$ ), dynamique des actionneurs (*actuators* =  $A$ ) et dynamique des filtres aux rafales (*gust* =  $g$ ), respectivement.

Des analyses en boucle fermée en représentation d'espace d'état peuvent être accomplies par une définition directe en espace d'état du contrôleur ou en convertissant la représentation d'un contrôleur (sous forme d'une matrice de transfert) dans un système équivalent sous forme d'espace d'état. Le contrôleur en espace d'état est écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}_C = A_C x_C + B_C P_{CY} y \quad u = -(C_C x_C + D_C P_{CY} y) + u_{com} \quad (1.14)$$

où le souscrit  $C$  est celui du contrôleur. La matrice  $P_{CY}$  sélectionne un ensemble des sorties utilisées comme retour.

### 1.2.3 FAMUSS (Flexible Aircraft Modeling Using State Space)

FAMUSS<sup>3</sup> est un logiciel d'aéroservoélasticité développé par McDonnell Aircraft Company, utilisé pour construire un modèle linéaire équivalent dans l'espace d'état et invariant dans le temps pour étudier la réponse d'un avion flexible en aéroservoélasticité.

Le modèle d'état produit par cette approche a un plus petit ordre que celui obtenu par des fonctions rationnelles, et n'introduit pas des termes de retard additionnels comme ceux introduits par les fonctions rationnelles.

Les équations de mouvement pour un avion flexible sont :

$$M_{re} \ddot{\eta}_{re} + K_{re} (1 + g_{\eta} i) \eta_{re} - q_{dyn} Q_{re}(k) \eta_{re} = -M_{\delta} \ddot{\eta}_{\delta} - q_{dyn} Q_{\delta}(k) \eta_{\delta} \quad (1.15)$$

où l'amortissement modal est exprimé comme amortissement structurel  $g_{\eta}$  et il est inclus dans le terme de rigidité. L'équation de mouvement dans le domaine de Laplace est donnée par l'équation (1.16) :

$$[M_{re} s^2 + K_{re} (1 + g_{\eta} i) - q_{dyn} Q_{re}(s)] \eta_{re} = [-M_{\delta} s^2 + q_{dyn} Q_{\delta}(s)] \eta_{\delta} \quad (1.16)$$

FAMUSS est différent des autres codes aéroservoélastiques, car les approximations de fonctions rationnelles aérodynamiques ne sont pas requises, telles que les polynômes Padé apparaissant dans les logiciels ISAC, ADAM ou STARS.

FAMUSS va développer un modèle sous forme d'espace d'état qui va correspondre à la réponse de la fréquence de la fonction de transfert pour une range donnée des fréquences. L'équation est manipulée pour produire une fonction de transfert de la sortie modale à l'entrée de la surface de contrôle.

Le problème aéroservoélastique concerne le mouvement de la structure flexible saisi par le système de contrôle de vol. La transformation des coordonnées physiques dans l'emplacement des capteurs se réalise en multipliant la réponse modale de l'équation (1.16) par les formes modales, comme suite :

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\phi_{\delta} \eta_{re}}{\eta_{\delta}} = \phi_{\delta} H_{\eta}(s) \quad (1.17)$$

La réponse est calculée en solutionnant l'équation (1.17) pour plusieurs fréquences  $\omega$ . Les forces aérodynamiques  $Q(k)$  et  $Q_c(k)$  sont interpolées pour chaque valeur de la fréquence réduite  $k$ . FAMUSS modélise l'avion flexible en concordant la réponse en fréquence à la fonction de transfert. Ceci résulte dans un nombre réduit d'équations que le nombre des équations par l'approche par des fonctions rationnelles.

La concordance de la réponse en fréquence de la fonction de transfert donne une bonne indication de la différence entre le système original et le système équivalent capté par le système de contrôle. Le modèle pole - zéro est généré à partir de la réponse d'une fonction de transfert en utilisant des techniques linéaires et non - linéaires. Le modèle pole - zéro est utilisé pour calculer les racines d'un système. Si les données des forces généralisées sont fournies, les racines du système sont ensuite obtenues.

Le modèle sous forme d'espace d'état est généré en utilisant les techniques linéaires et non-linéaires basées sur la réponse en fréquence de la fonction de transfert. Les techniques linéaires demandent que les racines soient entrées manuellement ou d'un

modèle racines-zéros. Le modèle sous forme d'espace d'état généré par le logiciel FAMUSS est couplé avec un modèle d'un système de contrôle de vol en Matrix<sub>x</sub> pour une analyse aéroservoélastique.

#### **1.2.4 ASTROS (Automated STRuctural Optimisation System)**

ASTROS<sup>4,5,6</sup> (Automated STRuctural Optimisation System) est un logiciel de conception multidisciplinaire et d'analyse de structures aérospatiales. Il combine les algorithmes d'optimisation mathématique avec les disciplines d'analyses structurelles traditionnelles pour fournir un modèle automatisé de la structure d'un avion.

Le logiciel ASTROS a été développé par un consortium de Northrop et Air Vehicles Directorate. La dernière version permet au concepteur de définir des fonctions et des contraintes objectives multidisciplinaires; ce qui permet de minimiser ou de maximiser des fonctions définies par l'utilisateur comprenant les paramètres liés à la conception structurelle (le poids, les contraintes, les déplacements, les modes de vibrations, les fréquences...), à l'analyse aéroélastique (la réponse de l'avion aux rafales) et à la conception des commandes de vol (l'efficacité des surfaces de contrôle, les demandes de puissance de contrôle et les déflexions des surfaces de contrôle).

#### **1.2.5 ZAERO**

ZAERO<sup>7</sup> est un logiciel multidisciplinaire développé par la compagnie ZONA Technologies (cette compagnie a été constituée par plusieurs personnes qui ont déjà participé au développement du logiciel ASTROS) dans le domaine de l'aérodynamique, l'aéroélasticité, l'aéroservoélasticité, l'aérothermodynamique et l'aérothermoélasticité dynamique structurelle.

On présente ici un schéma simplifié du module aéroservoélastique du logiciel Zaero :

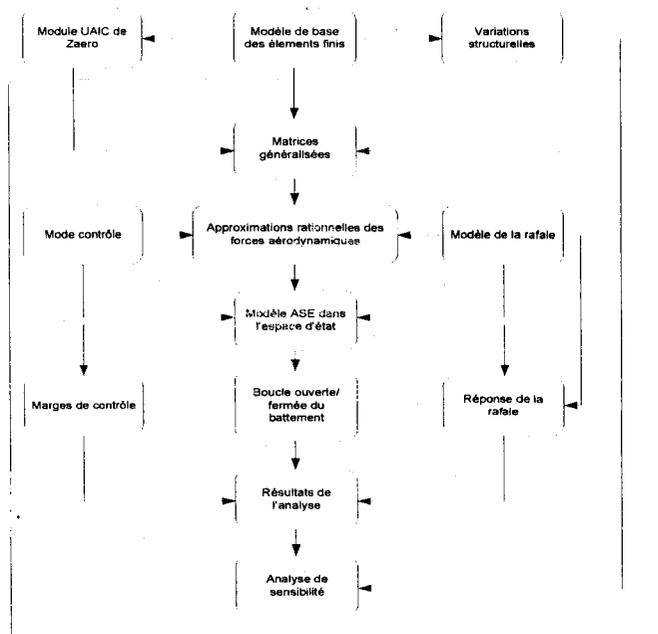


Figure 1.4 Architecture du module ASE de ZAERO

### 1.2.6 STARS (SStructural Analysis RoutineS)

L'architecture du logiciel STARS<sup>8</sup> est donnée dans la figure 1.5.

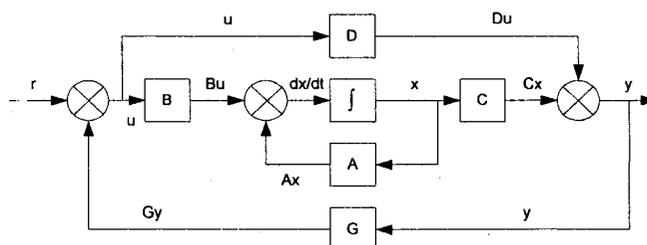


Figure 1.5 Architecture du logiciel STARS

Le logiciel STARS<sup>8</sup> développé par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center est très répandu dans l'industrie aéronautique. Nous allons utiliser, dans cette thèse, les données fournies par le logiciel STARS.

### 1.2.7 MSC/Nastran

Dans MSC/Nastran<sup>9</sup>, le système dynamique linéaire de 2<sup>ème</sup> ordre est représenté sous la forme suivante :

$$M\ddot{q} + Kq = Gu \quad \text{et} \quad y = Hq \quad (1.18)$$

où  $G$  est la matrice d'influence de contrôle,  $H$  est la matrice de prise de mesures,  $q$  sont les coordonnées nodales,  $u$  sont les entrées du système et  $y$  sont les sorties du système. L'équation du système devient :

$$(M\omega_r^2 - K)\phi_{ir} = 0 \quad (1.19)$$

où la matrice des vecteurs propres est  $\phi = [\phi_{1r}, \phi_{2r}, \dots, \phi_{nr}]$ . On va appliquer la transformation  $q = \phi \eta$  à l'équation (1.18) et on va pré - multiplier des deux cotés par  $\phi^T$  pour finalement obtenir l'équation de mouvement dans les coordonnées modales :

$$\phi^T M \phi \ddot{\eta} + \phi^T K \phi \eta = \phi^T G u \quad (1.20)$$

$$\text{et } y = H \phi \eta \quad (1.21)$$

La matrice  $\phi$  a été normalisée. L'amortissement modal est introduit dans l'équation (1.20) et l'équation suivante (1.22) est obtenue :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2\zeta\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi^T G \end{bmatrix} u \quad (1.22)$$

Si l'équation d'état  $x = [\eta \quad \dot{\eta}]$ , alors l'équation (1.22) pourra s'écrire sous la forme  $\dot{x} = Ax + Bu$ . L'équation (1.21) se dérive une fois pour le calcul de la sortie

correspondante à la vitesse  $y_v$ , et deux fois pour obtenir la sortie correspondante à la vitesse  $y_a$ .

$$y = \begin{bmatrix} H_p \phi & 0 \\ 0 & H_v \phi \\ -H_a \phi \Omega^2 & -2H_a \phi \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_a \phi \phi^T G \end{bmatrix} u = Cx + Du \quad (1.23)$$

Les souscrits  $p$ ,  $v$  et  $a$  dénotent (en translation et en rotation) les déplacements, vitesses et accélérations. Les entrées au système écrit sous forme d'espace d'état  $u$  se trouvent dans les points nodaux où les actionneurs agissent avec une force ou un moment. Les sorties  $y$  sont les points nodaux d'intérêt où les positions, vitesses et accélérations sont mesurées par les capteurs.

Dans cette thèse, on va surtout concevoir la fusion des théories de l'aérodynamique de l'avion rigide<sup>10</sup> (en six degrés de liberté) et de l'avion flexible<sup>8</sup> (par la méthode des doublets) et la formulation commune aérodynamique.

Dans la thèse, on a utilisé les logiciels Stars et Matlab pour les études des interactions aéroserveoélastiques sur le F/A-18. On a utilisé les matrices structurelles et aérodynamiques fournies par le logiciel STARS<sup>11,12</sup> suite à la modélisation par éléments finis de l'avion F/A-18 et on a établi notre théorie pour la conception de l'aérodynamique commune pour l'avion rigide et l'avion flexible en Matlab. Il existe un manque énorme de documentation dans ce domaine.

## CHAPITRE 2

### ÉQUATIONS DE STABILITÉ DE L'AVION

#### 2.1 Introduction à la stabilité

Dans la discipline de la *stabilité et commande de l'avion* on va apprendre la manière avec laquelle l'avion peut voler et la facilité avec laquelle il peut être contrôlé.

Par stabilité, on va comprendre la tendance de l'avion de revenir à sa position d'équilibre après avoir été perturbé. La perturbation provient des actions de commande de la part du pilote ou des phénomènes atmosphériques. Les perturbations atmosphériques peuvent être des rafales de vent ou des turbulences de l'air.

On considère la stabilité d'un avion excellente, lorsque le pilote n'est pas fatigué en contrôlant constamment l'avion soumis aux perturbations externes. Les avions aillant très peu ou pas de stabilité aérodynamique ne sont pas sécuritaires pour voler, sauf s'ils sont équipés d'un appareil électro-mécanique appelé système d'augmentation de la stabilité (en anglais : *Stability Augmentation System*).

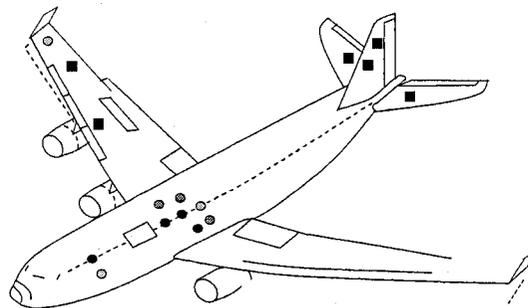


Figure 2.1 Schéma d'un avion équipé avec des actionneurs et capteurs

Deux conditions de vol sont nécessaires pour l'accomplissement d'un vol excellent de l'avion. Celui-ci devrait être capable d'achever son vol en équilibre et devrait être capable de manœuvrer sur une grande plage des vitesses de vol et des altitudes. Pour achever l'équilibre ou performer des manœuvres, l'avion devrait être équipé des contrôles aérodynamiques et propulsifs. Le design et la performance des systèmes de commande sont une partie intégrale de la stabilité et de contrôle de l'avion.

Les caractéristiques de stabilité et de contrôle de l'avion sont liées aux qualités de vol ou de maniabilité. Il est important au pilote que l'avion possède des qualités de maniabilité satisfaisantes. Les avions avec des qualités de maniabilité faibles sont difficiles à voler et peuvent être potentiellement dangereuses. Les pilotes ont des opinions sur les avions en se basant sur les qualités de maniabilité de l'avion. Un avion est considéré d'avoir un design faible si il n'a pas des qualités de vol. Dans l'étude de la stabilité et du contrôle, on s'intéresse à ce qui rend l'avion stable, comment on va designer les systèmes de commande, et quelles conditions sont nécessaires pour obtenir des bonnes qualités de maniabilité?

## 2.2 Stabilité statique

La stabilité est une propriété de l'état d'équilibre. Pour discuter de la stabilité, on devrait premièrement définir ce qu'on veut entendre par l'*équilibre*. Si un avion devrait rester en vol uniforme stationnaire, la force résultante et le moment résultant dans le centre de gravité *cg* sont égaux à zéro. Un avion satisfaisant ces conditions est dans l'état d'équilibre ou il vole pour une condition de vol. De l'autre côté, si la somme des forces et les moments n'est pas nulle, l'avion aura des accélérations en translation et en rotation.

Le sujet de la stabilité de l'avion se divise en stabilité statique et dynamique. La stabilité statique est la tendance initiale d'un avion de revenir dans sa position d'équilibre (angle

d'attaque d'équilibre  $\alpha_0$ ) après avoir été perturbé. Un exemple des types de la stabilité statique est illustré dans la figure 2.2.

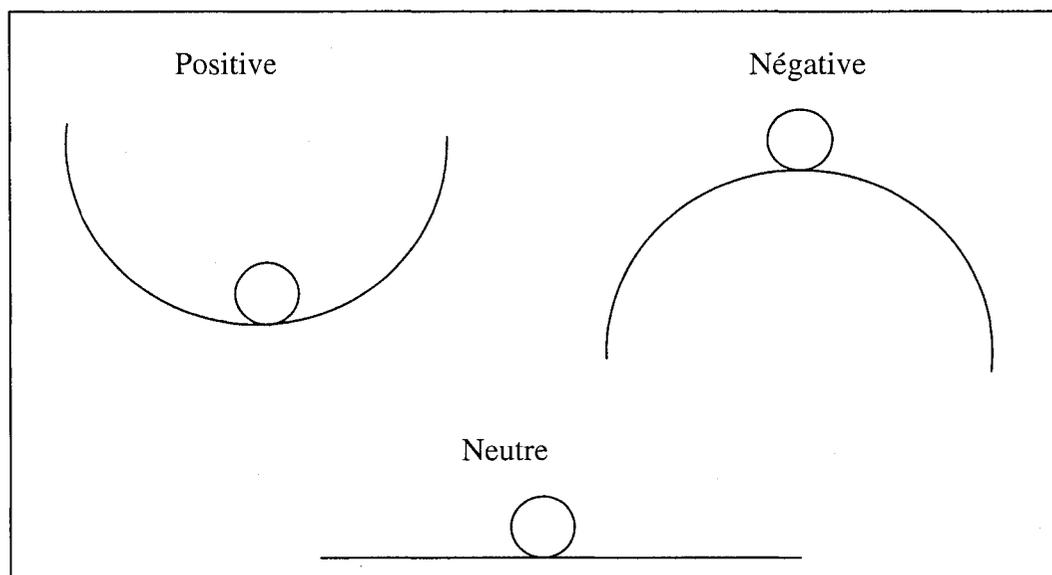


Figure 2.2 Schéma de stabilité statique de l'avion

Si le ballon se déplace du fond du bol, le ballon devrait, par l'attraction gravitationnelle, revenir au fond du bol (les forces et les moments tendent de remettre le ballon dans sa position d'équilibre). Une telle situation se réfère à un point d'équilibre stable, donc le ballon aura une *stabilité statique positive*.

De l'autre côté, si on était capable de balancer un ballon sur le bol montré dans la figure 2.2, alors n'importe quel déplacement à partir du point d'équilibre pousserait le ballon à sauter en dehors du bol. Dans ce cas, le point d'équilibre devient point d'équilibre instable, et on dit que le ballon a la *stabilité statique négative*.

Le dernier exemple est montré dans la figure 2.2, où le ballon se trouve sur une surface plate. Dans ce cas, lorsque le ballon se déplacerait à partir de sa position d'équilibre dans une autre position, le ballon resterait dans sa nouvelle position. Cet exemple se

classifierait en point d'équilibre stable neutre et représente la frontière entre la stabilité statique positive et l'instabilité statique (stabilité négative).

Le point important dans cet exemple serait que s'il existe un point d'équilibre stable, l'avion devrait développer une force et / ou un moment qui vont ramener l'avion dans sa position initiale d'équilibre.

### 2.3 Stabilité dynamique

On regarde ici surtout la variation avec le temps du mouvement de l'avion après avoir été perturbé à partir de la position d'équilibre. Les figures 2.3.a - 2.3.f montrent les mouvements possibles de l'avion qui apparaîtraient lorsque l'avion serait perturbé à partir de sa position d'équilibre, la variation de l'amplitude du mouvement  $A$  avec le temps  $t$ .

L'avion pouvait être statiquement stable, mais dynamiquement instable. La stabilité statique ne garantit pas la stabilité dynamique de l'avion. Par contre, si l'avion est stable du point de vue dynamique, il devrait être stable du point de vue statique.

Les figures 2.3.a - 2.3.c montrent des exemples des mouvements non - oscillatoires de stabilité dynamique, tandis que les figures 2.3.d - 2.3.f montrent des exemples des mouvements oscillatoires de stabilité dynamique.

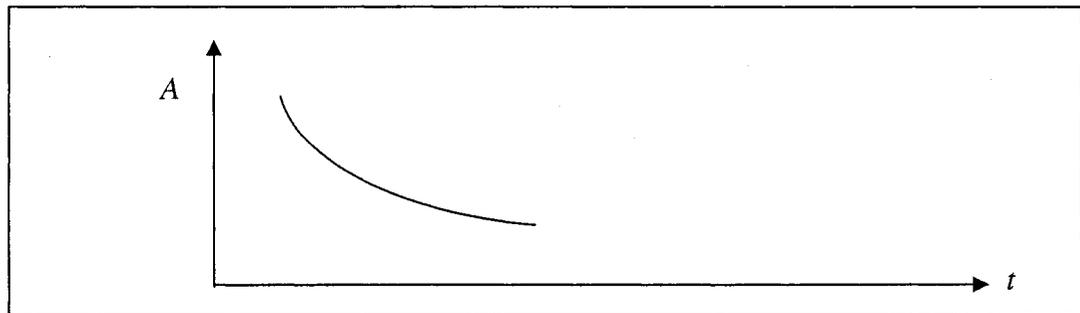


Figure 2.3.a Mouvement de stabilité dynamique positive non-oscillatoire

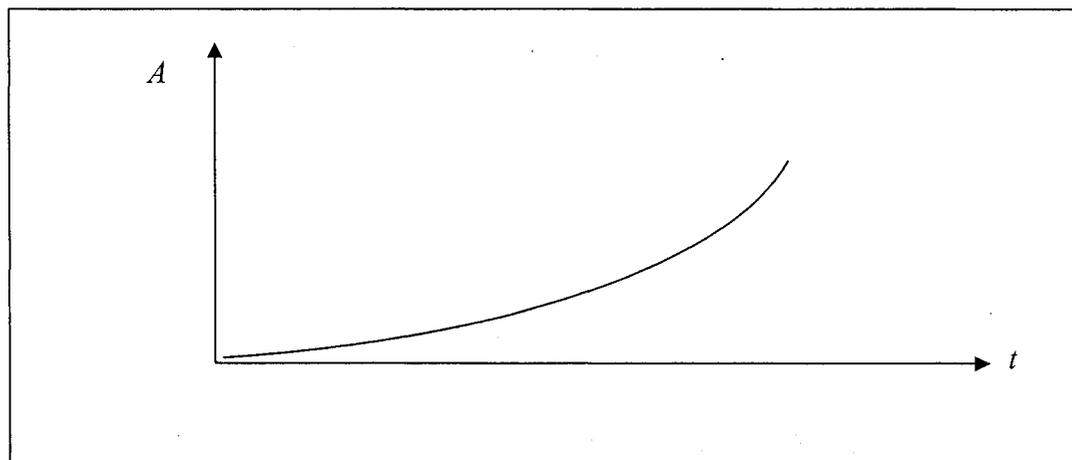


Figure 2.3.b Mouvement de stabilité dynamique négative non-oscillatoire (*divergence*)

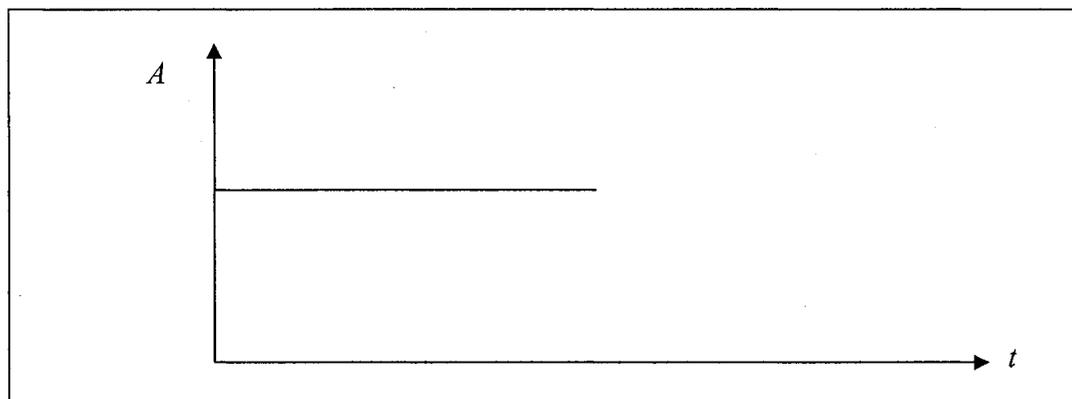


Figure 2.3.c Mouvement de stabilité dynamique neutre non-oscillatoire

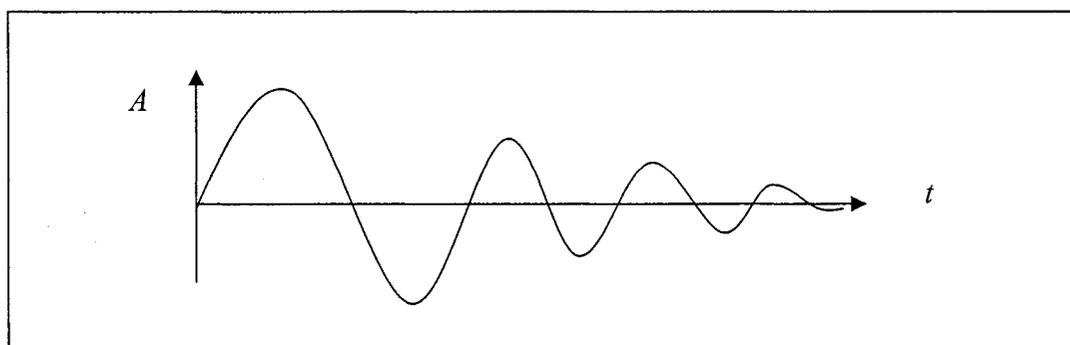


Figure 2.3.d Mouvement de stabilité dynamique positive oscillatoire (*amorti*)

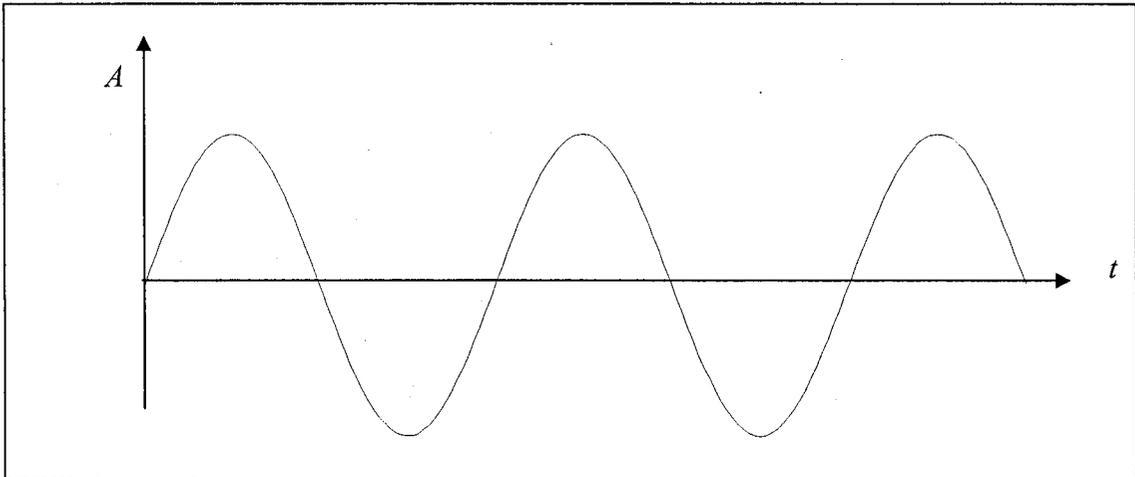


Figure 2.3.e Mouvement de stabilité dynamique neutre oscillatoire (*non – amorti*)

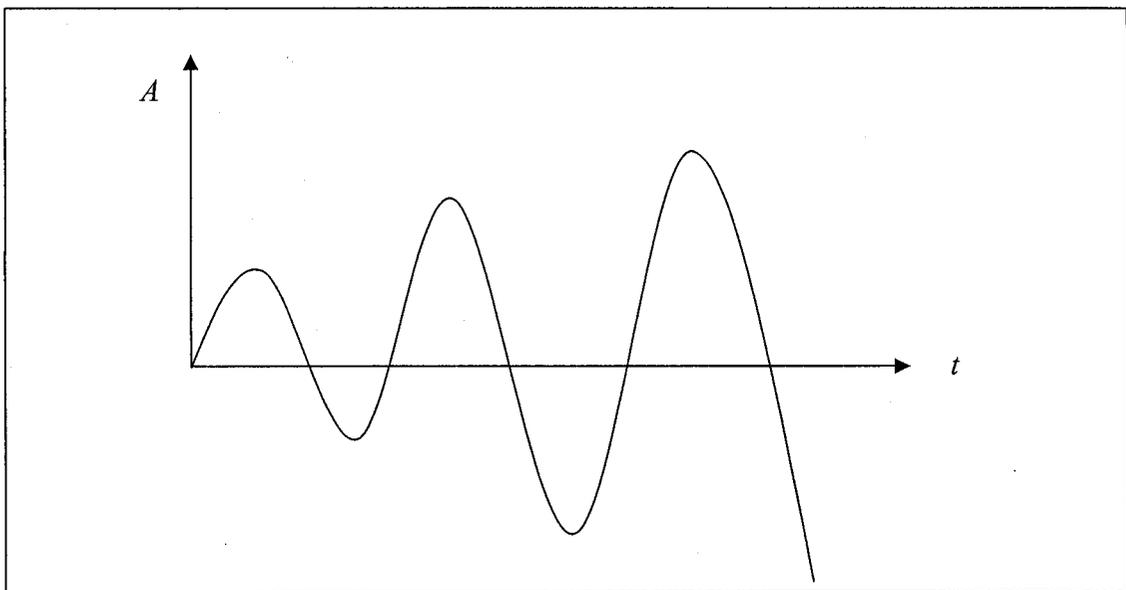


Figure 2.3.f Mouvement de stabilité dynamique négative oscillatoire (*divergence*)

La réduction de la perturbation avec le temps indique qu'il existe une résistance au mouvement et, par la suite, l'énergie est dissipée. La dissipation de l'énergie s'appelle amortissement positif. Si l'énergie est ajoutée au système, alors on aura un amortissement négatif. L'amortissement positif pour un avion est fourni par des forces et des moments qui apparaissent lors du mouvement de l'avion.

Dans le cas de l'amortissement positif, ces forces et moments vont s'opposer au mouvement de l'avion et causer l'amortissement de la perturbation avec le temps. Un avion avec l'amortissement aérodynamique négatif est dynamiquement instable; pour faire voler un tel avion, l'amortissement artificiel serait désigné dans l'avion. L'amortissement artificiel est fourni par un système d'augmentation de la stabilité (SAS).

Ce système est un appareil électro-mécanique qui va saisir le mouvement non-désirable et qui va déplacer les contrôles appropriés pour amortir le mouvement. Ceci est accompli avec des mouvements faibles de contrôle et, alors, les actions de commande du pilote ne sont pas influencées par le système.

Le degré de la stabilité dynamique est d'un intérêt particulier au pilote et au designer. La stabilité dynamique est spécifiée habituellement par le temps que prend la perturbation pour qu'elle soit amortie à la moitié de l'amplitude initiale ou, dans le cas d'un mouvement instable, le temps que prend à l'amplitude initiale de la perturbation pour doubler. Dans le cas d'un mouvement oscillatoire, la fréquence et la période du mouvement sont extrêmement importantes.

Jusqu'à maintenant, on a discuté la réponse de l'avion aux perturbations externes pendant que les contrôles sont maintenus fixés. Quand on ajoute le pilote au système, des complications additionnelles peuvent apparaître. Par exemple, un avion stable dynamiquement aux perturbations externes avec les contrôles fixés peut devenir instable par des actions de commande de la part du pilote.

Si le pilote essaye de corriger le mouvement pour une perturbation, et au cas où son entrée de commande est en dehors de la phase du mouvement oscillatoire de l'avion, les actions de commande vont augmenter le mouvement plus que le corriger.

Ce type de réponse de l'avion de la part du pilote est appelé *oscillation induite du pilote (PIO)*. Il y a beaucoup de facteurs qui contribuent à la tendance *PIO* de l'avion. Parmi ces facteurs, on peut énumérer : l'amortissement aérodynamique insuffisant; l'amortissement du système de commande insuffisant; et le temps de réaction du pilote.

Une compréhension des caractéristiques dynamiques de l'avion est importante dans les qualités de vol ou de maniabilité de l'avion, aussi bien que pour le design des pilotes automatiques. Les qualités de vol de l'avion sont dépendantes de l'opinion du pilote, alors, le pilote aime ou n'aime pas par rapport aux mouvements variés de l'avion.

Il est possible de designer un avion avec des performances excellentes, mais le même avion aurait des qualités de maniabilité non satisfaisantes. Depuis l'année 1960 jusqu'à présent, il existe beaucoup de travaux de recherche sur les opinions des pilotes sur les caractéristiques des mouvements de l'avion, par exemple le rapport d'amortissement et la fréquence des modes de mouvement de l'avion. Il est important de comprendre les caractéristiques dynamiques de l'avion et la relation du mouvement avec les caractéristiques dynamiques de l'avion et l'opinion du pilote.

Le calcul des équations de stabilité de l'avion se réalise selon les lois de la physique et les lois de Newton [10]. Ce calcul se divise sur le mouvement de l'avion en deux grandes parties : la première partie pour le mouvement latéral et la deuxième partie pour le mouvement longitudinal de l'avion.

Le calcul des charges (forces et moments) sera fait par rapport à un système de repère lié au corps de l'avion, fixé dans son centre de gravité (*cg*). Les axes de l'avion sont orientés selon la direction du nez de l'avion *OX*, la direction de l'aile droite *OY* et vers le bas *OZ* (selon la règle de la main droite). Le calcul des forces et moments sera ensuite exprimé en fonction du système de repère de la terre *T*.

orientés selon la direction du nez de l'avion  $OX$ , la direction de l'aile droite  $OY$  et vers le bas  $OZ$  (selon la règle de la main droite). Le calcul des forces et moments sera ensuite exprimé en fonction du système de repère de la terre  $T$ .

## 2.4 Le calcul vectoriel de la force totale et de moment total qui agissent sur l'avion rigide

### 2.4.1 Les forces agissant sur l'avion

Le système avec sous scripte  $a$  est lié à l'avion, quant au système avec sous scripte  $T$  est lié à la Terre. Nous allons d'abord considérer un point matériel de masse  $\delta m$  et en faisant partie de l'avion  $a$  (figure 2.4). Nous allons ensuite calculer les forces dans un système des coordonnées lié à la Terre  $T$ , en utilisant les composantes des vecteurs vus dans le système de l'avion  $a$ .

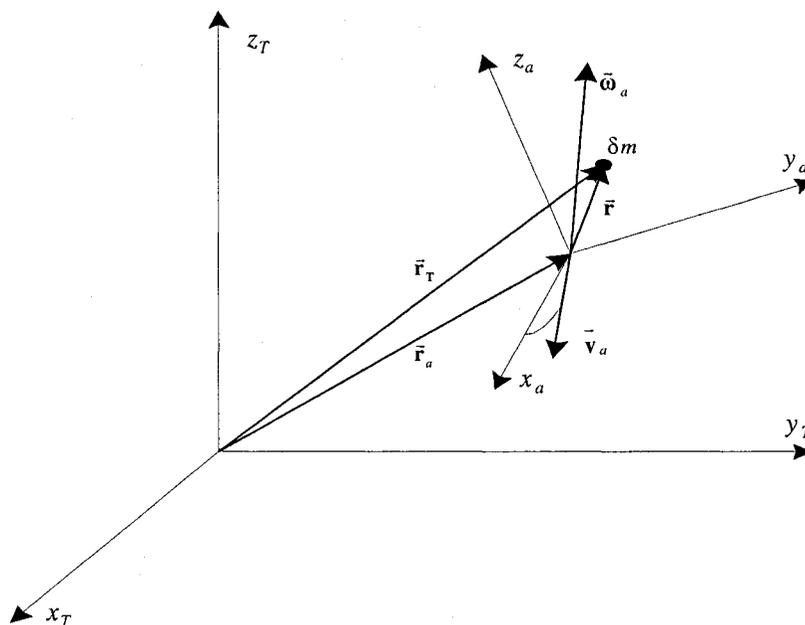


Figure 2.4 Les systèmes de référence liés à la Terre  $T$  et à l'avion  $a$

Les coordonnées de point matériel  $\delta m$  sont  $x_a$ ,  $y_a$  et  $z_a$  et la position de ce point matériel

est décrite par l'équation suivante :

$$\vec{r} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k} \quad (2.1)$$

où  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires sur des axes de l'avion  $x_a, y_a, z_a$ .

Les projections des vecteurs  $\vec{\omega}_a$  et  $\vec{v}_a$  sur les mêmes axes sont  $P, Q, R$  et, respectivement,  $U, V, W$ . On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \vec{v}_a = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} \\ \vec{\omega}_a = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \end{cases} \quad (2.2)$$

La force totale qui agit sur le point de masse  $\delta m$  doit être calculée dans le système de coordonnées inertiel. On considère, avec une très bonne approximation, que le système lié à Terre  $T$  est inertiel. On peut écrire la force élémentaire agissant sur le point matériel de masse  $\delta m$  comme suite :

$$\delta \vec{F} = \frac{d}{dt} (\delta m \vec{v}) \quad (2.3)$$

où la vitesse  $\vec{v}$  a deux composantes : la vitesse du système lié à l'avion vis-à-vis de système inertiel  $\vec{v}_a$  et la vitesse du point matériel considéré vis-à-vis de système lié à

l'avion  $\frac{d\vec{r}}{dt}$ . On peut écrire :

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.4)$$

En remplaçant l'équation (2.4) dans l'équation (2.3), on obtient :

$$\delta \vec{F} = \delta m \vec{v}_a + \frac{d^2}{dt^2} (\delta m \vec{r}) \quad (2.5)$$

La force totale est la somme des forces élémentaires qui agissent sur la totalité des points matériels :

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum(\delta\bar{\mathbf{F}}) = \left(\sum\delta m\right)\frac{d\bar{\mathbf{v}}_a}{dt} + \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum\delta m\bar{\mathbf{r}}\right) \quad (2.6)$$

Le terme  $\sum(\delta m\bar{\mathbf{r}})$  est égal à zéro, parce que le système de coordonnées lié à l'avion a son origine dans le centre de masse de l'avion, par la suite :

$$\bar{\mathbf{F}} = m \frac{d\bar{\mathbf{v}}_a}{dt} \quad (2.7)$$

On peut voir que la force est calculée dans le système inertiel  $T$ , mais on va l'exprimer en fonction de composantes vectorielles dans les équations (2.2), qui se trouvent dans le système lié à l'avion  $a$ . La transformation de la dérivée du vecteur  $\bar{\mathbf{v}}_a$  du système inertiel  $T$  au système lié à l'avion  $a$  est réalisée par l'équation suivante :

$$\left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}_a}{dt}\right)_T = \left(\frac{d\bar{\mathbf{v}}_a}{dt}\right)_a + (\bar{\boldsymbol{\omega}}_a \times \bar{\mathbf{v}}_a)_a \quad (2.8)$$

Dans cette équation, intervient, outre la variation temporelle du vecteur de la vitesse, la variation supplémentaire induite par la rotation du système non inertiel. Par la suite, en utilisant les équations. (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= m \left( U\bar{\mathbf{i}} + V\bar{\mathbf{j}} + W\bar{\mathbf{k}} + \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix} \right) = \\ &= m \left( \dot{U} + QW - RV \right) \bar{\mathbf{i}} + m \left( \dot{V} + RU - PW \right) \bar{\mathbf{j}} + m \left( \dot{W} + PV - QU \right) \bar{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les variables ayant un point au-dessous sont leurs dérivées de premier ordre par rapport au temps. Les composantes de cette force, vues du système inertiel, projetées sur les axes de l'avion, sont :

$$\begin{cases} F_{x_a} = m \left( \dot{U} + QW - RV \right) \\ F_{y_a} = m \left( \dot{V} + RU - PW \right) \\ F_{z_a} = m \left( \dot{W} + PV - QU \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

Les notations américaines  $X, Y, Z$  seront utilisées pour les trois composantes de la force dans le système de coordonnées lié à l'avion  $a$  :

$$\begin{cases} X = m(\dot{U} + QW - RV) \\ Y = m(\dot{V} + RU - PW) \\ Z = m(\dot{W} + PV - QU) \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.4.2 Les moments agissant sur l'avion

On va effectuer les mêmes types de calculs pour les moments, en partant de l'équation (2.4), dans laquelle on va remplacer la dérivée  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  avec sa forme équivalente  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ . Le moment angulaire élémentaire appliqué dans le point matériel est :

$$\delta\vec{H} = (\vec{r} \times \vec{v}) \delta m = (\vec{r} \times \vec{v}_a) \delta m + [\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r})] \delta m \quad (2.12)$$

Le moment angulaire équivalent total est :

$$\vec{H} = \sum (\delta\vec{H}) = \left( \sum \delta m \vec{r} \right) \times \vec{v}_a + \sum [\vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r}) \delta m] \quad (2.13)$$

Le premier terme est nul pour la même raison que celle invoquée dans l'équation (2.6).

Le deuxième terme de l'équation (2.13) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega}_a \times \vec{r}) &= \vec{r} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \vec{r} \times \left[ (Qz_a - Ry_a) \vec{i} + (Rx_a - Pz_a) \vec{j} + (Py_a - Qx_a) \vec{k} \right] = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ Qz_a - Ry_a & Rx_a - Pz_a & Py_a - Qx_a \end{vmatrix} = \\ &= \left[ P(y_a^2 + z_a^2) - Qx_a y_a - Rx_a z_a \right] \vec{i} + \left[ Q(x_a^2 + z_a^2) - Px_a y_a - Ry_a z_a \right] \vec{j} + \end{aligned}$$

$$+\left[R(x_a^2 + y_a^2) - Px_a z_a - Qy_a z_a\right]\bar{\mathbf{k}} \quad (2.14)$$

En remplaçant l'équation (2.14) dans l'équation (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} = & P \sum \left[ (y_a^2 + z_a^2) \delta m \right] \bar{\mathbf{i}} - Q \sum (x_a y_a \delta m) \bar{\mathbf{i}} - R \sum (x_a z_a \delta m) \bar{\mathbf{i}} + \\ & + Q \sum \left[ (x_a^2 + z_a^2) \delta m \right] \bar{\mathbf{j}} - P \sum (x_a y_a \delta m) \bar{\mathbf{j}} - R \sum (y_a z_a \delta m) \bar{\mathbf{j}} + \\ & + R \sum \left[ (x_a^2 + y_a^2) \delta m \right] \bar{\mathbf{k}} - P \sum (x_a z_a \delta m) \bar{\mathbf{k}} - Q \sum (y_a z_a \delta m) \bar{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les éléments suivants, qui apparaissent dans l'équation (2.15), sont les moments d'inertie de l'avion :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum \left[ (y_a^2 + z_a^2) \delta m \right]; \quad I_{xy} = \sum (x_a y_a \delta m); \quad I_{xz} = \sum (x_a z_a \delta m); \\ I_{yy} &= \sum \left[ (x_a^2 + z_a^2) \delta m \right]; \quad I_{yz} = \sum (y_a z_a \delta m); \quad I_{zz} = \sum \left[ (x_a^2 + y_a^2) \delta m \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On remplace les moments d'inertie calculés avec l'équation (2.16) dans l'équation (2.15) et le moment angulaire devient :

$$\bar{\mathbf{H}} = (PI_{xx} - QI_{xy} - RI_{xz})\bar{\mathbf{i}} + (-PI_{xy} + QI_{yy} - RI_{yz})\bar{\mathbf{j}} + (-PI_{xz} - QI_{yz} + RI_{zz})\bar{\mathbf{k}} \quad (2.17)$$

On note les composantes du vecteur  $\bar{\mathbf{H}}$  sur les axes  $x_a, y_a, z_a$  avec  $H_{x_a}, H_{y_a}, H_{z_a}$  :

$$\begin{cases} H_{x_a} = PI_{xx} - QI_{xy} - RI_{xz} \\ H_{y_a} = -PI_{xy} + QI_{yy} - RI_{yz} \\ H_{z_a} = -PI_{xz} - QI_{yz} + RI_{zz} \end{cases} \quad (2.18)$$

ou sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{x_a} \\ H_{y_a} \\ H_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Le plan  $x_a O z_a$  est le plan de symétrie de l'avion, c'est-à-dire que  $I_{xy} = I_{yz} = 0$  et l'équation (2.19) devient :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{x_a} \\ H_{y_a} \\ H_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}P - I_{xz}R \\ I_{yy}Q \\ I_{zz}R - I_{xz}P \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Le moment  $\mathbf{M}$  dans le système inertiel est la dérivé du moment angulaire  $\mathbf{H}$ , et sera écrit sous la façon suivante :

$$\vec{\mathbf{M}} = \left( \frac{d\vec{\mathbf{H}}}{dt} \right)_T = \left( \frac{d\vec{\mathbf{H}}}{dt} \right)_a + (\vec{\omega}_a \times \vec{\mathbf{H}})_a \quad (2.21)$$

Le premier terme de l'équation (2.21) s'écrit sous la forme suivante :

$$\left( \frac{d\vec{\mathbf{H}}}{dt} \right)_a = \dot{H}_x \vec{\mathbf{i}} + \dot{H}_y \vec{\mathbf{j}} + \dot{H}_z \vec{\mathbf{k}} \quad (2.22)$$

et le deuxième terme de l'équation (2.21) s'écrit sous la forme suivante :

$$(\vec{\omega}_a \times \vec{\mathbf{H}})_a = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ P & Q & R \\ H_{x_a} & H_{y_a} & H_{z_a} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

Le moment  $\vec{\mathbf{M}}$  devient, en remplaçant les deux dernières équations dans l'équation

(2.21) :

$$\vec{M} = (\dot{H}_{x_a} + QH_{z_a} - RH_{y_a})\vec{i} + (\dot{H}_{y_a} + RH_{x_a} - PH_{z_a})\vec{j} + (\dot{H}_{z_a} + PH_{y_a} - QH_{x_a})\vec{k} \quad (2.24)$$

avec leurs composantes :

$$\begin{cases} L = \dot{H}_{x_a} + QH_{z_a} - RH_{y_a} \\ M = \dot{H}_{y_a} + RH_{x_a} - PH_{z_a} \\ N = \dot{H}_{z_a} + PH_{y_a} - QH_{x_a} \end{cases} \quad (2.25)$$

On remplace l'équation (2.20) dans le système des équations (2.25) et on écrit la dernière équation (2.25) comme suit :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} + I_{zz}QR - I_{xz}PQ - I_{yy}QR \\ I_{yy}\dot{Q} + I_{xx}PR - I_{xz}R^2 - I_{zz}PR + I_{xz}P^2 \\ I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + I_{yy}PQ - I_{xx}PQ + I_{xz}QR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{P} - I_{xz}\dot{R} + (I_{zz} - I_{yy})QR - I_{xz}PQ \\ I_{yy}\dot{Q} + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) \\ I_{zz}\dot{R} - I_{xz}\dot{P} + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

### 2.4.3 L'orientation et la position de l'avion (angles d'Euler)

Les deux systèmes des coordonnées  $T$  (lié à la Terre) et  $a$  (lié à l'avion), présentés dans la figure 2.4, diffèrent suite à un mouvement de translation et suivi par un autre mouvement de rotation. Les composantes du vecteur vitesse dans le système lié à l'avion  $a$  sont  $U$ ,  $V$  et  $W$ .

Maintenant la question est de trouver les composantes du même vecteur selon les axes du système inertiel lié à la Terre  $T$ .

Pour calculer ces composantes, on néglige la translation des deux systèmes (il suffit que les axes soient parallèles pour notre démarche). Dans un cas plus général, présenté dans la figure 2.5, on est capable d'atteindre cet objectif par trois rotations successives. L'ordre de ces trois rotations est important.

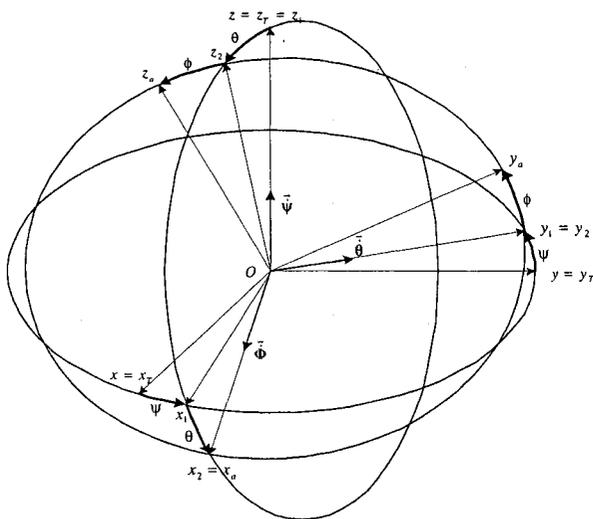


Figure 2.5 Les rotations subies par l'avion par rapport à la Terre  $T$ .

Chaque rotation se fait autour de l'un des trois axes, chaque fois d'un axe différent. Un exemple de rotation autour de l'axe  $Oz_i$  est présenté dans la figure 2.6.

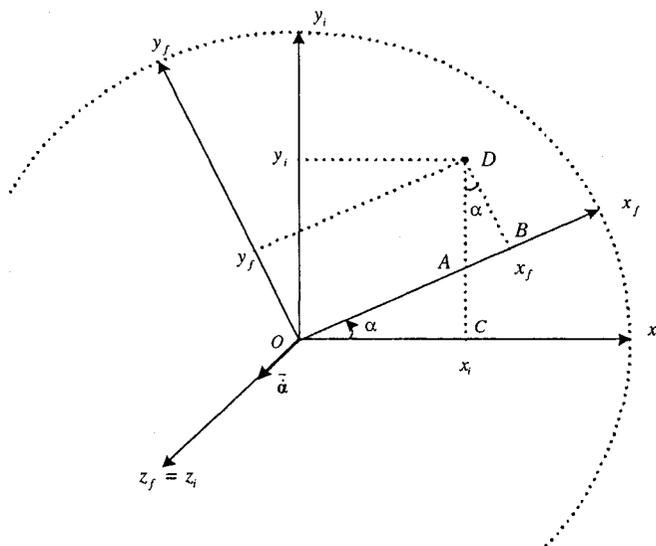


Figure 2.6 La rotation autour de l'axe  $z$ .

On a noté avec le sous-scripte  $i$  les positions initiales et avec le sous-scripte  $f$  les positions finales. La rotation du système d'axes se réalise avec l'angle  $\alpha$  et la vitesse

angulaire  $\alpha$ . Le même point dans l'espace ( $D$ ) a la position  $(x_i, y_i)$  dans le système initial et la position  $(x_f, y_f)$  dans le système final.

Il faut noter que l'axe  $Ox$  représente le premier axe du système, l'axe  $Oy$  le deuxième axe et l'axe  $Oz$ , autour duquel on fait la rotation, est l'axe obtenu par la règle de la main droite, en tournant le premier axe sur le deuxième.

La coordonnée  $x_f$  peut être calculé avec :

$$x_f = OA + AB \quad (2.27)$$

Le premier segment,  $OA$ , est calculé à partir de  $\Delta OAC$  :

$$OA = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{x_i}{\cos \alpha} \quad (2.28)$$

Le deuxième segment,  $AB$ , est calculé du  $\Delta ABD$  comme suit :

$$AB = AD \sin \alpha = (CD - AC) \sin \alpha = (y_i - x_i \tan \alpha) \sin \alpha \quad (2.29)$$

En remplaçant les équations (2.28) et (2.29) dans l'équation (2.27) on obtient  $x_f$  suivant :

$$x_f = \frac{x_i}{\cos \alpha} + y_i \sin \alpha - x_i \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = x_i \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + y_i \sin \alpha = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha \quad (2.30)$$

La deuxième coordonnée  $y_f$  est :

$$y_f = BD = AD \cos \alpha = (y_i - x_i \tan \alpha) \cos \alpha = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \quad (2.31)$$

En combinant les équations (2.30) et (2.31), avec l'équation,  $z_i = z_f$  on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Ainsi, la transformation inverse des coordonnées va s'écrire en calculant l'inverse de la matrice de 3 par 3 comme suite :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Dans les calculs ultérieures on va beaucoup utiliser cette dernière équation (2.33).

Dans le but d'atteindre la position finale des axes de la manière montrée dans la figure 2.5, on va réaliser les trois rotations successives classiques : la première rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $OZ$ , la deuxième rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy_1$  et la troisième rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $Ox_2$ .

Les axes initiaux sont les axes du système inertiel (liés à la Terre  $T$ ), alors que les axes finaux sont ceux liés à l'avion  $a$ . Les composantes de la vitesse de l'avion dans le système de coordonnées lié à l'avion  $a$  sont  $(U, V, W)$  et devient dans le système lié à la Terre  $T$  :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

où, en adoptant les notations  $\cos \alpha = C_\alpha$  et  $\sin \alpha = S_\alpha$  :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi \\ S_\psi C_\theta & C_\phi C_\psi + S_\psi S_\theta S_\phi & C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

L'équation (2.35) permet de calculer les vitesses de déplacement de l'avion  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  par rapport à la Terre  $T$ , en connaissant les vitesses  $U$ ,  $V$  et  $W$  mesurées sur les axes longitudinaux, latéraux et verticaux de l'avion  $a$ , ainsi que les angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ .

Par composition des vecteurs de la vitesse angulaire qui apparaissent pendant la rotation des systèmes de coordonnées on obtient le vecteur de la vitesse angulaire de l'avion par rapport au système inertiel  $T$ . Dans ce système il n'y a aucune vitesse angulaire, donc on va écrire le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  dans le système  $Oxyz$  (figure 2.5) :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Après la première rotation autour de l'axe  $Oz$ , le système  $Oxyz$  se transforme en  $Ox_1y_1z_1$  et la rotation conduit à l'apparition du vecteur de la vitesse angulaire  $\vec{\psi}$  orienté sur l'axe  $Oz_1$ . On peut écrire :

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Après la deuxième rotation autour de l'axe  $Oy_1$ , le système  $Ox_1y_1z_1$  se transforme en  $Ox_2y_2z_2$ . Dans ce cas, on aura la transformation de vecteur  $\boldsymbol{\omega}_1$  et on va ajouter la nouvelle composante  $\vec{\theta}$  sur l'axe  $Oy_1 \equiv Oy_2$ .

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_\theta \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ C_\theta \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

La troisième et dernière rotation autour de l'axe  $Ox_2$  conduira à la transformation du système  $Ox_2y_2z_2$  en  $Ox_ay_az_a$  et à l'apparition de la vitesse angulaire  $\vec{\Phi}$  orientée sur l'axe  $Ox_a$ . On peut calculer maintenant la vitesse angulaire de l'avion par rapport au système inertiel :

$$\omega_a = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S_\theta \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ C_\theta \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - S_\theta \dot{\psi} \\ C_\phi \dot{\theta} + S_\phi C_\theta \dot{\psi} \\ -S_\phi \dot{\theta} + C_\phi C_\theta \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

où dans la forme équivalente :

$$\omega_a = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

La transformation inverse sera :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_\phi \tan \theta & C_\phi \tan \theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi \sec \theta & C_\phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Avec les mesures des vitesses angulaires  $P, Q, R$  sur les axes de l'avion, et en intégrant l'équation (2.41), on va calculer les angles d'Euler  $\phi, \theta, \psi$ .

#### 2.4.4 Introduction des forces de gravité

L'équation (2.40) peut être utilisée pour tous les vecteurs qu'on connaît dans le système lié à la Terre  $T$  et qu'on veut les rapporter dans le système lié à l'avion  $a$ . Un exemple très utilisé est le vecteur de la gravitation  $\mathbf{G}_a$  qui a une seule composante sur l'axe  $Oz_T$ .

Les composantes sur les axes de l'avion  $a$  seront :

$$\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} G_{x_a} \\ G_{y_a} \\ G_{z_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgS_\theta \\ mgS_\phi C_\theta \\ mgC_\phi C_\theta \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

La figure suivante 2.7 montre les forces de gravité agissant sur l'avion sur les trois axes :  $x$ ,  $y$  et  $z$

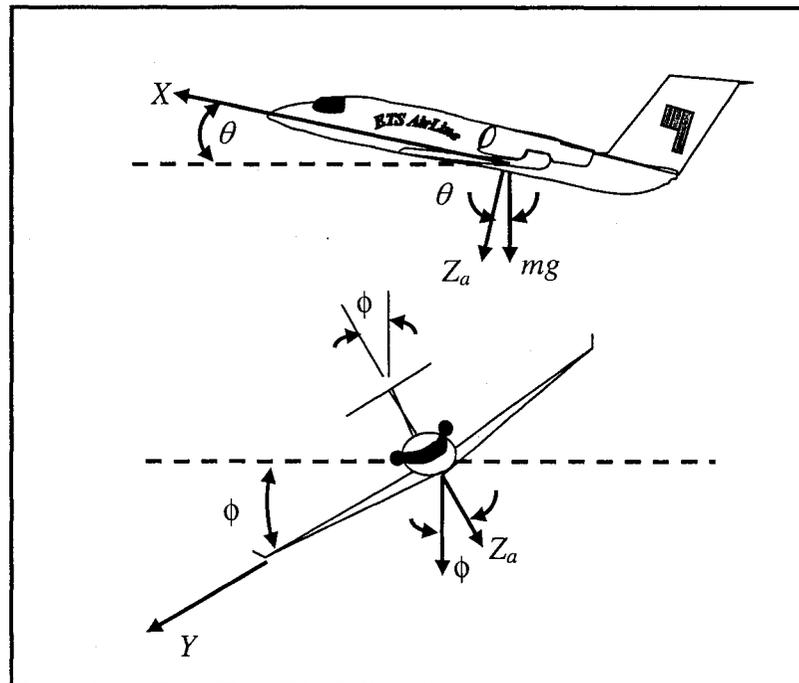


Figure 2.7 Forces de gravité agissant sur l'avion sur les trois axes :  $x$ ,  $y$  et  $z$

On peut combiner l'équation (2.42) avec l'équation (2.11), car les forces dues à la gravitation font partie des composantes des forces totales agissant sur l'avion. On peut alors faire la correction liée à la gravitation :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mgS_\theta \\ mgS_\phi C_\theta \\ mgC_\phi C_\theta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{U} + QW - RV \\ \dot{V} + RU - PW \\ \dot{W} + PV - QU \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

et les forces deviendront :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \dot{U} + QW - RV + gS_\theta \\ \dot{V} + RU - PW - gS_\phi C_\theta \\ \dot{W} + PV - QU - gC_\phi C_\theta \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

#### 2.4.5 La théorie des petites perturbations

Les équations décrites dans le chapitre précédent peuvent être linéarisées en utilisant la théorie des petites perturbations. Dans cette théorie des perturbations, on présume que le mouvement de l'avion consiste en petites perturbations autour d'une condition stationnaire de vol.

Bien entendu, cette théorie ne pourra jamais s'appliquer dans des problèmes où les mouvements de larges amplitudes sont présents (comme par exemple, le phénomène de décrochage dynamique). Par contre, dans la plupart des problèmes en génie, cette théorie est applicable.

Toutes les variables dans les équations de mouvement sont remplacées par une valeur de référence (indice zéro) plus une perturbation ( $\Delta$ ) :

$$\begin{aligned}
U &= U_0 + \Delta U, & V &= V_0 + \Delta V, & W &= W_0 + \Delta W, \\
P &= P_0 + \Delta P, & Q &= Q_0 + \Delta Q, & R &= R_0 + \Delta R, \\
X &= X_0 + \Delta X, & Y &= Y_0 + \Delta Y, & Z &= Z_0 + \Delta Z, \\
L &= L_0 + \Delta L, & M &= M_0 + \Delta M, & N &= N_0 + \Delta N, \\
\delta &= \delta_0 + \Delta \delta
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Par contre, les angles  $\phi, \theta, \psi$  seront remplacés par une valeur de référence (sans l'indice zéro) plus une perturbation ( $\Delta$ ) comme suite :

$$\phi = \phi_0 + \Delta \phi, \quad \theta = \theta_0 + \Delta \theta, \quad \psi = \psi_0 + \Delta \psi, \tag{2.46}$$

Les approximations qu'on va considérer prochainement pour un angle générique, qu'on va nommer  $\alpha$  sont décrites dans les deux équations suivantes :

$$C_{\alpha \pm \Delta \alpha} = \cos(\alpha \pm \Delta \alpha) = \cos \alpha \cos \Delta \alpha \mp \sin \alpha \sin \Delta \alpha = \cos \alpha \mp \Delta \alpha \sin \alpha$$

$$\text{ou } C_{\alpha \pm \Delta \alpha} = C_{\alpha} \mp \Delta \alpha S_{\alpha} \tag{2.47}$$

et

$$S_{\alpha \pm \Delta \alpha} = \sin(\alpha \pm \Delta \alpha) = \sin \alpha \cos \Delta \alpha \pm \sin \Delta \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \pm \Delta \alpha \cos \alpha$$

$$\text{ou } S_{\alpha \pm \Delta \alpha} = S_{\alpha} \pm \Delta \alpha C_{\alpha} \tag{2.48}$$

Les vitesses calculées par l'équation (2.35) peuvent être évaluées par les théories de petites perturbations des angles  $\phi, \theta, \psi$  et des vitesses  $U, V$  et  $W$ , alors on remplace les équations (2.47) et (2.48) dans l'équation (2.35) et on obtient :

$$\begin{pmatrix} V_{x0} + \Delta V_x \\ V_{y0} + \Delta V_y \\ V_{z0} + \Delta V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\psi+\Delta\psi} C_{\theta+\Delta\theta} & C_{\psi+\Delta\psi} S_{\theta+\Delta\theta} S_{\phi+\Delta\phi} - C_{\phi+\Delta\phi} S_{\psi+\Delta\psi} \\ S_{\psi+\Delta\psi} C_{\theta+\Delta\theta} & C_{\phi+\Delta\phi} C_{\psi+\Delta\psi} + S_{\psi+\Delta\psi} S_{\theta+\Delta\theta} S_{\phi+\Delta\phi} \dots \\ -S_{\theta+\Delta\theta} & C_{\theta+\Delta\theta} S_{\phi+\Delta\phi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_{\psi+\Delta\psi}S_{\phi+\Delta\phi} + C_{\psi+\Delta\psi}S_{\theta+\Delta\theta}C_{\phi+\Delta\phi} \\ \dots C_{\phi+\Delta\phi}S_{\psi+\Delta\psi}S_{\theta+\Delta\theta} - C_{\psi+\Delta\psi}S_{\phi+\Delta\phi} \\ C_{\theta+\Delta\theta}C_{\phi+\Delta\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 + \Delta U \\ V_0 + \Delta V \\ W_0 + \Delta W \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (2.49)$$

$$\begin{pmatrix} V_{x0} + \Delta V_x \\ V_{y0} + \Delta V_y \\ V_{z0} + \Delta V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_{\psi} - \Delta\psi S_{\psi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) & (C_{\psi} - \Delta\psi S_{\psi})(S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta})(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) - (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi})(S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi}) \\ (S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) & (S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi})(S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta})(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) + (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi})(C_{\psi} - \Delta\psi S_{\psi}) \dots \\ -S_{\theta} - \Delta\theta C_{\theta} & (C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta})(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) \end{pmatrix}$$

...

$$\begin{pmatrix} (C_{\psi} - \Delta\psi S_{\psi})(S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta})(C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi}) + (S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi})(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) \\ (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi})(S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi})(S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta}) - (C_{\psi} - \Delta\psi S_{\psi})(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) \\ (C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta})(C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 + \Delta U \\ V_0 + \Delta V \\ W_0 + \Delta W \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{\psi}C_{\theta} - \Delta\psi S_{\psi}C_{\theta} - \Delta\theta C_{\psi}S_{\theta} & C_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} + \Delta\theta C_{\psi}C_{\theta}S_{\phi} + \Delta\phi C_{\psi}S_{\theta}C_{\phi} - \Delta\psi S_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} - C_{\phi}S_{\psi} + \Delta\phi S_{\phi}S_{\psi} - \Delta\psi C_{\phi}C_{\psi} \\ S_{\psi}C_{\theta} + \Delta\psi C_{\psi}C_{\theta} - \Delta\theta S_{\psi}S_{\theta} & S_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} + \Delta\theta S_{\psi}C_{\theta}S_{\phi} + \Delta\phi S_{\psi}S_{\theta}C_{\phi} + \Delta\psi C_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} + C_{\phi}C_{\psi} - \Delta\phi S_{\phi}C_{\psi} - \Delta\psi C_{\phi}S_{\psi} \\ -S_{\theta} - \Delta\theta C_{\theta} & C_{\theta}S_{\phi} - \Delta\theta S_{\theta}S_{\phi} + \Delta\phi C_{\theta}C_{\phi} \end{pmatrix}$$

...

...

$$\begin{pmatrix} C_{\psi}S_{\theta}C_{\phi} + \Delta\theta C_{\psi}C_{\theta}C_{\phi} - \Delta\phi C_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} - \Delta\psi S_{\psi}S_{\theta}C_{\phi} + S_{\phi}S_{\psi} + \Delta\psi C_{\psi}S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}S_{\psi} \\ S_{\psi}S_{\theta}C_{\phi} + \Delta\theta C_{\phi}S_{\psi}C_{\theta} - \Delta\phi S_{\psi}S_{\theta}S_{\phi} + \Delta\psi C_{\psi}C_{\theta}S_{\phi} - S_{\phi}C_{\psi} - \Delta\phi C_{\phi}C_{\psi} + \Delta\psi S_{\phi}S_{\psi} \\ C_{\theta}C_{\phi} - \Delta\theta S_{\theta}C_{\phi} - \Delta\phi C_{\psi}C_{\theta}S_{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta - \Delta\psi S_\psi C_\theta - \Delta\theta C_\psi S_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi + \Delta\theta C_\psi C_\theta S_\phi + \Delta\phi C_\psi S_\theta C_\phi - \Delta\psi S_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi + \Delta\phi S_\phi S_\psi - \Delta\psi C_\phi C_\psi \\ S_\psi C_\theta + \Delta\psi C_\psi C_\theta - \Delta\theta S_\psi S_\theta & S_\psi S_\theta S_\phi + \Delta\theta S_\psi C_\theta S_\phi + \Delta\phi S_\psi S_\theta C_\phi + \Delta\psi C_\psi S_\theta S_\phi + C_\phi C_\psi - \Delta\phi S_\phi C_\psi - \Delta\psi C_\phi S_\psi \\ -S_\theta - \Delta\theta C_\theta & C_\theta S_\phi - \Delta\theta S_\theta S_\phi + \Delta\phi C_\theta C_\phi \end{pmatrix}$$

...

...

$$\begin{pmatrix} C_\psi S_\theta C_\phi + \Delta\theta C_\psi C_\theta C_\phi - \Delta\phi C_\psi S_\theta S_\phi - \Delta\psi S_\psi S_\theta C_\phi + S_\phi S_\psi + \Delta\psi C_\psi S_\phi + \Delta\phi C_\phi S_\psi \\ S_\psi S_\theta C_\phi + \Delta\theta C_\phi S_\psi C_\theta - \Delta\phi S_\psi S_\theta S_\phi + \Delta\psi C_\psi C_\theta S_\phi - S_\phi C_\psi - \Delta\phi C_\phi C_\psi + \Delta\psi S_\phi S_\psi \\ C_\theta C_\phi - \Delta\theta S_\theta C_\phi - \Delta\phi C_\psi C_\theta S_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \\ V_{z0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\phi S_\psi) V_0 + (S_\psi C_\phi - C_\psi S_\theta S_\phi) W_0 & -C_\psi S_\theta U_0 + C_\psi C_\theta S_\phi V_0 + C_\psi C_\theta C_\phi W_0 \\ (S_\psi S_\theta C_\phi - S_\phi C_\psi) V_0 - (C_\psi C_\phi + S_\psi S_\theta S_\phi) W_0 & -S_\psi S_\theta U_0 + S_\psi C_\theta S_\phi V_0 + S_\psi C_\theta C_\phi W_0 \\ C_\theta C_\phi V_0 - S_\phi C_\theta W_0 & -C_\theta U_0 - S_\theta S_\phi V_0 - S_\theta C_\phi W_0 \end{pmatrix}$$

...

$$\begin{pmatrix} -S_\psi C_\theta U - (S_\psi S_\theta S_\phi + C_\phi C_\psi) V + (C_\psi S_\phi - S_\psi S_\theta C_\phi) W \\ \dots C_\psi C_\theta U + (C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi) V + (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi) W \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{pmatrix}.$$

En tenant compte de ces formules, on peut écrire l'équation (2.50) :

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Les matrices qu'intervient dans cette équation sont :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\phi - C_\phi S_\psi & S_\psi S_\phi + C_\psi S_\theta C_\phi \\ S_\psi C_\theta & C_\phi C_\psi + S_\psi S_\theta S_\phi & C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{x\phi} & \lambda_{x\theta} & \lambda_{x\psi} \\ \lambda_{y\phi} & \lambda_{y\theta} & \lambda_{y\psi} \\ \lambda_{z\phi} & \lambda_{z\theta} & \lambda_{z\psi} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

où

$$\begin{cases} \lambda_{x\phi} = (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) V_0 + (C_\phi S_\psi - S_\phi S_\theta C_\psi) W_0 \\ \lambda_{x\theta} = -S_\theta C_\psi U_0 + S_\phi C_\theta C_\psi V_0 + C_\phi C_\theta C_\psi W_0 \\ \lambda_{x\psi} = -C_\theta S_\psi U_0 - (S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi) V_0 + (S_\phi C_\psi - C_\phi S_\theta S_\psi) W_0 \\ \lambda_{y\phi} = (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) V_0 - (C_\phi C_\psi + S_\phi S_\theta S_\psi) W_0 \\ \lambda_{y\theta} = -S_\theta S_\psi U_0 + S_\phi C_\theta S_\psi V_0 + C_\phi C_\theta S_\psi W_0 \\ \lambda_{y\psi} = C_\theta C_\psi U_0 + (S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi) V_0 + (C_\phi S_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi) W_0 \\ \lambda_{z\phi} = C_\phi C_\theta V_0 - S_\phi C_\theta W_0 \\ \lambda_{z\theta} = -C_\theta U_0 - S_\phi S_\theta V_0 - C_\phi S_\theta W_0 \\ \lambda_{z\psi} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Les équations des moments (2.26) et des forces (2.44) sont non linéaires, mais les non linéarités peuvent être éliminées utilisant le même schéma des petites perturbations.

L'équation des forces (2.44) devient :

$$\begin{pmatrix} X_0 + \Delta X \\ Y_0 + \Delta Y \\ Z_0 + \Delta Z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(U_0 + \Delta U) + (Q_0 + \Delta Q)(W_0 + \Delta W) - (R_0 + \Delta R)(V_0 + \Delta V) + g(S_\theta + \Delta\theta C_\theta) \\ \frac{d}{dt}(V_0 + \Delta V) + (R_0 + \Delta R)(U_0 + \Delta U) - (P_0 + \Delta P)(W_0 + \Delta W) - g(S_\phi + \Delta\phi C_\phi)(C_\theta - \Delta\theta S_\theta) \\ \frac{d}{dt}(W_0 + \Delta W) + (P_0 + \Delta P)(V_0 + \Delta V) - (Q_0 + \Delta Q)(U_0 + \Delta U) + g(C_\phi - \Delta\phi S_\phi)(C_\theta - \Delta\theta S_\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= m \left( \begin{array}{l} \frac{d(U_0 + \Delta U)}{dt} + Q_0 W_0 + Q_0 \Delta W + W_0 \Delta Q - R_0 V_0 - R_0 \Delta V - V_0 \Delta R + g(S_\theta + \Delta \theta C_\theta) \\ \frac{d(V_0 + \Delta V)}{dt} + R_0 U_0 + R_0 \Delta U + U_0 \Delta R - P_0 W_0 - P_0 \Delta W - W_0 \Delta P - g(S_\phi + \Delta \phi C_\phi)(C_\theta - \Delta \theta S_\theta) \\ \frac{d(W_0 + \Delta W)}{dt} + P_0 V_0 + P_0 \Delta V + V_0 \Delta P - Q_0 U_0 - Q_0 \Delta U - U_0 \Delta Q + g(C_\phi - \Delta \phi S_\phi)(C_\theta - \Delta \theta S_\theta) \end{array} \right) \quad (2.53)$$

Veillez noter qu'on a considéré que les produits des perturbations de deux vitesses de référence (par exemple le produit  $\Delta Q \Delta W$ ) sont nulles, en étant beaucoup trop petit.

Par identification, on va premièrement regrouper les parties constantes (avec indices **0**), voir l'équation (2.54) et les parties variables ( $\Delta$ ) des forces, voir l'équation (2.55) :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} U_0 + Q_0 W_0 - R_0 V_0 + g \sin \theta_0 \\ \frac{d}{dt} V_0 + R_0 U_0 - P_0 W_0 - g \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \frac{d}{dt} W_0 + P_0 V_0 - Q_0 U_0 + g \cos \phi_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

où les fonctions trigonométriques de type  $S_\theta$  ont été remplacées par  $\sin \theta_0$  - car dans les équations précédentes on a omis les **indices 0** pour ces fonctions (par l'économie d'espace dans l'écriture des équations).

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = m \left( \begin{array}{l} \frac{d(\Delta U)}{dt} + Q_0 \Delta W + W_0 \Delta Q - R_0 \Delta V - V_0 \Delta R + g \Delta \theta \cos \theta_0 \\ \frac{d(\Delta V)}{dt} + R_0 \Delta U + U_0 \Delta R - P_0 \Delta W - W_0 \Delta P - g \Delta \phi \cos \phi_0 \cos \theta_0 + g \Delta \theta \sin \phi_0 \sin \theta_0 \\ \frac{d(\Delta W)}{dt} + P_0 \Delta V + V_0 \Delta P - Q_0 \Delta U - U_0 \Delta Q - g \Delta \phi \sin \phi_0 \cos \theta_0 - g \Delta \theta \cos \phi_0 \sin \theta_0 \end{array} \right) \quad (2.55)$$

Si on procède de même façon pour les moments, on va obtenir à partir des équations

(2.26) l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} L_0 + \Delta L \\ M_0 + \Delta M \\ N_0 + \Delta N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \frac{d}{dt}(P_0 + \Delta P) - I_{xz} \frac{d}{dt}(R_0 + \Delta R) + (I_{zz} - I_{yy})(Q_0 + \Delta Q)(R_0 + \Delta R) - I_{xz}(P_0 + \Delta P)(Q_0 + \Delta Q) \\ I_{yy} \frac{d}{dt}(Q_0 + \Delta Q) + (I_{xx} - I_{zz})(P_0 + \Delta P)(R_0 + \Delta R) + I_{xz} [(P_0 + \Delta P)^2 - (R_0 + \Delta R)^2] \\ I_{zz} \frac{d}{dt}(R_0 + \Delta R) - I_{xz} \frac{d}{dt}(P_0 + \Delta P) + (I_{yy} - I_{xx})(P_0 + \Delta P)(Q_0 + \Delta Q) + I_{xz}(Q_0 + \Delta Q)(R_0 + \Delta R) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

On va décomposer le système d'équations (2.56) pour les moments dans 2 parties : constantes (avec indices  $\mathbf{0}$ ), voir l'équation (2.57) et variables ( $\Delta$ ), voir l'équation (2.58).

Les valeurs statiques des moments à l'équilibre (indice  $\mathbf{0}$ ) sont :

$$\begin{pmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \frac{dP_0}{dt} - I_{xz} \frac{dR_0}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})Q_0R_0 - I_{xz}P_0Q_0 \\ I_{yy} \frac{dQ_0}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})P_0R_0 + I_{xz}(P_0^2 - R_0^2) \\ I_{zz} \frac{dR_0}{dt} - I_{xz} \frac{dP_0}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})P_0Q_0 + I_{xz}Q_0R_0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

pendant que les valeurs dynamiques des moments à l'équilibre ( $\Delta$ ) sont :

$$\begin{pmatrix} \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} \frac{d(\Delta P)}{dt} - I_{xz} \frac{d(\Delta R)}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})(Q_0\Delta R + R_0\Delta Q) - I_{xz}(P_0\Delta Q + Q_0\Delta P) \\ I_{yy} \frac{d(\Delta Q)}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})(P_0\Delta R + R_0\Delta P) + 2I_{xz}(P_0\Delta P - R_0\Delta R) \\ I_{zz} \frac{d(\Delta R)}{dt} - I_{xz} \frac{d(\Delta P)}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})(P_0\Delta Q + Q_0\Delta P) + I_{xz}(Q_0\Delta R + R_0\Delta Q) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

La dernière équation qu'on peut la rendre linéaire est l'équation (2.40) qui lie les vitesses angulaires  $P$ ,  $Q$  et  $R$  des dérivées des angles d'Euler  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P_0 + \Delta P \\ Q_0 + \Delta Q \\ R_0 + \Delta R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_{\theta + \Delta\theta} \\ 0 & C_{\phi + \Delta\phi} & S_{\phi + \Delta\phi} C_{\theta + \Delta\theta} \\ 0 & -S_{\phi + \Delta\phi} & C_{\phi + \Delta\phi} C_{\theta + \Delta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d(\phi + \Delta\phi)}{dt} \\ \frac{d(\theta + \Delta\theta)}{dt} \\ \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d(\phi + \Delta\phi)}{dt} - (S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta}) \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \\ (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi}) \frac{d(\theta + \Delta\theta)}{dt} + (S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \\ -(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) \frac{d(\theta + \Delta\theta)}{dt} + (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) \frac{d(\psi + \Delta\psi)}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

On va décomposer l'équation (2.59) en deux parties, la première partie correspondante aux valeurs statiques (indice égal à zéro), voir l'équation (2.60) tandis que les valeurs dynamiques (notées par  $\Delta$ ) sont décrites par l'équation (2.61) :

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\phi_0}{dt} - (S_{\theta} + \Delta\theta C_{\theta}) \frac{d\psi_0}{dt} \\ (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi}) \frac{d\theta_0}{dt} + (S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) \frac{d\psi_0}{dt} \\ -(S_{\phi} + \Delta\phi C_{\phi}) \frac{d\theta_0}{dt} + (C_{\phi} - \Delta\phi S_{\phi})(C_{\theta} - \Delta\theta S_{\theta}) \frac{d\psi_0}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d(\Delta\phi)}{dt} - S_{\theta} \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \\ C_{\phi} \frac{d(\Delta\theta)}{dt} + S_{\phi} C_{\theta} \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \\ -S_{\phi} \frac{d(\Delta\theta)}{dt} + C_{\phi} C_{\theta} \frac{d(\Delta\psi)}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

L'équation (2.41) sera linéarisée comme suite :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_0 + \Delta\dot{\phi} \\ \dot{\theta}_0 + \Delta\dot{\theta} \\ \dot{\psi}_0 + \Delta\dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi_0 + \Delta\phi) \tan(\theta_0 + \Delta\theta) & \cos(\phi_0 + \Delta\phi) \tan(\theta_0 + \Delta\theta) \\ 0 & \cos(\phi_0 + \Delta\phi) & -\sin(\phi_0 + \Delta\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi_0 + \Delta\phi)}{\cos(\theta_0 + \Delta\theta)} & \frac{\cos(\phi_0 + \Delta\phi)}{\cos(\theta_0 + \Delta\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 + \Delta P \\ Q_0 + \Delta Q \\ R_0 + \Delta R \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

ce qui donne l'équation d'équilibre « trim » pour les angles d'Euler :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{\psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi_0 \tan \theta_0 & \cos \phi_0 \tan \theta_0 \\ 0 & \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ 0 & \frac{\sin \phi_0}{\cos \theta_0} & \frac{\cos \phi_0}{\cos \theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

et l'équation de perturbations suivante :

$$\dot{\vartheta} = E_v \omega_B + E_p \vartheta \quad (2.64)$$

où les matrices  $E_v$  et  $E_p$  sont définies comme suit :

$$E_v = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 & \cos \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \\ 0 & \cos \Phi_0 & -\sin \Phi_0 \\ 0 & \frac{\sin \Phi_0}{\cos \Theta_0} & \frac{\cos \Phi_0}{\cos \Theta_0} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$E_p = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \Theta_0 (\cos \Phi_0 Q_0 - \sin \Phi_0 R_0) & \frac{1}{\cos^2 \Theta_0} (\sin \Phi_0 Q_0 + \cos \Phi_0 R_0) & 0 \\ -\sin \Phi_0 Q_0 - \cos \Phi_0 R_0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\cos \Theta_0} (\cos \Phi_0 Q_0 - \sin \Phi_0 R_0) & \frac{\sin \Theta_0}{\cos^2 \Theta_0} (\sin \Phi_0 Q_0 + \cos \Phi_0 R_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

La condition de vol de référence est symétrique et les forces et moments de propulsion

sont constants. Ceci implique que :

$$V_0 = P_0 = Q_0 = R_0 = \phi_0 = \psi_0 \quad (2.67)$$

$$\text{Si on aligne l'axe des } X \text{ sur la direction de la vitesse de l'avion, alors } W_0 = 0. \quad (2.68)$$

Dans le cas où on étudie uniquement le battement, alors l'avion est en vol uniforme et les équations (2.67) et (2.68) sont considérées dans le développement de la théorie aérodynamique de l'avion rigide qui est simplifiée. Dans les cas de vol particuliers (par exemple dans le cas des manœuvres et des rafales), alors les vitesses linéaires et angulaires différentes de zéro sont considérées et les équations deviennent plus compliquées.

On va remplacer prochainement les équations (2.67) et (2.68) dans les équations (2.55), (2.58), (2.61) et (2.64)-(2.66) on obtient les nouvelles équations :

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \frac{d(\Delta U)}{dt} + g \Delta \theta \cos \theta_0 \\ \frac{d(\Delta V)}{dt} + U_0 \Delta R - g \Delta \phi \cos \theta_0 \\ \frac{d(\Delta W)}{dt} - U_0 \Delta Q - g \Delta \theta \sin \theta_0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} I_{xx} \frac{d(\Delta P)}{dt} - I_{xz} \frac{d(\Delta R)}{dt} \\ I_{yy} \frac{d(\Delta Q)}{dt} \\ I_{zz} \frac{d(\Delta R)}{dt} - I_{xz} \frac{d(\Delta P)}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

et les équations (2.61) et (2.64)-(2.66) restent inchangées.

## CHAPITRE 3

### CALCUL DES COEFFICIENTS DE STABILITE DE L'AVION POUR LE MOUVEMENT LONGITUDINAL

#### 3.1 Coefficients de stabilité pour l'avion dans le système de référence $a$

##### 3.1.1 Introduction

Les séries de Taylor servent aux calculs des équations linéaires du mouvement latéral et longitudinal de l'avion. L'expansion des équations des mouvements longitudinales et du mouvement latérales est réalisée en tenant compte des variables qui entrent dans le calcul des perturbations des forces et moments.

Par exemple, pour le mouvement en plan longitudinal, les paramètres qui varient sont la vitesse axiale  $u$  orientée sur l'axe des  $x$ , la vitesse verticale  $w$  orientée sur l'axe des  $y$  et la vitesse angulaire de tangage  $q$  autour de l'axe  $Oy_a$ .

Le contrôle de l'avion en mouvement longitudinal est assurée principalement par les trois types de surfaces de commande : le gouvernail de profondeur  $\delta_E$  (ayant comme résultat la modification de l'angle d'attaque  $\alpha$ ), les volets  $\delta_F$  (ayant comme résultat la croissance du coefficient de portance  $C_z$ ) et les aérofreins  $\delta_{SP}$  (ayant comme résultat la diminution du coefficient de portance  $C_z$ ).

La force de poussée  $\delta_T$  (ayant comme résultat la modification de la vitesse et, implicitement, la modification de la force de portance) entre dans ces types de calculs de contrôle pour le mouvement longitudinal de l'avion.

En utilisant le développement des forces  $X$  et  $Z$  et moments  $M$  en séries de Taylor, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial X}{\partial q} q + \frac{\partial X}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial X}{\partial \delta_i} \delta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_i} \dot{\delta}_i = m(\dot{u} + g\theta \cos\theta_0) \\ \Delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial q} q + \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z}{\partial \delta_i} \delta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}_i} \dot{\delta}_i = m(\dot{w} - U_0 q - g\theta \sin\theta_0) \\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} q + \frac{\partial M}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial M}{\partial \delta_i} \delta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}_i} \dot{\delta}_i = I_{yy} \dot{q} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Dans la partie gauche des équations (3.1), on va développer les perturbations  $\Delta X$ ,  $\Delta Z$  et  $\Delta M$  en séries Taylor et dans la partie droite de ces équations on utilise les perturbations données par les équations (2.55).

On utilisera prochainement les décompositions en série de MacLaurin des fonctions représentatives pour les coefficients de traînée  $C_x$ , les coefficients de portance  $C_z$  et les coefficients de moment  $C_m$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La variation des forces sur l'axe  $Ox_a$  de l'avion, par rapport aux variables considérées, est incluse dans les coefficients de la portance  $C_z$ , de la traînée  $C_x$  et du moment  $C_m$ . La décomposition en série de MacLaurin de ces coefficients va conduire à :

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_u} \frac{u}{U_0} + C_{x_\alpha} \alpha + C_{x\dot{\alpha}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\alpha} + C_{x\ddot{\alpha}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \ddot{\alpha} + C_{x\dot{\theta}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\theta} + C_{x\ddot{\theta}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \ddot{\theta} + C_{x_\delta} \delta + C_{x\dot{\delta}} \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\delta} \quad (3.3)$$

$$C_z = C_{z_0} + C_{z_u} \frac{u}{U_0} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_{\dot{\alpha}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\alpha} + C_{z_{\dot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\theta} + C_{z_{\ddot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \ddot{\theta} + C_{z_\delta} \delta + C_{z_{\dot{\delta}}} \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\delta} \quad (3.4)$$

et

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_u} \frac{u}{U_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\dot{\alpha}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\alpha} + C_{m_{\dot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\theta} + C_{m_{\ddot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \ddot{\theta} + C_{m_\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{\delta}}} \dot{\delta} \quad (3.5)$$

On va utiliser les approximations suivantes pour le mouvement longitudinal de l'avion :

$$\alpha = \tan \left( \frac{w}{U_0} \right) \approx \frac{w}{U_0}, \dot{\alpha} = \frac{\dot{w}}{U_0}, q = \dot{\theta}, \dot{q} = \ddot{\theta} \quad (3.6)$$

et on va introduire les équations (3.6) dans les équations (3.3), (3.4) et (3.5), alors on va obtenir les équations suivantes :

$$C_x = C_{x_0} + C_{x_u} \frac{u}{U_0} + C_{x_w} \frac{w}{U_0} + C_{x_{\dot{\alpha}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \frac{\dot{w}}{U_0} + C_{x_q} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) q + C_{x_{\dot{q}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \dot{q} + C_{x_\delta} \delta + C_{x_{\dot{\delta}}} \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\delta} \quad (3.7)$$

$$C_z = C_{z_0} + C_{z_u} \frac{u}{U_0} + C_{z_w} \frac{w}{U_0} + C_{z_{\dot{\alpha}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \frac{\dot{w}}{U_0} + C_{z_q} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) q + C_{z_{\dot{q}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \dot{q} + C_{z_\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{z_{\dot{\delta}}} \dot{\delta} \quad (3.8)$$

et

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_u} \frac{u}{U} + C_{m_w} \frac{w}{U} + C_{m_{\dot{\alpha}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U} \right) \frac{\dot{w}}{U} + C_{m_q} \left( \frac{\bar{c}}{2U} \right) q + C_{m_{\dot{q}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U^2} \right) \dot{q} + C_{m_\delta} \delta + \frac{\bar{c}}{2U} C_{m_{\dot{\delta}}} \dot{\delta} \quad (3.9)$$

Dans le cas des perturbations, suite à la variation des vitesses verticales  $w$  dans les équations (3.1), on va obtenir des variations de l'angle d'attaque initial  $\alpha = \alpha_1$  avec la quantité  $w/U_0$  dans le système de coordonnées lié à l'avion  $a$  et avec la quantité  $\dot{z}_T/U_0$  dans le système inertiel de coordonnées  $T$ .

On doit remarquer que dans les conditions spécifiées du vol (vol horizontal, en ligne droite et aux ailes horizontales), les angles d'attaque initiaux sont identiques dans les deux systèmes de coordonnées. Par la suite des modifications dans les angles d'attaque, l'orientation des forces de portance et de traînée va se modifier, entraînant les modifications des leurs projections sur les axes. La figure 3.1 représente la situation des forces par rapport aux systèmes des axes de l'avion  $a$  et des axes inertiels  $T$ .

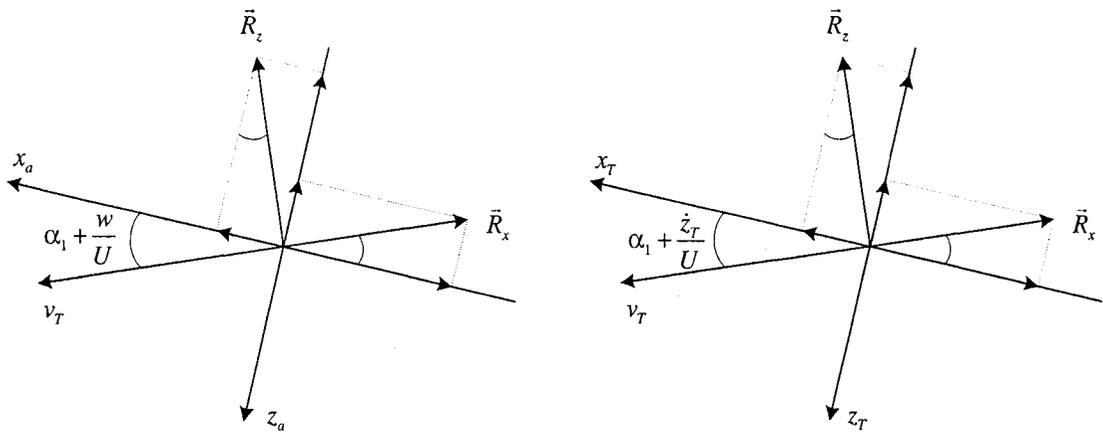


Figure 3.1 Les perturbations des forces de portance  $R_z$  et de traînée  $R_x$  dues aux perturbations dans l'angle de l'attaque  $\alpha$ .

Les forces  $X$  et  $Z$  vont se décomposer selon les axes de l'avion  $Ox_a$  et  $Oz_a$  :

$$\begin{cases} X = R_z \sin\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) - R_x \cos\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) \\ Z = -R_z \cos\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) - R_x \sin\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) \end{cases} \quad (3.10)$$

On va considérer les deux approximations pour les fonctions trigonométriques pour des petits angles :

$$\begin{cases} \sin\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) \cong \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \\ \cos\left(\alpha_1 + \frac{w}{U_0}\right) \cong 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

On va introduire ces approximations exprimées par les équations (3.11) dans les équations (3.10) et on va obtenir :

$$\begin{cases} X = R_z \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - R_x \\ Z = -R_z - R_x \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Les équations pour les forces de portance  $R_z$  et de traînée  $R_x$  s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} R_z = \frac{\rho U_0^2 S}{2} C_z = \bar{S} C_z \\ R_x = \frac{\rho U_0^2 S}{2} C_x = \bar{S} C_x \end{cases} \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Équation pour la force totale $\Delta X$ sur l'axe des $X_a$

On va dériver  $X$  donnée par l'équation (3.12) par rapport aux quantités  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  et on va obtenir l'équation de la forme générale suivante :

$$\frac{\partial X}{\partial Q} = \frac{\partial R_z}{\partial Q} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) + R_z \frac{\partial \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right)}{\partial Q} - \frac{\partial R_x}{\partial Q} \quad (3.14)$$

On va remplacer les quantités  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  dans les dérivées exprimées par l'équation (3.14) et on va obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \bar{S} \frac{\partial C_z}{\partial u} - \bar{S} \frac{\partial C_x}{\partial u} = \bar{S} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \frac{C_{z_u}}{U_0} - \frac{C_{x_u}}{U_0} \right] = \frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_u} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_u} \right] \\ \frac{\partial X}{\partial w} &= \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \bar{S} \frac{\partial C_z}{\partial w} + \frac{\bar{S} C_z}{U_0} - \bar{S} \frac{\partial C_x}{\partial w} = \bar{S} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \frac{C_{z_w}}{U_0} + C_z - \frac{C_{x_w}}{U_0} \right] = \frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_w} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) + C_z - C_{x_w} \right] \\ \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} &= \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \bar{S} \frac{\partial C_z}{\partial \dot{w}} - \bar{S} \frac{\partial C_x}{\partial \dot{w}} = \bar{S} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \frac{\bar{c}}{2U_0^2} C_{z_{\dot{w}}} - \frac{\bar{c}}{2U_0^2} C_{x_{\dot{w}}} \right] = \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} \left[ C_{z_{\dot{w}}} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_{\dot{w}}} \right] \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} &= 0 ; \\ \frac{\partial X}{\partial \dot{\theta}} &= \bar{S} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{z_{\dot{\theta}}} - \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{x_{\dot{\theta}}} \right] = \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_{\dot{\theta}}} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_{\dot{\theta}}} \right] \quad (3.15) \\ \frac{\partial X}{\partial \ddot{\theta}} &= \bar{S} \left[ \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{z_{\ddot{\theta}}} - \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{x_{\ddot{\theta}}} \right] = \frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} \left[ C_{z_{\ddot{\theta}}} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_{\ddot{\theta}}} \right] \\ \frac{\partial X}{\partial \delta} &= \bar{S} \left[ C_{z_{\delta}} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_{\delta}} \right] \\ \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}} &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_{\dot{\delta}}} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_{\dot{\delta}}} \right]. \end{aligned}$$

On va remplacer dans le système d'équations (3.1) les deux équations

$$q = \dot{\theta}$$

$$\dot{q} = \ddot{\theta}$$

alors les équations (3.1) deviennent :

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial X}{\partial \ddot{\theta}} \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial X}{\partial \delta_i} \delta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial X}{\partial \dot{\delta}_i} \dot{\delta}_i = m(\dot{u} + g\theta \cos\theta_0) \quad (3.16)$$

En remplaçant les dérivées calculées par les équations (3.15) dans l'équation (3.16), on va obtenir les forces totales  $\Delta X$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta X &= m(\dot{u} + g\theta \cos\theta_0) = \\ &\frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_u} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_u} \right] u + \frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_\alpha} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) + C_z - C_{x_\alpha} \right] w + \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} \left[ C_{z_\alpha} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_\alpha} \right] \dot{w} + \\ &+ \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_q} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_q} \right] \dot{\theta} + \frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} \left[ C_{z_q} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_q} \right] \ddot{\theta} + \\ &+ \bar{S} \left[ C_{z_\delta} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_\delta} \right] \delta + \left[ C_{z_\delta} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - C_{x_\delta} \right] \dot{\delta} = \\ &= \bar{S} \left[ \left( C_{z_u} \alpha_1 - C_{x_u} \right) \frac{u}{U_0} + \left( C_{z_\alpha} \alpha_1 + C_z - C_{x_\alpha} \right) \frac{w}{U_0} + \left( C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_{x_\alpha} \right) \frac{\bar{c}}{2U_0^2} \dot{w} + \right. \\ &\left. + \left( C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q} \right) \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\theta} + \left( C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q} \right) \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \ddot{\theta} + \left( C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta} \right) \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} \left( C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta} \right) \dot{\delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.1.3 Équation pour la force totale $\Delta Z$ sur l'axe des $Z_a$

On va dériver  $Z$  donnée par la deuxième équation du système (3.12) par rapport à  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  et on va obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = -\frac{\partial R_z}{\partial Q} - \frac{\partial R_x}{\partial Q} \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) - R_x \frac{\partial \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right)}{\partial Q} \quad (3.18)$$

On va ensuite remplacer les quantités  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  dans les dérivées

exprimées par l'équation (3.18) et on va obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial u} &= -\frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_u} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_u} \right] \\
\frac{\partial Z}{\partial w} &= -\frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_\alpha} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_\alpha} + C_x \right]; \\
\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} &= -\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} \left[ C_{z_\alpha} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_\alpha} \right] \\
\frac{\partial Z}{\partial \theta} &= 0 \tag{3.19} \\
\frac{\partial Z}{\partial \dot{\theta}} &= -\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_q} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_q} \right] \\
\frac{\partial Z}{\partial \ddot{\theta}} &= -\frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} \left[ C_{z_q} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_q} \right] \\
\frac{\partial Z}{\partial \delta} &= -\bar{S} \left[ C_{z_\delta} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_\delta} \right] \\
\frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}} &= -\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_\delta} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_\delta} \right]
\end{aligned}$$

On va remplacer dans la deuxième équation du système d'équations (3.1) les quantités

$$q = \dot{\theta}$$

$$\dot{q} = \ddot{\theta}$$

alors on va obtenir :

$$\Delta Z = \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial \dot{u}} \dot{u} + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}} \dot{w} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial Z}{\partial \ddot{\theta}} \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z}{\partial \delta_i} \delta_i + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial Z}{\partial \dot{\delta}_i} \dot{\delta}_i = m(\dot{w} - U_0 q - g \theta \sin \theta_0) \quad (3.20)$$

On va remplacer les équations (3.19) dans l'équation (3.20) et on va obtenir la somme des forces  $\Delta Z$  :

$$\begin{aligned} \Delta Z = & -\frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_u} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_u} \right] u - \frac{\bar{S}}{U_0} \left[ C_{z_w} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_w} + C_x \right] w \\ & - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} \left[ C_{z_{\dot{u}}} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_{\dot{u}}} \right] \dot{w} - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_{\dot{\theta}}} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_{\dot{\theta}}} \right] \dot{\theta} \\ & - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} \left[ C_{z_{\ddot{\theta}}} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_{\ddot{\theta}}} \right] \ddot{\theta} - \bar{S} \left[ C_{z_{\delta}} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_{\delta}} \right] \delta - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \left[ C_{z_{\dot{\delta}}} + \left( \alpha_1 + \frac{w}{U_0} \right) C_{x_{\dot{\delta}}} \right] \dot{\delta} = \\ & m(\dot{w} - U_0 q - g \theta \sin \theta_0) \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.1.4 Équation pour le moment total $\Delta M$ autour de l'axe des $Y_a$

On va remplacer le coefficient de moment  $C_m$  développé en série MacLaurin :

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_u} \frac{u}{U_0} + C_{m_w} \frac{w}{U_0} + C_{m_{\dot{u}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \frac{\dot{w}}{U_0} + C_{m_{\dot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}}{2U_0} \right) \dot{\theta} + C_{m_{\ddot{\theta}}} \left( \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \right) \ddot{\theta} + C_{m_{\delta}} \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{\delta}}} \dot{\delta} \quad (3.22)$$

dans la somme de la variation des moments  $\Delta M$  sur l'axe  $Oy_a$  :

$$\Delta M = \bar{S}\bar{c} C_m \quad (3.23)$$

On va dériver  $\Delta M$  donnée par l'équation (3.23) par rapport à  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  et on va obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial Q} = \bar{S}\bar{c} \frac{\partial C_m}{\partial Q} \quad (3.24)$$

On va remplacer l'équation (3.22) donnant l'expression de  $C_m$  et les quantités  $Q = u; w; \dot{w}; \theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}; \delta; \dot{\delta}$  dans les dérivées exprimées par l'équation (3.24) et on va obtenir les dérivées de  $\Delta M$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0} C_{m_u} \\ \frac{\partial M}{\partial w} &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0} C_{m_w} \\ \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0} \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{w}}} \\ \frac{\partial M}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} \bar{c} C_{m_{\dot{\theta}}} \\ \frac{\partial M}{\partial \ddot{\theta}} &= \bar{S}\bar{c} \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{m_{\ddot{\theta}}} \\ \frac{\partial M}{\partial \delta} &= \bar{S}\bar{c} C_{m_\delta} \\ \frac{\partial M}{\partial \dot{\delta}} &= \bar{S} \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{\delta}}} \end{aligned} \tag{3.25}$$

La troisième équation du système d'équations (3.1) devient, en remplaçant les équations (3.22) dans les équations (3.23) :

$$\Delta M = I_{yy} \dot{q} = \bar{S} \frac{\bar{c}}{U_0} C_{m_u} u + \bar{S}\bar{c} C_{m_w} \frac{w}{U_0} + \bar{S} \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{m_{\dot{w}}} \dot{w} + \bar{S}\bar{c} \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{\theta}}} \dot{\theta} + \bar{S}\bar{c} \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{m_{\ddot{\theta}}} \ddot{\theta} + \bar{S}\bar{c} C_{m_\delta} \delta + \bar{S} \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_{\dot{\delta}}} \dot{\delta} \tag{3.26}$$

### 3.2 Équations de l'avion en mouvement longitudinal dans le système des axes inertiels $T$

#### 3.2.1 Calcul des forces $\Delta X$ et $\Delta Z$ et moments $\Delta M$

Dans le système d'axes inertiels lié à la Terre  $T$ , les forces sont exprimées, en faisant référence à la figure 3.1 :

$$\begin{cases} X_T = R_z \sin\left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) - R_x \cos\left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) \\ Z_T = -R_z \cos\left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) - R_x \sin\left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) \end{cases} \quad (3.27)$$

et en utilisant l'approximation des angles petites, on obtient :

$$\begin{cases} X_T = R_z \left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) - R_x \\ Z_T = -R_z - R_x \left(\alpha_1 + \frac{\dot{z}_T}{U_0}\right) \end{cases} \quad (3.28)$$

Dans les équations (2.50) – (2.52) qui décrivent le moment longitudinal de l'avion, on va poser d'abord la condition de vol horizontal non perturbé, soit  $\phi = \theta = \psi = 0$  et on va obtenir :

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & W_0 & -V_0 \\ -W_0 & 0 & U_0 \\ V_0 & -U_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \\ \Delta\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0\Delta\theta - V_0\Delta\psi + \Delta U \\ -W_0\Delta\phi + U_0\Delta\psi + \Delta V \\ V_0\Delta\phi - U_0\Delta\theta + \Delta W \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

La condition de vol symétrique impose les conditions supplémentaires  $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$  et  $V_0 = 0$ . On va introduire ces équations dans le système d'équations (3.29) et on va

obtenir :

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta U + W_0 \Delta \theta \\ \Delta V \\ \Delta W - U_0 \Delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + W_0 \theta \\ v \\ w - U_0 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

car on rappelle les notations équivalentes  $\Delta U = u$ ,  $\Delta W = w$  etc.

L'équation (3.30) va donner :

$$\begin{cases} u = \dot{x}_T - W_0 \theta \\ w = \dot{z}_T + U_0 \theta \end{cases} \quad (3.31)$$

On va remplacer les équations (3.31) dans les équations (3.17), (3.21) et (3.26) et on va obtenir les expressions des forces  $\Delta X$ ,  $\Delta Z$  et les moments  $\Delta M$  dans le système d'axes inertielles liées à la Terre  $T$ .

Premièrement, la variation de la force  $\Delta X$  sur l'axe  $Ox_T$  va devenir :

$$\begin{aligned} \Delta X &= \bar{S} \left[ (C_{z_u} \alpha_1 - C_{x_u}) \frac{\dot{x}_T}{U_0} - (C_{z_u} \alpha_1 - C_{x_u}) \frac{W_0}{U_0} \theta + (C_{z_\alpha} \alpha_1 + C_z - C_{x_\alpha}) \frac{\dot{z}_T}{U_0} + (C_{z_\alpha} \alpha_1 + C_z - C_{x_\alpha}) \theta + \right. \\ &\quad + (C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_{x_\alpha}) \frac{\bar{c}}{2U_0^2} \ddot{z}_T + (C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_{x_\alpha}) \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\theta} + (C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q}) \frac{\bar{c}}{2U_0} \dot{\theta} + \\ &\quad \left. + (C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q}) \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} \ddot{\theta} + (C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta}) \delta + \frac{\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta}) \dot{\delta} \right] = \\ &= \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_u} \alpha_1 - C_{x_u}) \dot{x}_T - \bar{S} (C_{z_u} \alpha_1^2 - C_{x_u} \alpha_1 - C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_z + C_{x_\alpha}) \theta + \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_\alpha} \alpha_1 + C_z - C_{x_\alpha}) \dot{z}_T + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} (C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_{x_\alpha}) \ddot{z}_T + \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\alpha} \alpha_1 - C_{x_\alpha} + C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q}) \dot{\theta} + \\
& + \frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} (C_{z_q} \alpha_1 - C_{x_q}) \ddot{\theta} + \bar{S} (C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta}) \delta + \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\delta} \alpha_1 - C_{x_\delta}) \dot{\delta} \Big]. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

La variation de la force  $\Delta Z$  sur l'axe  $Oz_T$  va devenir :

$$\begin{aligned}
\Delta Z &= -\frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_u} + \alpha_1 C_{x_u}) \dot{x}_T + \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_u} + \alpha_1 C_{x_u}) W_0 \theta - \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_x) \dot{z}_T - \\
& - \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_x) U_0 \theta - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha}) \ddot{z}_T - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha}) U_0 \dot{\theta} - \\
& \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_q} + \alpha_1 C_{x_q}) \dot{\theta} - \frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} (C_{z_q} + \alpha_1 C_{x_q}) \ddot{\theta} - \bar{S} (C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta}) \delta - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta}) \dot{\delta} = \\
& = -\frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_u} + \alpha_1 C_{x_u}) \dot{x}_T + \bar{S} (\alpha_1 C_{z_u} + \alpha_1^2 C_{x_u} - C_{z_\alpha} - \alpha_1 C_{x_\alpha} - C_x) \theta - \\
& \frac{\bar{S}}{U_0} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_x) \dot{z}_T - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha}) \ddot{z}_T - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_{z_q} + \alpha_1 C_{x_q}) \dot{\theta} - \\
& - \frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2} (C_{z_q} + \alpha_1 C_{x_q}) \ddot{\theta} - \bar{S} (C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta}) \delta - \frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0} (C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta}) \dot{\delta}. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

La variation de moment  $\Delta M$  autour de l'axe  $Oy_T$  va devenir :

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0} C_{m_u} \dot{x}_T + \bar{S}\bar{c} (C_{m_\alpha} - \alpha_1 C_{m_u}) \theta + \frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0} C_{m_\alpha} \dot{z}_T + \bar{S} \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{m_\alpha} \ddot{z}_T + \bar{S} \frac{\bar{c}^2}{2U_0} (C_{m_\alpha} + C_{m_q}) \dot{\theta} + \\
& + \bar{S}\bar{c} \frac{\bar{c}^2}{2U_0^2} C_{m_q} \ddot{\theta} + \bar{S}\bar{c} C_{m_\delta} \delta + \bar{S} \frac{\bar{c}}{2U_0} C_{m_\delta} \dot{\delta}. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Dans le tableau suivant on va regrouper les dérivées de stabilité correspondantes aux matrices de masse  $\mathbf{M}$ , amortissement  $\mathbf{C}$  et rigidité  $\mathbf{K}$ . On va expliquer ce regroupement dans le chapitre 5.

### 3.2.2 Tableau des dérivées de stabilité dans les équations du mouvement longitudinal dans les axes inertielles T

Tableau I

La rigidité  $\mathbf{K}$  (Terme aérodynamique  $Q_R$ ) :

	$x_T$	$z_T$	$\theta$	$\delta$
$x$	0	0	$\bar{S}(\alpha_1 C_{z_\alpha} + C_z - C_{x_\alpha} - \alpha_1^2 C_{z_u} + \alpha_1 C_{x_u})$	$\bar{S}(\alpha_1 C_{z_\delta} - C_{x_\delta})$
$z$	0	0	$\bar{S}(\alpha_1 C_{z_u} + \alpha_1^2 C_{x_u} - C_{z_\alpha} - \alpha_1 C_{x_\alpha} - C_x)$	$-\bar{S}(C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta})$
$m$	0	0	$\bar{S}\bar{c}(C_{m_\alpha} - \alpha_1 C_{m_u})$	$\bar{S}\bar{c}C_{m_\delta}$

Tableau II

L'amortissement  $\mathbf{D}$  (Terme aérodynamique  $Q_I$ ) :

	$\dot{x}_T$	$\dot{z}_T$	$\dot{\theta}$	$\dot{\delta}$
$x$	$\frac{\bar{S}}{U_0}(C_{z_\alpha}\alpha_1 - C_{x_\alpha})$	$\frac{\bar{S}}{U_0}(C_{z_\alpha}\alpha_1 + C_z - C_{x_\alpha})$	$\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0}(C_{z_\alpha}\alpha_1 - C_{x_\alpha} + C_{z_u}\alpha_1 - C_{x_u})$	$\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0}(C_{z_\delta}\alpha_1 - C_{x_\delta})$
$z$	$-\frac{\bar{S}}{U_0}(C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha})$	$-\frac{\bar{S}}{U_0}(C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_x)$	$-\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0}(C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha} + C_{z_u} + \alpha_1 C_{x_u})$	$-\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0}(C_{z_\delta} + \alpha_1 C_{x_\delta})$
$m$	$\frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0}C_{m_u}$	$\frac{\bar{S}\bar{c}}{U_0}C_{m_\alpha}$	$\bar{S}\frac{\bar{c}^2}{2U_0}(C_{m_\alpha} + C_{m_u})$	$\bar{S}\frac{\bar{c}}{2U_0}C_{m_\delta}$

Tableau III

La masse M :

	$\ddot{x}_T$	$\ddot{z}_T$	$\ddot{\theta}$	$\ddot{\delta}$
$x$	0	$\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2}(C_{z_\alpha}\alpha_1 - C_{x_\alpha})$	$\frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2}(C_{z_q}\alpha_1 - C_{x_q})$	0
$z$	0	$-\frac{\bar{S}\bar{c}}{2U_0^2}(C_{z_\alpha} + \alpha_1 C_{x_\alpha})$	$-\frac{\bar{S}\bar{c}^2}{2U_0^2}(C_{z_q} + \alpha_1 C_{x_q})$	0
$m$	0	$\bar{S}\frac{\bar{c}^2}{2U_0^2}C_{m_\alpha}$	$\bar{S}\bar{c}\frac{\bar{c}^2}{2U_0^2}C_{m_q}$	0

## CHAPITRE 4

### LE MOUVEMENT LATÉRAL DE L'AVION DANS LE SYSTEME DES AXES INERTIELLES T

#### 4.1 Introduction sur le mouvement latéral

Lorsqu'une petite perturbation agit sur l'avion sur l'axe  $Oy_a$ , la vitesse apparaît sur cet axe et, par la suite, une déviation de la trajectoire de l'avion apparaît (figure 4.1).

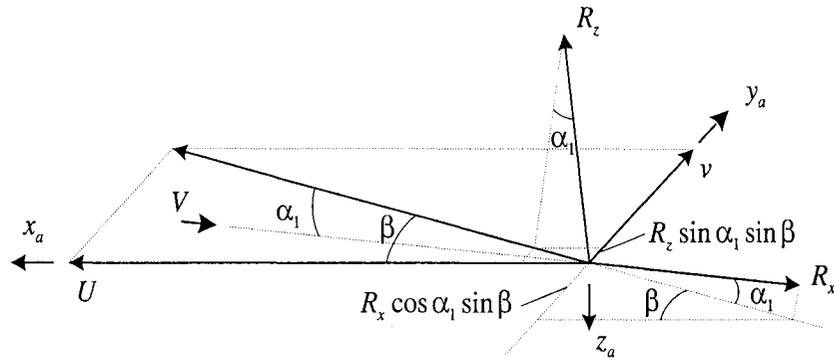


Figure 4.1 La configuration géométrique pour le mouvement latéral de l'avion

La portance  $R_z$  est donnée par :

$$R_z = \frac{\rho S}{2} C_z (U_0^2 + v^2) \cong \frac{\rho S U_0^2}{2} C_z = \bar{S} C_z, \quad (4.1)$$

et la traînée  $R_x$  est donnée par :

$$R_x = \frac{\rho S}{2} C_x (U_0^2 + v^2) \cong \frac{\rho S U_0^2}{2} C_x = \bar{S} C_x. \quad (4.2)$$

On peut dire qu'une petite perturbation a un effet minimal sur la grandeur des forces de portance  $R_z$  et de traînée  $R_x$ . Pour calculer la résultante des forces agissant sur l'axe  $Oy_a$

il faut ajouter à la perturbation causant la vitesse  $v$  :

$$R_y = \frac{\rho S}{2} C_y (U_0^2 + v^2) \cong \frac{\rho S U_0^2}{2} C_y = \bar{S} C_y, \quad (4.3)$$

les projections des forces de portance et de traînée.

#### 4.2 La force latérale $\Delta Y$ sur l'axe $y_T$

Par la suite, la perturbation de la force sur l'axe latéral sera :

$$\begin{aligned} \Delta Y &= R_z \sin \alpha_1 \sin \beta - R_x \cos \alpha_1 \sin \beta + R_y \cong R_z \alpha_1 \beta - R_x \beta + R_y \Rightarrow \\ \Delta Y &= \bar{S} (\alpha_1 \beta C_z - \beta C_x + C_y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où on va développer  $C_y$  sous la forme de séries de MacLaurin :

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y\beta} \beta + C_{y\dot{\beta}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{y_p} \frac{b}{2U_0} p + C_{y_{\dot{p}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{p} + C_{y_r} \frac{b}{2U_0} r + C_{y_{\dot{r}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{r} + C_{y\delta} \delta + C_{y_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} = \\ &= C_{y\beta} \beta + C_{y\dot{\beta}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{y_{\dot{\phi}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\phi} + C_{y_{\ddot{\phi}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\phi} + C_{y_{\dot{\psi}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\psi} + C_{y_{\ddot{\psi}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\psi} + C_{y\delta} \delta + C_{y_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Les conditions initiales de vol sont  $\Delta\theta = 0$  et  $\Delta U = \Delta W = 0$ . Les perturbations des vitesses et angles pour le mouvement latéral de l'avion sont :  $\Delta V = v$ ;  $\Delta\phi = \phi$ ;  $\Delta\psi = \psi$ . On va remplacer ces conditions dans les équations (2.50), (2.51) et (2.52) et on va obtenir :

$$\Delta V_y = v_y = \dot{y}_T = \Delta V + U_0 \Delta\psi - W_0 \Delta\phi = v + U_0 \psi - W_0 \phi. \quad (4.6)$$

L'angle de dérapage  $\beta$  est calculée dans la figure 4.1 par :

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v}{U_0} \cong \frac{v}{U_0} \quad (4.7)$$

On va remplacer  $v$ , donné par l'équation (4.6) dans l'angle de dérapage calculé par l'équation (4.7) et on va obtenir l'équation suivante :

$$\beta = \frac{\dot{y}_T - U_0 \psi + W_0 \phi}{U_0} = \frac{\dot{y}_T}{U_0} - \psi + \frac{W_0}{U_0} \phi = \frac{\dot{y}_T}{U_0} - \psi + \alpha_1 \phi. \quad (4.8)$$

On va développer la perturbation de la force  $\Delta Y$  dans séries de Taylor, comme suite :

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial Y}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial Y}{\partial \phi} \phi + \frac{\partial Y}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial Y}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial Y}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial Y}{\partial \ddot{\phi}} \ddot{\phi} + \frac{\partial Y}{\partial \ddot{\psi}} \ddot{\psi} + \frac{\partial Y}{\partial \delta} \delta + \frac{\partial Y}{\partial \dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (4.9)$$

Dans le calcul des dérivées de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion, on va dériver l'équation (4.4) par rapport aux quantités  $Q = [\beta, \dot{\beta}, \psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \delta, \dot{\delta}]$  et on va obtenir les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \beta} &= \alpha_1 R_z - R_x + \frac{\partial R_y}{\partial \beta} = \bar{S} (\alpha_1 C_z - C_x + C_{y\beta}) \\ \frac{\partial Y}{\partial \dot{\beta}} &= \frac{\partial R_y}{\partial \dot{\beta}} = \bar{S} C_{y\dot{\beta}} \frac{b}{2U_0} \\ \frac{\partial Y}{\partial \psi} &= \alpha_1 R_z \frac{\partial \beta}{\partial \psi} - R_x \frac{\partial \beta}{\partial \psi} + \frac{\partial R_y}{\partial \psi} = \bar{S} (-\alpha_1 C_z + C_x) \\ \frac{\partial Y}{\partial \phi} &= \alpha_1 R_z \frac{\partial \beta}{\partial \phi} - R_x \frac{\partial \beta}{\partial \phi} + \frac{\partial R_y}{\partial \phi} = \bar{S} (\alpha_1^2 C_z - \alpha_1 C_x) \\ \frac{\partial Y}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial R_y}{\partial \dot{\psi}} = \bar{S} C_{y\dot{\psi}} \frac{b}{2U_0} ; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \phi} = \frac{\partial R_y}{\partial \phi} = \bar{S} C_{y_p} \frac{b}{2U_0}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial R_y}{\partial \dot{\psi}} = \bar{S} C_{y_r} \frac{b^2}{2U_0^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \ddot{\phi}} = \frac{\partial R_y}{\partial \ddot{\phi}} = \bar{S} C_{y_p} \frac{b^2}{2U_0^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{\partial R_y}{\partial \delta} = \bar{S} C_{y_s};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \dot{\delta}} = \frac{\partial R_y}{\partial \dot{\delta}} = \bar{S} C_{y_s} \frac{b}{2U_0}$$

On va remplacer les équations (4.10) dans l'équation (4.9) et on va utiliser aussi l'équation (4.8), alors on va obtenir :

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \bar{S} (\alpha_1 C_z - C_x + C_{y_\beta}) \left( \frac{\dot{y}_T}{U_0} - \psi + \alpha_1 \phi \right) + \bar{S} (-\alpha_1 C_z + C_x) \psi + \bar{S} (\alpha_1^2 C_z - \alpha_1 C_x) \phi + \bar{S} C_{y_s} \delta + \\ &+ \bar{S} C_{y_\beta} \frac{b}{2U_0} \left( \frac{\ddot{y}_T}{U_0} - \dot{\psi} + \alpha_1 \dot{\phi} \right) + \bar{S} C_{y_r} \frac{b}{2U_0} \dot{\psi} + \bar{S} C_{y_p} \frac{b}{2U_0} \dot{\phi} + \bar{S} C_{y_s} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} + \bar{S} C_{y_r} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\psi} + \bar{S} C_{y_p} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\phi} \\ &= \bar{S} C_{y_\beta} \frac{b}{2U_0^2} \ddot{y}_T + \bar{S} \frac{b^2}{2U_0^2} C_{y_p} \ddot{\phi} + \bar{S} \frac{b^2}{2U_0^2} C_{y_r} \ddot{\psi} + \\ &+ \frac{\bar{S}}{U_0} (\alpha_1 C_z - C_x + C_{y_\beta}) \dot{y}_T + \bar{S} \frac{b}{2U_0} (-C_{y_\beta} + C_{y_r}) \dot{\psi} + \bar{S} \frac{b}{2U_0} (\alpha_1 C_{y_\beta} + C_{y_p}) \dot{\phi} + \bar{S} \frac{b}{2U_0} C_{y_s} \dot{\delta} + \\ &+ \bar{S} (-2\alpha_1 C_z + 2C_x - C_{y_\beta}) \psi + \bar{S} (2\alpha_1^2 C_z - 2\alpha_1 C_x + \alpha_1 C_{y_\beta}) \phi + \bar{S} C_{y_s} \delta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3 Les moments $\Delta L$ et $\Delta N$ autour des axes $x_T$ et $z_T$

Les deux autres variables qui interviennent dans le mouvement latéral sont les moments  $L$  et  $N$  sur les axes  $Ox_a$  et, respectivement,  $Oz_a$ . Ces perturbations sont décrites par :

$$\Delta L = \bar{S}bC_l \quad (4.12)$$

$$\Delta N = \bar{S}bC_n, \quad (4.13)$$

où les coefficients  $C_l$  et  $C_n$  sont calculées en séries MacLaurin par

$$\begin{aligned} C_l &= C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\dot{\beta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{l_p} \frac{b}{2U_0} p + C_{l_{\dot{p}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{p} + C_{l_r} \frac{b}{2U_0} r + C_{l_{\dot{r}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{r} + C_{l_\delta} \delta + C_{l_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} \\ &= C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\dot{\beta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{l_p} \frac{b}{2U_0} \dot{\phi} + C_{l_{\dot{p}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\phi} + C_{l_r} \frac{b}{2U_0} \dot{\psi} + C_{l_{\dot{r}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\psi} + C_{l_\delta} \delta + C_{l_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

et

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\dot{\beta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{n_p} \frac{b}{2U_0} p + C_{n_{\dot{p}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{p} + C_{n_r} \frac{b}{2U_0} r + C_{n_{\dot{r}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \dot{r} + C_{n_\delta} \delta + C_{n_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} \\ &= C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\dot{\beta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\beta} + C_{n_p} \frac{b}{2U_0} \dot{\phi} + C_{n_{\dot{p}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\phi} + C_{n_r} \frac{b}{2U_0} \dot{\psi} + C_{n_{\dot{r}}} \frac{b^2}{2U_0^2} \ddot{\psi} + C_{n_\delta} \delta + C_{n_{\dot{\delta}}} \frac{b}{2U_0} \dot{\delta} \end{aligned} \quad (4.15)$$

La linéarisation des équations des moments pour le mouvement longitudinal de l'avion  $\Delta L$  et  $\Delta N$ , pour des petites perturbations, c'est-à-dire autour de zéro, donne :

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial L}{\partial \phi} \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}} \ddot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}} \ddot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \delta} \delta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (4.16)$$

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial N}{\partial \dot{\beta}} \dot{\beta} + \frac{\partial N}{\partial \phi} \phi + \frac{\partial N}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial N}{\partial \ddot{\phi}} \ddot{\phi} + \frac{\partial N}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial N}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial N}{\partial \ddot{\psi}} \ddot{\psi} + \frac{\partial N}{\partial \delta} \delta + \frac{\partial N}{\partial \dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (4.17)$$

On va calculer ensuite les dérivées de stabilité pour les moments  $\Delta L$  et  $\Delta N$  pour le mouvement latéral de l'avion, en introduisant les équations (4.14) dans les équations (4.12) et en les dérivant par rapport aux quantités nécessaires au calcul de ces dérivées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \beta} = \bar{S}b C_{l_\beta} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_\beta} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_p} \\ \frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}} = \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{l_p} \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_r} \\ \frac{\partial L}{\partial \ddot{\psi}} = \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{l_r} \\ \frac{\partial L}{\partial \delta} = \bar{S}b C_{l_s} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_s} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial N}{\partial \beta} = \bar{S}b C_{n_b} \\
 \frac{\partial N}{\partial \dot{\beta}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_b} \\
 \frac{\partial N}{\partial \phi} = 0 \\
 \frac{\partial N}{\partial \dot{\phi}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_p} \\
 \frac{\partial N}{\partial \ddot{\phi}} = \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{n_p} \\
 \frac{\partial N}{\partial \psi} = 0 \\
 \frac{\partial N}{\partial \dot{\psi}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_r} \\
 \frac{\partial N}{\partial \ddot{\psi}} = \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{n_r} \\
 \frac{\partial N}{\partial \delta} = \bar{S}b C_{n_s} \\
 \frac{\partial N}{\partial \dot{\delta}} = \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_s}
 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

On remplace l'équation (4.18) dans l'équation (4.16) et l'équation (4.19) dans l'équation (4.17) et en tenant compte des équations (4.6) et (4.8) pour  $\beta$ , on obtient les perturbations des moments  $\Delta L$  et  $\Delta N$ :

$$\begin{aligned}
\Delta L = l &= \bar{S}bC_{l_p} \left( \frac{\dot{y}_T}{U_0} - \psi + \alpha_1 \phi \right) + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_p} \left( \frac{\ddot{y}_T}{U_0} - \dot{\psi} + \alpha_1 \dot{\phi} \right) + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_p} \dot{\phi} + \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{l_p} \ddot{\phi} \\
&+ \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_r} \dot{\psi} + \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{l_r} \ddot{\psi} + \bar{S}b C_{l_\delta} \delta + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{l_\delta} \dot{\delta} = \\
&= \bar{S}b C_{l_p} \alpha_1 \phi - \bar{S}b C_{l_p} \psi + \bar{S}b C_{l_\delta} \delta + \frac{\bar{S}}{U_0} b C_{l_p} \dot{y}_T + \frac{\bar{S}b}{2U_0} b (\alpha_1 C_{l_p} + C_{l_r}) \dot{\phi} + \frac{\bar{S}b}{2U_0} b (C_{l_r} - C_{l_p}) \dot{\psi} \\
&+ \frac{\bar{S}b}{2U_0} b C_{l_\delta} \dot{\delta} + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} C_{l_p} \ddot{y}_T + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} b C_{l_p} \ddot{\phi} + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} b C_{l_r} \ddot{\psi}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta N = n &= \bar{S}bC_{n_p} \left( \frac{\dot{y}_T}{U_0} - \psi + \alpha_1 \phi \right) + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_p} \left( \frac{\ddot{y}_T}{U_0} - \dot{\psi} + \alpha_1 \dot{\phi} \right) + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_p} \dot{\phi} + \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{n_p} \ddot{\phi} \\
&+ \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_r} \dot{\psi} + \bar{S}b \frac{b^2}{2U_0^2} C_{n_r} \ddot{\psi} + \bar{S}b C_{n_\delta} \delta + \bar{S}b \frac{b}{2U_0} C_{n_\delta} \dot{\delta} = \\
&= \bar{S}b C_{n_p} \alpha_1 \phi - \bar{S}b C_{n_p} \psi + \bar{S}b C_{n_\delta} \delta + \frac{\bar{S}}{U_0} b C_{n_p} \dot{y}_T + \frac{\bar{S}b}{2U_0} b (\alpha_1 C_{n_p} + C_{n_r}) \dot{\phi} + \frac{\bar{S}b}{2U_0} b (C_{n_r} - C_{n_p}) \dot{\psi} \\
&+ \frac{\bar{S}b}{2U_0} b C_{n_\delta} \dot{\delta} + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} C_{n_p} \ddot{y}_T + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} b C_{n_p} \ddot{\phi} + \frac{\bar{S}b^2}{2U_0^2} b C_{n_r} \ddot{\psi}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

#### 4.4 Tableau pour le mouvement latéral de l'avion par rapport aux axes inertielles $T$

En synthétisant les équations (4.11), (4.20) et (4.21) on obtient les tableaux suivants pour les coefficients de stabilité aérodynamiques du mouvement latéral de l'avion :

Tableau IV

La rigidité **K** (Terme aérodynamique  $Q_R$ ) :

	$y_T$	$\phi$	$\psi$	$\delta$
$\Delta Y = y$	0	$\bar{S} \left[ 2\alpha_1^2 C_z - 2\alpha_1 C_x + \alpha_1 C_{y_\beta} \right]$	$\bar{S} \left( -2\alpha_1 C_z + 2C_x - C_{y_\beta} \right)$	$\bar{S} C_{y_\delta}$
$\Delta L = l$	0	$\bar{S} b C_{l_\beta} \alpha_1$	$-\bar{S} b C_{l_\beta}$	$\bar{S} b C_{l_\delta}$
$\Delta N = n$	0	$\bar{S} b C_{n_\beta} \alpha_1$	$-\bar{S} b C_{n_\beta}$	$\bar{S} b C_{n_\delta}$

Tableau V

L'amortissement **D** (Terme aérodynamique  $Q_I$ ) :

	$\dot{y}_T$	$\dot{\phi}$	$\dot{\psi}$	$\dot{\delta}$
$\Delta Y = y$	$\frac{\bar{S}}{U_0} \left( \alpha_1 C_z - C_x + C_{y_\beta} \right)$	$\bar{S} \frac{b}{2U_0} \left( \alpha_1 C_{y_\beta} + C_{y_p} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} \left( -C_{y_\beta} + C_{y_r} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} C_{y_\delta}$
$\Delta L = l$	$\frac{\bar{S}}{U_0} b C_{l_\beta}$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b \left( \alpha_1 C_{l_\beta} + C_{l_p} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b \left( C_{l_r} - C_{l_\beta} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b C_{l_\delta}$
$\Delta N = n$	$\frac{\bar{S}}{U_0} b C_{n_\beta}$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b \left( \alpha_1 C_{n_\beta} + C_{n_p} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b \left( C_{n_r} - C_{n_\beta} \right)$	$\frac{\bar{S} b}{2U_0} b C_{n_\delta}$

Tableau VI

La masse  $\mathbf{M}$  :

	$\ddot{y}_r$	$\ddot{\phi}$	$\ddot{\psi}$	$\ddot{\delta}$
$\Delta Y = y$	$\bar{S} \frac{b}{2U_0^2} C_{y_p}$	$\bar{S} \frac{b^2}{2U_0^2} C_{y_p}$	$\bar{S} \frac{b^2}{2U_0^2} C_{y_r}$	0
$L = l$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} C_{l_p}$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} b C_{l_p}$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} b C_{l_r}$	0
$\Delta N = n$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} C_{n_p}$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} b C_{n_p}$	$\frac{\bar{S} b^2}{2U_0^2} b C_{n_r}$	0

## CHAPITRE 5

### DESCRIPTION DE LA METHODE DE CALCUL DES INTERACTIONS AEROSERVOELASTIQUES

#### 5.1 Équation générale de la dynamique aéroélastique de l'avion

L'aéroélasticité classique est issue de l'interaction entre la dynamique structurelle de l'avion (élasticité) et les forces aérodynamiques. Dans cette section nous allons élaborer sur les différentes équations de base vues dans les théories de l'aéroservoélasticité. Cette section est le cheminement logique des équations nécessaires à la résolution du problème. L'analyse de vibration de la structure est la démarche traditionnelle pour obtenir le modèle aéroélastique. Généralement la structure est décrite par un modèle d'éléments finis.

Soit un modèle d'éléments finis d'un avion constitué de  $N$  nœuds. Considérons que chaque nœud de la structure soit défini par un vecteur position-orientation par rapport à un repère lié aux axes de l'avion et muni d'une masse  $m_i$  et d'une inertie  $I_i$ .

$$\xi_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}]_B^T \quad (5.1)$$

À l'équilibre, tout point de la structure est définie par un vecteur nominal  $\xi_{i0}$  en position et en orientation. Le déplacement d'un nœud par rapport à sa position d'équilibre est représenté par la quantité :

$$q_i = \xi_i - \xi_{i0} \quad (5.2)$$

On peut représenter les nœuds sous forme matricielle en regroupant l'information sur la masse et l'inertie de ce nœud. Donc, on peut écrire :

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & \\ 0 & m_i & 0 & 0_{3,3} \\ 0 & 0 & m_i & \\ & 0_{3,3} & & I_i \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

où la matrice  $I_i$  est de dimension 3x3, ainsi le vecteur dérivé de la quantité de mouvement du nœud  $i$  est représenté par :

$$\frac{d(M_i \dot{q}_i)}{dt} = M_i \ddot{q}_i \quad (5.4)$$

Soit  $q$  le vecteur déplacement de l'avion défini par :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Le vecteur dérivé de la quantité de mouvement de tout l'avion est représenté par :

$$\frac{d(M_{N,N} \dot{q})}{dt} = M_{N,N} \ddot{q} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

où  $M_{N,N}$ , est la matrice d'inertie de l'avion, de dimension  $6 N \times 6 N$ .

De même, si on considère que les seules forces appliquées à la structure ou autrement dit les interactions entre les nœuds sont les forces dues à l'élasticité, alors on pourra définir une matrice de rigidité  $K_{N,N}$  et une matrice d'amortissement  $D_{N,N}$  décrivant les forces appliquées sur l'avion :

$$F_{ela} = -D_{N,N}\dot{q} - K_{N,N}q \quad (5.7)$$

$K_{N,N}$  et  $D_{N,N}$  sont également de dimension  $(6N \times 6N)$ . Les éléments  $(K_{N,N})_{ij}$  et  $(D_{N,N})_{ij}$  représentent l'interaction du nœud  $j$  sur le nœud  $i$ .

En appliquant les lois de la dynamique de Newton on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d(M_{N,N}\dot{q})}{dt} &= M_{N,N}\ddot{q} = -D_{N,N}\dot{q} - K_{N,N}q \text{ ou encore} \\ M_{N,N}\ddot{q} + D_{N,N}\dot{q} + K_{N,N}q &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Une analyse des vibrations libres menée sur le modèle élastique décrit par l'équation (5.8) permet de réduire le système à  $6 \times n$  degrés de libertés contraints à un système à  $n$  degrés de libertés où les  $n$  degrés de libertés sont indépendants et représentent la dynamique admissible de l'avion compte tenu des contraintes d'élasticité. Les  $n$  degrés de libertés sont appelés « modes » ou « coordonnées généralisées » de l'avion et sont représentés par le vecteur  $\eta$ .

Ils sont reliés au vecteur déplacement  $q$  à travers la matrice de forme  $\Phi$ , matrice rectangulaire  $(6N \times n)$  qui regroupent les vecteurs propres issus du problème de vibrations libres :

$$q = \Phi \cdot \eta \quad (5.9)$$

Le vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  peut être divisé comme suit :

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

où :

- $\eta_r$ , représente les coordonnées généralisées des modes rigides
- $\eta_e$ , représente les coordonnées généralisées des modes élastiques
- $\eta_c$ , représente les coordonnées généralisées des modes de commande

De même pour la matrice de forme  $\phi$  :

$$\phi = [\phi_r \ \phi_e \ \phi_c] \quad (5.11)$$

Le vecteur de la quantité de déplacements va s'écrire comme suit :

$$q = \Phi_r \eta_r + \Phi_e \eta_e + \Phi_c \eta_c \quad (5.12)$$

Désormais, tout le modèle dynamique de l'avion peut être décrit par les  $n$  modes indépendants. En reprenant l'équation de la dynamique (5.8), on peut former une nouvelle équation ne dépendant que du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  :

$$M_e \ddot{\eta} + D_e \dot{\eta} + K_e \eta = 0 \quad (5.13)$$

Les matrices  $M$ ,  $D$  et  $K$  sont les matrices modales d'inertie, d'amortissement et de rigidité, toutes de dimensions  $(n \times n)$  et définies comme suit :

$$\begin{aligned} M_e &= \Phi^T M_{N,N} \Phi \\ D_e &= \Phi^T D_{N,N} \Phi \\ K_e &= \Phi^T K_{N,N} \Phi \end{aligned} \quad (5.14)$$

Une fois le modèle structural élaboré, on s'intéresse à la génération des forces aérodynamiques sur l'avion. Ici on considère le cas général ou les forces aérodynamiques générées sont non stationnaires et donc dépendantes de la fréquence des oscillations.

La forme générale des forces aérodynamiques est la suivante :

$$F_{aero} = -\bar{q}Q_{N,N}(k, Mach)q \quad (5.15)$$

où  $\bar{q}$  est la pression dynamique et  $k$  la fréquence réduite,  $Q_{N,N}$  est la matrice des coefficients d'influence aérodynamiques définie pour un nombre de Mach donné et une fréquence réduite donnée et  $(Q_{N,N})_{ij}$  représente l'interaction de la force aérodynamique appliquée au nœud  $j$  sur le nœud  $i$ .

Les forces aérodynamiques sont également calculées dans l'espace des nœuds puis ramenées dans l'espace des modes à travers la matrice de forme  $\Phi$  :

$$Q = \Phi^T Q_{N,N} \Phi \quad (5.16)$$

où  $Q$  est la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées dans l'espace des modes. Finalement on peut intégrer les forces aérodynamiques dans l'équation de la dynamique :

$$M_e \ddot{\eta} + D_e \dot{\eta} + K_e \eta + q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = 0 \quad (5.17)$$

On va décrire, dans la section suivante, les équations de la dynamique aéroélastique de l'avion dans le but de calculer les vitesses de battement pour le F-18.

## 5.2 Dynamique aéroélastique de l'avion (le calcul de vitesses de battement sur l'avion)

$$M \ddot{\eta} + D \dot{\eta} + K \eta + q_{dyn} Q(k, Mach) \eta = 0 \quad (5.18)$$

où  $M$ ,  $D$  et  $K$  sont les matrices modales d'inertie, d'amortissement et de rigidité,  $Q(k, Mach)$  représente la matrice des forces aérodynamiques généralisées en fonction de la fréquence réduite  $k$  et le nombre de  $Mach$ , et le vecteur  $\eta$  représente les  $n$  degrés de libertés qui sont appelés « modes » ou « coordonnées généralisées » de l'avion dans

l'espace des modes. On sait que les forces aérodynamiques généralisées sont complexes, c'est-à-dire qu'elles ont une partie réelle  $Q_R(k, Mach)$  et une partie imaginaire  $Q_I(k, Mach)$  :

$$Q(k, Mach) = Q_R + \mathbf{j} Q_I \quad (5.19)$$

Où  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ . Dans l'équation (5.19), la partie réelle de  $Q$  ( $Q_R$ ) est appelée « rigidité aérodynamique » et vibre en phase avec le vecteur de la position et la partie imaginaire de  $Q$  ( $Q_I$ ) est appelée « amortissement aérodynamique » et vibre en phase avec le vecteur de la vitesse, et afin de respecter la dynamique mentionnée précédemment,  $Q_R$  s'associe au vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  et  $Q_I$  s'associe à la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées  $\dot{\eta}$ .

Puisque la matrice  $Q$  est déjà facteur du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$ , on doit diviser  $Q_I$  par  $\omega$ , de telle sorte que  $Q_I$  peut être exprimée en facteur de la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées  $\dot{\eta}$ . Donc, l'équation aéroélastique (5.18) devient :

$$M\ddot{\eta} + \left( D + \frac{1}{\omega} q_{dyn} Q_I \right) \dot{\eta} + (K + q_{dyn} Q_R) \eta = 0 \quad (5.20)$$

La fréquence naturelle  $\omega$  et la pression dynamique  $q_{dyn}$  s'écrivent en fonction de la fréquence réduite  $k$ , la corde  $c$ , la vitesse vraie  $V$  et la densité  $\rho$  :

$$\omega = \frac{kb}{V} = \frac{kc}{2V} \quad \text{et} \quad q_{dyn} = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (5.21)$$

On va introduire les équations (5.21) dans l'équation (5.20) :

$$M\ddot{\eta} + \left( D + \frac{1}{4k} \rho V c Q_I \right) \dot{\eta} + \left( K + \frac{1}{2} \rho V^2 Q_R \right) \eta = 0 \quad (5.22)$$

Les paramètres non – dimensionnels  $\sigma$  et  $\nu$  sont définis comme suit :

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V_E = \sqrt{\sigma} V, \quad \nu = \frac{V_E}{V_0} \quad (5.23)$$

À l'aide des paramètres non – dimensionnels  $\sigma$  et  $\nu$  définis dans l'équation (5.23), on va calculer la vitesse vraie  $V$  et la densité  $\rho$  :

$$V = \frac{V}{\sqrt{\sigma}} V_0, \quad q_{dyn} = \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c^2 \omega_0^2 \nu^2, \quad \frac{b}{V} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2 \nu \omega_0} \quad (5.24)$$

En remplaçant les équations (5.24) dans l'équation (5.22), on va obtenir l'équation (5.25) pour le calcul des vitesses de battement par la méthode de battement  $p$  :

$$M\ddot{\eta} + \left( D + \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E Q_I \right) \dot{\eta} + \left( K + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 Q_R \right) \eta = 0 \quad (5.25)$$

L'équation (5.25) est résolue par plusieurs méthodes classiques de battement ( $p, pk, k$ .) On devrait remplacer les forces aérodynamiques rigides et de contrôle calculées par le logiciel STARS par des éléments finis par des forces aérodynamiques calculés sur l'avion rigide en 6 degrés de liberté par les lois de Newton.

Pour mieux expliquer notre théorie d'aérodynamique pour les modes rigides et de contrôle de l'avion aéroélastique, on va poser notre équation (5.25) sous la forme matricielle suivante, qui va regrouper les modes rigides et de contrôle pour les forces aérodynamiques.

Dans ce but, on va regrouper les termes du vecteur de coordonnées généralisées  $\eta$  sous la forme suivante :  $\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_c]^T$ , car on va respecter l'ordre suivante dans nos calculs : modes rigides  $r$ , élastiques  $e$  et de contrôle  $c$ . L'équation (5.25) va s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{re} & M_{rc} \\ M_{er} & M_{ee} & M_{ec} \\ M_{cr} & M_{ce} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_r \\ \ddot{\eta}_e \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{re} & D_{rc} \\ D_{er} & D_{ee} & D_{ec} \\ D_{cr} & D_{ce} & D_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} & K_{rc} \\ K_{er} & K_{ee} & K_{ec} \\ K_{cr} & K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Il faudrait alors noter que pour le F-18, les matrices structurales d'amortissement  $D$  et de rigidité  $K$  sont en fonction de la matrice de masse et des fréquences naturelles (suite aux tests au sol de F-18), alors la matrice d'amortissement structurel  $D$  est donnée par l'équation suivante :

$$D = 0.02 \omega M \quad (5.27)$$

et la matrice de rigidité structurale est :

$$K = \omega^2 M \quad (5.28)$$

Nous devons ajouter à ces matrices sur la dynamique en aéroélasticité, la matrice de Coriolis ( $D_{cor}$ ) et la matrice de la gravité ( $G$ ).

### 5.3 Équation de la dynamique aéroélastique de l'avion par rapport aux axes liées à l'avion a (utile aux calcul des manœuvres)

#### 5.3.1 Matrice de masse des modes rigides $M_{rr}$

$$M_{rr} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & & & \\ 0 & m & 0 & & & \\ 0 & 0 & m & & & \\ & & & I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ & & & 0 & I_{yy} & 0 \\ & & & -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

où :

- $m$  représente la masse en slugs
- $I_{xx}$  représente le moment d'inertie autour de l'axe des  $x$  en slug-ft<sup>2</sup>
- $I_{yy}$  représente le moment d'inertie autour de l'axe des  $y$  en slug-ft<sup>2</sup>
- $I_{zz}$  représente le moment d'inertie autour de l'axe des  $z$  en slug-ft<sup>2</sup>
- $I_{xz}$  représente le moment d'inertie autour de l'axe des  $xz$  en slug-ft<sup>2</sup>

La matrice de masse  $M_{rr}$  va correspondre aux modes rigides de translation et rotation en six degrés de liberté :

$$\dot{\eta}_r = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]^T \quad (5.30)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les perturbations des vitesses sur les trois axes :  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont les perturbations des angles de vitesses de roulis  $p$ , tangage  $q$  et lacet  $r$  sur les trois axes :  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Les modes de commande pour le F-18 représentent des petites variations autour des commandes nominales, c'est à dire que  $\eta_c$  représente les coordonnées généralisées des modes de commande.

$$\eta_c = [\delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r \quad \delta_{lef} \quad \delta_{tef} \quad \delta_{vec}]^T \quad (5.31)$$

où  $\eta_c$  représentent les coordonnées généralisées des modes de surfaces de commande :  $\delta_a$  signifie les *ailerons*,  $\delta_e$  signifie la gouverne de profondeur (en anglais : *Elevator*),  $\delta_r$  signifie la gouverne de direction (en anglais : *Rudder*),  $\delta_{lef}$  signifie les volets au bord d'attaque (en anglais : *Leading Edge Flap*),  $\delta_{tef}$  signifie les volets au bord de fuite (en anglais : *Trailing Edge Flap*) et  $\delta_{vec}$  signifie les entrées des système de propulsion.

### 5.3.2 Équations de la dynamique du vol des modes rigides

La première partie des équations (2.44) va s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} m\dot{U} &= mRV - mQW - mg \sin \theta + X \\ m\dot{V} &= mPW - mRU + mg \cos \theta \sin \phi + Y \\ m\dot{W} &= mUQ - mVP + mg \cos \theta \cos \phi + Z \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les équations (2.26) vont s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{I_{xx}} \left\{ (I_{yy} - I_{zz})QR + I_{xz}(\dot{R} + PQ) + L \right\} \\ \dot{Q} &= \frac{1}{I_{yy}} \left\{ (I_{zz} - I_{xx})PR + 2I_{xz}(\dot{R} - \dot{P}) + M \right\} \\ \dot{R} &= \frac{1}{I_{zz}} \left\{ (I_{xx} - I_{yy})PQ + I_{xz}(\dot{P} - QR) + N \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

On va dénoter les modes rigides par des petits déplacements autour de la position d'équilibre, alors on va regrouper les équations (2.45) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 + \Delta U \\ V_0 + \Delta V \\ W_0 + \Delta W \\ P_0 + \Delta P \\ Q_0 + \Delta Q \\ R_0 + \Delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \\ \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta R \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

où les vitesses et vitesses angulaires de référence sont dénotées par l'indice zéro.

$$\text{Position d'équilibre : } \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \\ P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \quad \text{et les perturbations } \dot{\eta}_r = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \text{car on a déjà introduit les}$$

variables données par l'équation (2.45).

On va introduire la position d'équilibre et des petites variations autour de cette position d'équilibre pour les angles d'Euler :

$$\text{Position d'équilibre : } \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Theta_0 \\ \Psi_0 \end{bmatrix} \quad \text{Petites variations : } \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0 + \phi \\ \theta_0 + \theta \\ \psi_0 + \psi \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Enfin on appelle  $[\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z]$  et  $[\Delta L \quad \Delta M \quad \Delta N]$  les perturbations des forces et moments aérodynamiques autour des forces et moments nominaux  $[X_0 \quad Y_0 \quad Z_0]$  et  $[L_0 \quad M_0 \quad N_0]$  définis par les conditions de l'équilibre.

### 5.3.3 Équation de la dynamique de vol aux petits angles

La dynamique du vol de l'avion aux petits angles peut être exprimée en combinant les équations (2.55) et (2.58) – et en tenant compte toujours que les petites perturbations s'écrivent de deux façons différents (par exemple  $p = \Delta P$ ,  $r = \Delta R$ , etc.) :

$$\begin{aligned}
m\dot{u} &= mV_0r + mR_0v - mW_0q - mQ_0w && -mg \cos \Theta_0 \theta && + \Delta X \\
m\dot{v} &= mW_0p + mP_0w - mU_0r - mR_0u && + mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \varphi - mg \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 \theta + \Delta Y \\
m\dot{w} &= mU_0q + mQ_0u - mV_0p - mP_0v && - mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 \varphi - mg \sin \Theta_0 \cos \Phi_0 \theta + \Delta Z \\
I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} &= (I_{yy} - I_{zz})(Q_0r + R_0q) + I_{xz}(P_0q + Q_0p) && + \Delta L \\
I_{yy}\dot{q} &= (I_{zz} - I_{xx})(P_0r + R_0p) + 2I_{xz}(R_0r - P_0p) && + \Delta M \\
I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} &= (I_{xx} - I_{yy})(Q_0p + P_0q) - I_{xz}(R_0q + Q_0r) && + \Delta N
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Les équations (5.36) vont s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$M_{rr}\ddot{\eta}_r = D_{cor}\dot{\eta}_r + G \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

où :

$$M_{rr}\ddot{\eta}_r = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & & & & \\ 0 & m & 0 & & & & \\ 0 & 0 & m & & & & \\ & & & I_{xx} & 0 & -I_{xz} & \\ & & & 0 & I_{yy} & 0 & \\ & & & -I_{xz} & 0 & I_{zz} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{u} \\ m\dot{v} \\ m\dot{w} \\ I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\ I_{yy}\dot{q} \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

où la matrice d'amortissement  $D_{cor}$  est associée aux modes rigides :

$$D_{cor}\dot{\eta}_r = \begin{bmatrix} 0 & mR_0 & -mQ_0 & 0 & -mW_0 & mV_0 \\ -mR_0 & 0 & mP_0 & mW_0 & 0 & -mU_0 \\ mQ_0 & -mP_0 & 0 & -mV_0 & mU_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xz}Q_0 & (I_{yy} - I_{zz})R_0 + I_{xz}P_0 & (I_{yy} - I_{zz})Q_0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{zz} - I_{xx})R_0 - 2I_{xz}P_0 & 0 & (I_{zz} - I_{xx})P_0 + 2I_{xz}R_0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_{xx} - I_{yy})Q_0 & (I_{xx} - I_{yy})P_0 - I_{xz}R_0 & -I_{xz}Q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

et la matrice  $G$  est associée aux angles de roulis  $\phi$ , tangage  $\theta$  et lacet  $\psi$ .

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -mg \cos \Theta_0 & 0 \\ mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 & -mg \sin \Theta_0 \sin \Phi_0 & 0 \\ -mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 & -mg \sin \Theta_0 \cos \Phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Les forces  $X, Y, Z$  et les moments  $L, M, N$  aérodynamiques entrent dans le calcul des  $Q_{rr}$  et  $Q_{rc}$ , décrites par les équations (5.41) et (5.42) :

$$\tilde{Q}_{rr} = \begin{bmatrix} mX_u & 0 & mX_w & 0 & mX_q & 0 \\ 0 & mY_v & 0 & mY_p & 0 & mY_r \\ mZ_u & 0 & mZ_w & 0 & mZ_q & 0 \\ 0 & I_{xx}L_v & 0 & I_{xx}L_p & 0 & I_{xx}L_r \\ I_{yy}M_u & 0 & I_{yy}M_w & 0 & I_{yy}M_q & 0 \\ 0 & I_{xx}N_v & 0 & I_{zz}N_p & 0 & I_{zz}N_r \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

et

$$\tilde{Q}_{rc} = \begin{bmatrix} mX_{\delta_u} & mX_{\delta_e} & mX_{\delta_r} & mX_{\delta_d} & mX_{\delta_{\dot{d}}} & mX_{\delta_{\omega_c}} \\ mY_{\delta_u} & mY_{\delta_e} & mY_{\delta_r} & mY_{\delta_d} & mY_{\delta_{\dot{d}}} & mY_{\delta_{\omega_c}} \\ mZ_{\delta_u} & mZ_{\delta_e} & mZ_{\delta_r} & mZ_{\delta_d} & mZ_{\delta_{\dot{d}}} & mZ_{\delta_{\omega_c}} \\ I_{xx}L_{\delta_u} & I_{xx}L_{\delta_e} & I_{xx}L_{\delta_r} & I_{xx}L_{\delta_d} & I_{xx}L_{\delta_{\dot{d}}} & I_{xx}L_{\delta_{\omega_c}} \\ I_{yy}M_{\delta_u} & I_{yy}M_{\delta_e} & I_{yy}M_{\delta_r} & I_{yy}M_{\delta_d} & I_{yy}M_{\delta_{\dot{d}}} & I_{yy}M_{\delta_{\omega_c}} \\ I_{zz}N_{\delta_u} & I_{zz}N_{\delta_e} & I_{zz}N_{\delta_r} & I_{zz}N_{\delta_d} & I_{zz}N_{\delta_{\dot{d}}} & I_{zz}N_{\delta_{\omega_c}} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

On va ajouter l'équation (2.63) de l'évolution des perturbations des angles d'Euler :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + \sin \phi_0 \tan \theta_0 q + \cos \phi_0 \tan \theta_0 r + \tan \theta_0 (\cos \phi_0 Q_0 - \sin \phi_0 R_0) \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta_0} (\sin \phi_0 Q_0 + \cos \phi_0 R_0) \phi \\ \dot{\theta} &= \cos \phi_0 q - \sin \phi_0 r - (\sin \phi_0 Q_0 + \cos \phi_0 R_0) \theta \\ \dot{\psi} &= \frac{\sin \Phi_0}{\cos \Theta_0} q + \frac{\cos \phi_0}{\cos \theta_0} r + \frac{1}{\cos \theta_0} (\cos \phi_0 Q_0 - \sin \phi_0 R_0) \theta + \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} (\sin \phi_0 Q_0 + \cos \phi_0 R_0) \phi \end{aligned} \quad (5.43)$$

### 5.3.4 Équation de la fusion des théories de l'aérodynamique pour l'avion rigide avec l'aérodynamique pour l'avion flexible

On va démontrer dans les équations suivantes la manière à laquelle on va fusionner les théories de l'aérodynamique pour l'avion flexible avec les théories de l'aérodynamique pour l'avion rigide.

- On va considérer d'abord l'équation de base de l'aéroélasticité :

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{re} & M_{rc} \\ M_{er} & M_{ee} & M_{ec} \\ M_{cr} & M_{ce} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_r \\ \ddot{\eta}_e \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{re} & D_{rc} \\ D_{er} & D_{ee} & D_{ec} \\ D_{cr} & D_{ce} & D_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} & K_{rc} \\ K_{er} & K_{ee} & K_{ec} \\ K_{cr} & K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} +$$

(5.44)

$$+ \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_I \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = 0$$

- On va ajouter à l'équation (5.44) les termes provenant de Coriolis et de la gravité (matrices  $D_{cor}$  et  $G$ ) :

$$\begin{bmatrix} M_{rr} & M_{re} & M_{rc} \\ M_{er} & M_{ee} & M_{ec} \\ M_{cr} & M_{ce} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_r \\ \ddot{\eta}_e \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{rr} - D_{cor} & D_{re} & D_{rc} \\ D_{er} & D_{ee} & D_{ec} \\ D_{cr} & D_{ce} & D_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} & K_{rc} \\ K_{er} & K_{ee} & K_{ec} \\ K_{cr} & K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} +$$

(5.45)

$$- \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_I \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = 0$$

- On va remplacer les termes  $Q_{rr}$  et  $Q_{rc}$  provenant de l'aéroélasticité par les termes  $\tilde{Q}_{rr}$  et  $\tilde{Q}_{rc}$  provenant de la dynamique du vol, donnés par les équations (5.41) et (5.42):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{re} & M_{rc} \\ M_{er} & M_{ee} & M_{ec} \\ M_{cr} & M_{ce} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_r \\ \ddot{\eta}_e \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{rr} - D_{cor} & D_{re} & D_{rc} \\ D_{er} & D_{ee} & D_{ec} \\ D_{cr} & D_{ce} & D_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} & K_{rc} \\ K_{er} & K_{ee} & K_{ec} \\ K_{cr} & K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} + \\
 & - \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \frac{1}{4k} \rho_0 c \sqrt{\sigma} V_E \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{rr} & Q_{re} & \tilde{Q}_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_I \begin{bmatrix} \dot{\eta}_r \\ \dot{\eta}_e \\ \dot{\eta}_c \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho_0 V_E^2 \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{re} & Q_{rc} \\ Q_{er} & Q_{ee} & Q_{ec} \\ Q_{cr} & Q_{ce} & Q_{cc} \end{bmatrix}_R \begin{bmatrix} \eta_r \\ \eta_e \\ \eta_c \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Dans le chapitre 6 sur la discussion des résultats, on va montrer la différence obtenue pour le calcul des dérivées de stabilité latérale et longitudinale pour plusieurs nombres de Mach et plusieurs altitudes pour le F-18.

## CHAPITRE 6

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### 6.1 Résultats

Les données avec lesquelles le travail est effectué nous proviennent des laboratoires de recherche de la NASA pour l'avion F/A-18 SRA (System Research Aircraft) (référence [11]) pour la catégorie HARV (*High Angle-of-Attack Research Vehicle*). Un total de 48 coefficients de stabilité a été calculé pour le mouvement longitudinal et pour le mouvement latéral de l'avion. Parmi ces 48 coefficients, on a constaté des différences (entre nos résultats de calcul et ceux de la référence [11]) au niveau de seulement 6 coefficients de stabilité (voir les tableaux VII à X).

Ces données sont les coefficients de stabilité pour plusieurs conditions de vol dépendantes de la variation des trois paramètres suivants : le nombre de Mach ( $M$ ), l'altitude ( $H$ ) et l'angle d'attaque ( $\alpha$ ). Les résultats seront présentés graphiquement en fonction :

- de l'angle d'attaque  $\alpha$  pour l'altitude  $H = 10K, 20K, 30K, 40K$  (en pieds) et le nombre du Mach  $M = 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$  et  $0.7$  fixes (figures 6.1 - 6.90);
- de l'altitude pour le nombre de Mach  $M = 0.8, 0.85$  et l'angle d'attaque  $\alpha = 10^\circ$  fixes (figures 6.91 - 6.102);
- de l'altitude pour le nombre de Mach  $M = 0.9, 0.95, 1.1, 1.2$  et  $1.3$  et l'angle d'attaque d'équilibre  $\alpha = 1.366^\circ, 1.7281^\circ$  et  $2.3563^\circ$  fixes (figures 6.103 - 6.132);
- du nombre de Mach  $M$  pour l'altitude  $H = 10K, 20K, 30K, 40K$  (en pieds) et un angle d'attaque  $\alpha = 10^\circ, 40^\circ, 70^\circ$  fixes (figures 6.133 - 6.204);

- du nombre de Mach  $M$  pour l'altitude  $H = 5K, 10K, 15K, 20K, 25K$  (en pieds) et l'angle d'attaque d'équilibre  $\alpha = 1.366^\circ, 1.7281^\circ$  et  $2.3563^\circ$  (figures 6.205 - 6.234).

Pour établir l'enveloppe de vol, les essais sont paramétrés par la vitesse vraie  $V_{TAS}$  et l'altitude  $H$  (l'altitude  $H$  et le nombre de Mach  $M$  déterminent la vitesse vraie  $V_{TAS}$ ). L'angle d'attaque  $\alpha$  vient s'ajouter à nos conditions pour les données recueillies. Par exemple, pour une altitude  $H$  fixe, on va effectuer les calculs pour un nombre de Mach  $M$  fixé et plusieurs angles d'attaque  $\alpha$ .

Parmi un total de 48 valeurs des coefficients de stabilité pour le mouvement longitudinal et latéral de l'avion, nous avons trouvé des différences seulement dans les calculs des 6 dérivées des coefficients de stabilité par rapport à la référence [11].

Dans nos données et résultats, l'altitude  $H$  varie entre 10K pieds et 40K pieds. Le nombre de Mach  $M$  varie entre 0.2 et 1.3. L'angle d'attaque  $\alpha$  varie entre  $1.366^\circ$  (angle d'attaque d'équilibre en vol uniforme) et  $70^\circ$ . L'analyse des coefficients de stabilité sera réalisée selon la variation de l'altitude, la vitesse et l'angle d'attaque.

L'analyse des résultats sera assez compliquée vu la faible quantité d'information sur l'angle d'attaque (seulement trois valeurs de  $\alpha = 10^\circ, 40^\circ$  et  $70^\circ$  pour la plupart des conditions de vol  $H$  et  $M$ ) dont on dispose. Nous sommes limités par la variation d'un facteur à la fois, soit le nombre de Mach  $M$ , l'angle d'attaque  $\alpha$  ou l'altitude  $H$ .

La tâche du côté de la quantité de l'information est compliquée car les essais en vol ne considèrent pas le même nombre des paramètres ( $\alpha, M$  et  $H$ ) pour les conditions de vol. La plupart du temps, l'information sera limitée à des séries de trois valeurs de  $\alpha$  (limitation de l'angle d'attaque à trois valeurs fixes  $10^\circ, 40^\circ$  et  $70^\circ$ ) et une variable étant l'angle d'équilibre en vol uniforme qui varie avec la vitesse.

Les résultats représentent les coefficients de stabilité pour le mouvement longitudinal et latéral d'un avion. Pour le nombre de Mach  $M = 0.3$  à l'altitude 20K on dispose de données, alors des résultats pour quatre valeurs pour l'angle d'attaque  $\alpha$  et de six données, alors des résultats pour l'altitude de 30K pieds. On dispose de données pour trois valeurs de l'angle d'attaque  $\alpha$  aux altitudes 10K et 40K pieds comme pour la plupart des conditions de vol pour les autres nombres de Mach  $M = 0.2, 0.4, 0.6$  et  $0.7$ .

Nous présenterons les coefficients de stabilité pour deux variables fixes (ex.  $H$  et  $M$ ) et une variable qui change (ex.  $\alpha$ ). L'analyse comparative des résultats (set des figures) sera réalisée pour chaque nombre de Mach  $M$ .

Les graphiques de la variation des coefficients de stabilité en fonction de l'angle d'attaque  $\alpha$  nous montrent la différence entre nos résultats (ligne pleine —) et ceux de la référence [11] (ligne pointillée ---). Dans ces graphiques, on peut voir la comparaison entre les deux courbes sur la même figure (nos résultats et ceux de la référence [11].)

Dans les graphiques des coefficients de stabilité tracés pour le nombre de Mach fixe  $M = 0.2$  (figures 6.1 - 6.24), on remarque que l'allure des graphiques des coefficients de stabilité versus l'angle d'attaque  $\alpha$  (trois valeurs) reste semblable malgré le changement de l'altitude pour chaque série des coefficients de stabilité. On remarque que la plus grande différence pour chaque dérivée de stabilité apparaît lorsque l'angle d'attaque  $\alpha$  est très grand ( $70^\circ$ ). Ceci est dû probablement aux sollicitations de la structure à des forces assez considérables pour les grands angles d'attaque  $\alpha$  par rapport à celles pour des faibles angles d'attaque  $\alpha$ , bien que l'avion soit de la catégorie des grands angles d'attaque (*High Angle of Attack*).

Dans la série des graphiques des dérivées de stabilité tracées pour le nombre de Mach fixe  $M = 0.3$ , pour l'altitude  $H = 10\ 000$  pieds (figures 6.25 - 6.30) et celle de  $H = 40\ 000$  pieds (figures 6.43 - 6.48) on dispose de trois valeurs de  $\alpha$ . Pour l'altitude  $H = 20\ 000$

pieds (figures 6.31 - 6.36) et  $H = 30\,000$  pieds (figures 6.37 - 6.42), on dispose de plus de trois valeurs de  $\alpha$  pour chaque graphique. La plus grande différence dans les graphiques apparaît à  $\alpha = 70^\circ$ . Les deux séries de résultats pour  $M = 0.3$  se suivent avec un décalage progressif avec l'angle d'attaque  $\alpha$ . La série des graphiques des coefficients de stabilité à l'altitude de 30 000 pieds (figures 6.37 - 6.42) montre bien mieux la comparaison entre nos résultats et ceux de la référence [11] car on dispose de six valeurs pour l'angles d'attaque (alors 2 fois plus que pour les autres conditions de vol).

Dans la figure 6.37, la nécessité d'obtenir les résultats en fonction d'un plus grand nombre de variables (voir la valeur des données pour  $\alpha = 40^\circ$  – très différente par rapport aux valeurs des données pour les autres  $\alpha$ ). Dans cette figure, on a réussi à obtenir les résultats pour une condition de vol ( $M = 0.3$  et  $H = 30\,000$  pieds) et pour les angles d'attaque suivants  $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$  et  $70^\circ$ . On voit que pour l'angle d'attaque  $40^\circ$ , il y a une baisse de la valeur de la dérivée de la force sur l'axe des X par rapport à l'angle de tangage ( $\partial F_x / \partial \theta$ ) par rapport aux valeurs des dérivées dans le voisinage. Au cas où l'essai de vol n'avait pas été effectué pour l'angle  $\alpha = 40^\circ$ , on aurait pu obtenir des courbes presque paraboliques. Donc, plus qu'on a des résultats des essais de vol pour un cas, plus qu'on peut mieux analyser les coefficients de stabilité. On remarque que l'angle d'attaque  $\alpha = 40^\circ$  est un angle critique pour certaines dérivées de stabilité.

Le fait que  $\alpha = 40^\circ$  est un angle critique est très bien visible dans les graphiques des coefficients de stabilité pour le nombre de  $Mach = 0.3$ . Il existe un changement considérable dans la pente de la courbe (parfois c'est un changement de signe). On voit clairement la ressemblance des graphiques des dérivées de stabilité pour tous les autres nombres de  $Mach$  (de l'un à l'autre) ( $M = 0.2, 0.4, 0.6, 0.7$ ) pour les mêmes conditions de vol (angle d'attaque  $\alpha$ , altitude  $H$ ).

Les mêmes types d'analyses que pour le nombre de Mach  $M = 0.2$  et  $0.3$  seront applicables pour le nombre de Mach  $= 0.4$  (figures 6.49 - 6.72), le nombre de Mach  $= 0.6$  (figures 6.73 - 6.84) et le nombre de Mach  $= 0.7$  (figures 6.85 - 6.90).

Pour le nombre de Mach  $= 0.8$  (figures 6.91 - 6.96) et le nombre de Mach  $= 0.85$  (figures 6.97 - 6.102) on dispose des résultats à un angle d'attaque  $\alpha = 10^\circ$ , mais ces résultats sont insuffisants pour une analyse complète. Les graphiques des coefficients de stabilité (figure 6.91 - 6.102) sont tracés en fonction de l'altitude  $H$  et montrent une faible différence entre nos résultats et ceux de la référence [11], qui diminue avec l'altitude.

Pour le reste des nombres des Mach  $M = 0.9, 0.95, 1.1, 1.2$  et  $1.3$ , on dispose des résultats des essais de vol [11] pour les altitudes  $H = 5\ 000, 10\ 000$  et  $15\ 000$  pieds (aux nombres de Mach  $M = 0.90$  et  $0.95$ ),  $H = 10\ 000, 15\ 000, 20\ 000$  et  $25\ 000$  pieds pour les nombres de Mach  $M = 1.1, 1.2$  et  $1.3$  et un angle d'attaque d'équilibre  $\alpha$  en vol uniforme.

Les plus grandes différences entre nos résultats et ceux de la référence. [11] se trouvent pour les coefficients de stabilité de la force en  $X$  par rapport à l'angle de tangage ( $\partial F_x / \partial \theta$ ) et de la force en  $Y$  par rapport à l'angle de roulis ( $\partial F_y / \partial \Phi$ ), toutes les deux en fonction de l'altitude (figures 6.97 - 6.132). Par contre, pour les 4 autres valeurs des dérivées de stabilité, on remarque que les courbes convergent l'une par rapport à l'autre avec l'augmentation de l'altitude  $H$ , donc on a une différence minimale entre les résultats théoriques et les résultats des essais de vol.

Les résultats seront ensuite tracés, pour une meilleure représentation dans les graphiques, en fonction du nombre de Mach (nombres de Mach  $= 0.2, 0.3, 0.4, 0.6$  et  $0.7$ ) pour une altitude  $H$  fixe  $= 10\ 000$  pi,  $20\ 000$  pi,  $30\ 000$  pi et  $40\ 000$  pi et un angle d'attaque  $\alpha$  fixe  $= 10^\circ, 40^\circ$  et  $70^\circ$  (figures 6.133 - 6.204) et on remarque une augmentation de la différence entre nos résultats et ceux de la référence [11].

La différence absolue entre les séries de valeurs (ou les points des résultats des essais en vol) augmente avec le nombre de Mach pour une condition de vol donnée. On remarque que plus l'angle d'attaque est grand, plus il y a des différences sur l'ensemble des coefficients de stabilité. Lorsque  $\alpha = 10^\circ$ , les coefficients de stabilité les plus affectés sont les deux coefficients ci haut mentionnés ( $\partial F_x / \partial \theta$ ) et ( $\partial F_y / \partial \Phi$ ). Pour les angles d'attaque  $\alpha = 40^\circ$  et  $\alpha = 70^\circ$ , c'est l'ensemble des six coefficients qui est affecté. La différence entre les valeurs données par notre théorie et la référence [11] est visible sur tous les graphiques.

Dans cette analyse, on a ignoré les résultats pour l'altitude  $H = 1\ 000$  pieds car ces résultats (sous la forme d'un point) varient avec l'angle d'attaque  $\alpha$  et le nombre de Mach  $M$ , donc plus qu'une variable à la fois. De plus, pour le Mach 0.5, on n'a pas aussi assez des données pour réaliser une analyse pour ces conditions de vol. Le choix d'une variable variante à la fois est pour voir l'impact de cette variable sur l'ensemble des cas des tests.

## 6.2 Discussion

Cette analyse permet une meilleure évaluation des coefficients de stabilité pour le mouvement longitudinal et le mouvement latéral de l'avion dans le but d'analyser les interactions aéroserveoélastiques. Comme il est déjà mentionné, cette analyse est bien partiellement vu que l'échantillonnage des variables est bien espacé.

Dans le but d'obtenir une analyse complète des dérivées de stabilité, il faudrait refaire les calculs pour les plages des angles d'attaque  $\alpha$  manquants (soit pour les angles d'attaques de  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $50^\circ$  et  $60^\circ$ ).

### 6.3 Différences entre nos calculs et les calculs [11]

Tableau VII

Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement longitudinal de l'avion dans le système lié à l'avion (**Matrice généralisée aérodynamique de la rigidité**)

	$\theta$	$\theta$ [11]
$x$	$\bar{S} (C_{D_\alpha} - \alpha_1 C_{D_u} - \alpha_1 C_{L_\alpha} + \alpha_1^2 C_{L_u} - C_L)$	$\bar{S} (C_{D_\alpha} - \alpha_1 C_{D_u} - \alpha_1 C_{L_\alpha} + \alpha_1^2 C_{L_u})$
$z$	$\bar{S} (C_{L_\alpha} - \alpha_1 C_{L_u} + \alpha_1 C_{D_\alpha} - \alpha_1^2 C_{D_u} + C_D)$	$\bar{S} (C_{L_\alpha} - \alpha_1 C_{L_u} + \alpha_1 C_{D_\alpha} - \alpha_1^2 C_{D_u})$

Tableau VIII

Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement longitudinal de l'avion dans le système lié à l'avion (**Matrice généralisée aérodynamique de l'amortissement**)

	$\dot{z}_T$	$\dot{z}_T$ [11]
$z$	$\frac{\bar{S}}{U} (C_{L_\alpha} + \alpha_1 C_{D_\alpha} + C_x)$	$\frac{\bar{S}}{U} (C_{L_\alpha} + \alpha_1 C_{D_\alpha})$

Tableau IX

Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion dans le système lié à l'avion (**Matrice généralisée aérodynamique de la rigidité**)

	$\phi$	$\phi$ [11]
$y$	$-\bar{S} (2\alpha_1^2 C_L - 2\alpha_1 C_D + \alpha_1 C_{Y_\beta})$	$-\bar{S} (\alpha_1 C_L + \alpha_1^2 C_{Y_\beta})$

	$\psi$	$\psi$ [11]
$y$	$\bar{S} (2\alpha_1 C_L - 2C_D + C_{Y_\beta})$	$\bar{S} C_{Y_\beta}$

Tableau X

Représentation des dérivées de stabilité pour le mouvement latéral de l'avion dans le système lié à l'avion (**Matrice généralisée aérodynamique de l'amortissement**)

	$\dot{y}_T$	$\dot{y}_T$ [11]
$y$	$-\frac{\bar{S}}{U}(\alpha_1 C_L - C_D + C_{Y_\beta})$	$-\frac{\bar{S}}{U} C_{Y_\beta}$

#### 6.4 Résultats représentés graphiquement

Dans ce qui suit, les résultats graphiques sont présentés par séries selon l'ordre mentionné au début de ce chapitre.

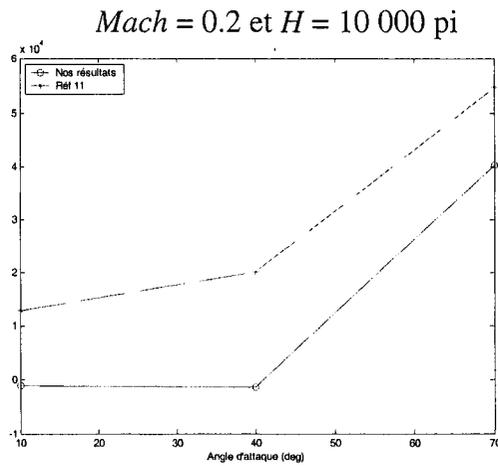


Figure 6.1 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

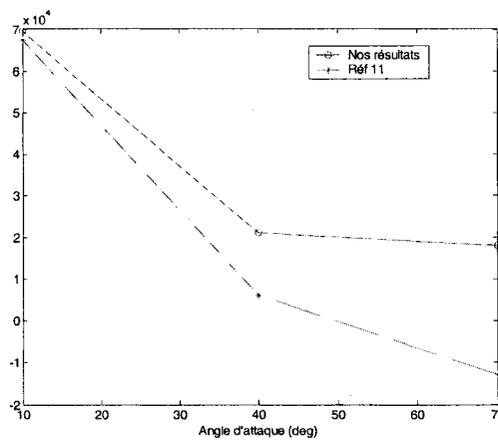


Figure 6.2 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

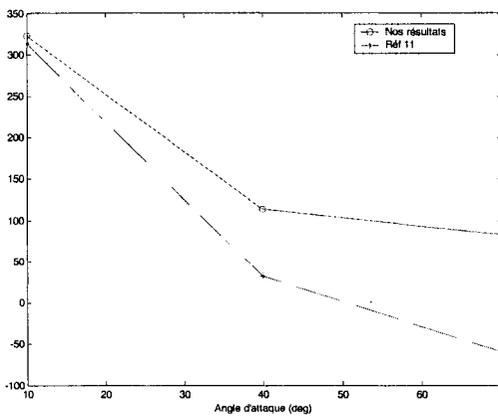


Figure 6.3 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

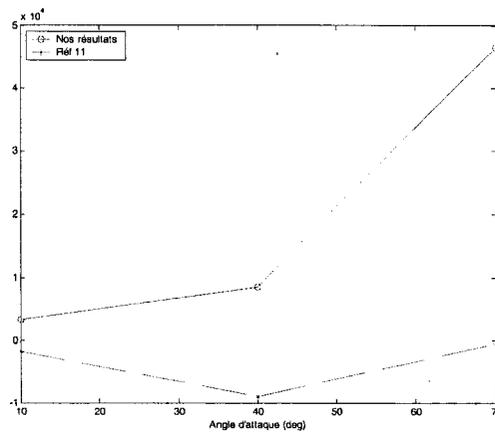


Figure 6.4 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

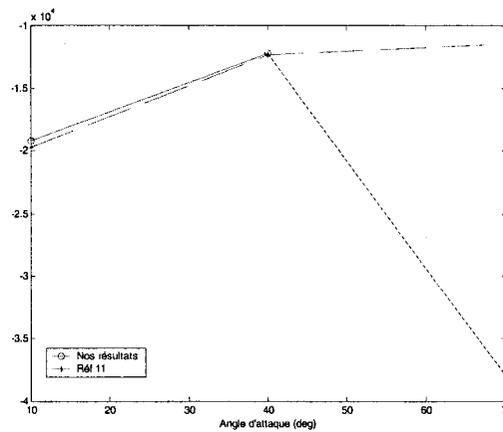


Figure 6.5 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

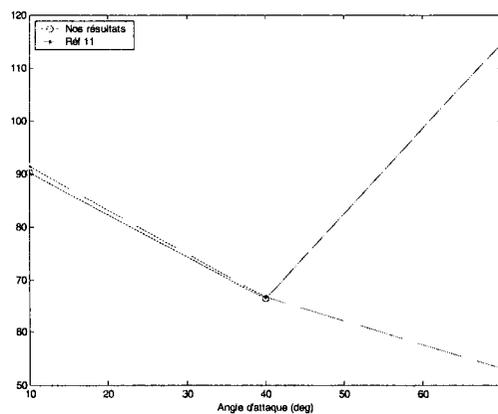


Figure 6.6 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

$Mach = 0.2$  et  $H = 20\,000$  pi

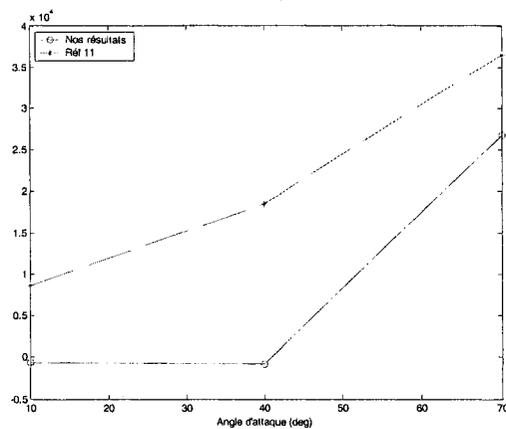


Figure 6.7 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

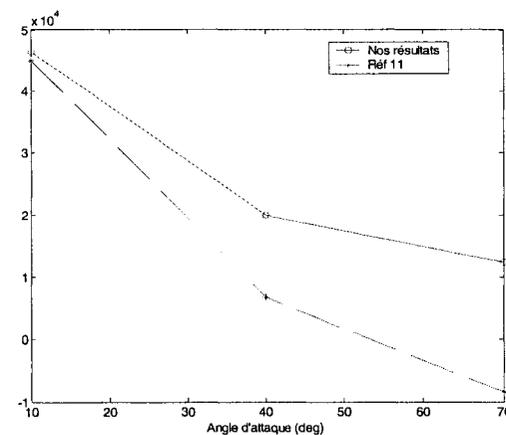


Figure 6.8 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

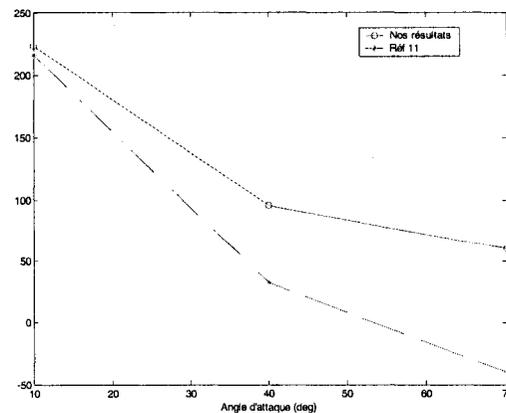


Figure 6.9 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

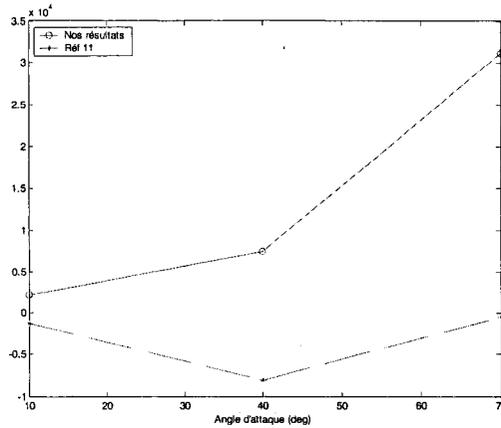


Figure 6.10 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

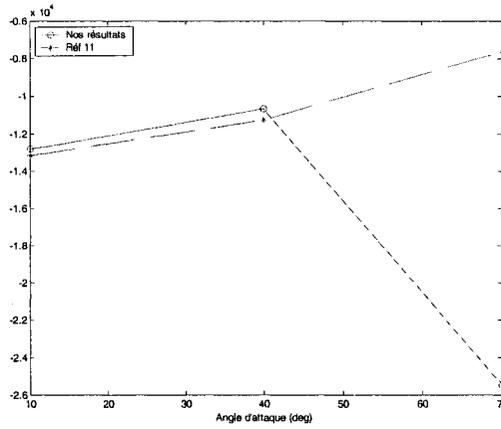


Figure 6.11 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

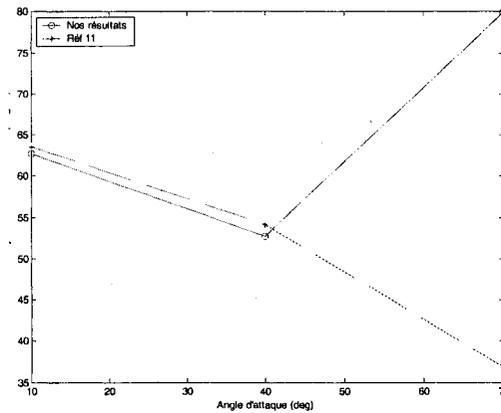


Figure 6.12 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

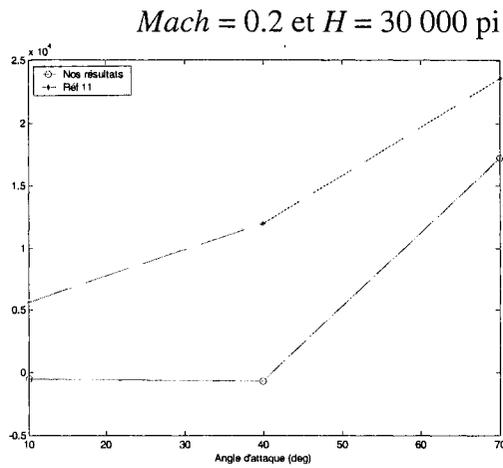


Figure 6.13 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

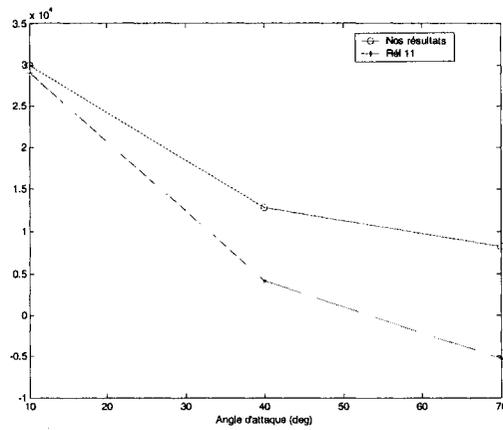


Figure 6.14 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

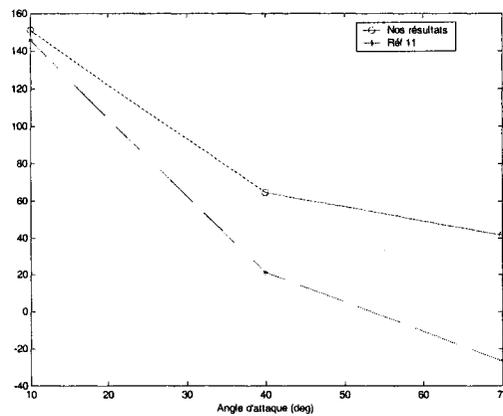


Figure 6.15 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

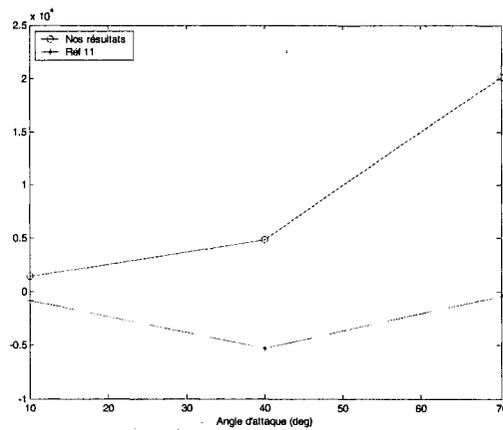


Figure 6.16 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

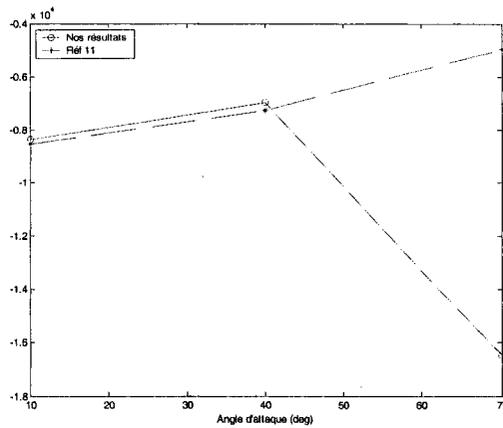


Figure 6.17 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

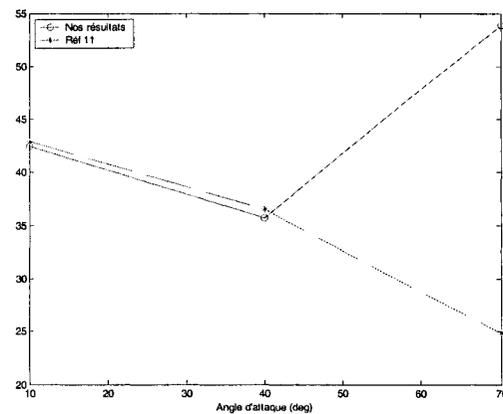


Figure 6.18 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

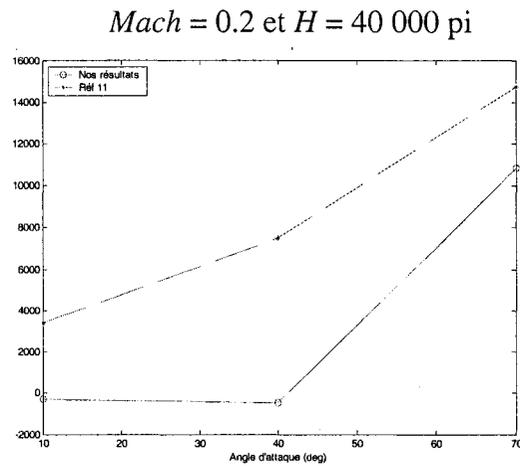


Figure 6.19 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

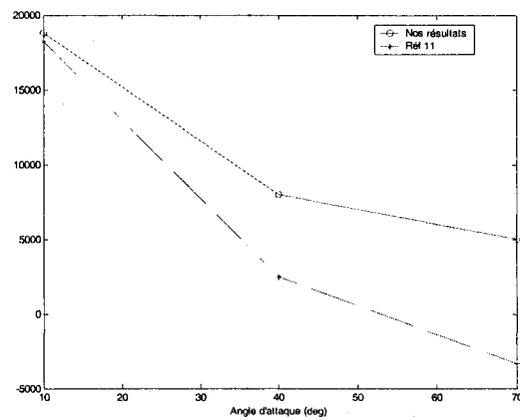


Figure 6.20 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

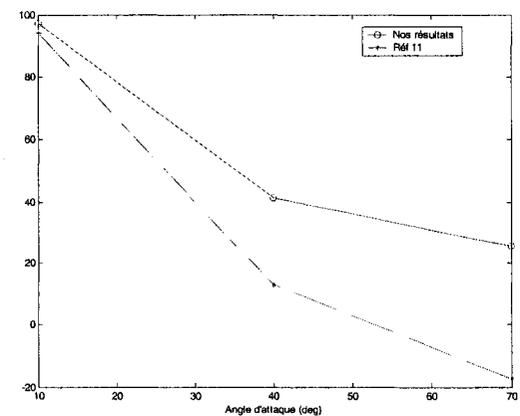


Figure 6.21 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

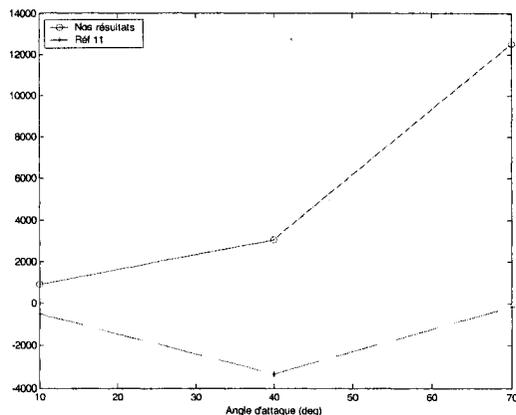


Figure 6.22 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

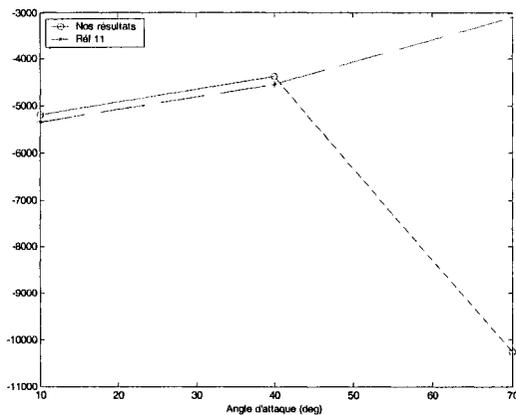


Figure 6.23 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

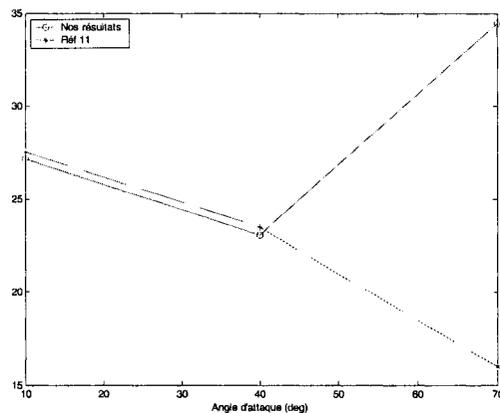


Figure 6.24 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

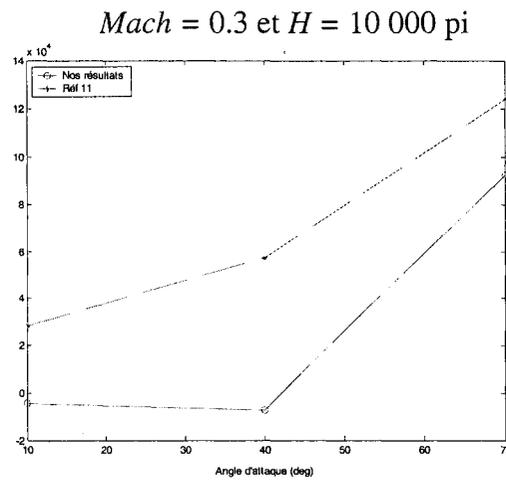


Figure 6.25 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

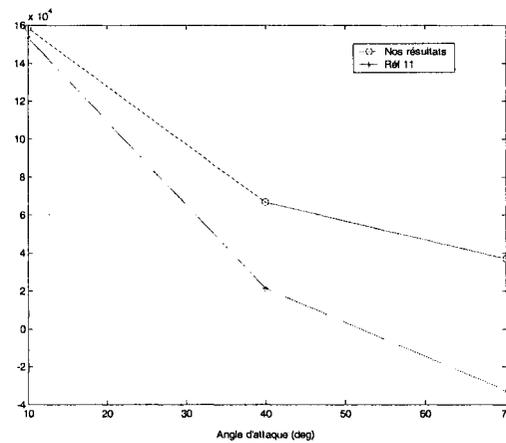


Figure 6.26 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

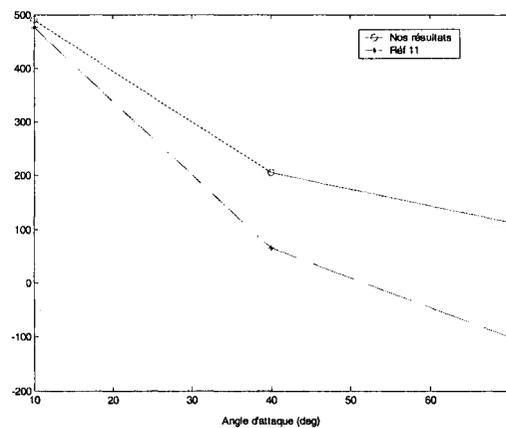


Figure 6.27 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

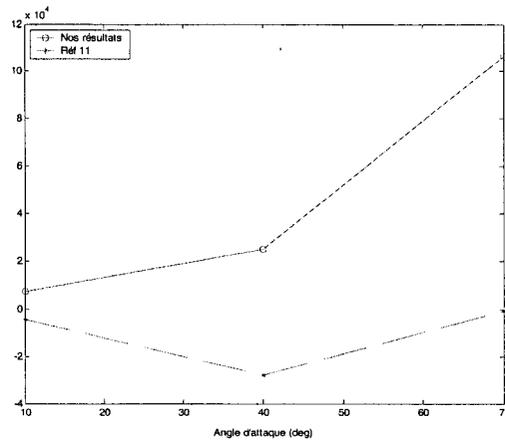


Figure 6.28 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

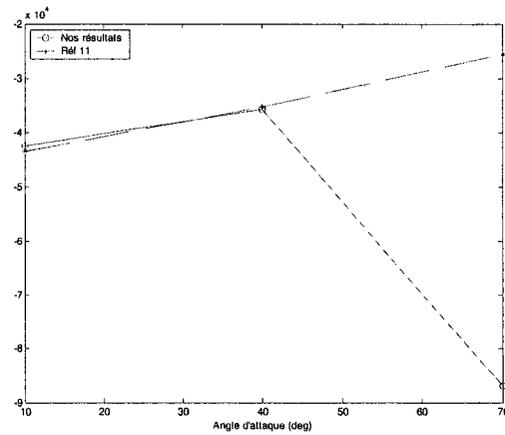


Figure 6.29 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

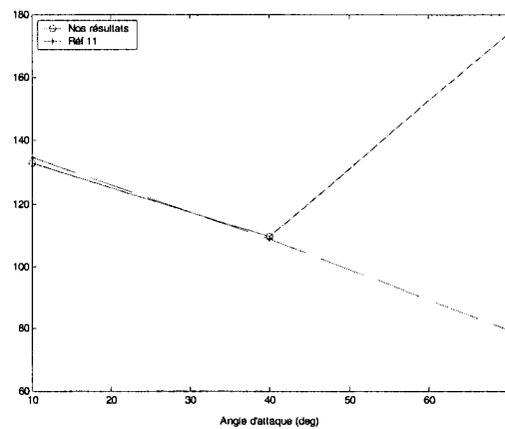


Figure 6.30 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

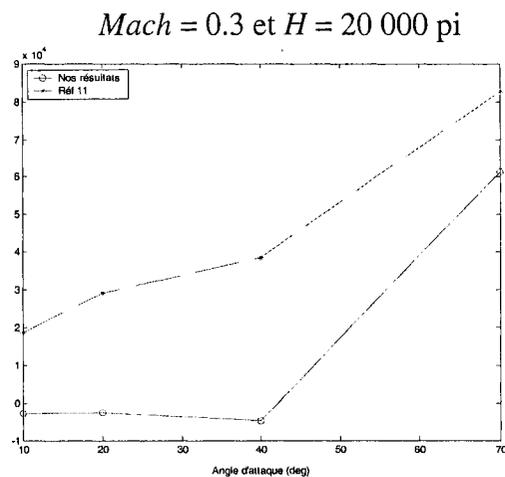


Figure 6.31 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

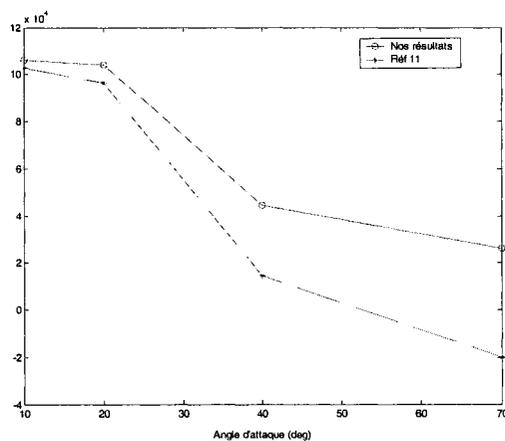


Figure 6.32 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

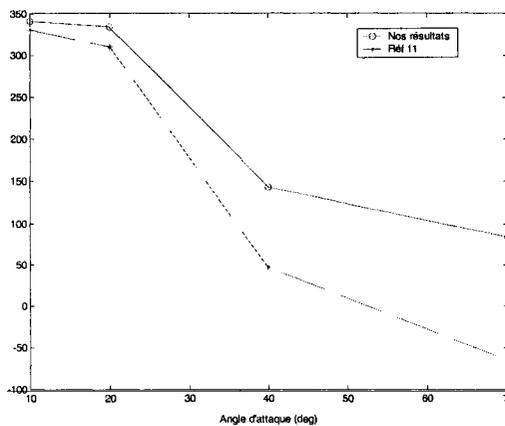


Figure 6.33 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

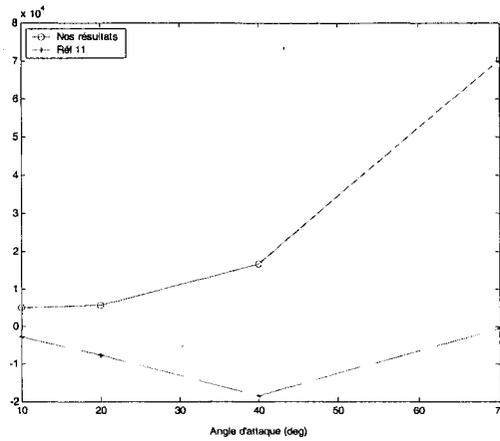


Figure 6.34 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

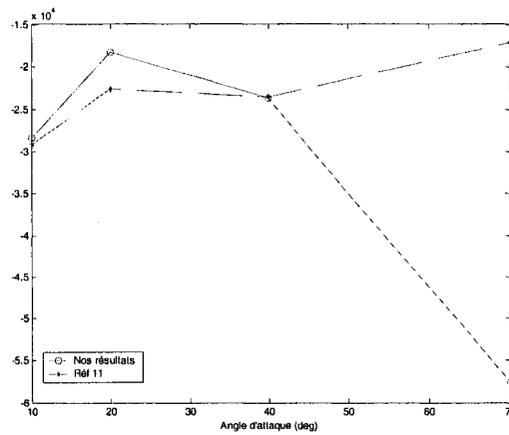


Figure 6.35 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

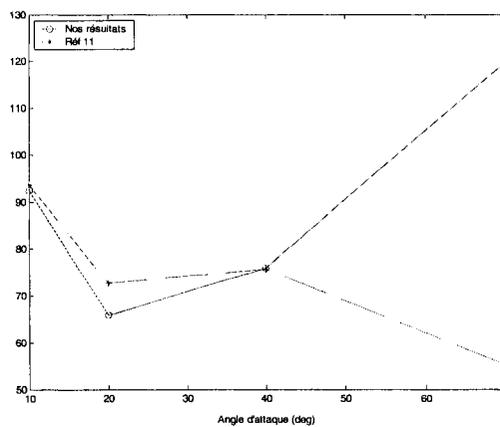


Figure 6.36 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

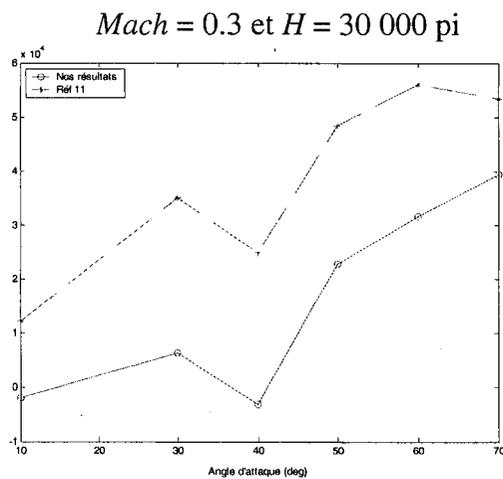


Figure 6.37 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

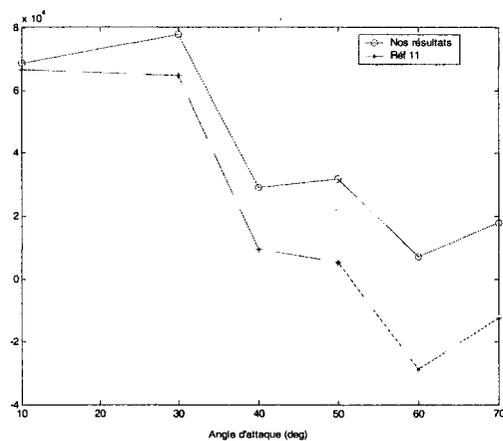


Figure 6.38 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

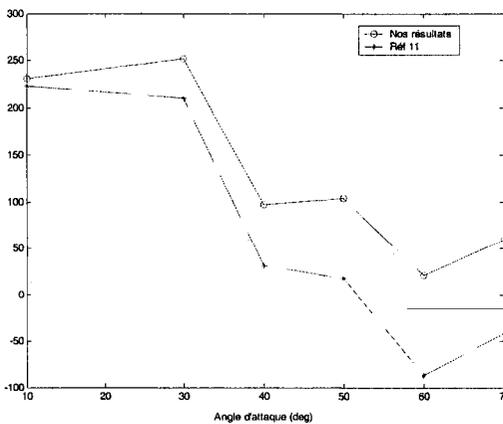


Figure 6.39 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

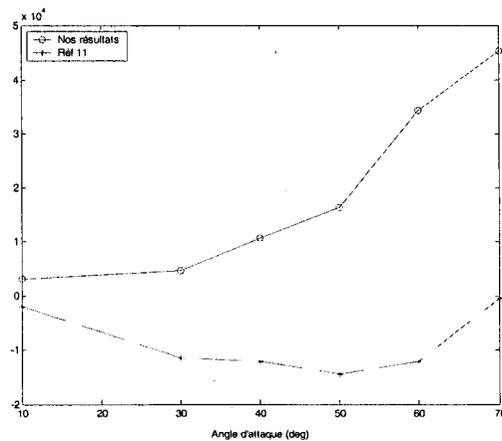


Figure 6.40 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

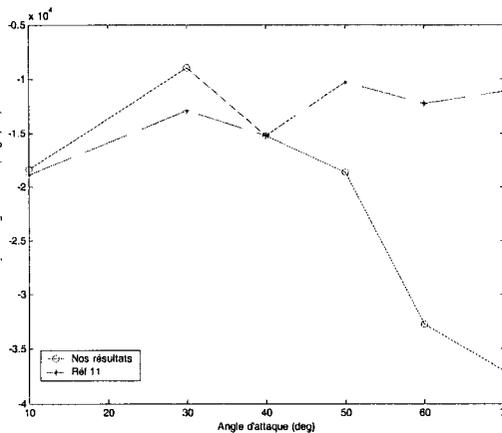


Figure 6.41 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

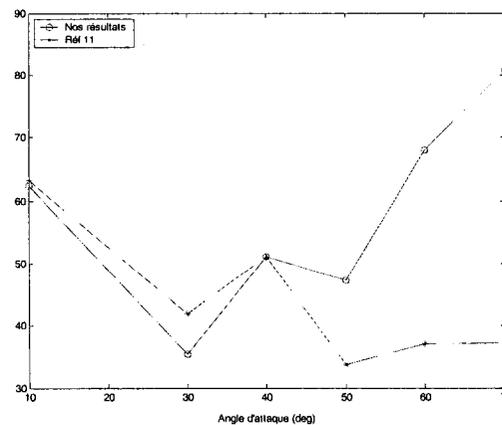


Figure 6.42 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

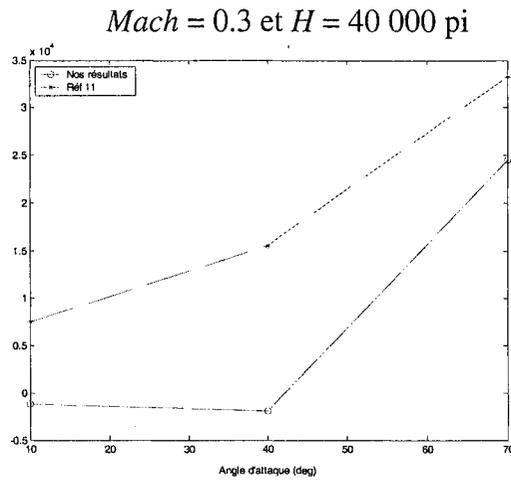


Figure 6.43 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

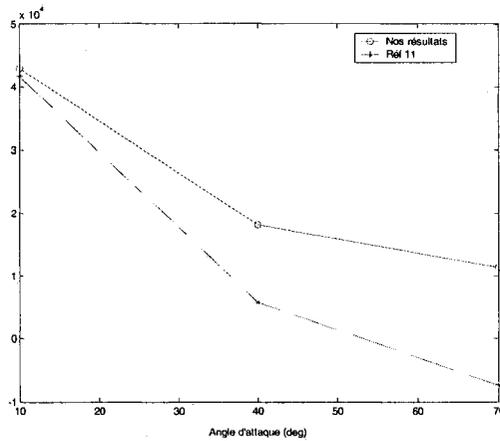


Figure 6.44 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

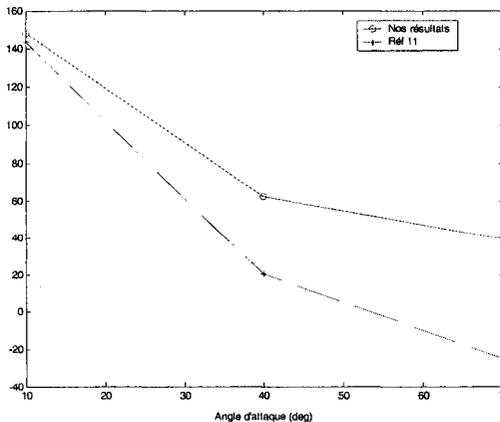


Figure 6.45 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

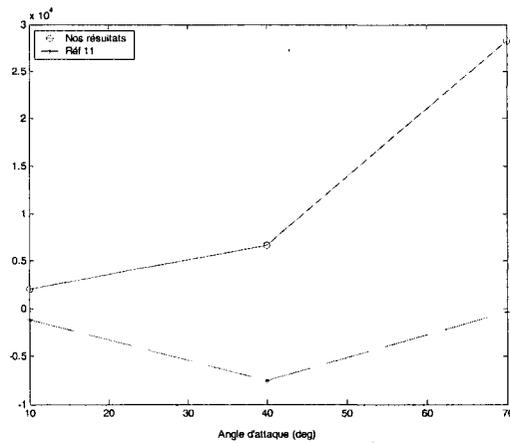


Figure 6.46 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

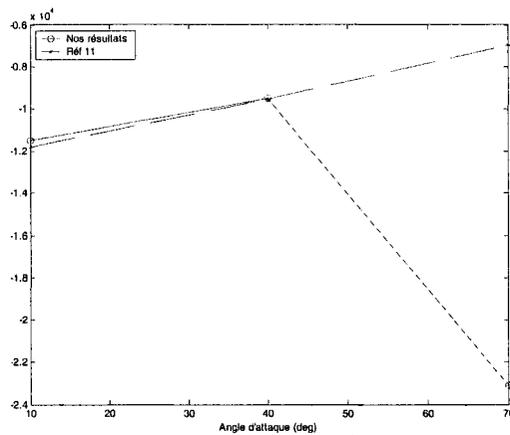


Figure 6.47 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

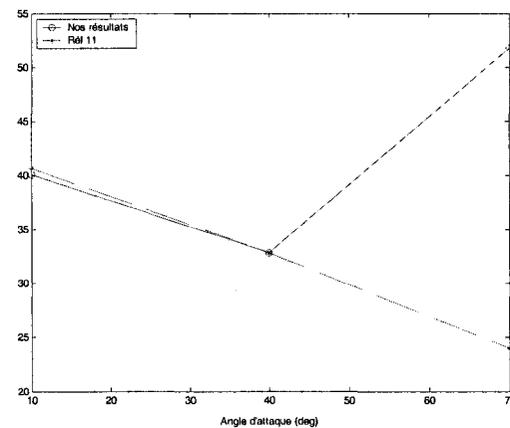


Figure 6.48 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

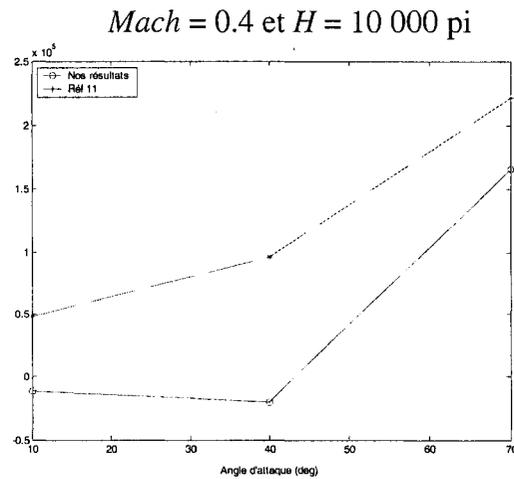


Figure 6.49 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

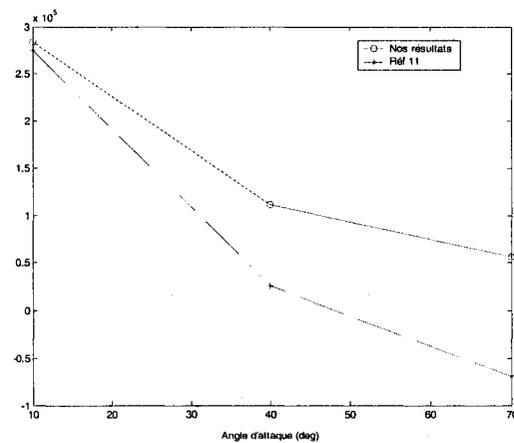


Figure 6.50 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

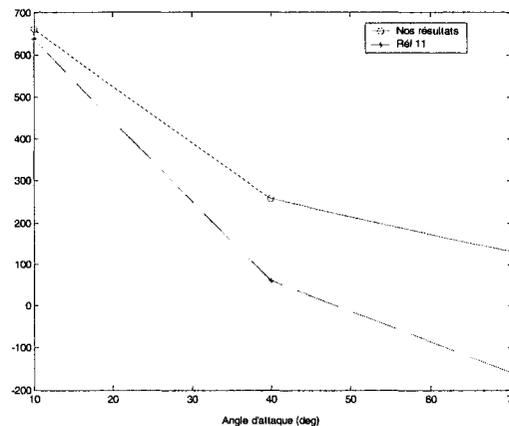


Figure 6.51 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

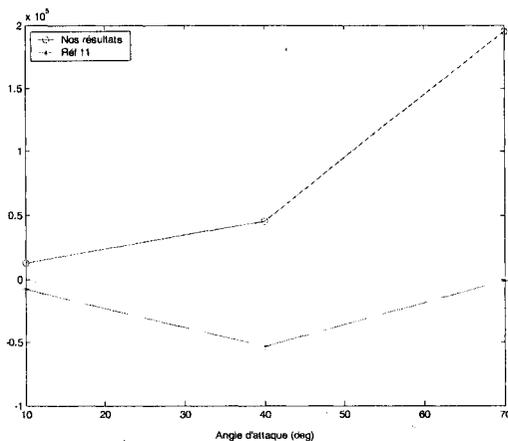


Figure 6.52 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

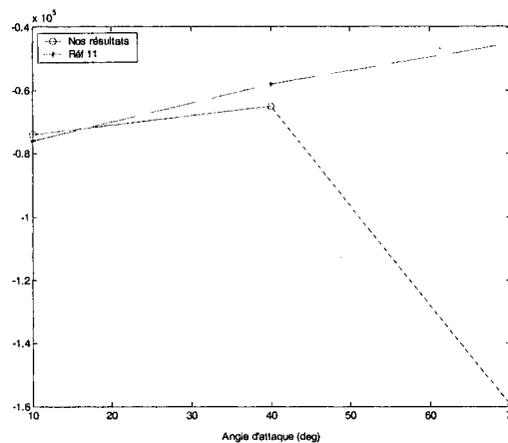


Figure 6.53 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

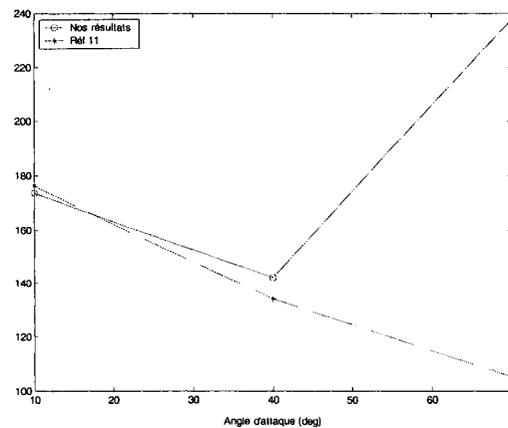


Figure 6.54 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

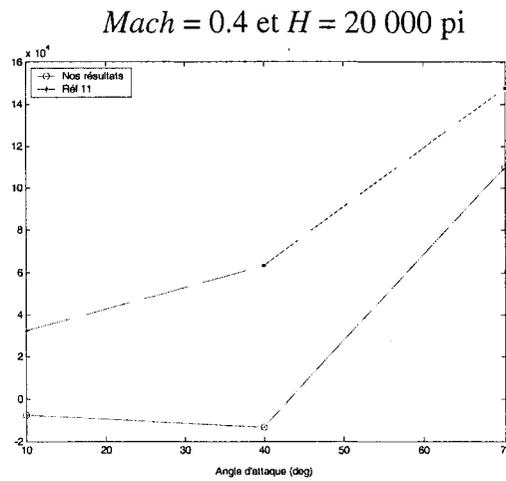


Figure 6.55 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

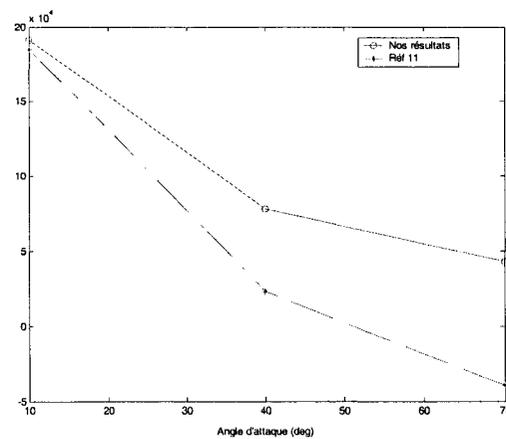


Figure 6.56 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

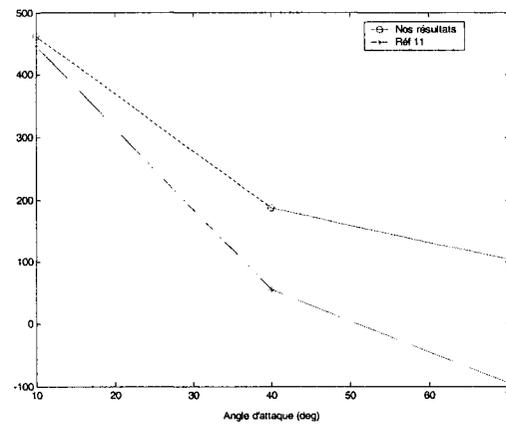


Figure 6.57 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $z$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

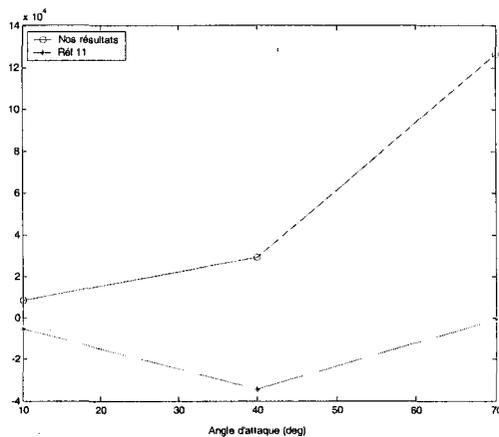


Figure 6.58 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

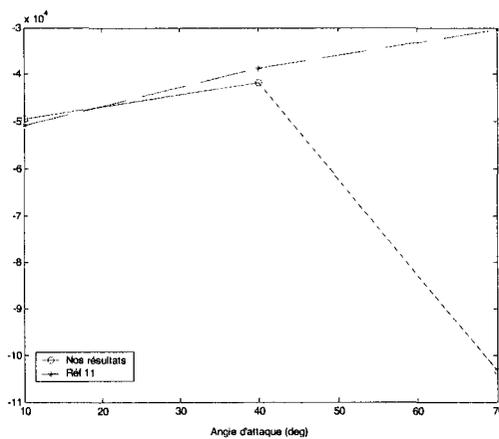


Figure 6.59 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

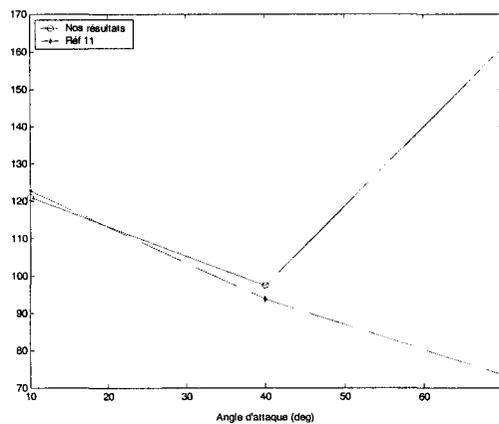


Figure 6.60 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

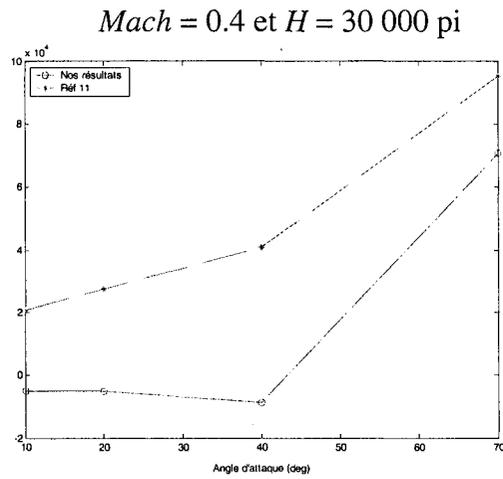


Figure 6.61 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

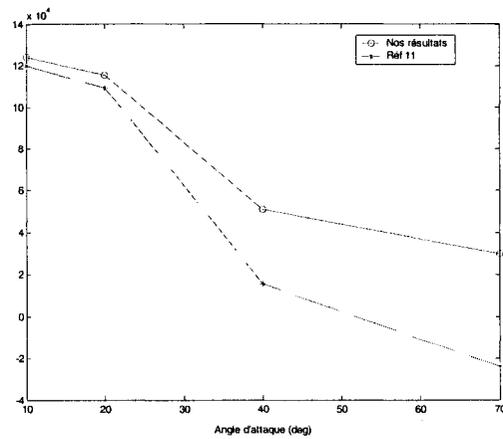


Figure 6.62 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

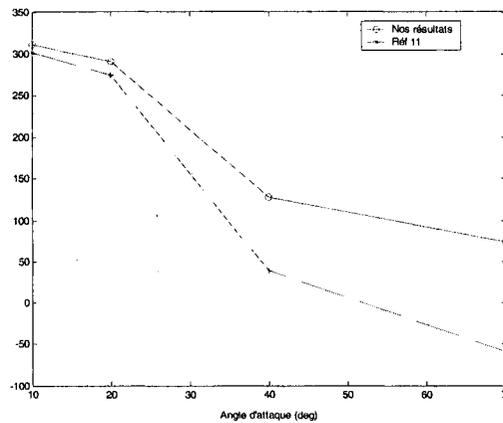


Figure 6.63 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $z$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

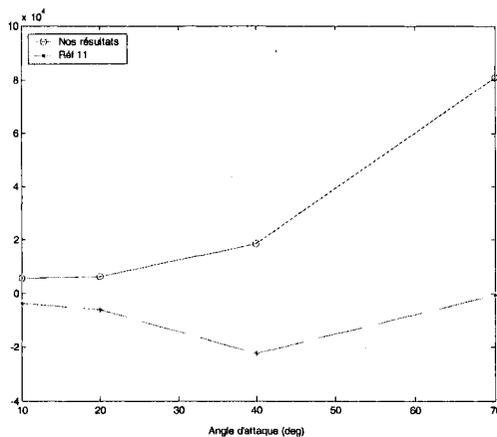


Figure 6.64 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

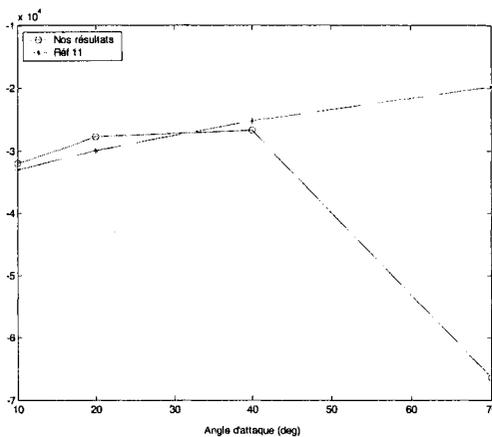


Figure 6.65 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

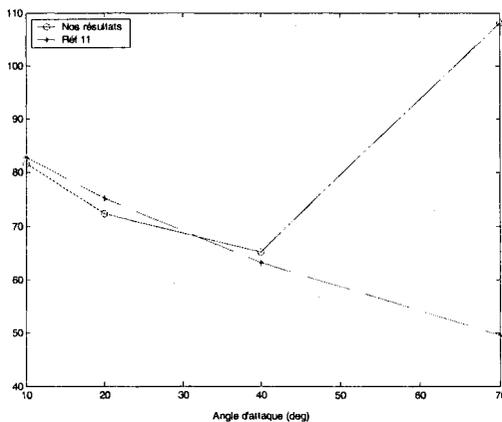


Figure 6.66 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

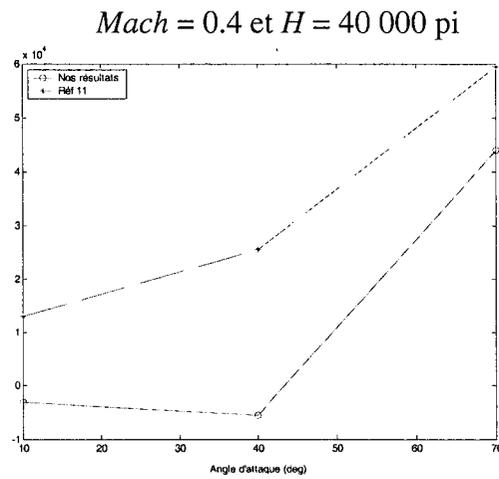


Figure 6.67 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

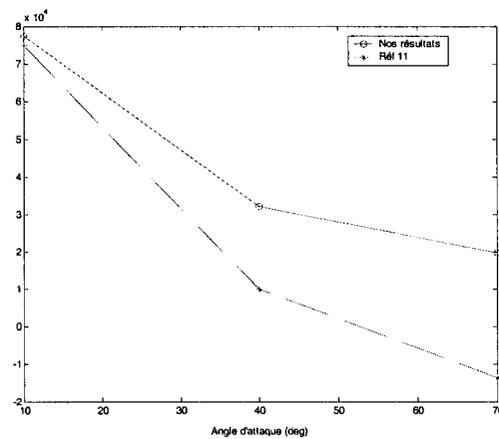


Figure 6.68 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

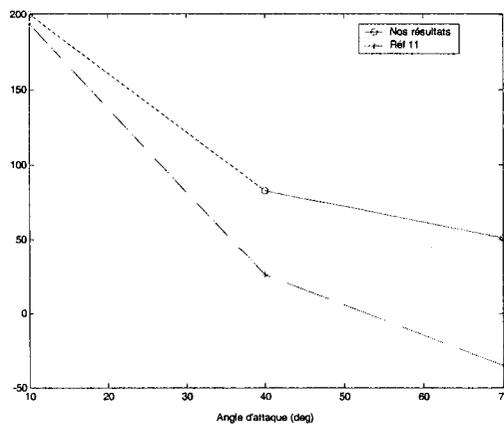


Figure 6.69 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

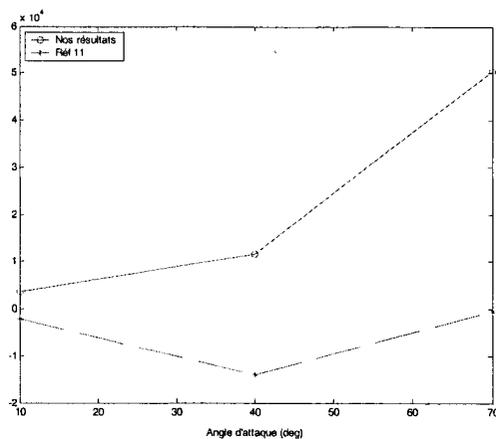


Figure 6.70 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

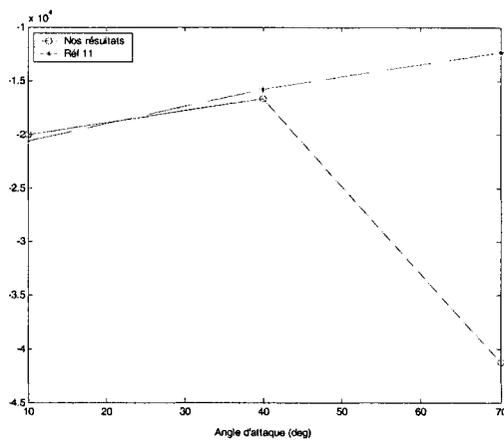


Figure 6.71 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

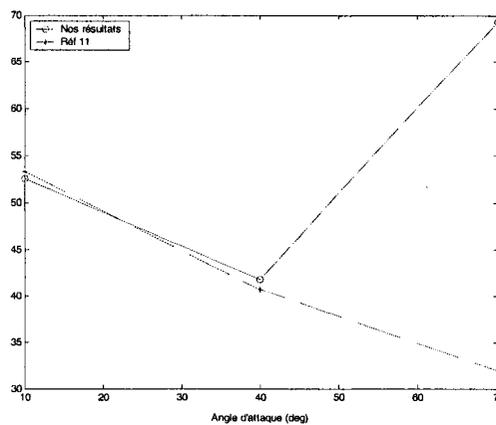


Figure 6.72 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

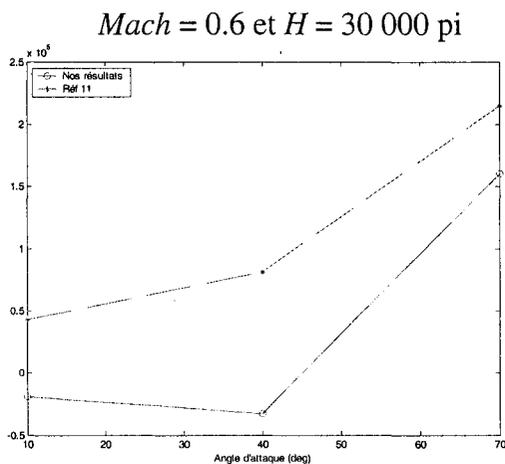


Figure 6.73 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

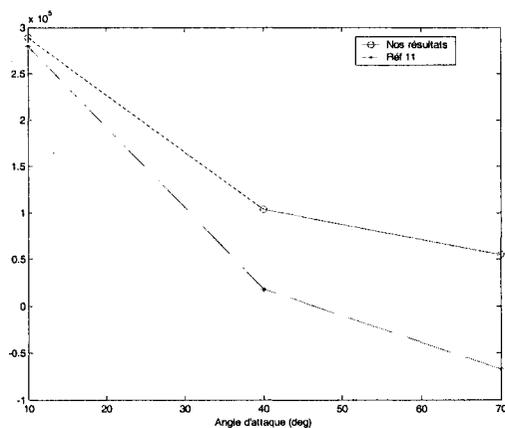


Figure 6.74 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

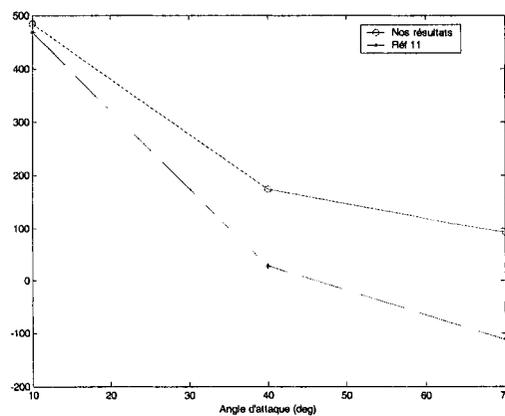


Figure 6.75 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

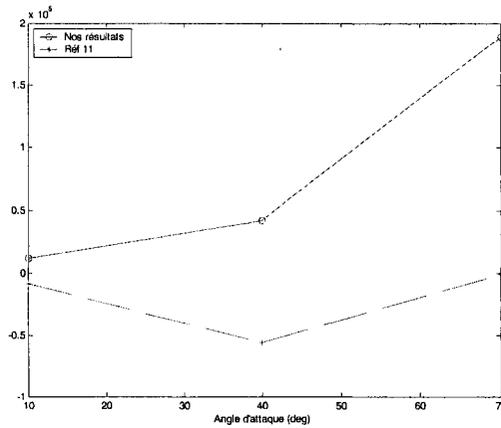


Figure 6.76 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

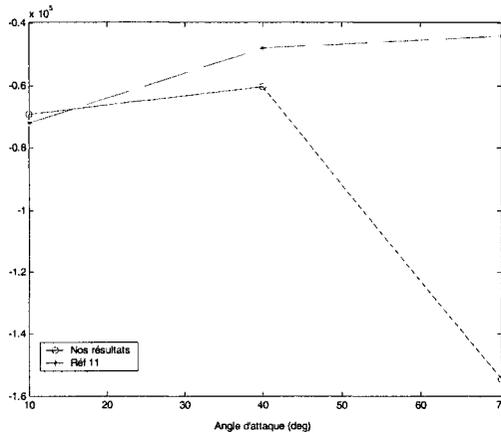


Figure 6.77 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

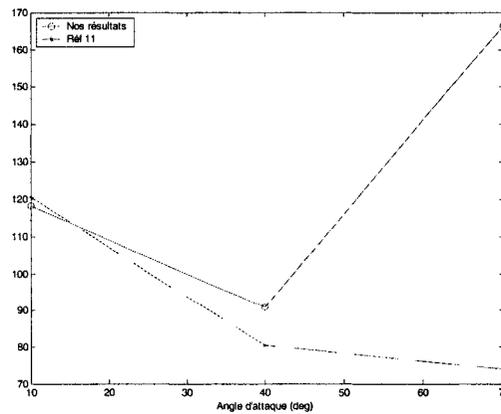


Figure 6.78 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial y}$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

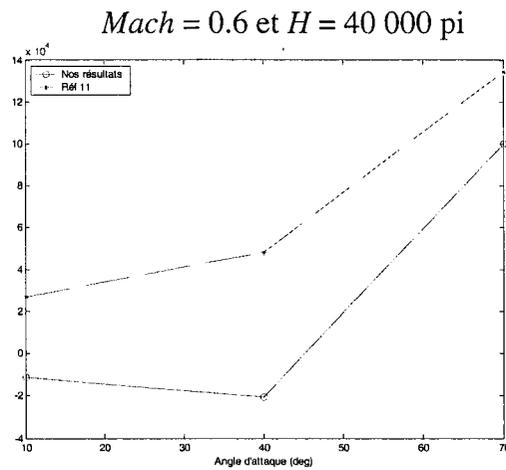


Figure 6.79 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

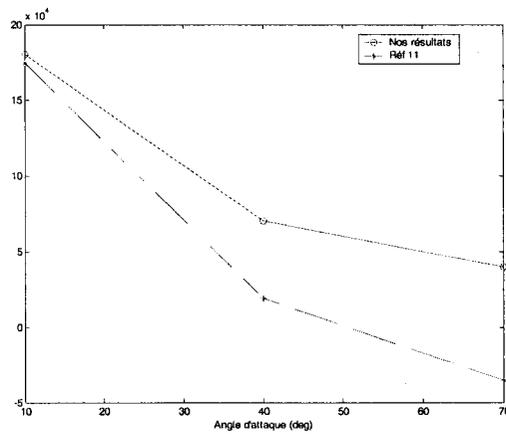


Figure 6.80 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

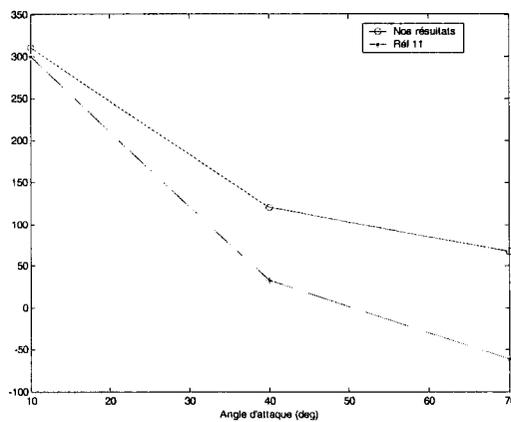


Figure 6.81 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

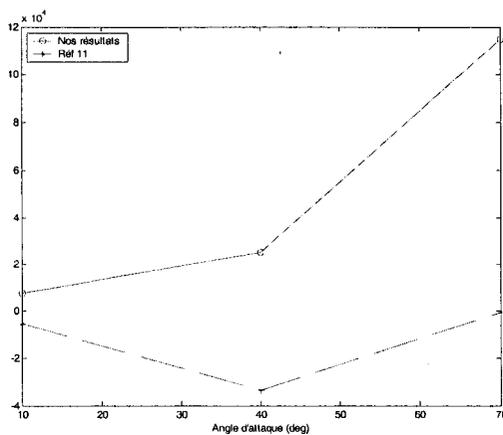


Figure 6.82 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

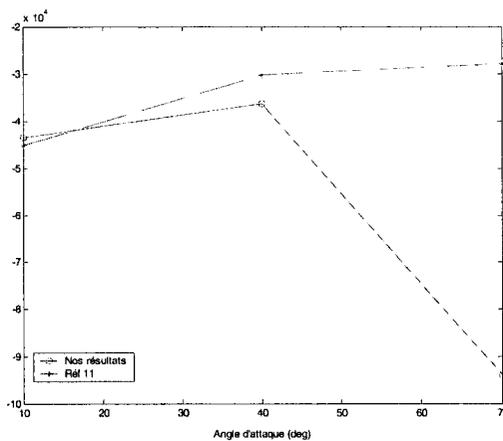


Figure 6.83 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

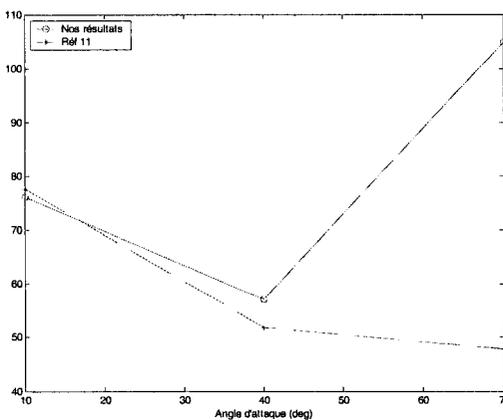


Figure 6.84 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

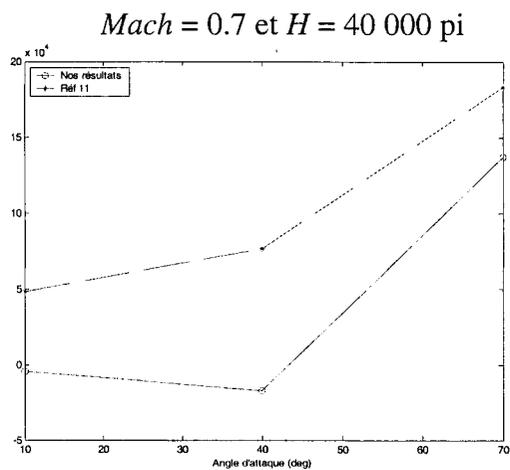


Figure 6.85 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

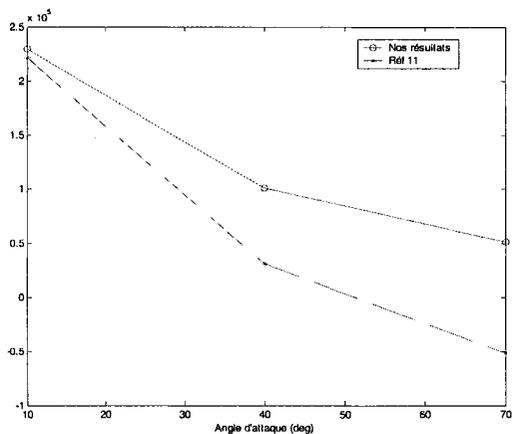


Figure 6.86 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

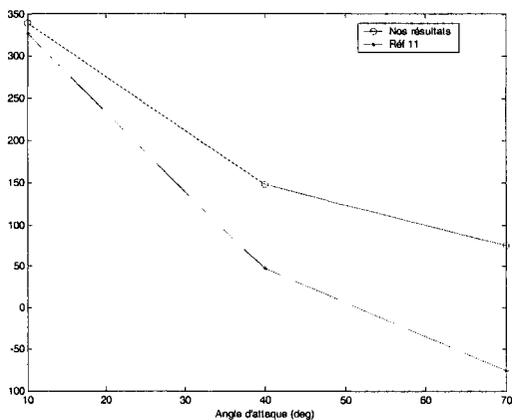


Figure 6.87 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

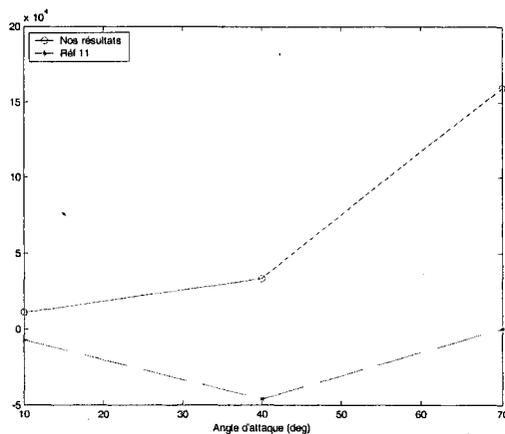


Figure 6.88 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

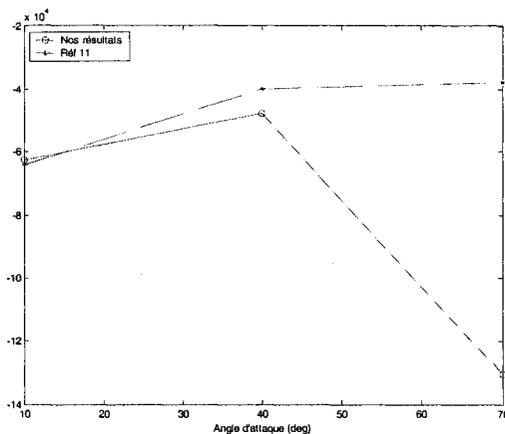


Figure 6.89 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

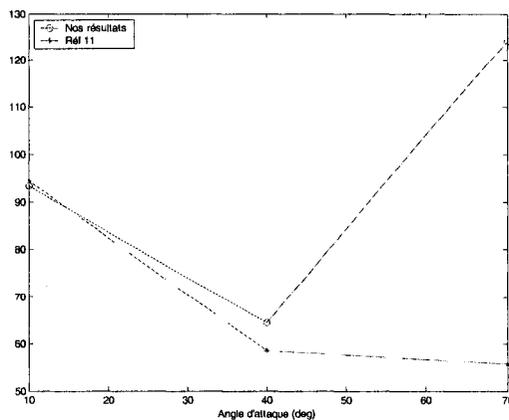


Figure 6.90 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'angle d'attaque  $\alpha$

$Mach = 0.8$ , et  $\alpha 10^\circ$

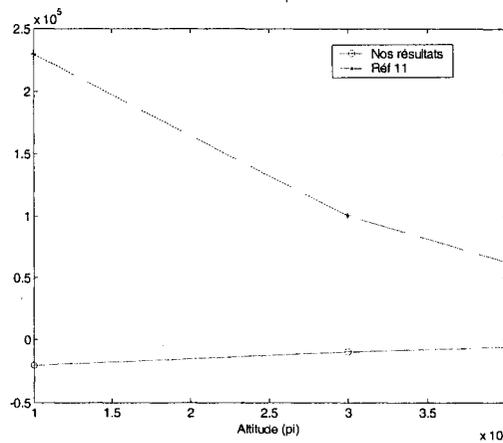


Figure 6.91 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

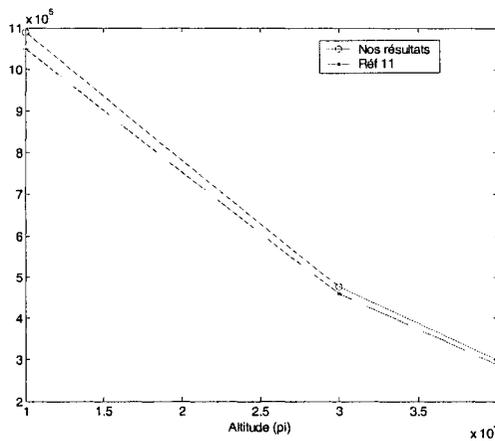


Figure 6.92 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

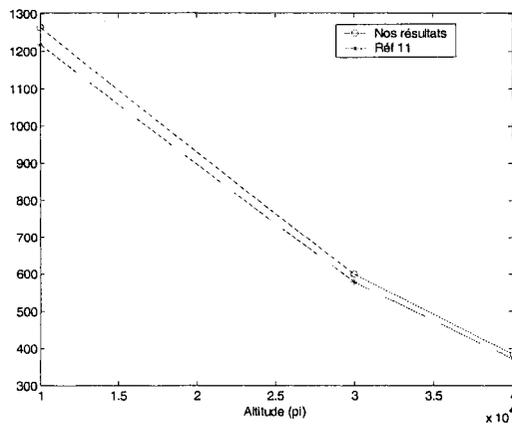


Figure 6.93 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $z$  (slugs/s) avec l'altitude

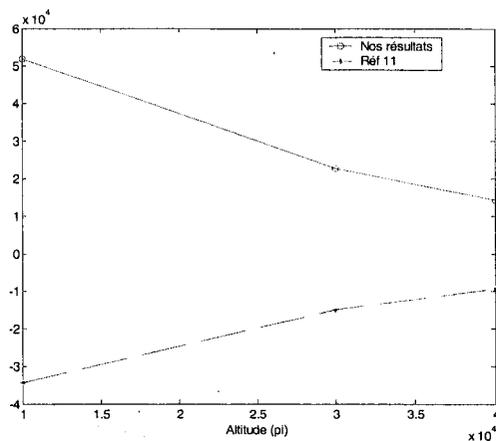


Figure 6.94 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

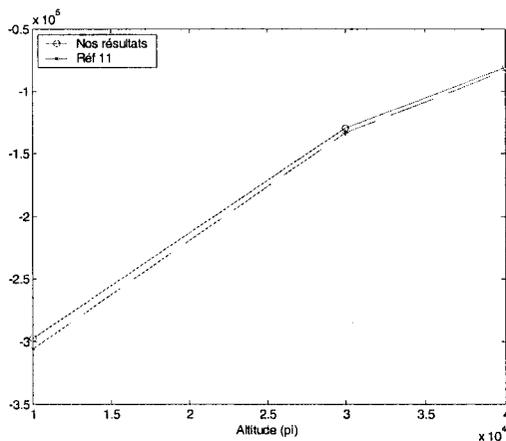


Figure 6.95 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

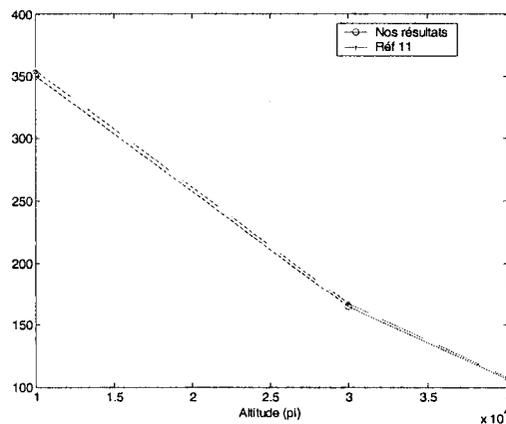


Figure 6.96 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'altitude

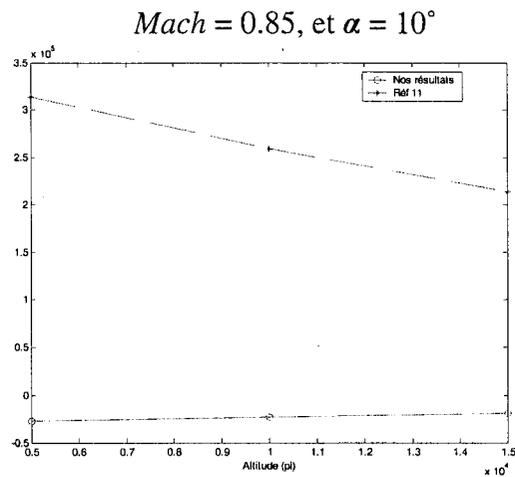


Figure 6.97 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

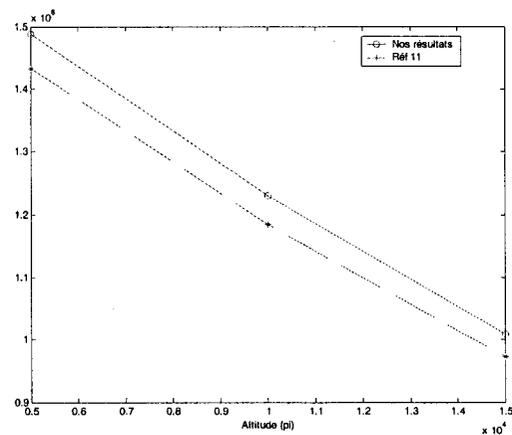


Figure 6.98 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

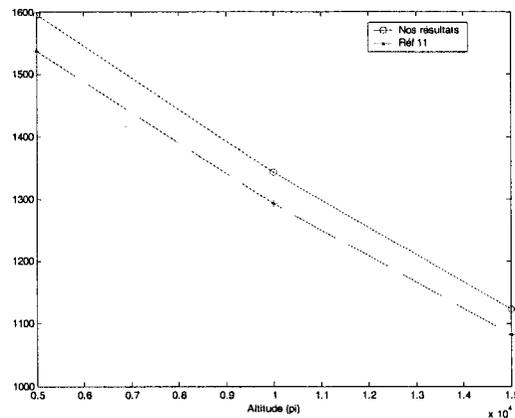


Figure 6.99 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

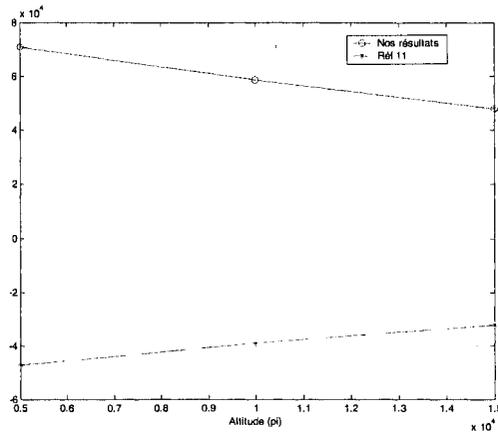


Figure 6.100 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

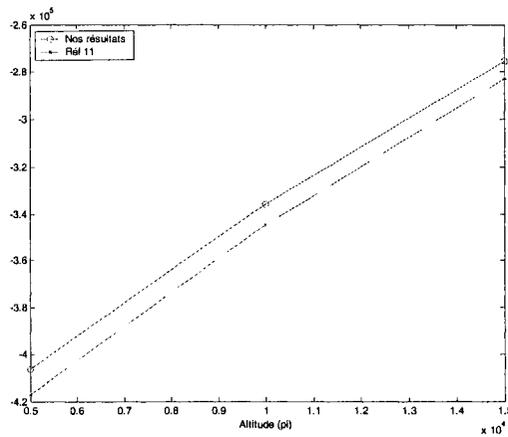


Figure 6.101 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

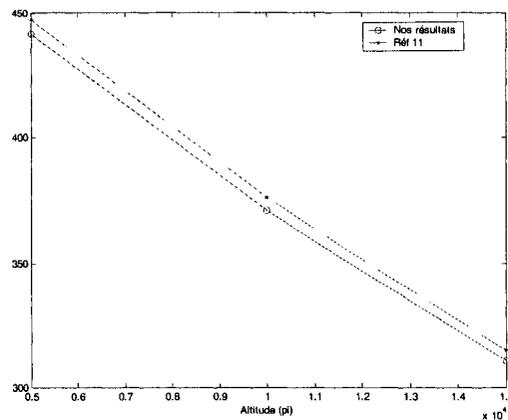


Figure 6.102 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'altitude

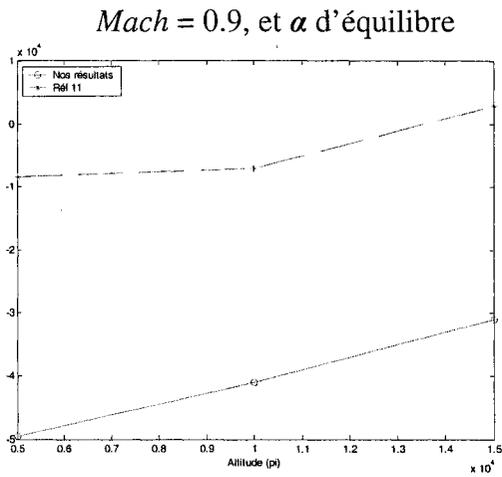


Figure 6.103 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

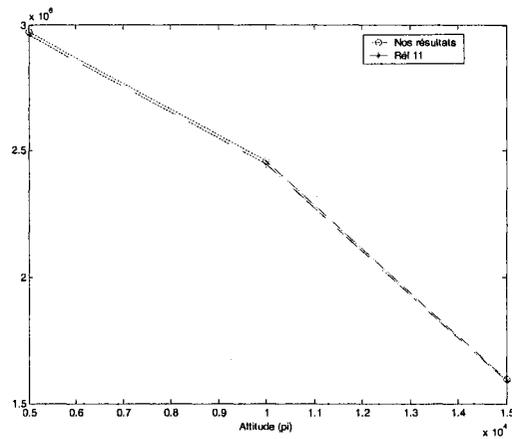


Figure 6.104 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec l'altitude

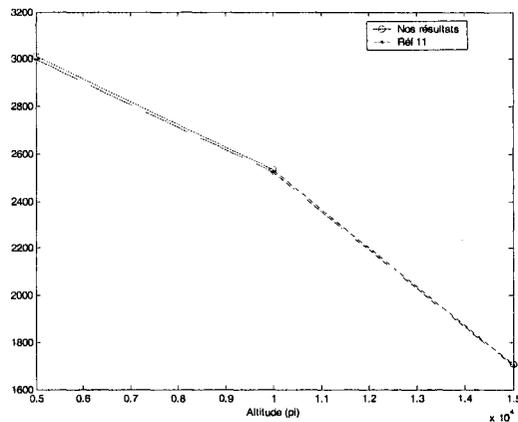


Figure 6.105 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

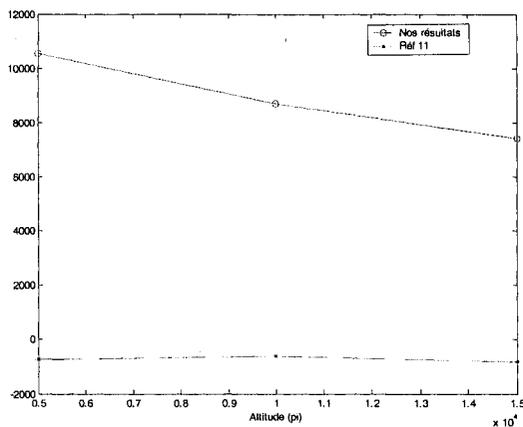


Figure 6.106 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

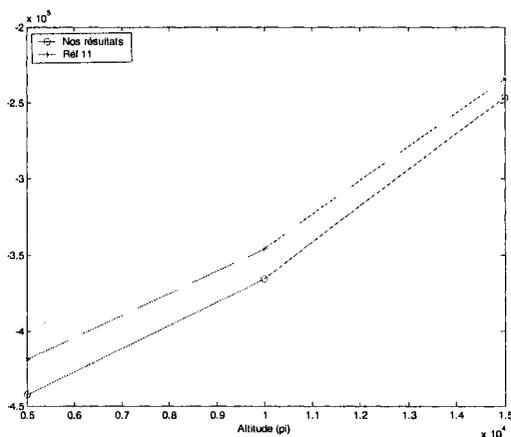


Figure 6.107 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

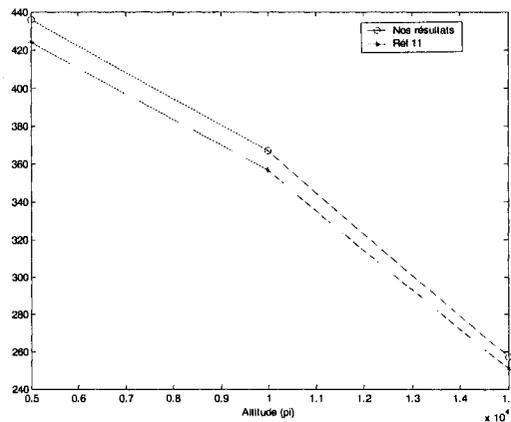


Figure 6.108 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec l'altitude

*Mach = 0.95, et  $\alpha$  d'équilibre*

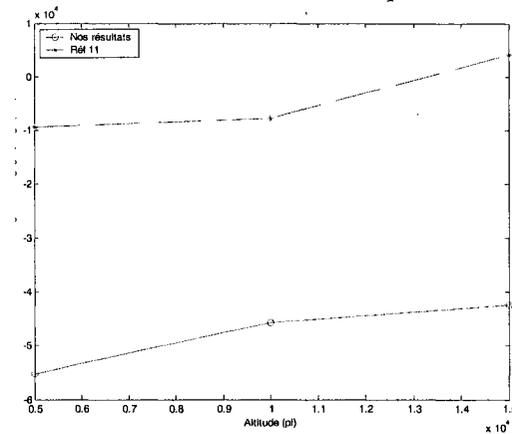


Figure 6.109 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

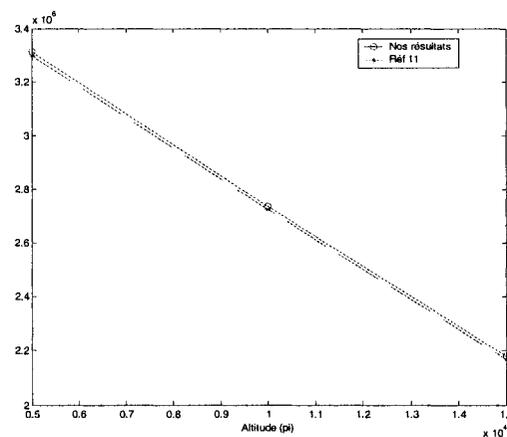


Figure 6.110 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

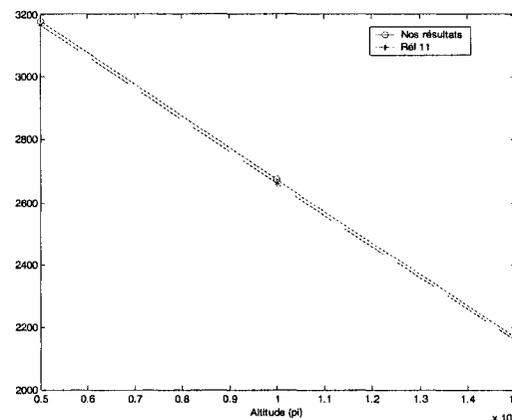


Figure 6.111 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

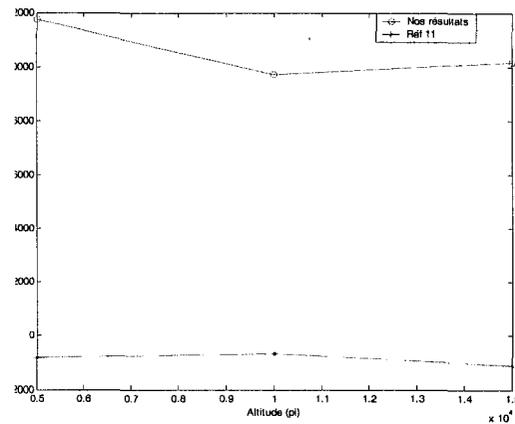


Figure 6.112 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

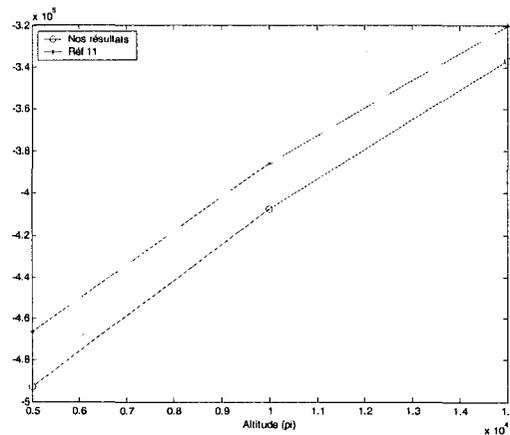


Figure 6.113 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

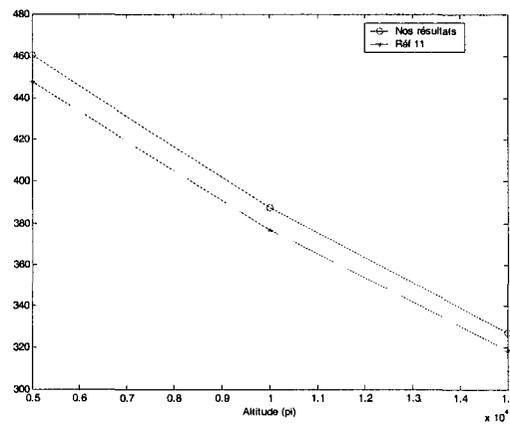


Figure 6.114 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'altitude

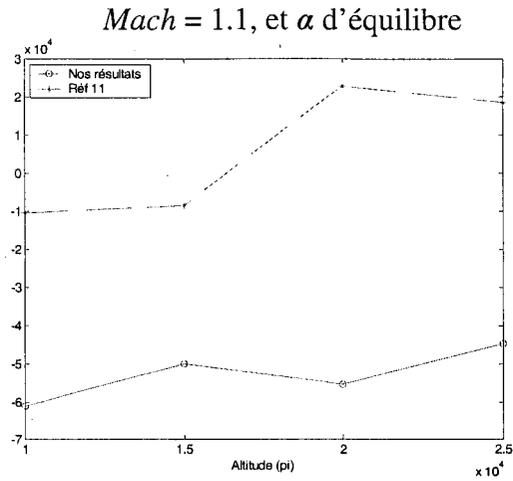


Figure 6.115 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

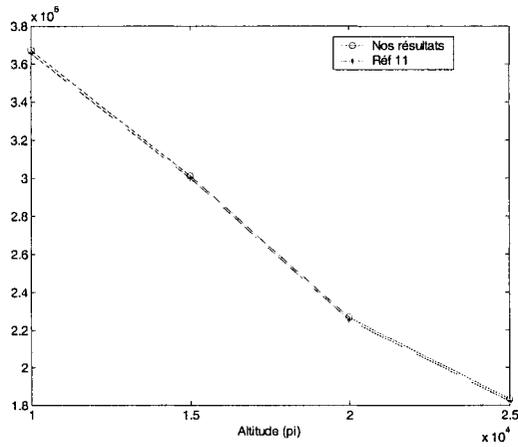


Figure 6.116 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

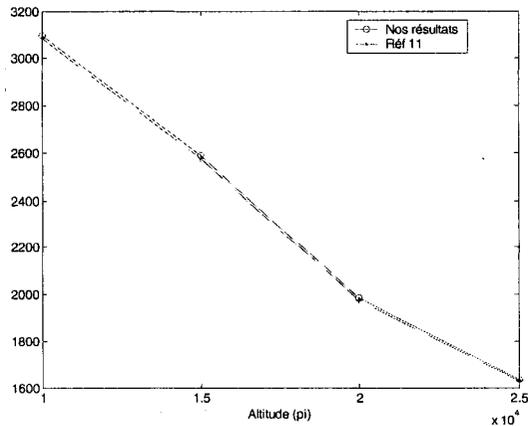


Figure 6.117 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

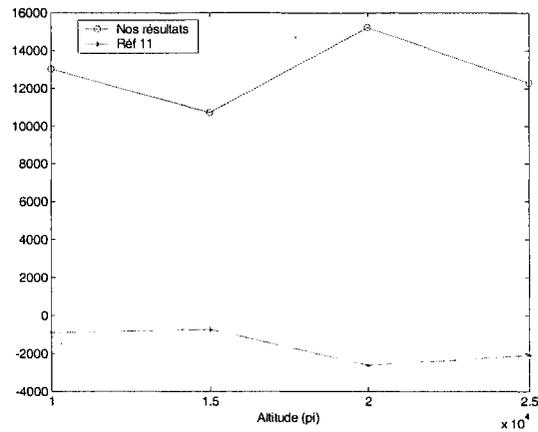


Figure 6.118 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

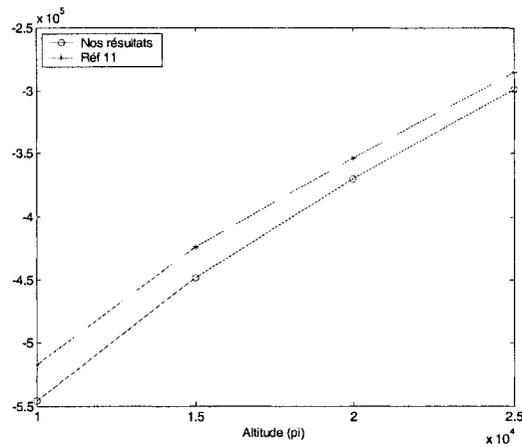


Figure 6.119 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

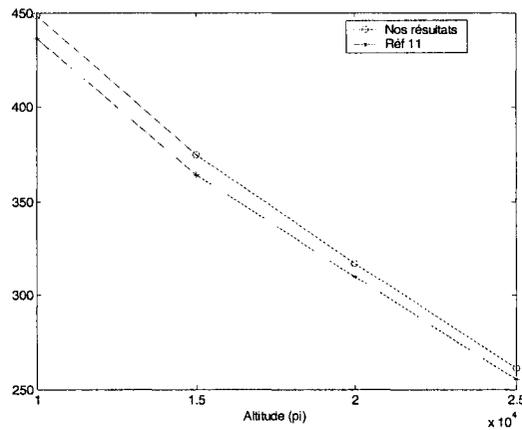


Figure 6.120 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'altitude

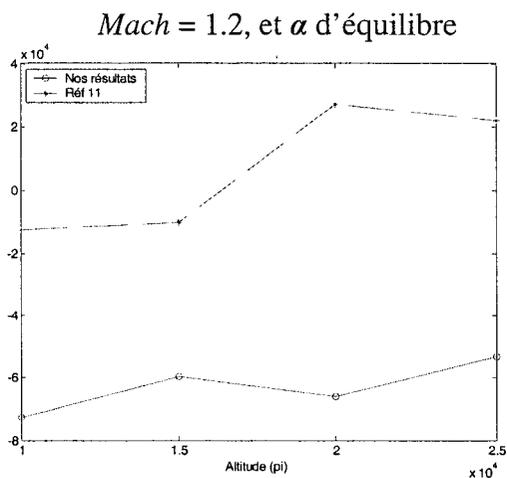


Figure 6.121 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'altitude

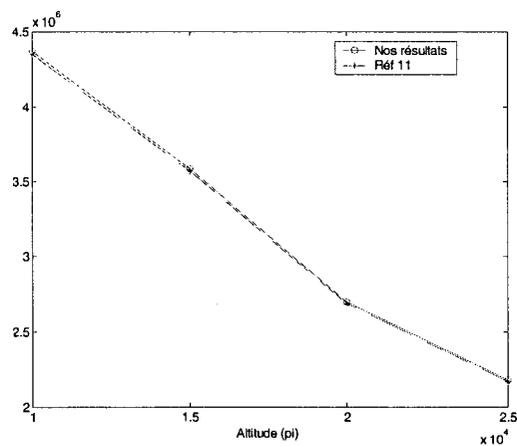


Figure 6.122 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'altitude

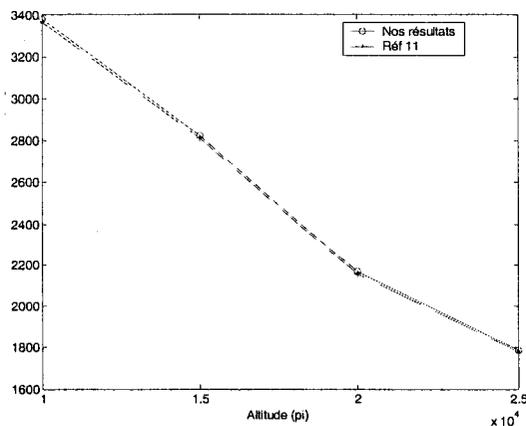


Figure 6.123 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

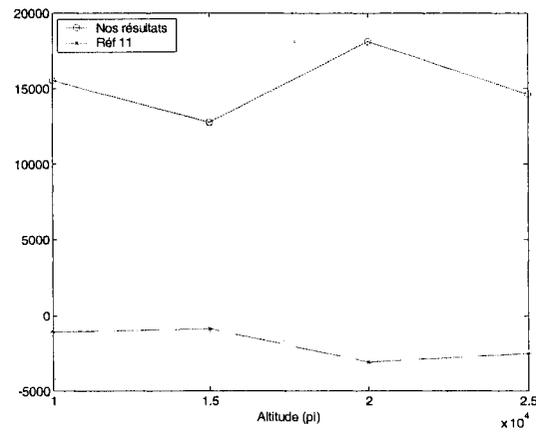


Figure 6.124 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

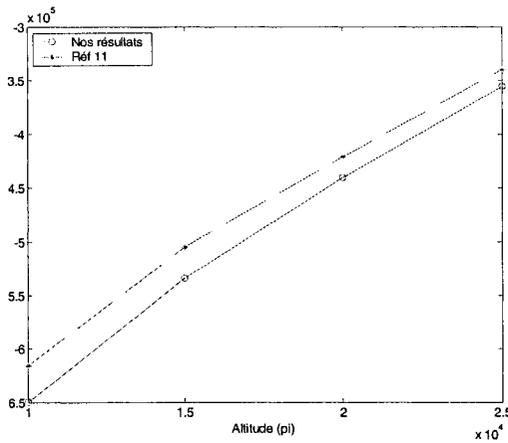


Figure 6.125 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

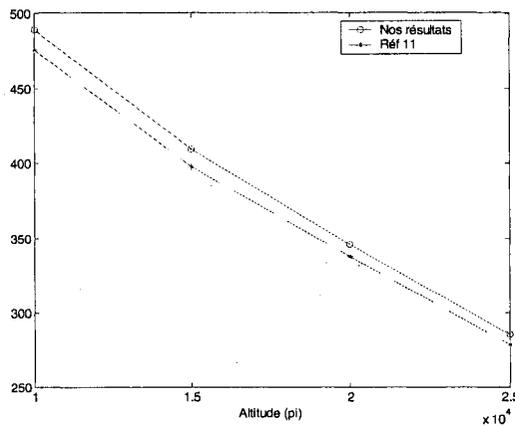


Figure 6.126 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'altitude

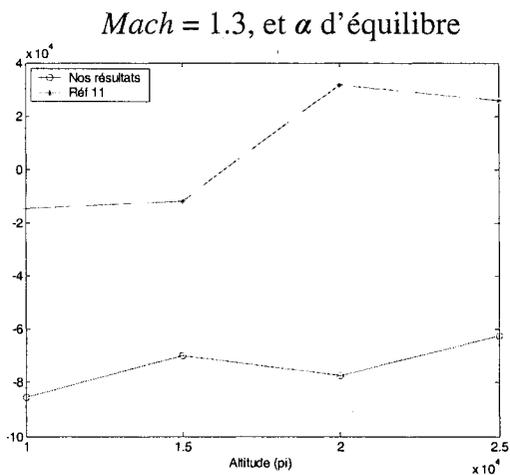


Figure 6.127 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'altitude

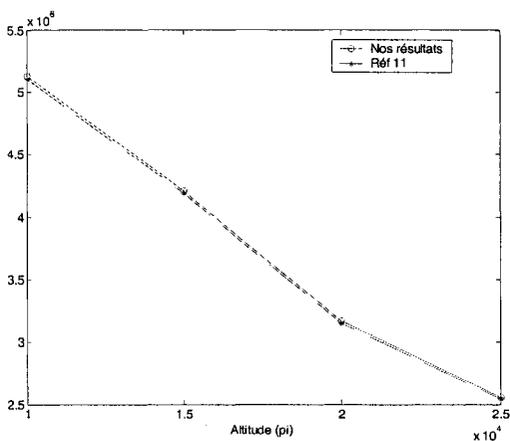


Figure 6.128 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec l'altitude

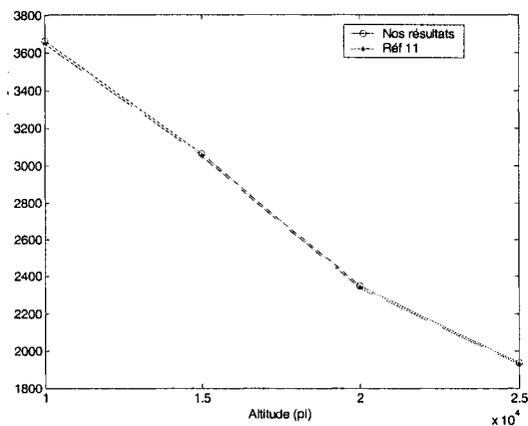


Figure 6.129 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec l'altitude

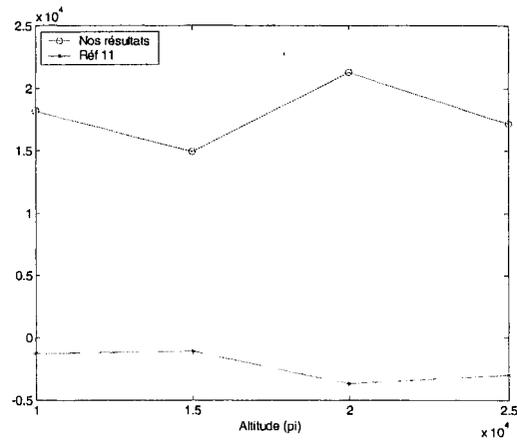


Figure 6.130 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

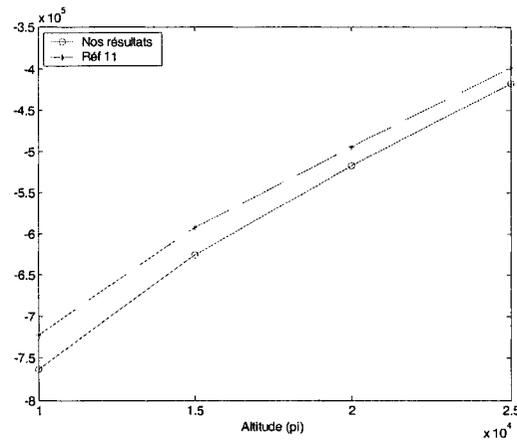


Figure 6.131 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec l'altitude

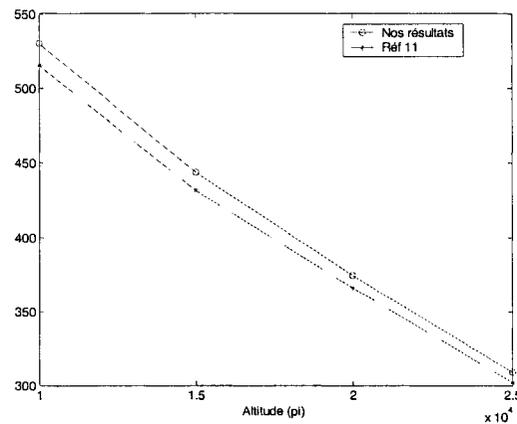


Figure 6.132 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec l'altitude

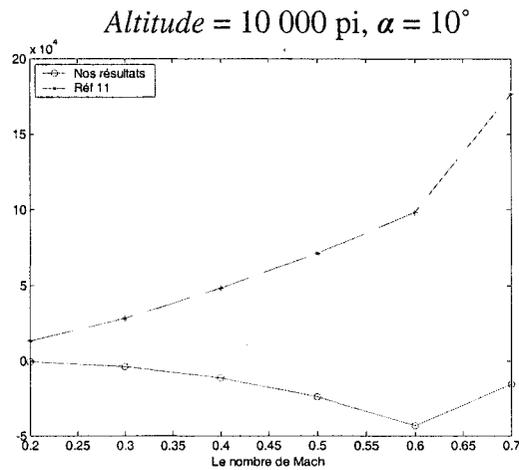


Figure 6.133 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

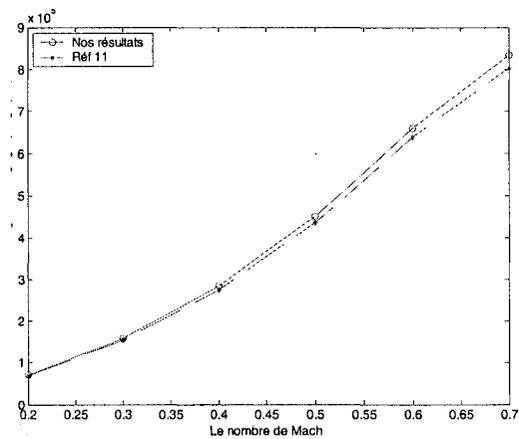


Figure 6.134 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

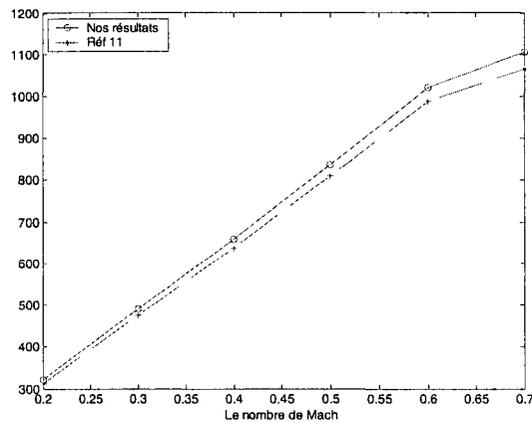


Figure 6.135 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $z$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

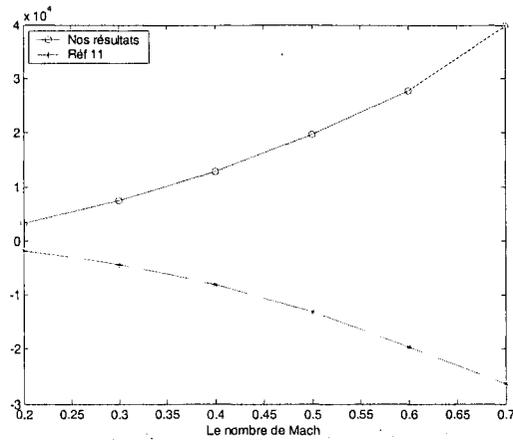


Figure 6.136 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

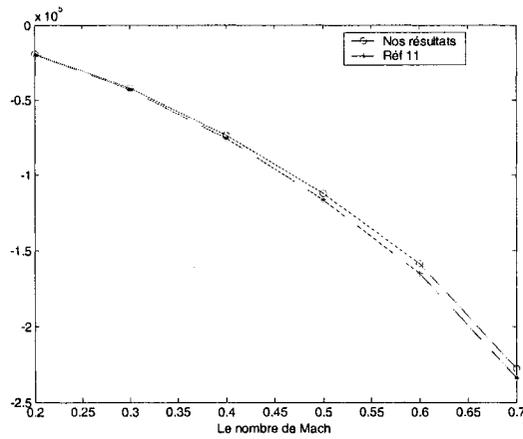


Figure 6.137 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

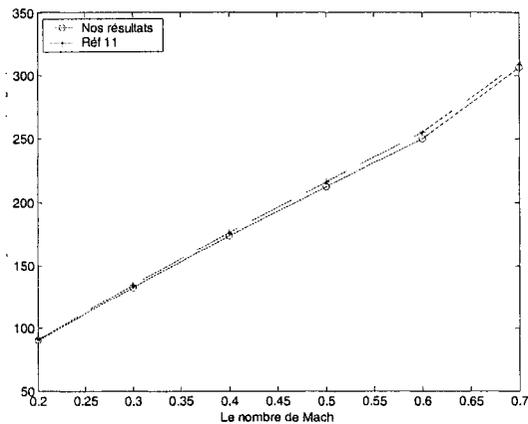


Figure 6.138 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

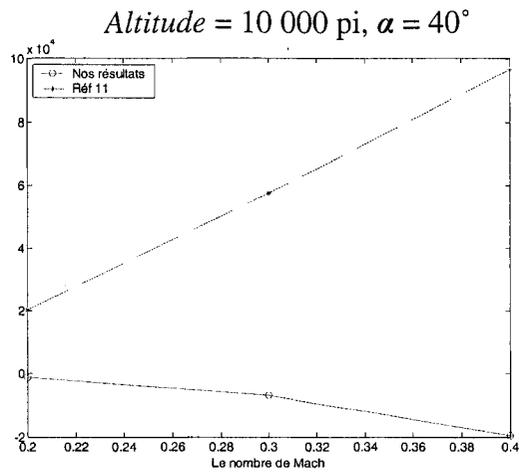


Figure 6.139 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

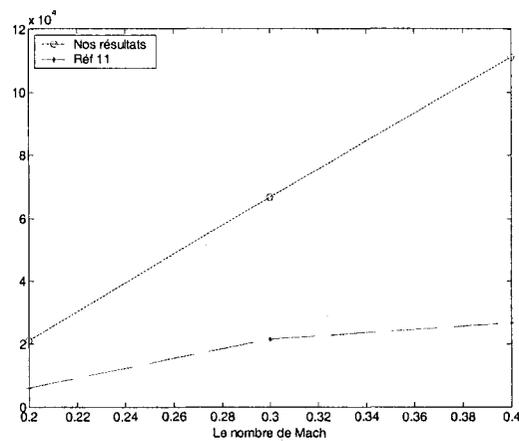


Figure 6.140 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

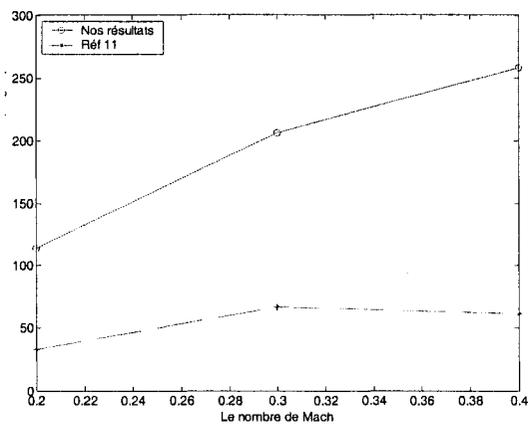


Figure 6.141 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

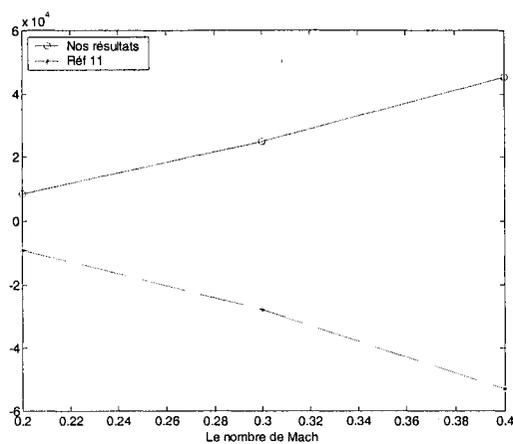


Figure 6.142 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

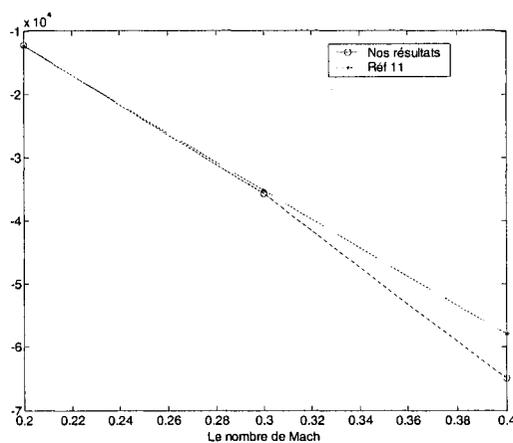


Figure 6.143 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

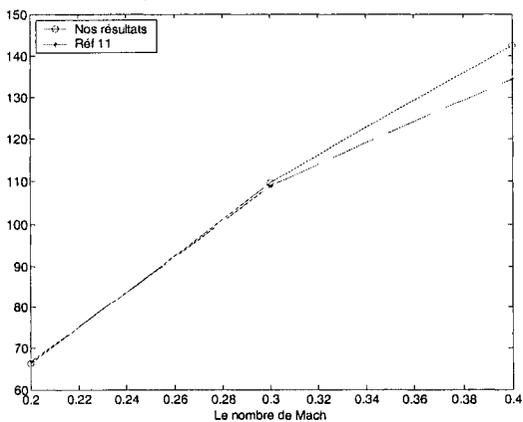


Figure 6.144 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

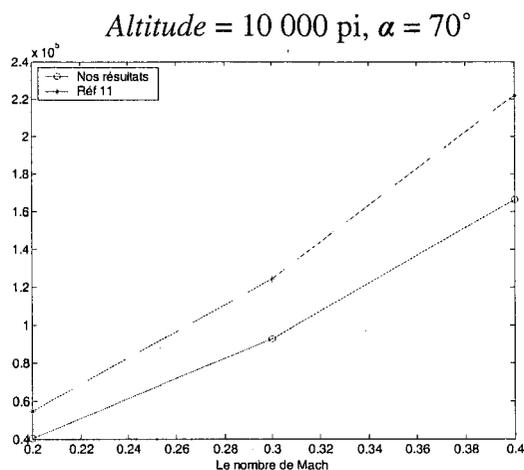


Figure 6.145 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

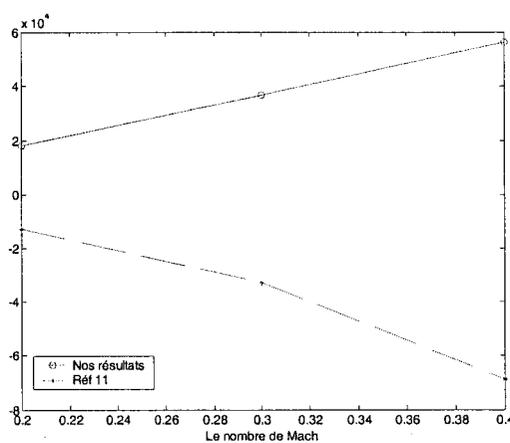


Figure 6.146 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

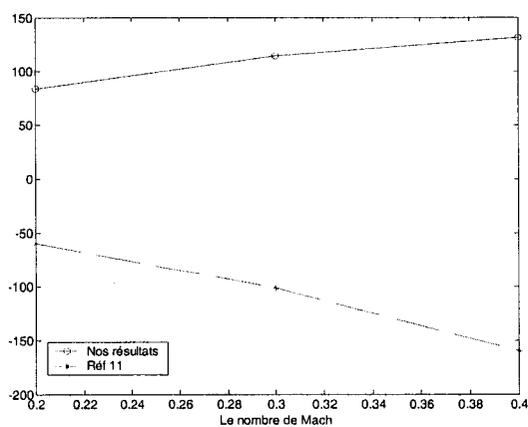


Figure 6.147 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

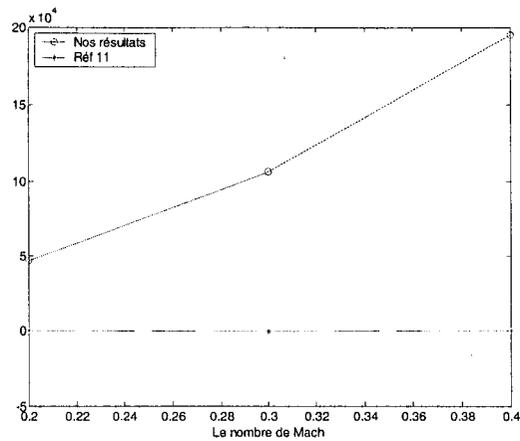


Figure 6.148 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

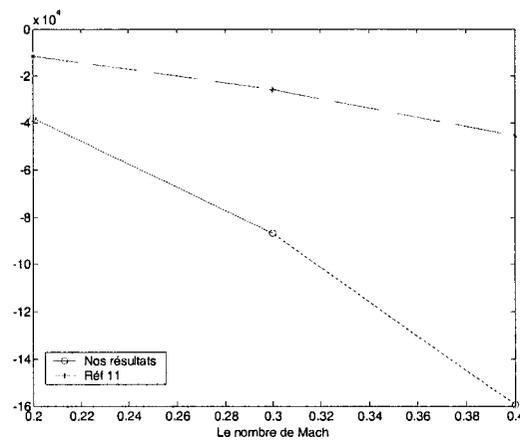


Figure 6.149 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

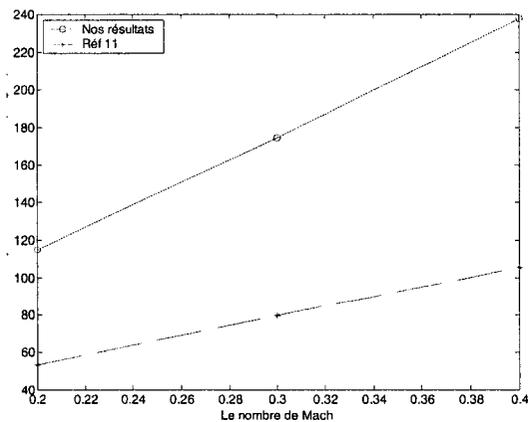


Figure 6.150 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

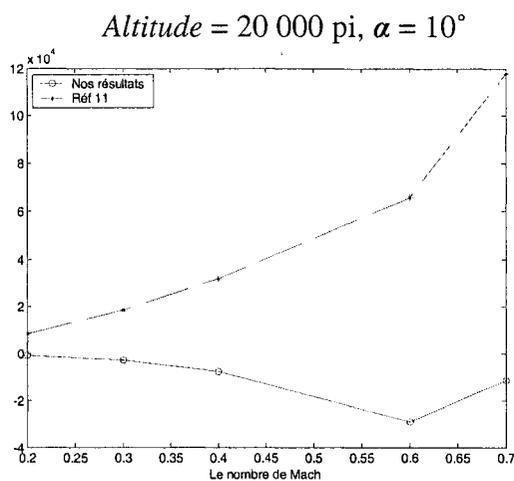


Figure 6.151 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs·pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

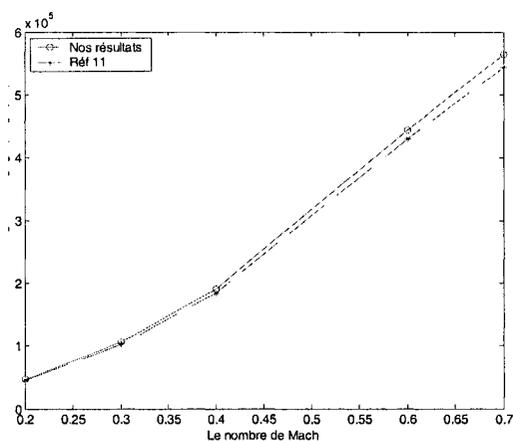


Figure 6.152 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs·pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

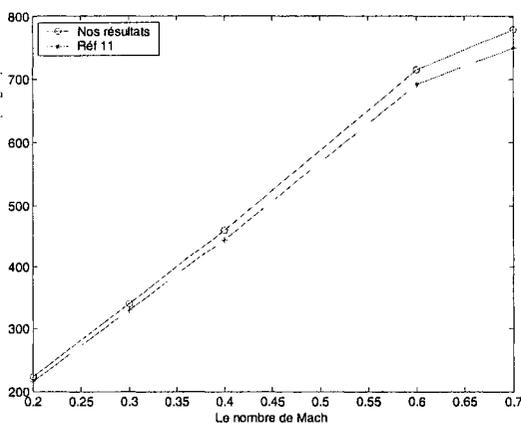


Figure 6.153 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

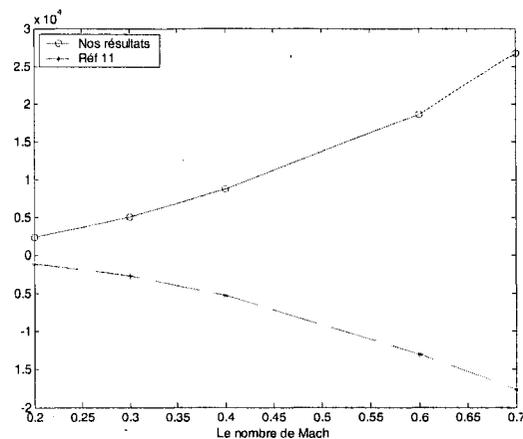


Figure 6.154 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{\Phi}}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  ( $\text{slugs} \cdot \text{pi}/\text{s}^2$ ) avec le nombre de Mach

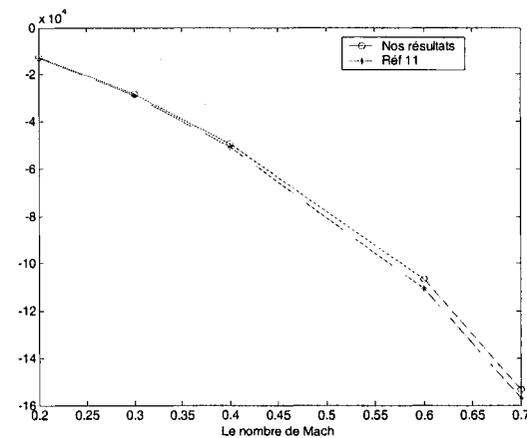


Figure 6.155 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{\Psi}}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  ( $\text{slugs} \cdot \text{pi}/\text{s}^2$ ) avec le nombre de Mach

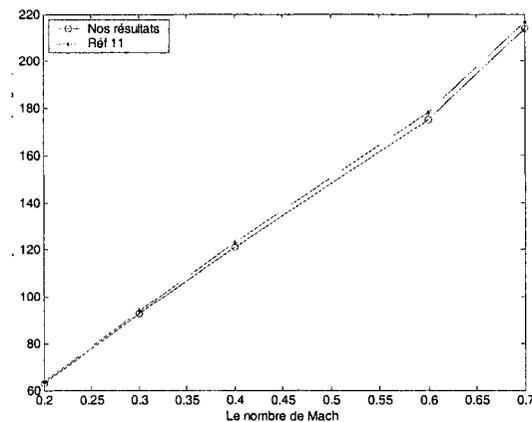


Figure 6.156 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  ( $\text{slugs}/\text{s}$ ) avec le nombre de Mach

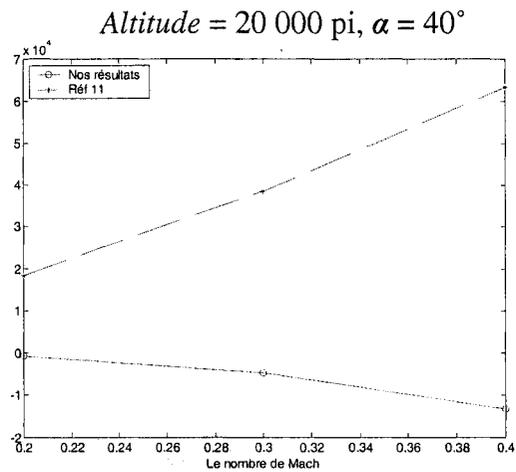


Figure 6.157 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

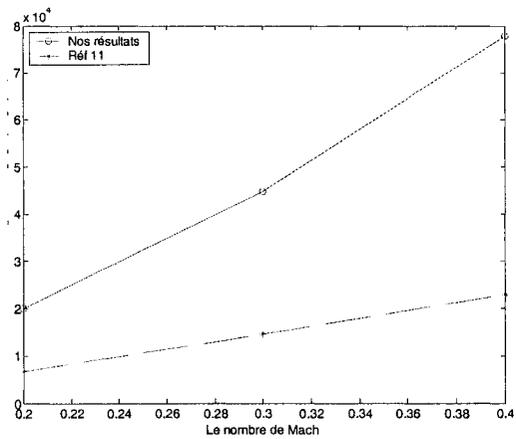


Figure 6.158 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

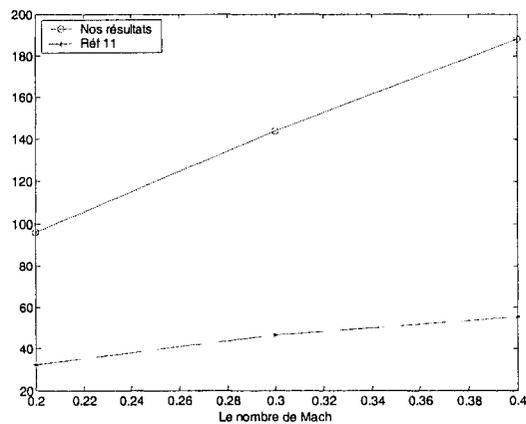


Figure 6.159 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $z$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

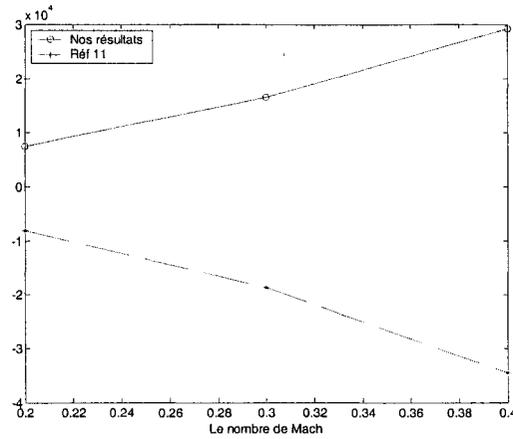


Figure 6.160 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

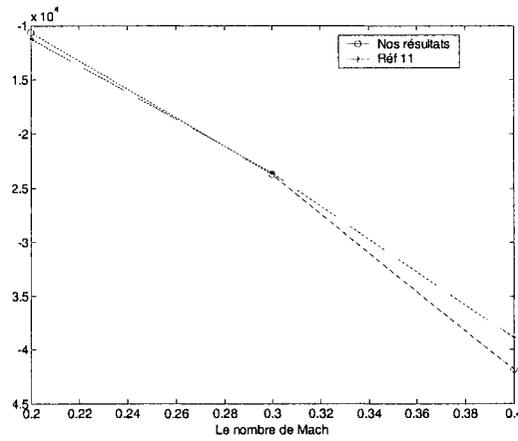


Figure 6.161 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

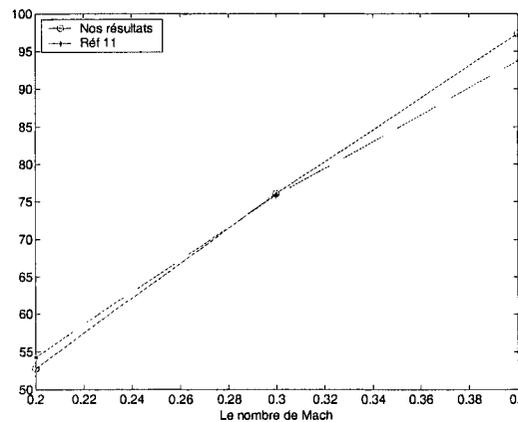


Figure 6.162 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

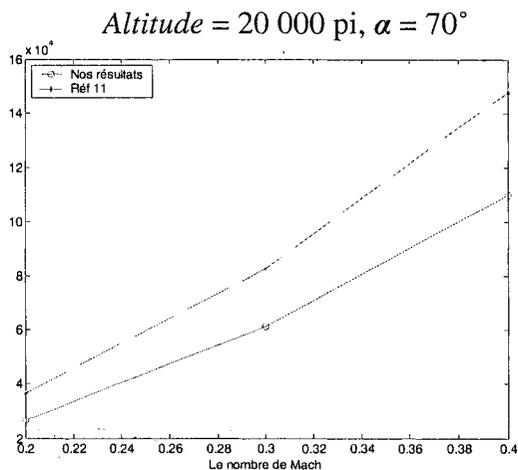


Figure 6.163 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s $^2$ ) avec le nombre de Mach

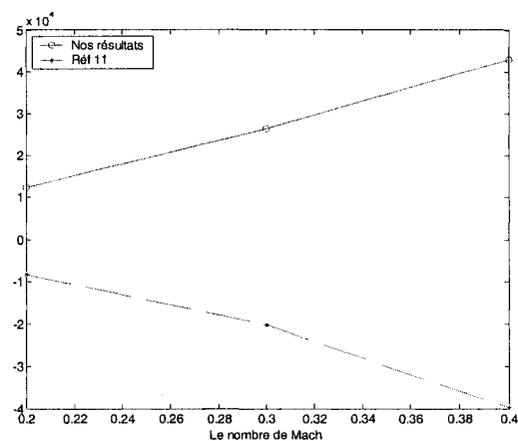


Figure 6.164 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s $^2$ ) avec le nombre de Mach

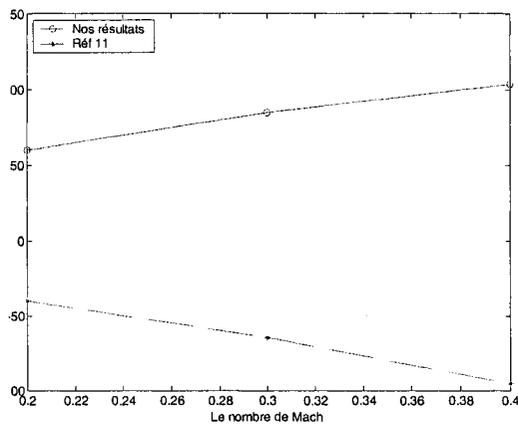


Figure 6.165 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

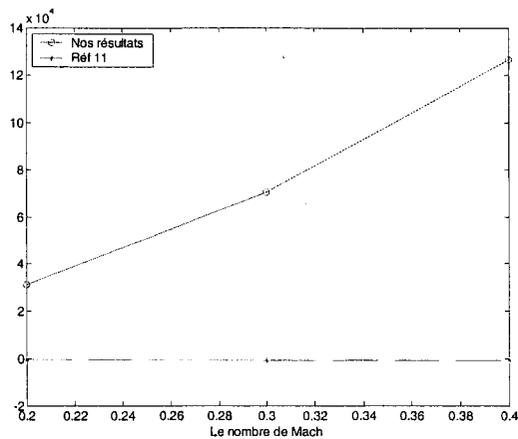


Figure 6.166 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

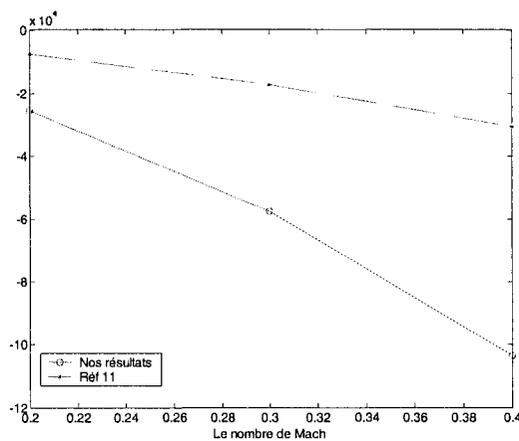


Figure 6.167 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

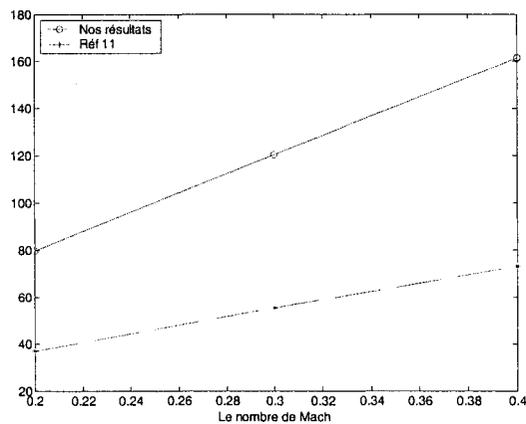


Figure 6.168 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

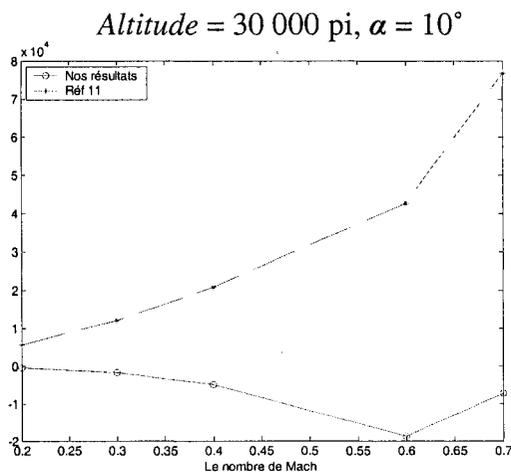


Figure 6.169 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

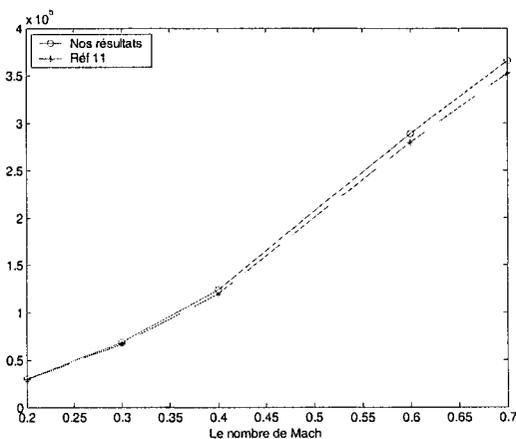


Figure 6.170 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

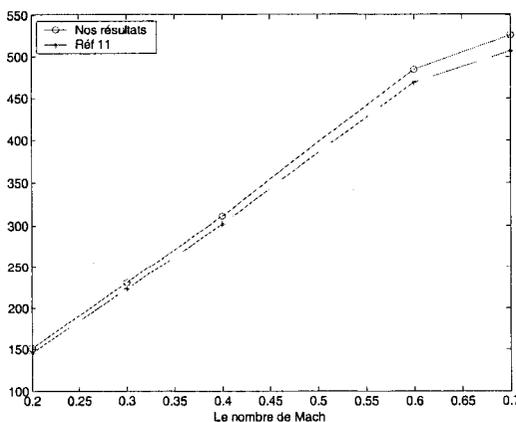


Figure 6.171 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

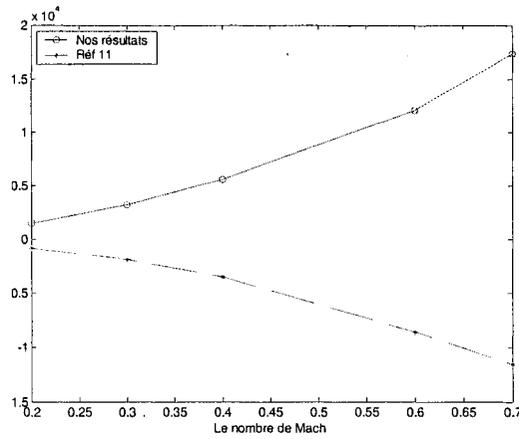


Figure 6.172 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

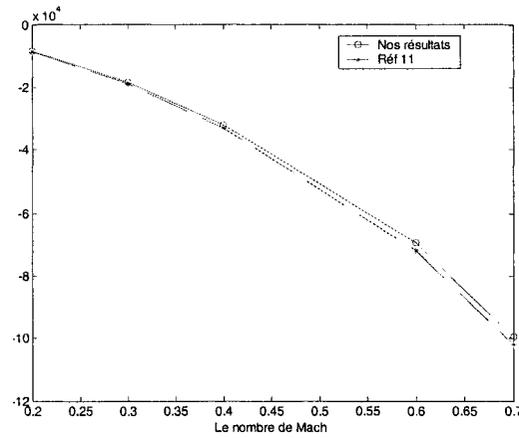


Figure 6.173 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

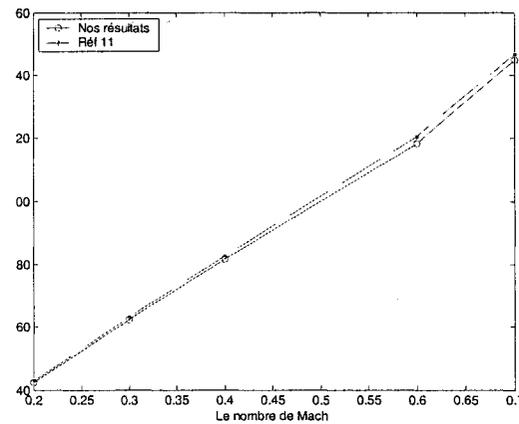


Figure 6.174 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

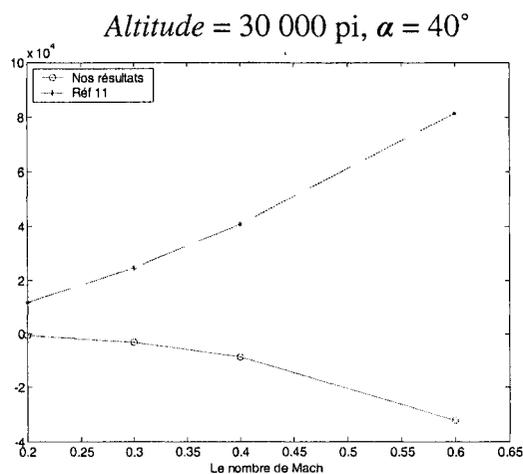


Figure 6.175 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

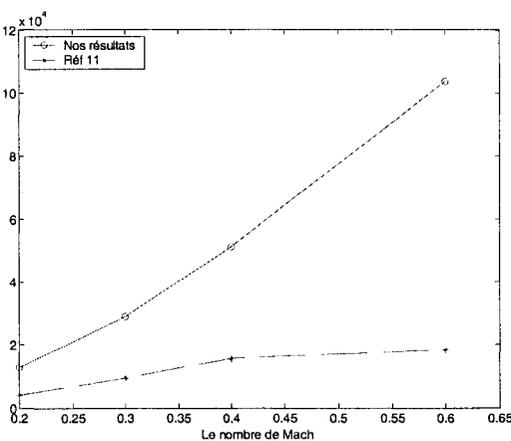


Figure 6.176 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

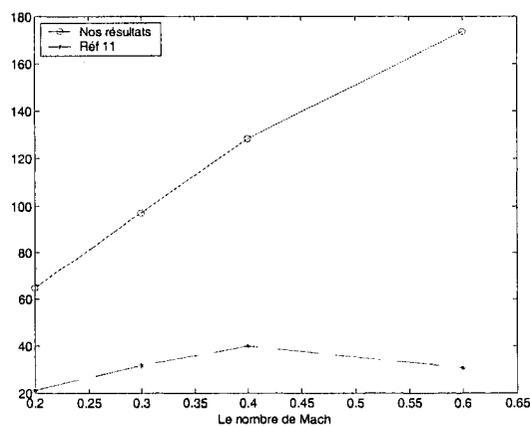


Figure 6.177 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

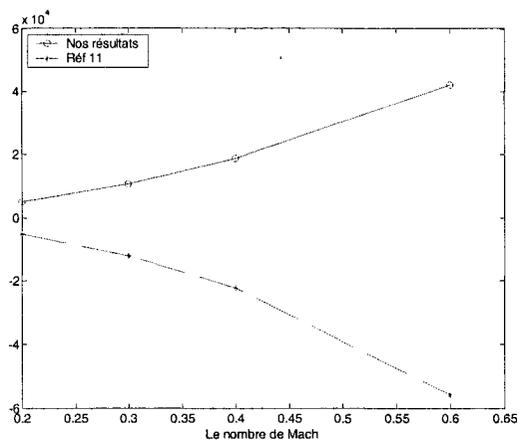


Figure 6.178 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

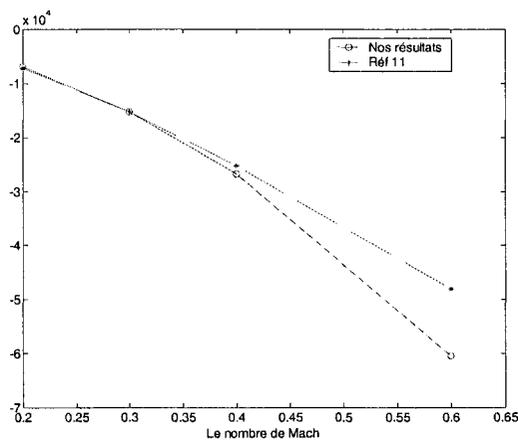


Figure 6.179 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

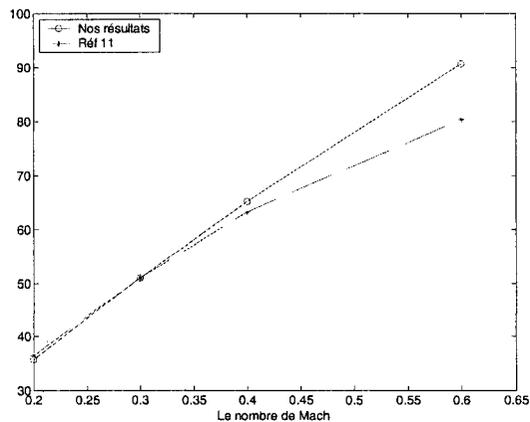


Figure 6.180 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial y}$  par rapport à la vitesse latérale  $y$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

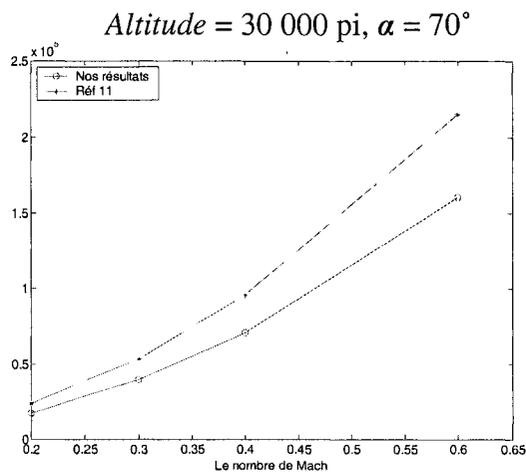


Figure 6.181 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s $^2$ ) avec le nombre de Mach

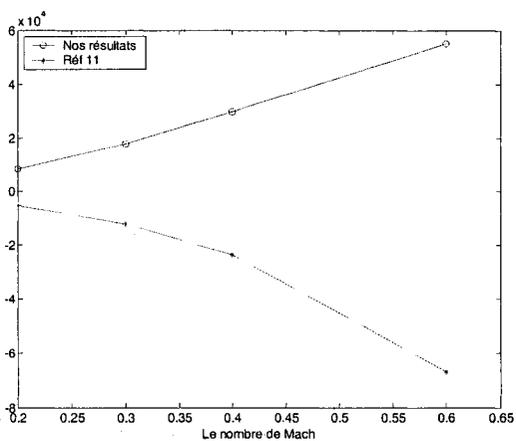


Figure 6.182 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s $^2$ ) avec le nombre de Mach

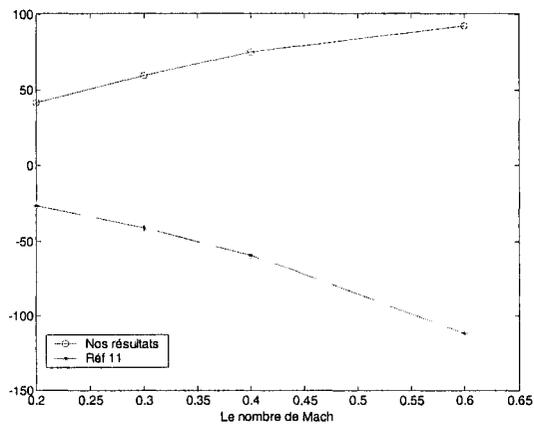


Figure 6.183 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

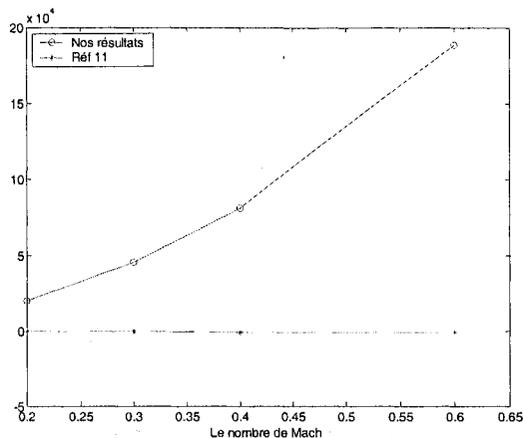


Figure 6.184 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

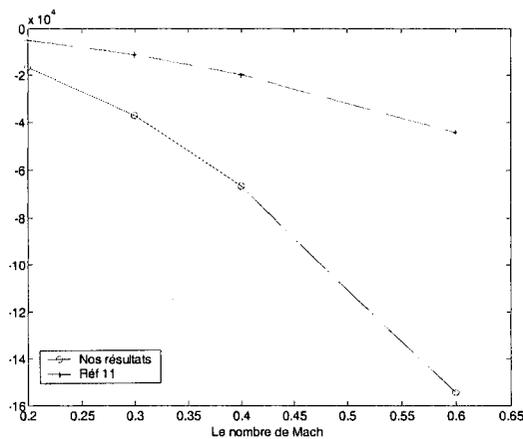


Figure 6.185 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

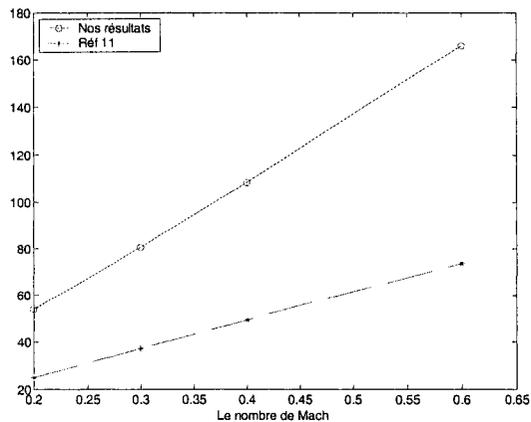


Figure 6.186 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

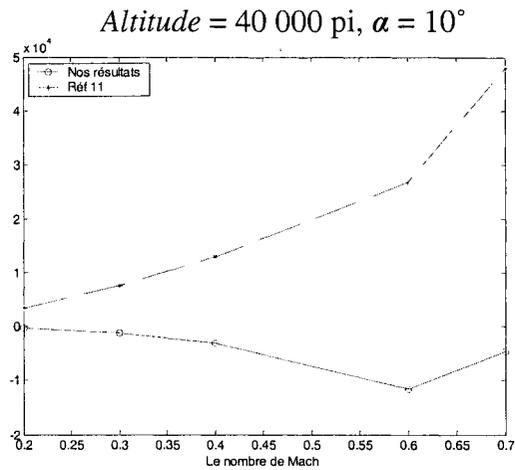


Figure 6.187 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

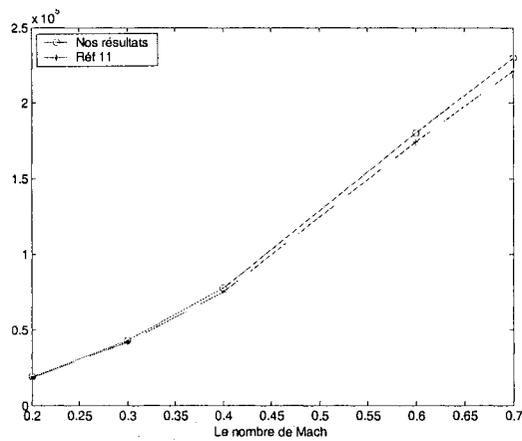


Figure 6.188 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

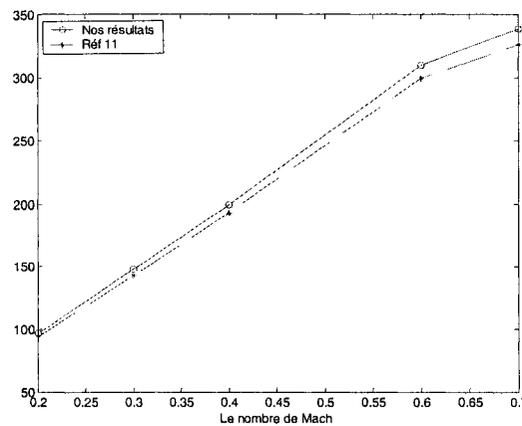


Figure 6.189 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

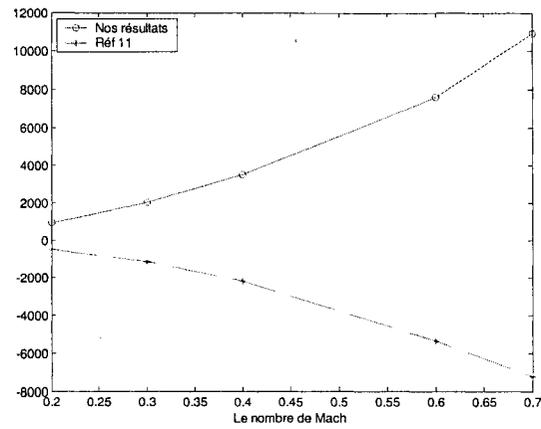


Figure 6.190 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  ( $\text{slugs} \cdot \pi / \text{s}^2$ ) avec le nombre de Mach

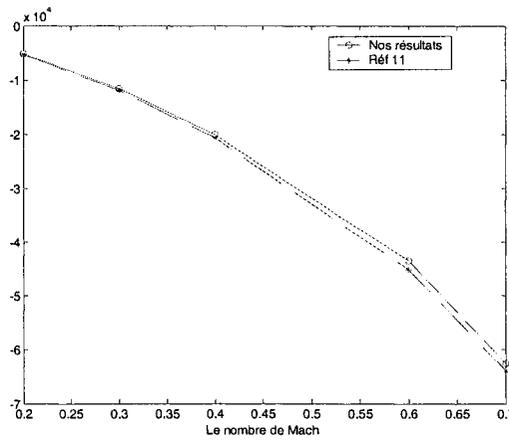


Figure 6.191 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  ( $\text{slugs} \cdot \pi / \text{s}^2$ ) avec le nombre de Mach

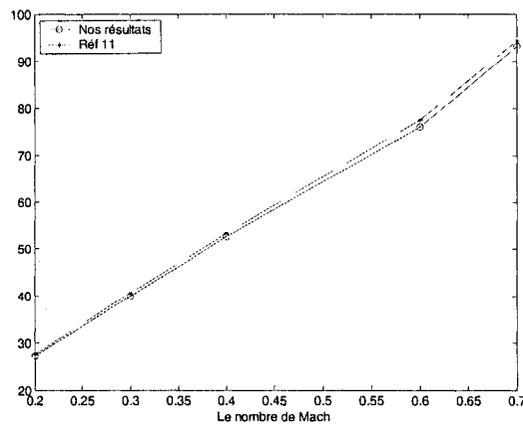


Figure 6.192 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $y_j$  ( $\text{slugs} / \text{s}$ ) avec le nombre de Mach

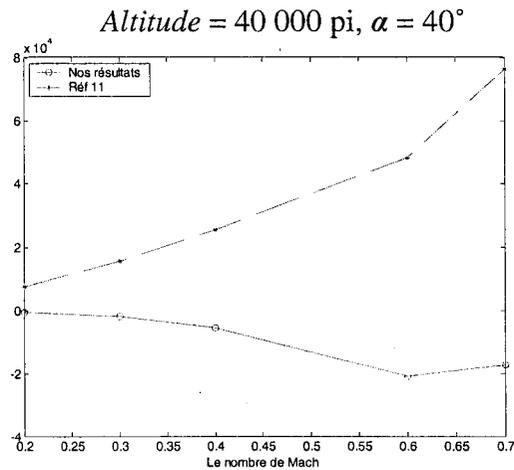


Figure 6.193 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

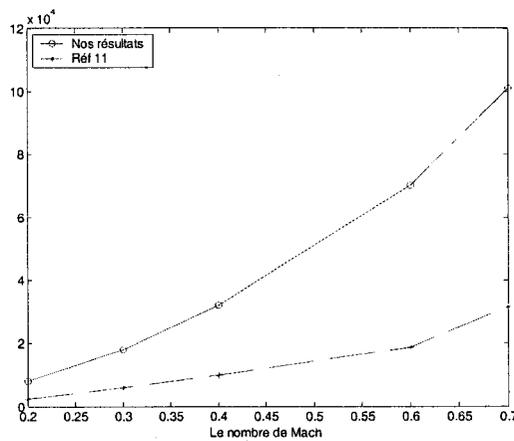


Figure 6.194 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

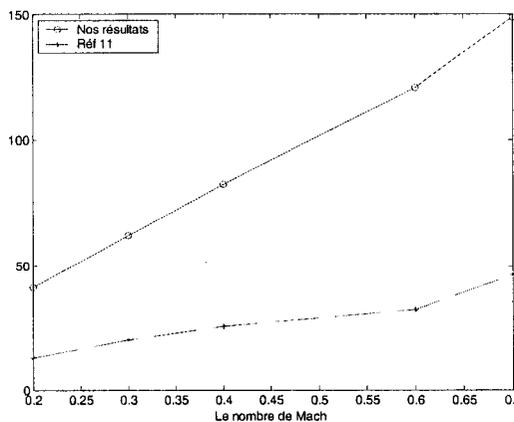


Figure 6.195 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

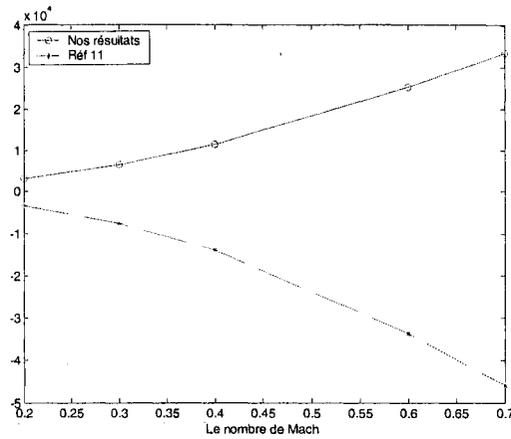


Figure 6.196 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

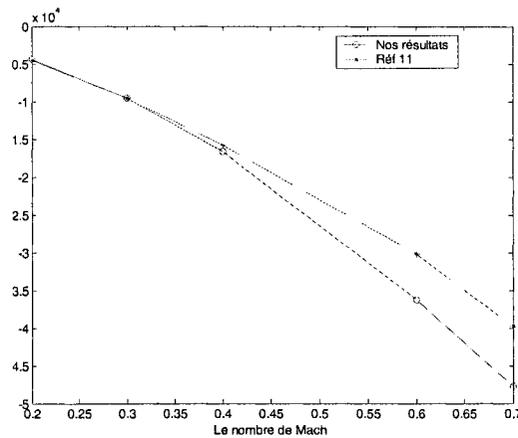


Figure 6.197 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

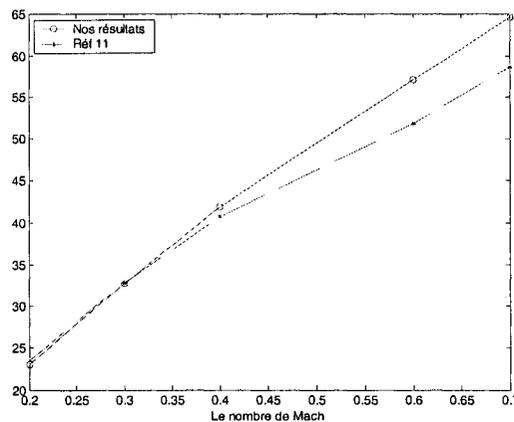


Figure 6.198 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

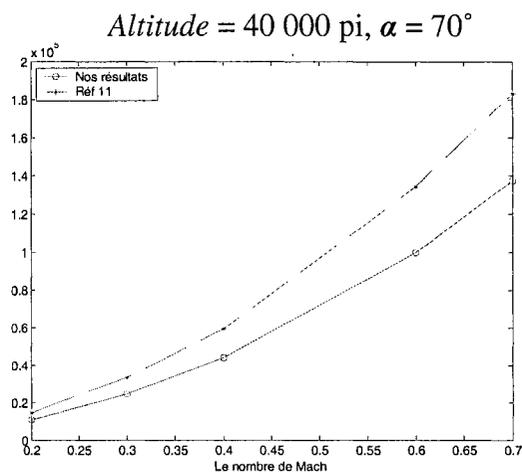


Figure 6.199 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

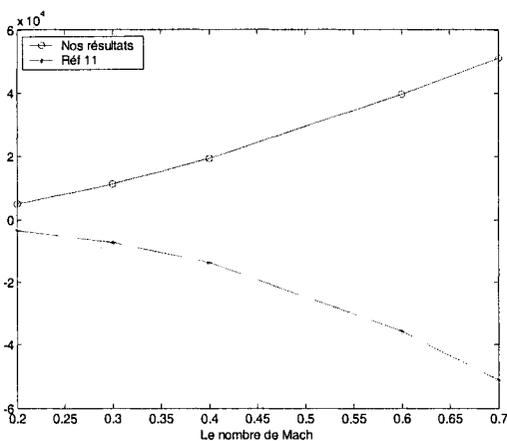


Figure 6.200 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

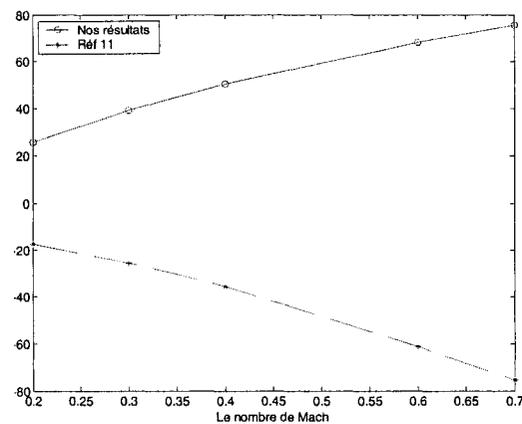


Figure 6.201 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

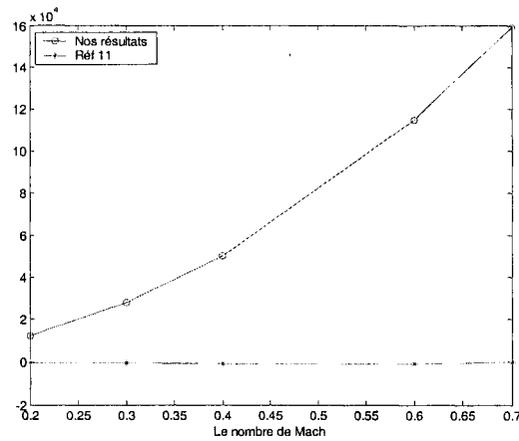


Figure 6.202 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

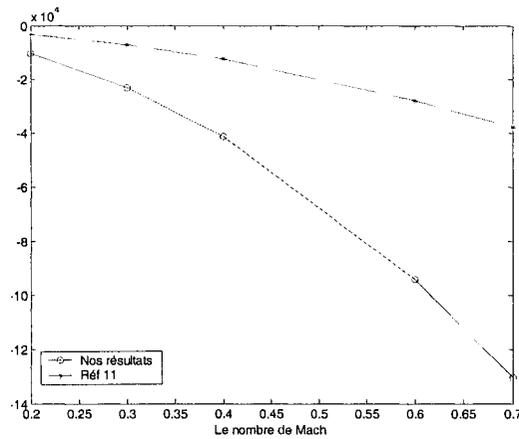


Figure 6.203 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs. $\pi/s^2$ ) avec le nombre de Mach

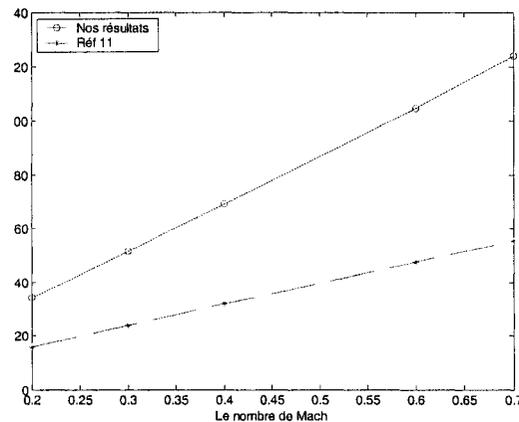


Figure 6.204 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

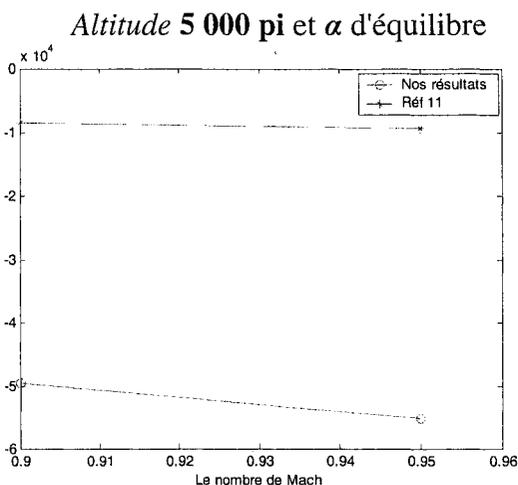


Figure 6.205 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

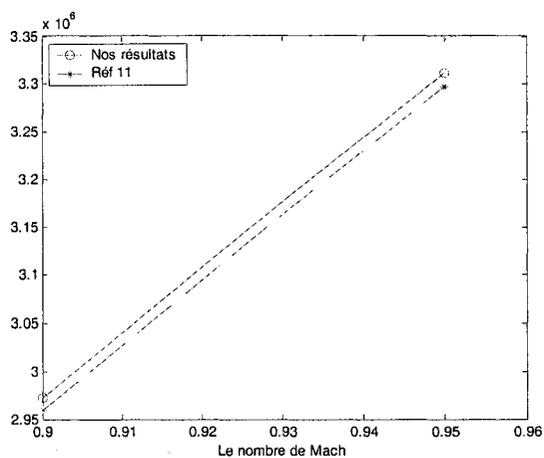


Figure 6.206 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

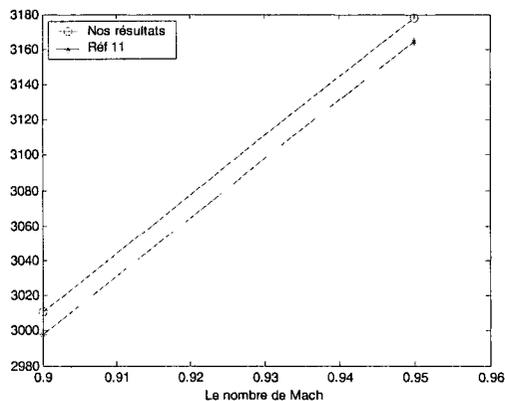


Figure 6.207 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

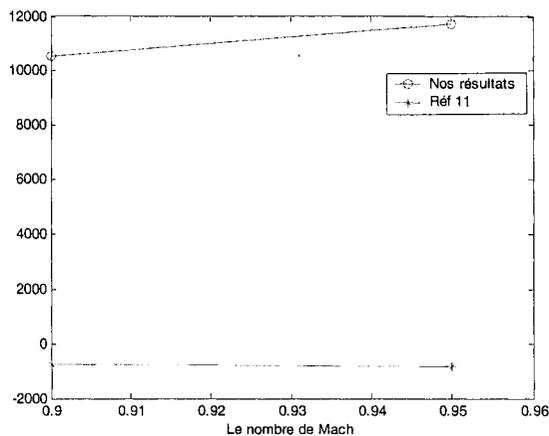


Figure 6.208 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

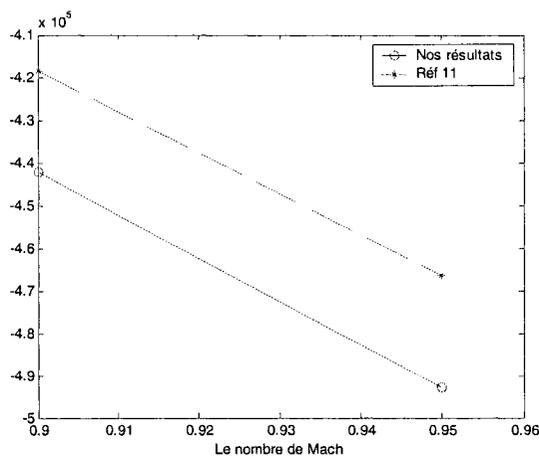


Figure 6.209 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

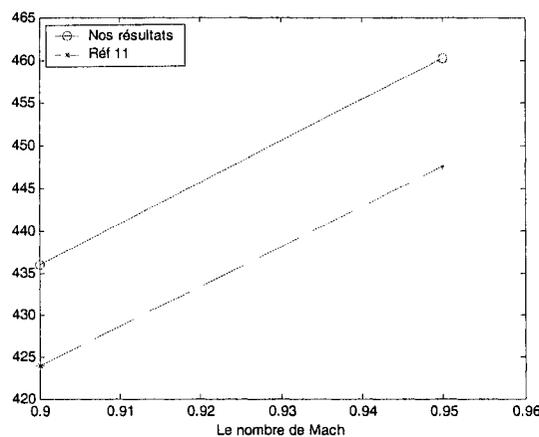


Figure 6.210 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

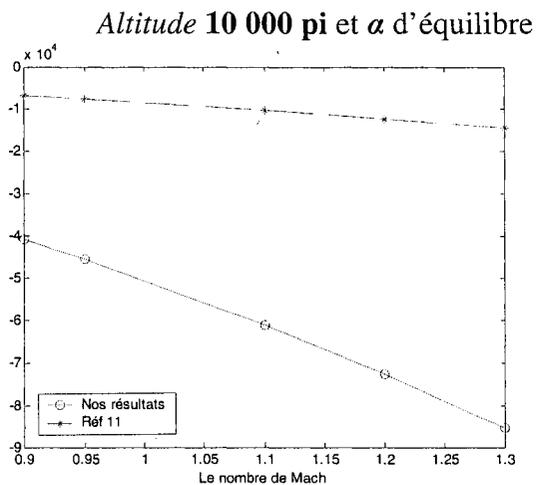


Figure 6.211 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

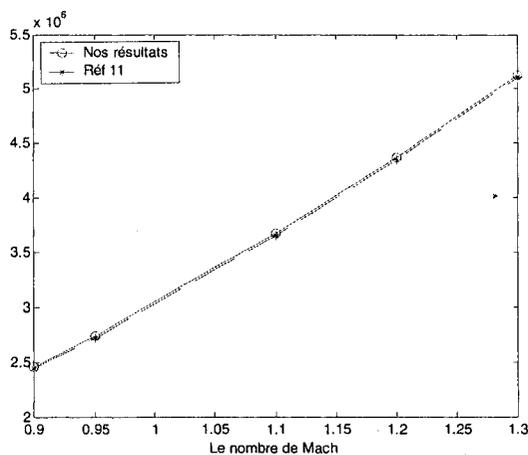


Figure 6.212 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

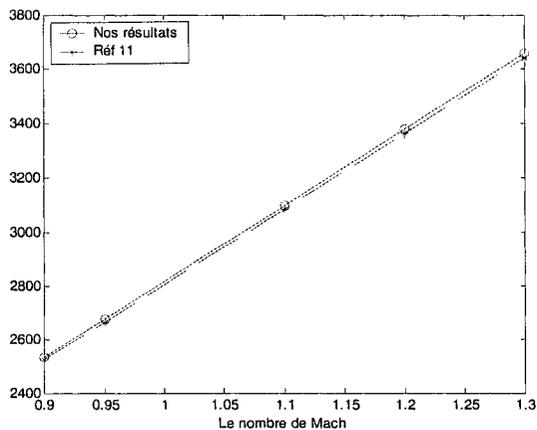


Figure 6.213 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

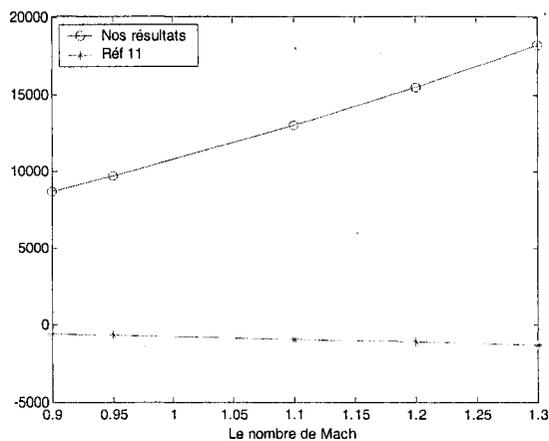


Figure 6.214 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

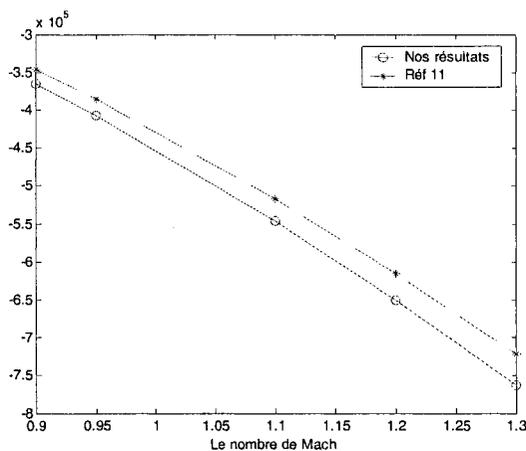


Figure 6.215 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

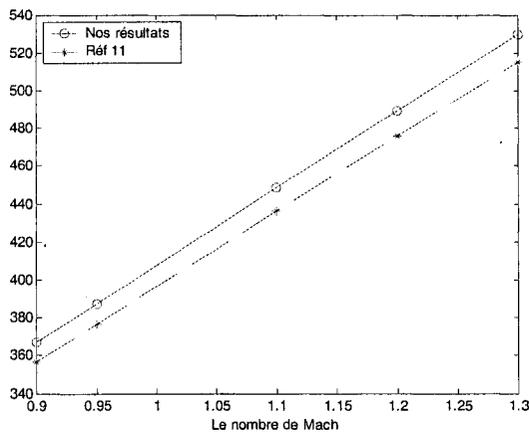


Figure 6.216 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

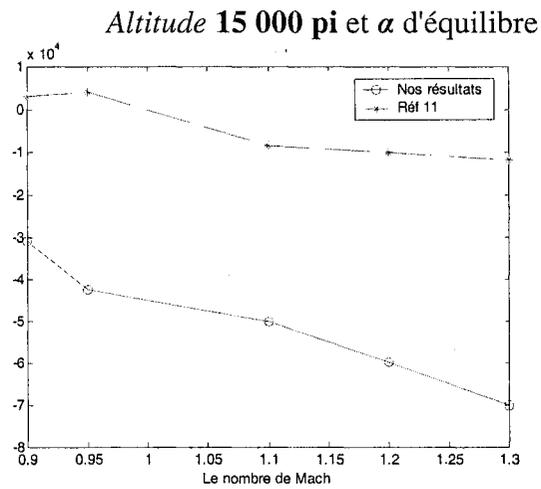


Figure 6.217 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

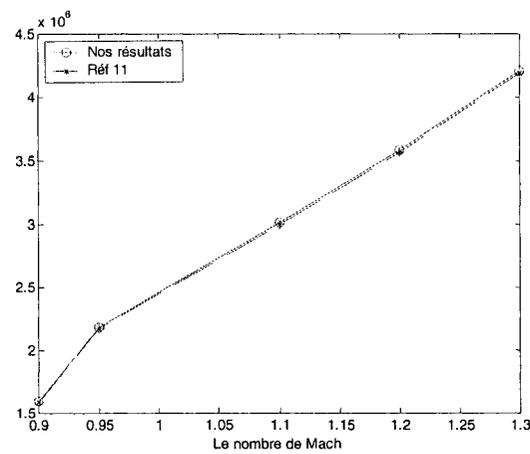


Figure 6.218 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

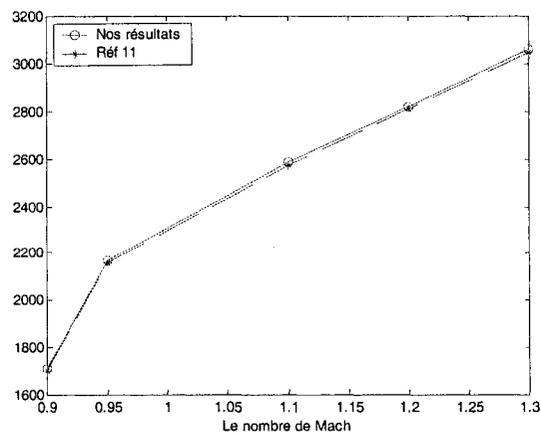


Figure 6.219 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

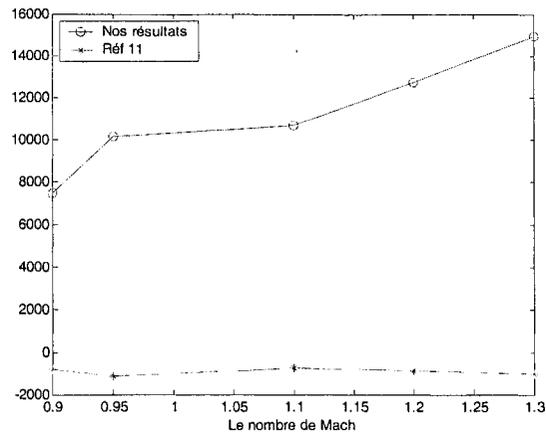


Figure 6.220 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

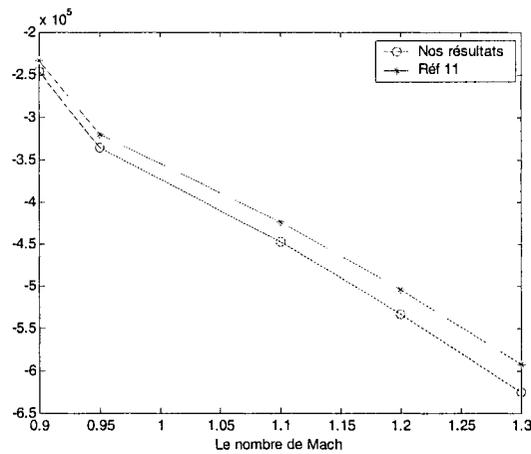


Figure 6.221 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

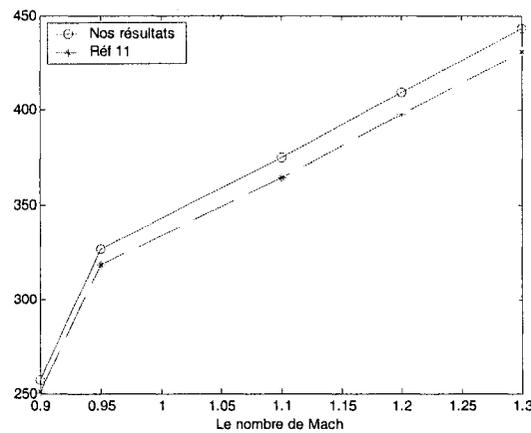


Figure 6.222 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

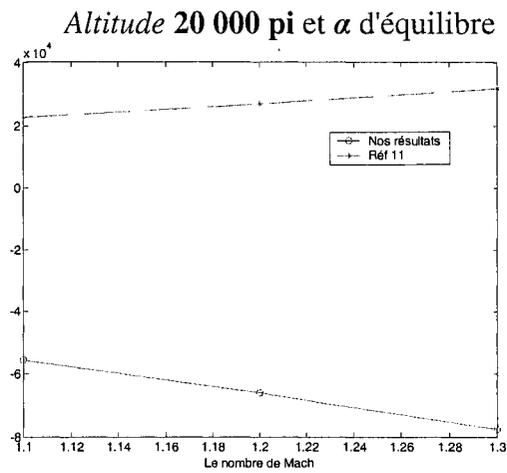


Figure 6.223 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

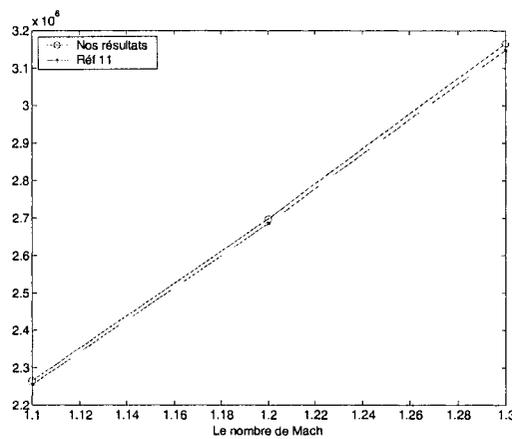


Figure 6.224 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs. $\pi$ /s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

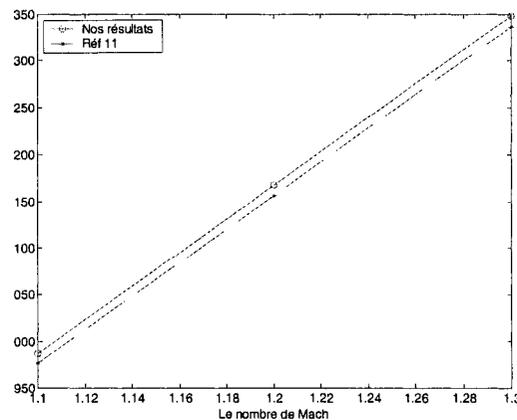


Figure 6.225 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

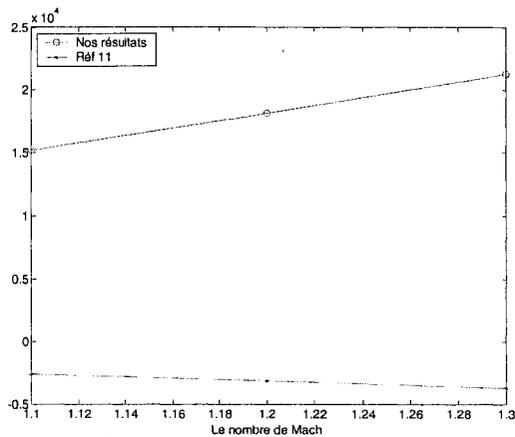


Figure 6.226 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

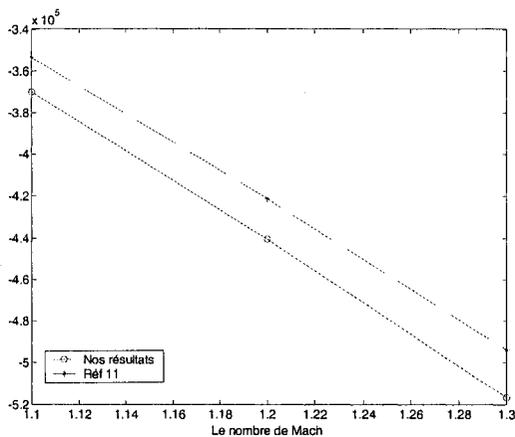


Figure 6.227 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

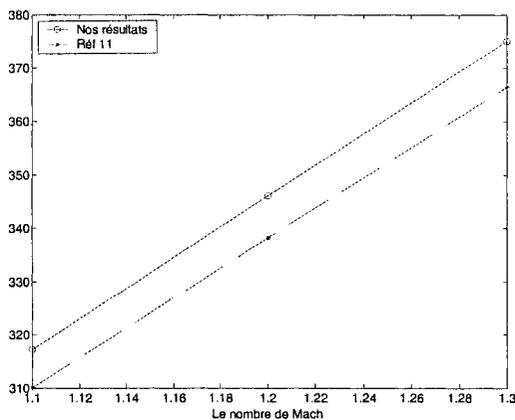


Figure 6.228 Variation du  $\partial F_y$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

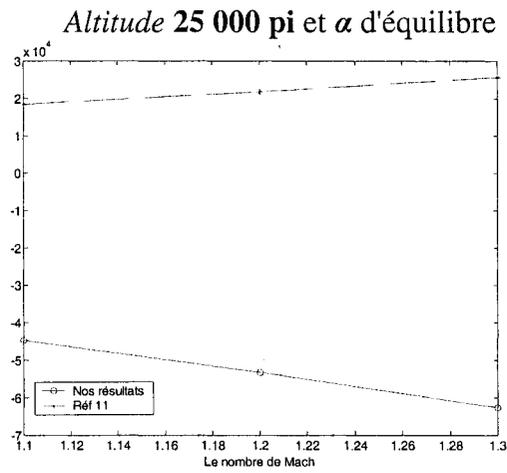


Figure 6.229 Variation du  $\partial F_x$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

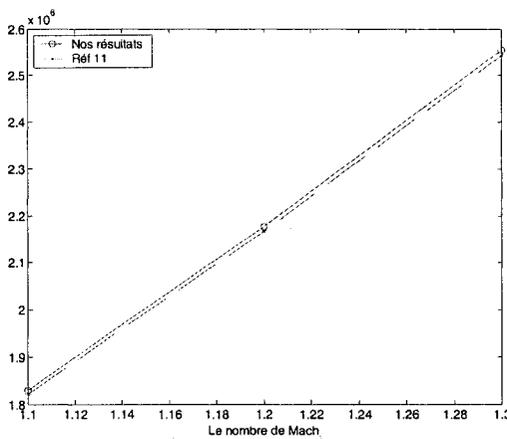


Figure 6.230 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à l'angle de tangage  $\theta$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

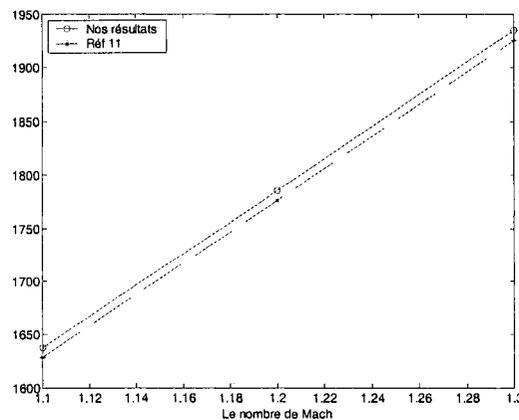


Figure 6.231 Variation du  $\partial F_z$  par rapport à la vitesse verticale  $\dot{z}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

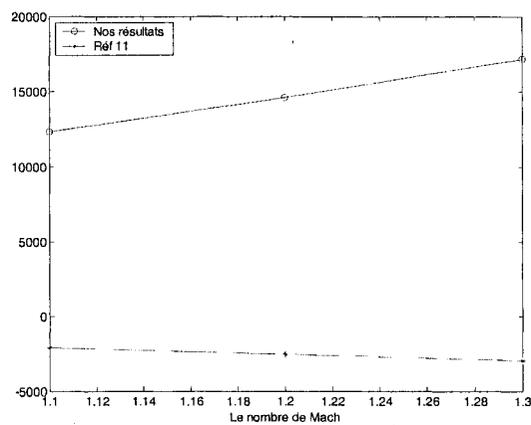


Figure 6.232 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Phi}$  par rapport à l'angle de roulis  $\Phi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

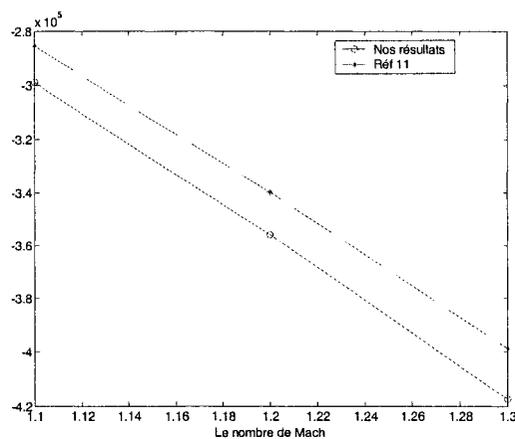


Figure 6.233 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \Psi}$  par rapport à l'angle de lacet  $\Psi$  (slugs.pi/s<sup>2</sup>) avec le nombre de Mach

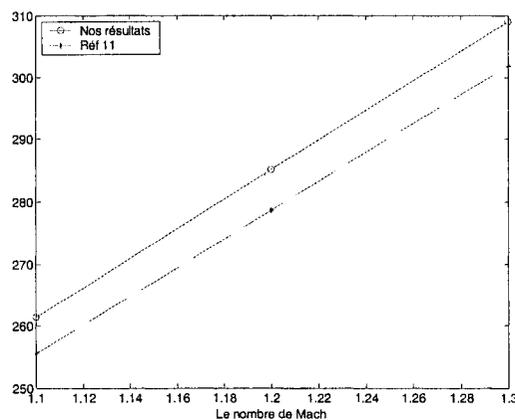


Figure 6.234 Variation du  $\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}$  par rapport à la vitesse latérale  $\dot{y}$  (slugs/s) avec le nombre de Mach

## CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté les équations de la stabilité statique et la stabilité dynamique de l'avion qui incluent les forces et moments aérodynamiques, ainsi que les forces gravitationnelles et les forces de propulsion. On a linéarisé ces équations par la théorie des petites perturbations autour de la position d'équilibre de l'avion. À partir de ces équations, on a présenté en détail les calculs des coefficients de stabilité pour le mouvement longitudinal et le mouvement latéral de l'avion.

Il a fallu réaliser ces calculs par rapport au système de coordonnées lié à l'avion  $a$  et par rapport au système de coordonnées lié à la terre  $T$  (système inertiel). Une transformation d'un système  $a$  au système  $T$  a été réalisé puisqu'on doit étudier, dans ce travail, les interactions aéro-servoélastiques pour l'avion F/A-18 SRA.

On a présenté ici la fusion des équations de la théorie de la dynamique de vol (*servo*) de l'avion rigide (en Matlab) avec les équations des modélisations *aéroélastiques* de l'avion flexible (en STARS).

On a présenté graphiquement les résultats obtenus par nos calculs versus les résultats obtenus par nos collaborateurs [11] pour les coefficients de stabilité. Parmi un total de 48 coefficients de stabilité calculés pour les deux mouvements longitudinal et latéral de l'avion et correspondants aux matrices de rigidité et d'amortissement, on a trouvé des différences entre nos résultats et ceux de nos collaborateurs uniquement pour un nombre très réduit de 6 coefficients de stabilité, ce qui est très bien.

Ce travail présente le calcul des dérivées de stabilité pour les études des interactions aéro-servoélastiques, pour lesquels on n'a pas assez trouvé des documents dans la littérature. On suggère, pour un travail futur, d'utiliser une méthode d'estimation des paramètres dans le but de trouver et valider les valeurs de nos coefficients de stabilité par rapport à ceux trouvés dans [11].

## **ANNEXE 1**

### **RÉSULTATS DES SIMULATIONS ET LA DIFFÉRENCE AVANT ET APRÈS LA MODIFICATION DU PROGRAMME**

Tableau XI

Résultats des simulations et la différence avant et après modification du programme

		Longitudinal			Latéral		
		rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
		$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)
$\alpha = 20,45^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 57,1867					
<i>Mach</i> = 0,2	vtrue = 222,518						
Nos résultats	1692,2889	92709,0643	416,6473	6271,4662	-17571,1639	91,3139	
Réf. 11	32887,4050	84322,7949	378,9592	-8195,6060	-23066,8273	103,6627	
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 40.7631					
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 215.48						
Nos résultats	-916,1589	69591,3887	322,9651	3350,2208	-19195,3510	90,2755	
Réf. 11	12829,2073	67449,5813	313,0254	-1798,6249	-19709,7741	91,4692	
$\alpha = 40^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 29.9063					
<i>Mach</i> = 0.1713	vtrue = 184.567						
Nos résultats	-1357,4892	21058,2485	114,0999	8512,9406	-12193,8892	66,4259	
Réf. 11	20230,4332	6053,1812	32,8012	-9063,5821	-12326,1806	66,7843	
$\alpha = 70^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 40.7631					
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 215.48						
Nos résultats	40250,2767	18018,7076	83,6213	46487,8335	-38050,8094	114,8493	
Réf. 11	54654,6682	-12882,6571	-59,7859	-515,7123	-11444,6480	53,1123	

Longitudinal			Latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 27.2619				
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 207.385					
Nos résultats	-640,3395	46373,2262	223,6121	2242,0415	-12845,9514	62,7519
Réf. 11	8659,5343	44917,9532	216,5949	-1221,5974	-13181,6739	63,5614

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 27.2619				
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 207.385					
Nos résultats	-838,9934	19926,1748	96,0856	7430,2173	-10643,0024	52,7504
Réf. 11	18468,9747	6743,3014	32,5184	-8003,0854	-11236,2647	54,1807

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 27.2619				
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 207.385					
Nos résultats	26767,8296	12441,3704	59,9695	31122,6137	-25474,2059	79,8714
Réf. 11	36498,7576	-8357,2783	-40,3205	-463,9406	-7654,0510	36,9074

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 17.6423				
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 198.968					
Nos résultats	-496,7144	30007,0650	150,8148	1460,4236	-8367,6110	42,4695
Réf. 11	5599,7729	29025,4827	145,8814	-804,1223	-8532,5220	42,8839

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 17.6423				
<i>Mach</i> = 0.2	vtrue = 198.968					
Nos résultats	-656,8630	12857,8949	64,6180	4861,1916	-6963,1441	35,7746
Réf. 11	11980,6694	4190,0918	21,0542	-5277,9573	-7272,8618	36,5529

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (matrice K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 17.6423				
Mach = 0.2	vtrue = 198.968					
Nos résultats	17268,9946	8225,2612	41,3247	20122,6313	-16470,5978	53,8374
Réf. 11	23582,3340	-5246,6108	-26,3840	-319,8494	-4953,2521	24,8947

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 11.0279				
Mach = 0.2	vtrue = 193.614					
Nos résultats	-284,2964	18789,2576	97,0457	904,3400	-5181,4867	27,1512
Réf. 11	3437,3464	18215,0701	94,0801	-487,1208	-5332,2102	27,5404

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 11.0279				
Mach = 0.2	vtrue = 193.614					
Nos résultats	-445,7060	7995,2720	41,2933	3056,5614	-4378,2017	23,0479
Réf. 11	7504,4836	2529,1831	13,0614	-3334,3301	-4546,5826	23,4827

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 11.0279				
Mach = 0.2	vtrue = 193.614					
Nos résultats	10852,2040	5003,5322	25,8428	12532,1494	-10257,7038	34,4859
Réf. 11	14748,5684	-3337,5303	-17,2381	-138,8506	-3096,1932	15,9916

$\alpha = 7.4934^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 128.67				
Mach = 0.3	vtrue = 333.777					
Nos résultats	-3759,4532	241126,2796	722,4294	7471,3587	-57127,0195	172,3134
Réf. 11	30013,7970	237096,4844	710,3561	-3426,6463	-57901,5000	173,4736

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 91.7169				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 323.22					
Nos résultats	-4054,2783	158492,5902	490,3670	7396,5213	-42378,9455	132,8823
Réf. 11	28055,1481	153459,7171	474,7960	-4278,4113	-43521,5034	134,6498

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 91.7169				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 323.22					
Nos résultats	-6937,3201	66740,9111	206,4907	24926,0240	-35703,8994	109,6738
Réf. 11	57483,8967	21511,2722	66,5562	-27821,5555	-35193,6089	108,8844

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 91.7169				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 323.22					
Nos résultats	92357,3610	36760,5272	113,7183	106228,9281	-86949,5606	174,1408
Réf. 11	124121,6383	-32710,6222	-101,2162	-563,2892	-25622,0332	79,2712

$\alpha = 13.2^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 75.3498				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 317.201					
Nos résultats	-5679,2075	123170,3485	388,3169	7217,5374	-31328,3659	102,0179
Réf. 11	28536,8353	116319,3639	366,7187	-6110,4776	-33392,0174	105,2708

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 61.3392				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 311.077					
Nos résultats	-2781,8057	106193,8540	341,3817	4950,2462	-28362,8213	92,4191
Réf. 11	18721,2642	102827,5096	330,5601	-2865,4567	-29136,1200	93,6621

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 17.8315^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 61.3392				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 311.077					
Nos résultats	-2714,6980	104101,5568	334,6594	5701,2343	-18319,0794	65,8446
Réf. 11	29004,5384	96393,6238	309,8812	-7678,1467	-22646,4326	72,8001

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 61.3392				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 311.077					
Nos résultats	-4715,4491	44739,4555	143,8233	16550,2917	-23706,5466	75,9790
Réf. 11	38432,0163	14545,6024	46,7610	-18637,7729	-23564,0671	75,7499

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 61.3392				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 311.077					
Nos résultats	61148,7403	26337,6561	84,6660	70330,4442	-57566,2517	120,1133
Réf. 11	82616,1108	-20091,4565	-64,5868	-609,8474	-17162,7082	55,1719

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 39.6952				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 298.452					
Nos résultats	-1840,5212	68757,5605	230,3853	3204,3416	-18359,5250	62,3676
Réf. 11	12094,3835	66579,6595	223,0880	-1857,3499	-18867,9225	63,2193

$\alpha = 30^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 42.4845				
<i>Mach</i> = 0.3104	vtrue = 308.76					
Nos résultats	6248,1133	77904,7685	252,3194	4696,8414	-8970,3063	35,4659
Réf. 11	34991,5965	64834,8539	209,9890	-11505,0601	-12930,5824	41,8791

		Longitudinal		latéral			
		rigidité (matrice K)	amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)	
		$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)
$\alpha = 40^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 39.6952					
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 298.452						
Nos résultats	-3041,8282	28974,3119	97,0835	10651,6622	-15257,3822	51,1295	
Réf. 11	24895,4948	9472,6952	31,7409	-12065,4120	-15262,0105	51,1372	
$\alpha = 50^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 41.7008					
<i>Mach</i> = 0.3075	vtrue = 305.899						
Nos résultats	22820,1251	31867,7732	104,1774	16266,7202	-18640,2883	47,3474	
Réf. 11	48432,4229	5360,0759	17,5224	-14486,6489	-10326,7861	33,7588	
$\alpha = 60^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 48.8763					
<i>Mach</i> = 0.3329	vtrue = 331.173						
Nos résultats	31671,8468	7055,7429	21,3053	34295,8414	-32750,1162	67,9883	
Réf. 11	56009,1161	-28664,4257	-86,5542	-12017,6071	-12281,6367	37,0853	
$\alpha = 70^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 39.6952					
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 298.452						
Nos résultats	39380,2467	17708,8209	59,3356	45293,0159	-37072,8379	80,7370	
Réf. 11	53341,5884	-12324,8850	-41,2960	-459,8693	-11119,4194	37,2570	
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 24.8128					
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 290.421						
Nos résultats	-1158,3223	42940,3184	147,8578	2003,7766	-11480,7945	40,0845	
Réf. 11	7557,4416	41579,7134	143,1729	-1161,6795	-11801,9602	40,6374	

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 24.8128				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 290.421					
Nos résultats	-1901,4122	18101,3163	62,3288	6642,5353	-9514,7309	32,8191
Réf. 11	15574,9376	5917,1397	20,3753	-7547,2313	-9547,9654	32,8763

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 24.8128				
<i>Mach</i> = 0.3	vtrue = 290.421					
Nos résultats	24524,8073	11370,4526	39,1516	28223,5127	-23101,2595	51,7520
Réf. 11	33280,0335	-7397,4530	-25,4715	-310,0908	-6958,5016	23,9600

$\alpha = 4.3136^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 228.747				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 445.036					
Nos résultats	-24597,8238	433971,9372	975,1467	7633,2352	-101388,8966	226,0958
Réf. 11	9446,4092	430640,7312	967,6614	-1997,1044	-99852,6404	224,3698

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 163.052				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 430.96					
Nos résultats	-11246,2119	284422,6304	659,9904	12877,1155	-73780,4373	173,7623
Réf. 11	48197,9819	275151,8198	638,4784	-8060,2192	-75988,7541	176,3244

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 163.052				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 430.96					
Nos résultats	-19631,0441	111189,4128	258,0082	45304,7085	-64894,2147	142,5073
Réf. 11	96522,6352	26619,5581	61,7722	-52853,4391	-57935,6366	134,4339

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 163.052				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 430.96					
Nos résultats	166102,2345	56420,4760	130,8996	194931,2101	-159553,3662	237,6889
Réf. 11	221864,5184	-68824,9828	-159,7200	-487,5489	-45315,4118	105,1499

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 109.048				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 414.77					
Nos résultats	-7627,8416	191199,7930	460,9871	8625,1763	-49418,6200	120,9319
Réf. 11	32107,4176	185004,9942	446,0515	-5384,6314	-50899,2445	122,7168

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 109.048				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 414.77					
Nos résultats	-13218,4703	77955,9825	187,9528	29208,3898	-41837,9365	97,2650
Réf. 11	63421,7726	22955,6609	55,3484	-34571,3000	-38847,2595	93,6598

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 109.048				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 414.77					
Nos résultats	109921,1693	42918,9383	103,4765	126391,6686	-103452,9883	161,3665
Réf. 11	147653,1295	-39702,3694	-95,7214	-712,1096	-30406,9443	73,3104

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 70.5691				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 397.936					
Nos résultats	-5020,7326	123983,2102	311,5719	5587,8886	-32016,2433	81,6717
Réf. 11	20725,6131	119973,5021	301,4956	-3488,8350	-32983,9973	82,8877

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 13.0878^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 70.5691				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 397.936					
Nos résultats	-5122,8385	115826,6319	291,0766	6325,3374	-27691,0662	72,3783
Réf. 11	27560,8167	109471,7433	275,1070	-5904,9767	-29912,8301	75,1700

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 70.5691				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 397.936					
Nos résultats	-8566,3573	51094,6200	128,4011	18640,3291	-26700,3046	65,1927
Réf. 11	40870,9669	15823,0547	39,7648	-22239,0457	-25184,7004	63,2883

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 70.5691				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 397.936					
Nos résultats	70647,6378	29840,4716	74,9881	81108,4677	-66388,1840	108,2004
Réf. 11	95285,2019	-23591,3459	-59,2843	-657,7190	-19725,4748	49,5695

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 44.1117				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 387.228					
Nos résultats	-3131,8980	77379,8100	199,8333	3497,5170	-20039,2963	52,5341
Réf. 11	12980,3063	74871,0717	193,3546	-2183,1958	-20646,0401	53,3175

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 44.1117				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 387.228					
Nos résultats	-5385,3159	31980,0861	82,5885	11617,4833	-16640,8190	41,8508
Réf. 11	25539,2796	9955,6436	25,7113	-13902,9365	-15770,8150	40,7275

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 44.1117				
<i>Mach</i> = 0.4	vtrue = 387.228					
Nos résultats	43928,6979	19602,5239	50,6227	50425,7445	-41274,0334	69,2517
Réf. 11	59419,4565	-13780,8577	-35,5885	-479,1694	-12358,3339	31,9149

$\alpha = 2.8853^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 357.417				
<i>Mach</i> = 0.5	vtrue = 556.296					
Nos résultats	-41012,1175	714385,3786	1284,1886	8286,6154	-164551,2987	291,2652
Réf. 11	-6909,9607	710146,4129	1276,5686	-1312,8309	-159508,0588	286,7323

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 254.769				
<i>Mach</i> = 0.5	vtrue = 538.7					
Nos résultats	-24369,4226	451139,6543	837,4764	19654,2195	-112610,3829	212,6992
Réf. 11	71007,3269	436463,9408	810,2336	-13096,0146	-116551,7221	216,3574

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 209.305				
<i>Mach</i> = 0.5	vtrue = 528.668					
Nos résultats	-20184,7166	385758,8864	729,6923	16910,9641	-96892,6872	182,3415
Réf. 11	42142,4612	374386,1736	708,1803	-7956,7554	-95903,5510	181,4060

$\alpha = 5.4502^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 170.387				
<i>Mach</i> = 0.5	vtrue = 518.462					
Nos résultats	-14145,6742	337094,1304	650,1860	7326,5966	-77021,4475	148,1503
Réf. 11	19757,1814	333658,0175	643,5585	-2531,8639	-76599,1797	147,7431

Longitudinal			latéral			
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)	
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)	
$\alpha = 2.1091^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 514.681				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 667.555					
Nos résultats	-49653,3770	1073162,8422	1607,6067	9099,1431	-247183,6723	363,5183
Réf. 11	-15543,4084	1067391,9712	1598,9619	-932,9170	-238153,1923	356,7544
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 366.868				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 646.44					
Nos résultats	-43138,5375	659750,8323	1020,6075	27674,4558	-158562,9518	250,2786
Réf. 11	98099,9194	638327,2086	987,4666	-19624,0489	-165017,2264	255,2708
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 301.399				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 634.401					
Nos résultats	-35198,8179	543726,5205	857,0812	22804,1014	-130657,8764	210,0441
Réf. 11	81210,8795	526003,5360	829,1447	-16179,2022	-135846,5573	214,1336
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 245.357				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 622.155					
Nos résultats	-28936,8978	445064,6836	715,3686	18605,4215	-106601,2128	174,7268
Réf. 11	65723,3049	430649,2728	692,1984	-13145,7640	-110813,0355	178,1116
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 158.781				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 596.905					
Nos résultats	-18823,3032	289091,6714	484,3236	12078,5425	-69204,9508	118,2151
Réf. 11	42633,6450	279723,6559	468,6293	-8535,4085	-71921,4418	120,4906

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 158.781				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 596.905					
Nos résultats	-32184,0081	103777,9033	173,8451	42117,6970	-60329,1570	90,7074
Réf. 11	81256,1247	18396,2786	30,8046	-55821,9013	-47958,2132	80,3448

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 158.781				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 596.905					
Nos résultats	160574,0710	55206,4745	92,4619	188684,2078	-154440,1252	166,3797
Réf. 11	215365,5199	-66861,1827	-112,0391	-987,8707	-44185,5767	74,0245

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 99.2514				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 580.842					
Nos résultats	-11579,5559	180215,9946	310,2706	7574,5765	-43399,1264	76,1679
Réf. 11	26889,3340	174344,3214	300,1617	-5340,7520	-45083,9559	77,6183

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 99.2514				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 580.842					
Nos résultats	-20837,5724	70177,2870	120,8104	25289,6623	-36224,7728	57,1013
Réf. 11	48307,7019	18846,8449	32,4379	-33597,7930	-30108,9047	51,8367

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 99.2514				
<i>Mach</i> = 0.6	vtrue = 580.842					
Nos résultats	99947,1994	39741,5325	68,4122	114887,4886	-94036,6888	104,8335
Réf. 11	134404,1491	-35500,5568	-61,1275	-681,6457	-27746,7214	47,7698

Longitudinal			latéral			
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)	
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)	
$\alpha = 1.6311^\circ$	altitude = 1 000	qbar = 700.538				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 778.814					
Nos résultats	-51376,7974	1551255,0058	1991,8222	9357,6921	-328714,4419	413,3313
Réf. 11	-17297,0248	1543478,6137	1981,8373	-714,8084	-315101,9924	404,5921
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 499.347				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 754.181					
Nos résultats	-15586,4791	834077,2639	1105,9478	39745,1994	-227723,2179	306,0256
Réf. 11	176159,1736	803686,8057	1065,6519	-26341,7153	-233874,1609	310,1035
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 333.958				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 725.847					
Nos résultats	-11246,9210	565069,2046	778,5033	26747,4238	-153251,4498	213,8643
Réf. 11	117953,8150	544500,7314	750,1661	-17760,7680	-157214,0681	216,5939
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 216.118				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 696.389					
Nos résultats	-7245,2753	365952,5898	525,5050	17375,4884	-99554,2153	144,7814
Réf. 11	76790,1343	352555,6079	506,2672	-11556,9804	-102094,1432	146,6050
$\alpha = 5.1^\circ$	altitude = 35 000	qbar = 171.435				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 681.054					
Nos résultats	-14714,8015	367230,6588	539,2120	6999,1830	-78632,0871	114,9140
Réf. 11	19133,2564	363848,3423	534,2457	-2395,7207	-77893,2066	114,3716

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 135.092				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 677.649					
Nos résultats	-4556,4335	229554,3252	338,7541	10900,9928	-62458,0879	93,3353
Réf. 11	48012,2947	221169,8132	326,3812	-7224,2341	-64039,0117	94,5017

$\alpha = 40^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 135.092				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 677.649					
Nos résultats	-17141,8088	100858,5422	148,8171	33316,7281	-47722,6976	64,5489
Réf. 11	76421,2893	31557,9673	46,5509	-45940,6878	-39760,2774	58,6739

$\alpha = 70^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 135.092				
<i>Mach</i> = 0.7	vtrue = 677.649					
Nos résultats	137142,9497	51280,6690	75,6549	159304,9277	-130392,8573	124,0475
Réf. 11	183069,3664	-51161,2157	-75,5176	204,8035	-37728,4938	55,6756

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 652				
<i>Mach</i> = 0.8	vtrue = 861.9					
Nos résultats	-20351,3476	1089059,0632	1263,5677	51895,5155	-297339,4014	349,6404
Réf. 11	230011,9580	1049378,0824	1217,5287	-34394,5160	-305370,7200	354,2995

$\alpha = 10^\circ$	altitude = 30 000	qbar = 281.5				
<i>Mach</i> = 0.8	vtrue = 795.7					
Nos résultats	-9437,1825	476663,9245	599,0552	22632,0806	-129672,2699	165,0452
Réf. 11	100021,3901	459213,9647	577,1248	-15053,3041	-132980,6000	167,1240

Longitudinal			latéral			
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)	
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)	
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 40 000	qbar = 175.5				
<i>Mach</i> = 0.8	vtrue = 774.5					
Nos résultats	-5919,3296	298217,3931	385,0485	14161,6397	-81140,2187	106,0905
Réf. 11	62373,4768	287324,9505	370,9847	-9385,1085	-83194,0200	107,4164
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 5 000	qbar = 890.5				
<i>Mach</i> = 0.85	vtrue = 932.5					
Nos résultats	-27795,8206	1487434,1960	1595,1182	70878,7677	-406105,4248	441,3834
Réf. 11	314149,7678	1433238,0098	1536,9990	-46975,9456	-417074,5800	447,2650
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 736				
<i>Mach</i> = 0.85	vtrue = 915.8					
Nos résultats	-22973,3003	1229367,2861	1342,4093	58581,4408	-335646,9317	371,4566
Réf. 11	259645,4005	1184574,0317	1293,4977	-38825,7113	-344712,9600	376,4064
$\alpha = 10^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 604				
<i>Mach</i> = 0.85	vtrue = 898.7					
Nos résultats	-18853,0889	1008882,9359	1122,6128	48074,9868	-275449,3841	310,6369
Réf. 11	213078,5623	972123,2543	1081,7096	-31862,4044	-282889,4400	314,7763
$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 5 000	qbar = 998.452				
<i>Mach</i> = 0.9	vtrue = 987.461					
Nos résultats	-49564,5386	2972852,4134	3010,6072	10546,0177	-442360,4860	435,9623
Réf. 11	-8469,4525	2960007,9274	2997,5996	-741,7867	-418630,9546	423,9468

Longitudinal			latéral			
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)	
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)	
$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 825.452				
<i>Mach</i> = 0.9	vtrue = 969.661					
Nos résultats	-40976,5793	2457751,5697	2534,6544	8718,7280	-365713,4723	367,0401
Réf. 11	-7001,9655	2447132,6250	2523,7032	-613,2586	-346095,5146	356,9242
$\alpha = 1.7281^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 552.053				
<i>Mach</i> = 0.9	vtrue = 933.232					
Nos résultats	-31008,5980	1594601,0950	1708,6910	7430,1853	-246356,1786	257,4349
Réf. 11	2977,9929	1587466,3179	1701,0458	-812,0655	-234136,7184	250,8880
$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 5 000	qbar = 1112.42				
<i>Mach</i> = 0.95	vtrue = 1042.21					
Nos résultats	-55222,0678	3312187,7483	3178,0477	11749,7897	-492853,5892	460,2091
Réf. 11	-9436,1955	3297877,1325	3164,3167	-826,4577	-466415,4576	447,5254
$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 919.452				
<i>Mach</i> = 0.95	vtrue = 1023.51					
Nos résultats	-45642,8694	2737632,9530	2674,7539	9711,5906	-407359,8266	387,3278
Réf. 11	-7799,3284	2725804,7547	2663,1974	-683,0947	-385507,8346	376,6527
$\alpha = 1.7281^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 754.553				
<i>Mach</i> = 0.95	vtrue = 1004.42					
Nos résultats	-42382,9427	2179520,8794	2169,9353	10155,6709	-336722,7306	326,9269
Réf. 11	4070,3582	2169768,9761	2160,2263	-1109,9414	-320021,0184	318,6128

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 1232.7				
<i>Mach</i> = 1.1	vtrue = 1185.1					
Nos résultats	-61192,9335	3670316,8204	3097,0574	13020,2314	-546143,2007	448,4810
Réf. 11	-10456,4807	3654458,8745	3083,6763	-915,8181	-516846,4560	436,1205

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 1011.5				
<i>Mach</i> = 1.1	vtrue = 1163.9					
Nos résultats	-50212,2594	3011702,3313	2587,5996	10683,8355	-448141,3544	374,7071
Réf. 11	-8580,1332	2998689,9907	2576,4197	-751,4805	-424101,7200	364,3799

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 823.7				
<i>Mach</i> = 1.1	vtrue = 1140.5					
Nos résultats	-55521,6755	2265861,0200	1986,7332	15220,0364	-370096,6137	317,2707
Réf. 11	22800,9921	2254390,7010	1976,6759	-2622,9668	-353597,9360	310,0376

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 25 000	qbar = 665.2				
<i>Mach</i> = 1.1	vtrue = 1117.6					
Nos résultats	-44837,9490	1829854,0130	1637,3127	12291,3296	-298880,9851	261,4701
Réf. 11	18413,5243	1820590,8635	1629,0242	-2118,2439	-285557,0560	255,5092

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 1467				
<i>Mach</i> = 1.2	vtrue = 1292.9					
Nos résultats	-72823,9096	4367936,0554	3378,4075	15494,9942	-649948,9539	489,2230
Réf. 11	-12443,9500	4349063,9806	3363,8108	-1089,8882	-615083,7600	475,7396

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 1203.8				
<i>Mach</i> = 1.2	vtrue = 1 268.8					
Nos résultats	-59758,2975	3584268,1823	2824,9322	12714,9789	-533339,1620	409,0749
Réf. 11	-10211,3340	3568782,0176	2812,7268	-894,3472	-504729,2640	397,8005

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 980.3				
<i>Mach</i> = 1.2	vtrue = 1 244.2					
Nos résultats	-66077,3322	2696641,4446	2167,3776	18113,6356	-440458,5534	346,1187
Réf. 11	27135,8657	2682990,4142	2156,4058	-3121,6394	-420823,1840	338,2279

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 25 000	qbar = 791.6				
<i>Mach</i> = 1.2	vtrue = 1 219.2					
Nos résultats	-53357,9681	2177559,2855	1786,0623	14626,9039	-355673,7640	285,2247
Réf. 11	21912,4261	2166535,9705	1777,0209	-2520,7485	-339818,0480	278,7222

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 10 000	qbar = 1721.7				
<i>Mach</i> = 1.3	vtrue = 1 400.6					
Nos résultats	-85467,5700	5126295,5055	3660,0769	18185,2294	-762792,8520	530,0111
Réf. 11	-14604,4640	5104146,8680	3644,2633	-1279,1142	-721874,3760	515,4037

$\alpha = 1.366^\circ$	altitude = 15 000	qbar = 1412.8				
<i>Mach</i> = 1.3	vtrue = 1374.5					
Nos résultats	-70133,3466	4206557,6408	3060,4325	14922,5139	-625935,8433	443,1774
Réf. 11	-11984,1940	4188382,8165	3047,2096	-1049,6210	-592358,7840	430,9631

Longitudinal			latéral		
rigidité (matrice K)		amortissement (C)	rigidité (K)		amortissement (C)
$\partial F_x / \partial \theta$ (1,3)	$\partial F_z / \partial \theta$ (3,3)	$\partial F_x / \partial \dot{Z}$ (3,3)	$\partial F_y / \partial \Phi$ (2,4)	$\partial F_y / \partial \Psi$ (2,6)	$\partial F_y / \partial \dot{Y}$ (2,2)

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 20 000	qbar = 1150,5				
<i>Mach</i> = 1.3	vtrue = 1347,9					
Nos résultats	-77549,6998	3164833,1960	2347,9818	21258,5308	-516931,1086	374,9602
Réf. 11	31847,2034	3148812,0693	2336,0958	-3663,6194	-493886,6400	366,4119

$\alpha = 2.3563^\circ$	altitude = 25 000	qbar = 929				
<i>Mach</i> = 1.3	vtrue = 1320,8					
Nos résultats	-62619,4447	2555523,7193	1934,8372	17165,7324	-417408,9525	308,9832
Réf. 11	25715,8209	2542587,0599	1925,0426	-2958,2811	-398801,1200	301,9391

## LISTE DES RÉFÉRENCES

1. Adams, W.M., Jr., Tiffany, S.H., 1993, *ISAC: A tool for aeroservoelastic modeling and analysis*, NASA TM 109031.
2. Noll, T., Blair, M., Cerra, J., 1986, *ADAM, An Aeroservoelastic Analysis Method For Analog or Digital Systems*, *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11, pp. 852-858.
3. Pitt, D.M., Goodman, C.E., 1992, *FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool*, AIAA-92-2395-CP.
4. Neill, D.J., Herendeen, D.L., Hoesly, R.L., 1995, *ASTROS Enhancements. Volume 2: ASTROS Programmer's Manual*, Universal Analytics INC Torrance CA.
5. Nam, C., Chen, P.C., Liu, D.D., Chattopadhyay, 2000, *ASTROS\* with smart structures and ASE modules: application to flutter suppression and gust-load alleviation*, AIAA 2000-1365, pp. 257-266.
6. Luo, X., Grandhi, R.V., 1997, *ASTROS for reliability-based multidisciplinary structural analysis and optimization*, *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 4, pp. 737-745.
7. P. C. Chen, Sulaeman, E., Liu, D.D., Denegri, C.M. Jr., 2002, *Influence of external store aerodynamics on flutter / LCO of a fighter aircraft*, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, USA," AIAA, pp. 1-11, 22-25.
8. Gupta, K.K., 1997, *STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program*, NASA TM-4795, pp.1-285.
9. Rodden, W.P., Harder, R.L., Bellinger, E.D., 1979, *Aeroelastic Addition to NASTRAN*, NASA CR-3094.
10. Nelson, R. C., *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill Inc., USA, 1989.
11. Lind, R., Brenner, M., *Robust Aeroservoelastic Stability Analysis*, Springer-Verlag London Ltd. 1999.
12. Waszak, M. R., Schmidt, D.K., *Flight Dynamics of Aeroelastic Vehicles*, AIAA Paper 86-2077.