

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M.Eng.

PAR  
CHAFIK ZAIET

COMMANDE NON LINÉAIRE D'UNE TURBINE À GAZ

MONTREAL, LE 15 SEPTEMBRE 2005

(c) droits réservés de Chafik Zaiet

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ouassima Akhrif, directeur de mémoire  
Département de génie électrique, École de technologie supérieure

M. Lahcen Saydy, codirecteur de mémoire  
Département de génie électrique, École polytechnique de Montréal

M. Maarouf Saad, président du jury  
Département de génie électrique, École de technologie supérieure

M. Pascal Bigras, professeur  
Département de génie de la production automatisée, École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 15 SEPTEMBRE 2005  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# COMMANDE NON LINÉAIRE D'UNE TURBINE À GAZ

ZAIET CHAFIK

## SOMMAIRE

La plage de fonctionnement utile dans un compresseur axial qui fait partie d'une turbine à gaz, est limitée par les instabilités aérodynamiques qui sont le pompage et le décrochage tournant. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour expliquer le fonctionnement d'une turbine à gaz. Ces modèles donnent une bonne compréhension des non linéarités, offrant ainsi un moyen efficace pour développer des stratégies de contrôle afin d'augmenter le domaine de fonctionnement et améliorer les performances d'une turbine à gaz.

Ce mémoire contient de nouveaux éléments dans le domaine de la modélisation des turbines à gaz. Une vanne couplée (CCV) est ajoutée au modèle de compression de Gravdahl-Egeland, qui est une extension du modèle de Moore-Greitzer avec une vitesse variable du compresseur.

L'objectif principal du nouveau modèle est de donner une grande flexibilité dans la conception de stratégies pour le contrôle de la vitesse du compresseur et des non linéarités suscitées, vu le rôle que la CCV peut jouer dans le contrôle de la pression dans le système de compression.

Le modèle développé est fortement non linéaire, il inclut la vitesse dans le dénominateur. Ceci limite la marge de manœuvrabilité du contrôleur qui peut être développé.

Nous avons utilisé plusieurs stratégies de commande puisées dans la littérature, comme la linéarisation Jacobienne (linéarisation autour d'un point d'équilibre), la méthode back stepping, la commande basée sur le mode de glissement et l'approche de la géométrie différentielle.

Seule la dernière approche (géométrie différentielle) et plus précisément la linéarisation exacte par retour dynamique nous a donné un résultat encourageant pour le reste du travail, vu que la dynamique interne instable est de dimension un.

# NON LINEAR CONTROL OF A GAS TURBINE

ZAIET CHAFIK

## ABSTRACT

The useful range of operation in an axial flow compressor which is a part of a gas turbine, is limited by aerodynamic flow instabilities: surge and rotating stall. Several mathematical models have been developed to describe the operation of a gas turbine. These models give a deep understanding of the non linearities and provide tools to build control strategies in order to extend the stable operating range and to improve the gas turbine performance.

This thesis contains new results in the field of modeling of gas turbines. A close coupled valve is included in the model of Gravdahl-Egeland axial compression system, which is an extension of the Moore-Greitzer model with a variable compressor speed.

The main purpose of the new model is to give more flexibility in the design of strategies to control the speed of the compressor and the aerodynamic instabilities. Indeed the role of the close coupled valve in the control of the pressure inside the compression system (turbine) is very important.

The model developed is highly non linear; moreover, it includes the speed which is a state, in the denominator. This restricts somehow the domain of operation of the controller that can be computed.

We have used several control strategies found in the literature, such as the Jacobian linearization (linearization around an equilibrium point), the backstepping approach, the sliding mode and the differential geometry approach.

Only the latter approach (differential geometry) and more precisely the dynamic feedback linearization gave us a promising result for the rest of the work, knowing that the unstable internal dynamics is of dimension one.

## **REMERCIEMENTS**

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans le cadre du programme de maîtrise en Génie de la production automatisée.

Je tiens à remercier mon directeur de mémoire Mme Ouassima Akhrif, professeure à l'École de technologie supérieure ainsi que M. Lahcen Saydy, professeur à l'École Polytechnique de Montréal, pour leur aide, et pour m'avoir offert la possibilité de travailler avec eux.

Mes remerciements vont également au président de jury, M. Marouf Saad, professeur au département de génie électrique de l'École de technologie supérieure ainsi que M. Pascal Bigras, professeur au département de génie de la production automatisée pour avoir accepté de prendre part dans le jury.

Je désire remercier toute ma famille et plus particulièrement ma femme Nadia et ma petite fille Sarah.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                          | Page |
|--------------------------------------------------------------------------|------|
| SOMMAIRE.....                                                            | i    |
| ABSTRACT.....                                                            | ii   |
| REMERCIEMENTS.....                                                       | iii  |
| TABLE DES MATIÈRES .....                                                 | iv   |
| LISTE DES FIGURES .....                                                  | vi   |
| LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES .....                                   | viii |
| INTRODUCTION .....                                                       | 1    |
| CHAPITRE 1    RAPPELS SUR LES COMPRESSEURS ET<br>LES TURBINES À GAZ..... | 4    |
| 1.1        Compresseurs.....                                             | 5    |
| 1.1.1      Compresseurs volumétriques .....                              | 5    |
| 1.1.2      Turbocompresseurs .....                                       | 7    |
| 1.1.3      La courbe caractéristique d'un compresseur.....               | 10   |
| 1.2        Aubes directrices.....                                        | 11   |
| 1.3        La chambre de combustion .....                                | 11   |
| 1.4        La turbine .....                                              | 12   |
| 1.5        Catégories de turbines à gaz .....                            | 12   |
| 1.6        Utilisation des Turbines à gaz.....                           | 14   |
| CHAPITRE 2    MODÉLISATION MATHÉMATIQUE.....                             | 17   |
| 2.1        Non linéarités dans un système de combustion .....            | 17   |
| 2.1.1      Pompage (surge) .....                                         | 18   |
| 2.1.1.1    Pompage classique .....                                       | 18   |
| 2.1.1.2    Pompage profond .....                                         | 18   |
| 2.1.2      Décrochage tournant (rotating stall) .....                    | 19   |
| 2.2        Modélisation d'un Système de compression.....                 | 21   |
| 2.2.1      Modèle de Greitzer .....                                      | 21   |
| 2.2.1.1    Hypothèses .....                                              | 23   |
| 2.2.2      Modèle de Moore-Greitzer .....                                | 23   |
| 2.2.2.1    Hypothèses .....                                              | 28   |
| 2.2.3      Modèle de Moore-Greitzer avec une vanne couplée (CCV) .....   | 28   |
| 2.2.3.1    La vanne couplée(CCV) .....                                   | 29   |
| 2.2.4      Modèle de Gravdahl-Egeland .....                              | 31   |

|               |                                                                            |     |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2.4.1       | Dynamique du Spool.....                                                    | 31  |
| 2.2.5         | Autres modèles.....                                                        | 34  |
| 2.2.6         | Modèle de Gravdahl-Egeland avec CCV.....                                   | 35  |
| 2.2.6.1       | Développement du modèle .....                                              | 36  |
| CHAPITRE 3    | COMMANDE DE LA TURBINE À GAZ.....                                          | 50  |
| 3.1           | Introduction.....                                                          | 50  |
| 3.2           | Commande du modèle de Moore-Greitzer .....                                 | 52  |
| 3.2.1         | Caractéristiques du modèle .....                                           | 52  |
| 3.2.2         | Simulation du modèle en boucle ouverte.....                                | 55  |
| 3.2.3         | Points d'équilibres .....                                                  | 57  |
| 3.2.4         | Linéarisation du modèle non linéaire.....                                  | 58  |
| 3.2.5         | L'approche de la géométrie différentielle.....                             | 61  |
| 3.2.5.1       | Linéarisation au sens entrée-sortie.....                                   | 61  |
| 3.2.5.2       | Étude de la dynamique interne/dynamique du zéro .....                      | 62  |
| 3.2.5.3       | Résultats de la simulation .....                                           | 64  |
| 3.2.6         | Commande par la méthode de backstepping .....                              | 66  |
| 3.3           | Commande non linéaire du modèle de Moore-Greitzer<br>incluant une CCV..... | 71  |
| 3.3.1         | Caractéristiques du modèle et points d'équilibres .....                    | 71  |
| 3.3.2         | Contrôle du pompage.....                                                   | 75  |
| 3.3.3         | Contrôle du décrochage tournant .....                                      | 79  |
| 3.4           | Commande du modèle de Gravdahl – Egeland.....                              | 82  |
| 3.4.1         | Simulations .....                                                          | 82  |
| 3.4.2         | Nécessité d'un modèle multi- mode .....                                    | 91  |
| 3.5           | Commande du modèle de Gravdahl-Egeland avec CCV.....                       | 93  |
| 3.5.1         | Étude des points d'équilibre.....                                          | 93  |
| 3.5.2         | Linéarisation du modèle.....                                               | 95  |
| 3.5.3         | Commande non linéaire, non interactive .....                               | 99  |
| 3.5.3.1       | Commande du modèle .....                                                   | 99  |
| 3.5.3.2       | Simulation du système .....                                                | 107 |
| 3.5.3.3       | Dynamique du zéro .....                                                    | 109 |
| 3.5.4         | Conclusion .....                                                           | 110 |
| CONCLUSION    | .....                                                                      | 111 |
| TABLEAU I     | Présentation des modèles de systèmes de compression.....                   | 33  |
| BIBLIOGRAPHIE | .....                                                                      | 112 |

## LISTE DES FIGURES

|           | Page                                                                            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------|
| Figure 1  | Moteur d'une turbosoufflante (Williams F107) [1] ..... 4                        |
| Figure 2  | Fonctionnement d'un compresseur à piston durant la phase d'aspiration ..... 6   |
| Figure 3  | Fonctionnement d'un compresseur à piston durant la phase de refoulement ..... 6 |
| Figure 4  | Allure des aubes d'un compresseur axial ..... 8                                 |
| Figure 5  | Éléments constitutifs et ensemble du compresseur axial [2] ..... 8              |
| Figure 6  | Étage d'un compresseur centrifuge [1] ..... 9                                   |
| Figure 7  | Courbe caractéristique d'un compresseur ..... 10                                |
| Figure 8  | Chambre de combustion d'une turbine à gaz [3] ..... 11                          |
| Figure 9  | Turbine à gaz à un seul arbre ..... 13                                          |
| Figure 10 | Turbine à gaz à deux arbres ..... 14                                            |
| Figure 11 | Schéma d'un turboréacteur [3] ..... 15                                          |
| Figure 12 | Schéma d'un turbopropulseur [3] ..... 15                                        |
| Figure 13 | Schéma d'une turbosoufflante [3] ..... 16                                       |
| Figure 14 | Schéma d'un turbomoteur [3] ..... 16                                            |
| Figure 15 | Caractéristique du compresseur avec un pompage profond ..... 19                 |
| Figure 16 | Représentation du pompage et du décrochage tournant [5] ..... 20                |
| Figure 17 | Illustration du phénomène de décrochage tournant ..... 21                       |
| Figure 18 | Système de compression du modèle de Greitzer ..... 21                           |
| Figure 19 | Système de compression pour le modèle Moore-Greitzer ..... 24                   |
| Figure 20 | Courbe caractéristique du compresseur [10] ..... 27                             |
| Figure 21 | Système de compression avec une CCV ..... 29                                    |
| Figure 22 | Contrôle passif et actif ..... 51                                               |
| Figure 23 | Caractéristiques du compresseur et de la vanne de contrôle ..... 55             |
| Figure 24 | Simulation du modèle de M-G pour $B=0.5$ et $B = 1.2$ ..... 56                  |

|           |                                                                                   |     |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure 25 | Commande par la linéarisation exacte du modèle de M-G (1) .....                   | 65  |
| Figure 26 | Commande par la linéarisation exacte du modèle de M-G (2) .....                   | 66  |
| Figure 27 | Commande backstepping du modèle de M-G (1) .....                                  | 70  |
| Figure 28 | Commande backstepping du modèle de M-G (2) .....                                  | 70  |
| Figure 29 | Caractéristiques du compresseur équivalent et de la vanne de contrôle             | 73  |
| Figure 30 | Contrôle du pompage pour le modèle de M-G avec CCV .....                          | 78  |
| Figure 31 | Contrôle du décrochage tournant pour le modèle de M-G avec CCV ...                | 81  |
| Figure 32 | Simulation du modèle de G-E à un seul mode pour $\gamma = 0.5$ .....              | 84  |
| Figure 33 | Simulation du modèle de G-E à un seul mode pour $\gamma = 0.65$ .....             | 84  |
| Figure 34 | Simulation du modèle de G-E à trois modes pour $\gamma = 0.5$ .....               | 86  |
| Figure 35 | Simulation du modèle de G-E à trois modes pour $\gamma = 0.65$ .....              | 86  |
| Figure 36 | Simulation du modèle de G-E à quatre modes pour $\gamma = 0.5$ .....              | 88  |
| Figure 37 | Simulation du modèle de G-E à quatre modes pour $\gamma = 0.65$ .....             | 88  |
| Figure 38 | Modèle de G-E à un seul mode pour $U_d = 40 \text{ m/s}$ et $\gamma = 0.5$ .....  | 90  |
| Figure 39 | Modèle de G-E à un seul mode pour $U_d = 40 \text{ m/s}$ et $\gamma = 0.65$ ..... | 90  |
| Figure 40 | Amplitudes du décrochage tournant pour les différents modes.....                  | 91  |
| Figure 41 | Importance d'un modèle multi mode .....                                           | 92  |
| Figure 42 | Simulation du modèle proposé en boucle fermée .....                               | 108 |

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

|          |                                                                                               |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$      | Paramètre caractérisant le passage du fluide à travers les aubes du compresseur               |
| $a_s$    | La vitesse du son                                                                             |
| $A_c$    | Surface du débit du compresseur                                                               |
| $A(\xi)$ | Amplitude du décrochage tournant                                                              |
| $b$      | Constante reliée au paramètre de Greitzer par : $U = bB$                                      |
| $B$      | Paramètre de Greitzer                                                                         |
| CCV      | Vanne couplée (close coupled valve)                                                           |
| $C_x$    | Composante horizontale de la vitesse de l'écoulement                                          |
| $g$      | Coefficient de la perturbation de la vitesse axiale                                           |
| $G$      | Constante définissant les caractéristiques physiques du compresseur                           |
| $h$      | Coefficient de la perturbation de la vitesse circumférentielle                                |
| $H$      | La demi hauteur de la caractéristique du compresseur                                          |
| $I$      | Moment d'inertie de l'arbre reliant le compresseur à la turbine                               |
| $J$      | Amplitude au carré de l'amplitude du décrochage tournant                                      |
| $L_c$    | La longueur physique du compresseur avec les conduits                                         |
| $L_E$    | Distance entre le compresseur et le plenum                                                    |
| $L_I$    | Distance à l'entrée des aubes directrices                                                     |
| $l_c$    | La longueur adimensionnelle : $\frac{L_c}{R}$                                                 |
| $l_E$    | La longueur adimensionnelle : $\frac{L_E}{R}$                                                 |
| $l_I$    | La longueur adimensionnelle : $\frac{L_I}{R}$                                                 |
| $m$      | Paramètre introduit par Moore-Greitzer pour caractériser le retard à la sortie du compresseur |
| $P_s$    | Pression statique dans le plenum                                                              |

|                  |                                                                |
|------------------|----------------------------------------------------------------|
| $P_T$            | Pression totale à l'entrée du système de compression           |
| $R$              | Rayon moyen du compresseur                                     |
| $R_i$            | Résidu pour l'approximation de Galerkin                        |
| $r(\xi)$         | L'Angle de phase                                               |
| $r_c$            | Rapport du moyeu/carter (hub to tip)                           |
| $t$              | Le temps usuel en seconde                                      |
| $\bar{\tau}$     | La constante du temps du compresseur                           |
| $U$              | La vitesse tangentielle du compresseur                         |
| $U_d$            | Vitesse désirée de la turbine à gaz                            |
| $V_p$            | Le volume dans le plenum                                       |
| $W$              | La demi largeur de la caractéristique du compresseur           |
| $Y$              | Perturbation du potentiel de vitesse                           |
| $F^{-1}(\Psi_T)$ | Caractéristique de la vanne de contrôle (throttle)             |
| $\phi$           | Coefficient de l'écoulement axial                              |
| $\Phi$           | Le débit masse moyen dans le compresseur                       |
| $\Phi_{c,ss}$    | L'augmentation de pression au niveau du compresseur            |
| $\Phi_T$         | Le débit masse à travers la vanne de contrôle                  |
| $\Psi$           | L'augmentation de pression au niveau du compresseur            |
| $\Psi_c$         | Caractéristique du compresseur                                 |
| $\Psi_s$         | Caractéristique du décrochage tournant                         |
| $\Psi_T$         | La pression au niveau de la vanne de contrôle                  |
| $\Psi_v$         | Chute de pression au niveau de la CCV (close coupled valve)    |
| $\xi$            | Le temps adimensionnel                                         |
| $\gamma$         | Paramètre de la vanne de contrôle, proportionnel à l'ouverture |
| $\gamma_v$       | Paramètre de la CCV, proportionnel à l'ouverture               |
| $\omega$         | Vitesse angulaire                                              |

|            |                                                     |
|------------|-----------------------------------------------------|
| $\tau_c$   | Couple développé par le compresseur                 |
| $\tau_t$   | Couple développé par la turbine                     |
| $\Gamma_c$ | Couple adimensionnel du compresseur                 |
| $\Gamma_t$ | Couple adimensionnel de la turbine                  |
| $\mu$      | Paramètre de viscosité                              |
| $\rho$     | La masse volumique du fluide                        |
| $\eta$     | Coordonnée axiale                                   |
| $\theta$   | Coordonnée circonférentielle                        |
| $\beta$    | Paramètre dépendant du paramètre de Greitzer        |
| $\beta_1$  | Angle à l'entrée des aubes du rotor du compresseur  |
| $\beta_2$  | Angle à la sortie des aubes du rotor du compresseur |
| M-G        | Modèle de Moore-Greitzer                            |
| G-E        | Modèle de Greitzer-Egeland                          |

## INTRODUCTION

Le développement qu'a connu l'aviation civile ou militaire, l'essor de l'industrie des procédés ainsi que le domaine de la génération de l'énergie sont liés au développement d'un élément essentiel qui est la turbine à gaz. Cette dernière est une machine qui produit de l'énergie mécanique et des gaz d'échappement à haute vitesse et à haute température. L'énergie mécanique sert à entraîner un compresseur, un ventilateur, etc. Les gaz d'échappement servent à provoquer la propulsion dans le cas des avions.

La turbine à gaz est cependant assujettie à des phénomènes non linéaires de natures différentes : aérodynamiques (pompage et décrochage tournant), d'aéroélasticité (le flottement) et de combustion qui ne permettent pas son bon fonctionnement. D'où la nécessité de développer des outils susceptibles d'améliorer ses performances.

Des solutions industrielles ont été proposées et sont basées sur le principe qui consiste à éviter au système d'entrer dans l'instabilité, en gardant le point de fonctionnement à droite de la ligne de pompage et à une certaine marge de sécurité. Ceci est accompli en agissant sur une vanne d'anti pompage ou de recyclage. Cette manière de faire est connue sous le nom de contrôle passif.

Quoique la méthode classique (contrôle passif) est capable d'assurer un bon fonctionnement de la turbine à gaz, il était nécessaire de développer des techniques de contrôle qui stabilisent le compresseur qui est un élément essentiel dans une turbine à gaz, aussi bien à droite qu'à gauche de la ligne de pompage, permettant ainsi à la machine de travailler à des débits massiques plus faibles. Cette approche a suscité beaucoup d'intérêt et est connue sous le nom de contrôle actif. Ceci fera l'objet de notre étude qui se concentrera sur les non linéarités aérodynamiques.

Plusieurs chercheurs ont contribué à l'évolution de la turbine à gaz, en commençant par **Moore et Greitzer** (1986), qui ont développé un modèle mathématique pour la turbine, capable d'expliquer les non linéarités dont souffre cette dernière. Puis il y a eu l'apparition d'autres modèles, entre autres, le modèle de Haynes(1994), le modèle de Badmus (1995) et plus récemment, le modèle de Gravdahl-Egeland (1997).

Le modèle de Moore-Greitzer (1986) considère seulement le cas où la vitesse de l'ensemble (turbine + compresseur) est constante. Or, en pratique, la vitesse peut être variée.

Le modèle de Gravdahl-Egeland répond à ce besoin. Il utilise à la base le modèle de Moore-Greitzer multi-modes auquel il ajoute la dynamique du spool (l'arbre reliant le compresseur à la turbine). Pour commander ce modèle, Gravdahl et Egeland ont développé une commande qui est capable de contrôler la vitesse. Cependant, elle n'a aucun contrôle sur les non linéarités.

Pour remédier à ce problème, nous proposons dans cette thèse un nouveau modèle, en partant de celui de Gravdahl-Egeland auquel on a ajouté une CCV (close coupled valve). L'objectif est de pouvoir simultanément contrôler la vitesse et éviter au système (turbine à gaz) d'entrer en pompage ou en décrochage tournant.

Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons des rappels sur les différents types de compresseurs et plus particulièrement les turbocompresseurs qui constituent un élément essentiel dans la configuration d'une turbine à gaz.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons certains modèles mathématiques qui ont été développés pour modéliser une turbine à gaz : modèle de Greitzer (1976), modèle de

Moore-Greitzer (1986), modèle de Gravdahl-Egeland(1997), etc., et on exposera en détails le modèle qu'on a développé pour satisfaire à certaines exigences.

Dans le troisième chapitre, nous entamerons la partie commande. On commencera par étudier le modèle de Moore-Greitzer en montrant la simulation des non linéarités en boucle ouverte puis le modèle commandé en boucle fermée. On appliquera deux stratégies de commande qu'on a élaboré : la commande backstepping et l'approche de la géométrie différentielle. On étudiera après, le modèle de Moore-Greitzer incluant une CCV(close coupled valve) auquel on appliquera une commande basée sur la méthode backstepping étant donné que l'approche de la géométrie différentielle n'a pas fonctionné à cause de l'instabilité de la dynamique interne. Puis, le modèle de Gravdahl-Egeland et enfin le modèle que nous avons élaboré, auquel nous avons appliqué une commande linéarisante qui s'est avérée incapable de contrôler complètement le système à cause de l'instabilité de la dynamique interne. Pour chacun de ces modèles nous réalisons une étude complète en boucle ouverte et en boucle fermée (après application du contrôleur) avec des simulations pour illustrer les résultats.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale concernant les résultats obtenus.

## CHAPITRE 1

### RAPPELS SUR LES COMPRESSEURS ET LES TURBINES À GAZ

La turbine à gaz est modélisée dans la littérature par un système de compression composé :

- D'aubes directrices à l'entrée du compresseur,
- D'un compresseur qui peut être axial ou centrifuge,
- D'un plenum jouant le rôle d'une chambre de combustion,
- D'une vanne de contrôle (throttle) simulant le rôle de la turbine (organe couplé au compresseur par l'intermédiaire d'un arbre de transmission).

La figure 1 montre l'exemple d'une turbine à gaz faisant partie d'un moteur d'une turbosoufflante d'un avion (Williams F107) [1].

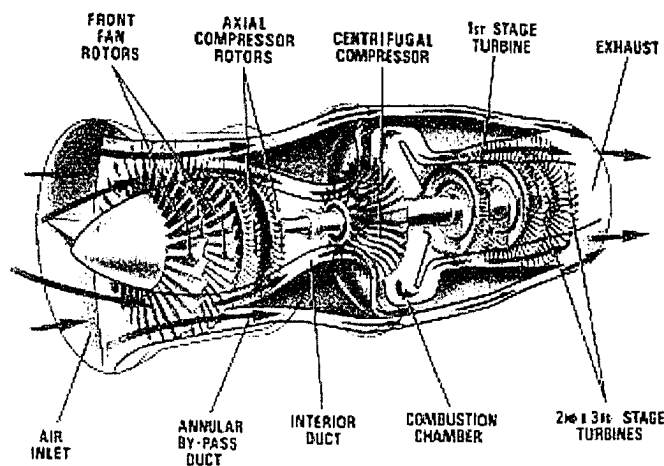


Figure 1 Moteur d'une turbosoufflante (Williams F107) [1]

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques détails concernant les éléments composant la turbine à gaz et les différentes configurations de cette dernière dans l'industrie des procédés et de l'aérospatial.

## 1.1 Compresseurs

La fonction du compresseur consiste à fournir un débit d'air correspondant à un certain rapport de pression. Ce débit d'air est nécessaire pour la détermination de la quantité de travail que les turbines peuvent fournir :

$$W = m_a * c_p * \Delta T \quad (1.1)$$

où  $m_a$  (kg/m<sup>3</sup>) est le débit d'air,  $W$  (J) est le travail développé,  $c_p$  (J.m<sup>3</sup>/kg.°C) est la chaleur spécifique et  $\Delta T$  (°C) est la différence de température entre l'entrée et la sortie du rotor (organe tournant du compresseur). Le rapport de pression est requis pour la détente des gaz dans la turbine.

On distingue deux grandes classes de compresseurs : les compresseurs volumétriques et les turbocompresseurs.

### 1.1.1 Compresseurs volumétriques

On distingue deux types :

1. Alternatifs : compresseurs à piston, etc.
2. Rotatifs : compresseurs à vis, etc.

Les compresseurs volumétriques fonctionnent avec le principe de compression par réduction du volume. Un compresseur alternatif produit un débit de refoulement intermittent. Il est généralement combiné à un réservoir qui absorbe les fluctuations et

assure une pression de refoulement uniforme. Pour expliquer le fonctionnement d'un compresseur volumétrique, on prendra l'exemple d'un compresseur à piston représenté sur les figures 2 et 3.

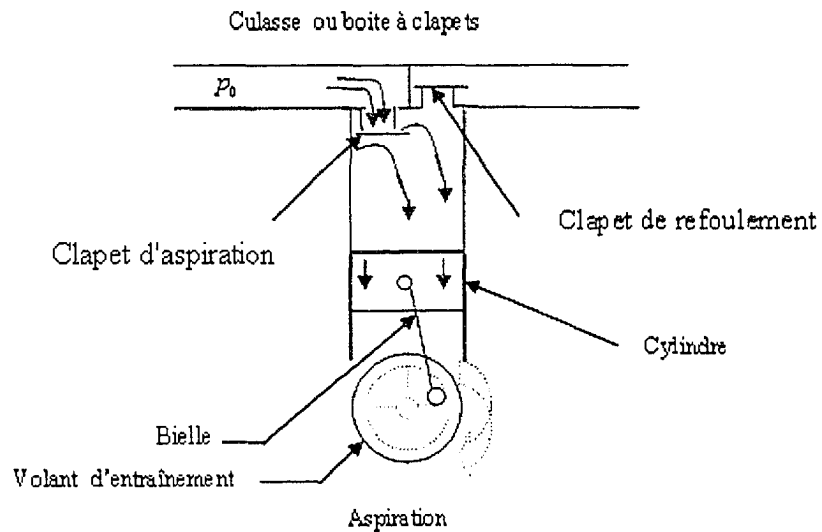


Figure 2 Fonctionnement d'un compresseur à piston durant la phase d'aspiration

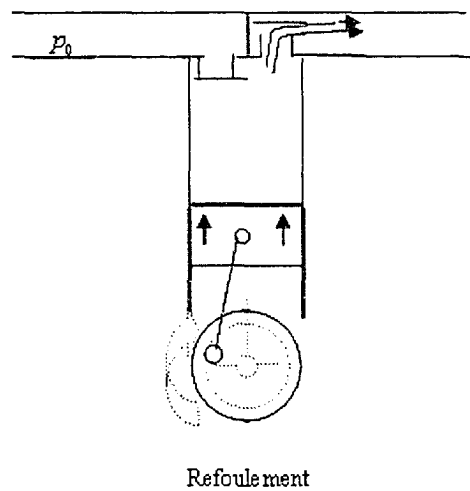


Figure 3 Fonctionnement d'un compresseur à piston durant la phase de refoulement

Le mouvement du piston vers le bas (figure 2) commande l'ouverture du clapet d'aspiration et l'introduction d'air dans la cavité entre la tête du cylindre et le piston. La course ascendante du piston commande la fermeture du clapet d'aspiration (figure 3) et entraîne la compression de l'air dans l'espace restreint. La pression de l'air augmente à mesure que le volume diminue. Lorsque la pression régnant dans l'espace au dessus du piston dépasse la pression de la conduite de refoulement, le clapet de refoulement s'ouvre et laisse s'échapper l'air comprimé dans la conduite.

### 1.1.2 Turbocompresseurs

Les turbocompresseurs fonctionnent avec le principe qui consiste à accélérer le fluide, puis convertir l'énergie cinétique en énergie potentielle. L'augmentation de l'énergie potentielle se manifeste par l'augmentation de la pression, d'après l'équation de **Bernouilli** :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \quad (1.2)$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  est la densité du fluide,  $v$  est la vitesse du fluide et  $gz$  l'énergie potentielle par unité de masse. Les indices 1,2 représentent les propriétés avant et après la décélération respectivement.

On distingue deux types :

#### a. Compresseur axial

Le schéma d'un compresseur axial avec ses différents constituants est représenté sur la figure 5 [2]. L'air traverse une série d'aubes mobiles (rotor) et d'aubes fixes (stator) concentriques.

Les aubes (ailettes) d'un compresseur axial sont représentée sur la figure 4.

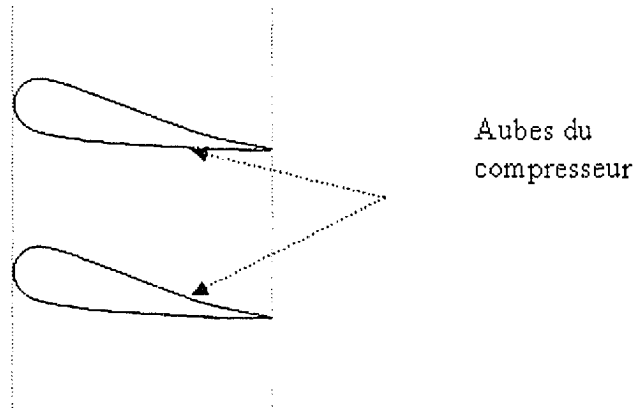


Figure 4 Allure des aubes d'un compresseur axial

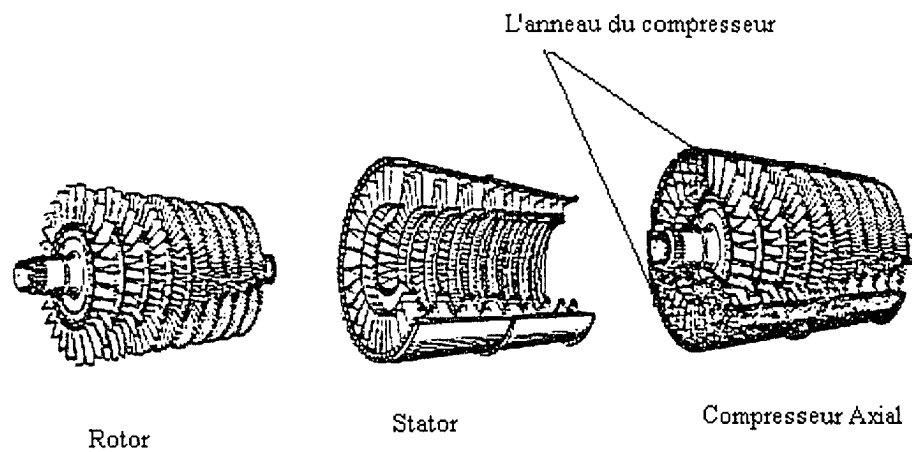


Figure 5 Éléments constitutifs et ensemble du compresseur axial [2]

Le fluide est accéléré dans les aubes du rotor et décéléré dans les aubes du stator, en transformant l'énergie cinétique acquise dans le rotor en une pression statique en passant à travers les aubes du stator.

## b. Compresseur centrifuge

Le compresseur centrifuge est composé de deux éléments (figure 6[1]) :

1. Rouet (impeller) : organe de rotation qui augmente la vitesse du fluide.
2. diffuseur (diffuser) : composé de passages divergents où le fluide subit une décélération.

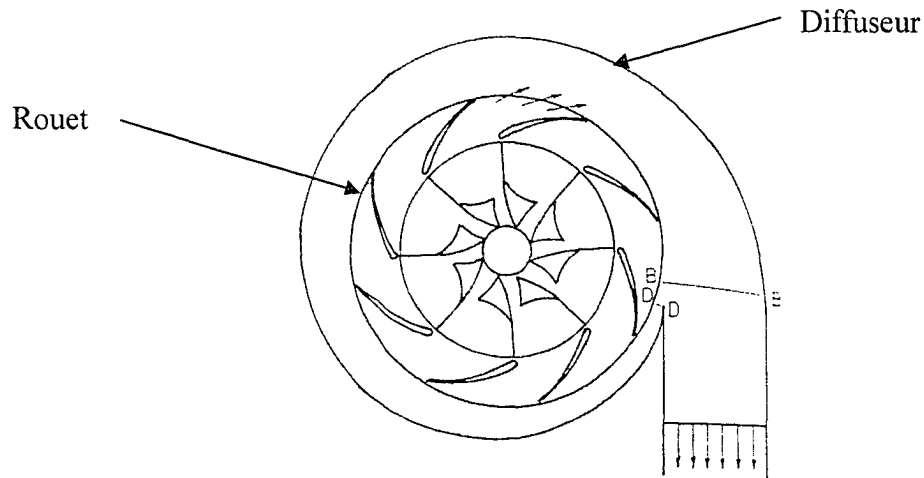


Figure 6 Étage d'un compresseur centrifuge [1]

L'énergie cinétique acquise dans la partie rotative (rouet) est convertie en pression statique dans le diffuseur.

Une différence évidente entre les deux types de turbocompresseurs est que, dans un compresseur axial, le fluide (air) quitte le compresseur dans une direction axiale cependant dans le cas des compresseurs centrifuges, il le quitte dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation.

Les compresseurs axiaux peuvent accepter des débits massiques plus importants que ceux des compresseurs centrifuges. C'est une des raisons pour laquelle ils sont les plus utilisés dans les moteurs d'avion. Une autre raison est qu'ils offrent un meilleur rendement, assurant une consommation de fuel moins importante dans une turbine à gaz.

### 1.1.3 La courbe caractéristique d'un compresseur

C'est une représentation du taux de compression en fonction du débit (figure 7) pour différentes vitesses de rotation. Elle est représentée par une zone de fonctionnement utile, limitée par une ligne de pompage (surge line) au-delà duquel le compresseur entre en pompage ou en décrochage tournant et une ligne de blocage (choke line) où le débit masse ne peut plus augmenter.

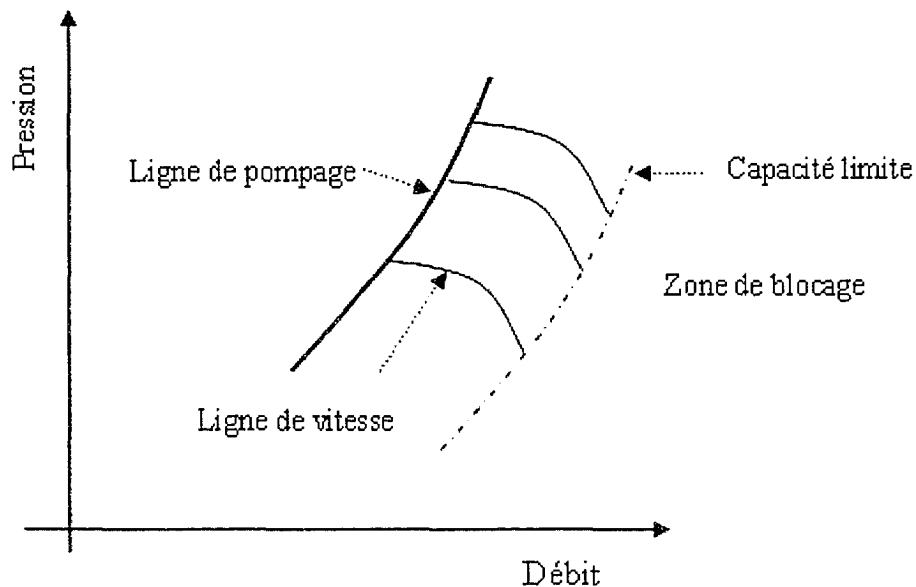


Figure 7 Courbe caractéristique d'un compresseur

## 1.2 Aubes directrices

Ce sont des aubes de guidage qui sont situées à l'entrée du premier étage d'un compresseur. Leur fonction consiste à dévier l'air de manière à attaquer la première série d'aubes mobiles (rotor) avec l'angle d'incidence voulu. Elles protègent aussi le moteur contre l'injection d'objets étrangers.

On trouve aussi des aubes directrices variables qui permettent de changer l'angle d'incidence de l'air à l'entrée en fonction de la vitesse de rotation du compresseur afin d'améliorer ses performances.

## 1.3 La chambre de combustion

Dans la chambre de combustion, le mélange d'une partie de l'air comprimé dans le compresseur alimente la combustion qui utilise comme combustible le gaz naturel, le diesel ou les huiles lourdes résiduels. Les gaz portés à une haute température entraînent les roues de la turbine, créant de l'énergie mécanique, qui sert à entraîner le compresseur de l'air et n'importe quelle charge mécanique accouplée à la turbine. L'autre partie de l'air qui n'a pas pris place dans la combustion sert à refroidir les différentes parties de la turbine à gaz. Le schéma d'une chambre de combustion d'une turbine à gaz est représenté sur la figure 8 [3].

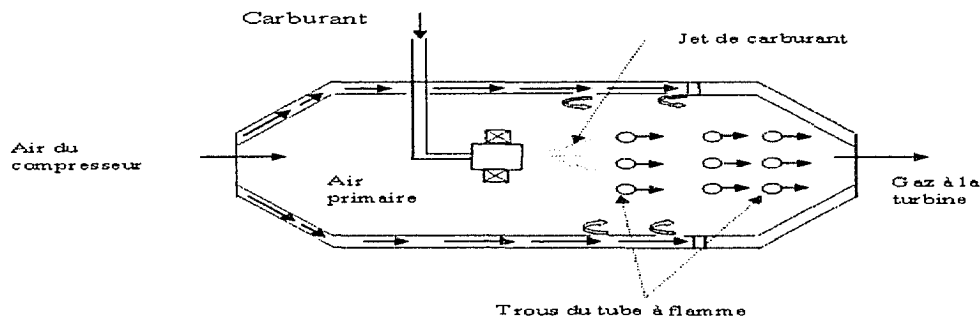


Figure 8 Chambre de combustion d'une turbine à gaz [3]

## **1.4 La turbine**

Les turbines [4] sont généralement plus faciles à concevoir que les compresseurs, puisque les gaz chauds émanant de la chambre de combustion subissent une expansion au lieu d'une compression. On distingue deux types :

### **A Turbine axiale**

Dans ce type de turbine, la direction de l'écoulement est parallèle à l'axe de rotation. Le matériau utilisé pour sa fabrication est conçu pour supporter de très fortes températures comme le nimonic (alliage de nickel, chromium et cobalt). Elle est la plus utilisée avec les turbines à gaz.

### **B Turbine radiale**

L'écoulement se fait dans la direction perpendiculaire à l'axe de rotation. Elle est surtout utilisée avec les petites turbines à gaz.

## **1.5 Catégories de turbines à gaz**

On classe les turbines à gaz dans deux grandes catégories :

### **1. Turbines à un arbre (single shaft)**

Dans une turbine à un seul arbre (figure 9), une seule turbine est utilisée. Elle asservit le compresseur ainsi que l'arbre d'entraînement. Ce dernier transmet l'énergie mécanique produite dans la turbine au compresseur et à la charge; cependant il faut installer une boîte d'engrenage pour certaines applications pour que la vitesse de l'arbre d'entraînement s'accommode aux exigences de la charge.

L'inconvénient de ce genre de turbine est qu'on ne peut pas accoupler la charge tant que la turbine n'a pas atteint la vitesse optimale. Pour arrêter cette machine, il faut généralement découpler la charge pour éviter que le couple résistant créé par la charge n'endommage pas l'arbre de transmission.

Les turbines à gaz à un seul arbre sont généralement utilisées lorsqu'elles sont appelées à travailler à vitesse et à charge constantes.

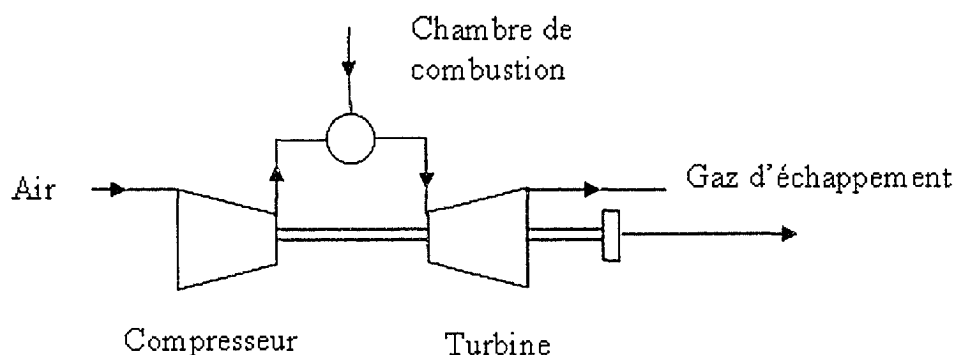


Figure 9 Turbine à gaz à un seul arbre

## 2. Turbine à deux arbres (twin shaft)

Dans une turbine à gaz à deux arbres (figure 10), une deuxième turbine est présente dans le système. Un arbre raccorde le compresseur et la première turbine, appelée le turbocompresseur (gas generator). Le deuxième arbre est logé dans la turbine d'entraînement. La première entraîne le compresseur alors que la deuxième, appelée turbine de travail commande l'arbre d'entraînement, qui à son tour fait entraîner la charge, qui peut être un compresseur centrifuge, un générateur, une pompe, etc.

Pour démarrer une turbine à gaz à deux arbres, un couple mécanique est nécessaire à l'entrée du compresseur. Dès que la première turbine s'approche de la vitesse appropriée, le débit de gaz de combustion fait tourner la deuxième turbine.

Cette configuration s'avère très utile si une variation de vitesse de la charge est prévisible.

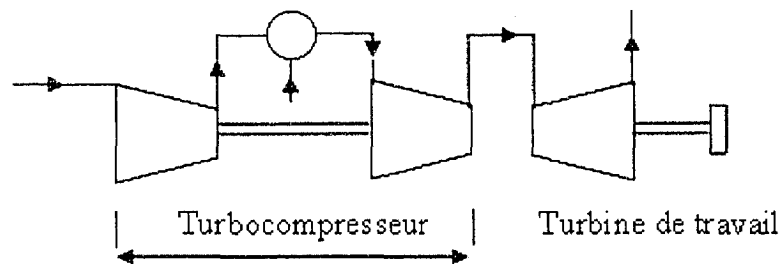


Figure 10 Turbine à gaz à deux arbres

## 1.6 Utilisation des Turbines à gaz

On distingue les turbines à gaz utilisées dans l'industrie (procédés chimiques, génération de l'électricité, etc..) qui ont été traitées dans les sections précédentes et celles qu'on rencontre dans l'industrie aéronautique.

Dans ce qui suit, on parlera de la deuxième catégorie et on donnera quelques détails concernant les différentes configurations :

### 1. Le turboréacteur( turbojet)

C'est un moteur (figure 11[3]) équipé d'un système de compression, d'une chambre de combustion, d'une turbine, d'une tuyère de détente (nozzle). L'air aspiré par l'avant est comprimé, chauffé par la combustion d'un carburant, détendu dans la turbine, rejeté vers

l'arrière à grande vitesse à travers la tuyère. Les gaz d'échappement rejetés dans l'atmosphère à grande vitesse produisent la poussée qui est le résultat de la transformation de l'énergie interne du moteur en énergie cinétique.

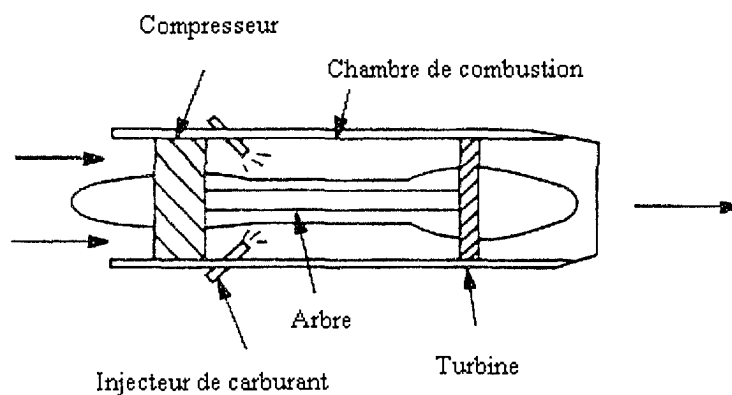


Figure 11 Schéma d'un turboréacteur [3]

## 2. Le turbopropulseur (turboprop)

C'est un moteur (figure 12[3]) équipé d'une turbine à gaz qui actionne à la fois un compresseur rotatif et une hélice externe pour produire la poussée. C'est le mode de propulsion le plus économique pour les vitesses moyennes. L'hélice produisant la propulsion est actionnée par une turbine à gaz.

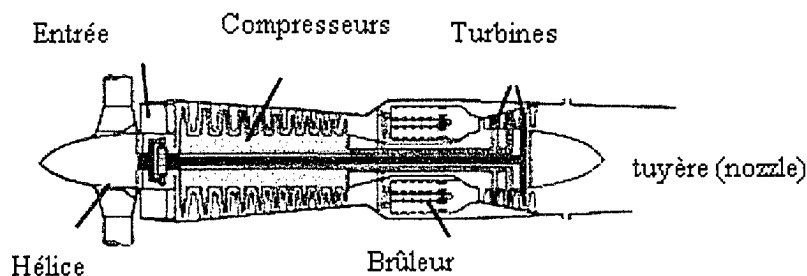


Figure 12 Schéma d'un turbopropulseur [3]

### 3. La turbosoufflante(turbofan)

Le principe est le même que celui d'un turbopropulseur, excepté que le propulseur est remplacé par une soufflante (élément rotatif pour produire la poussée) (figure 13[3]).

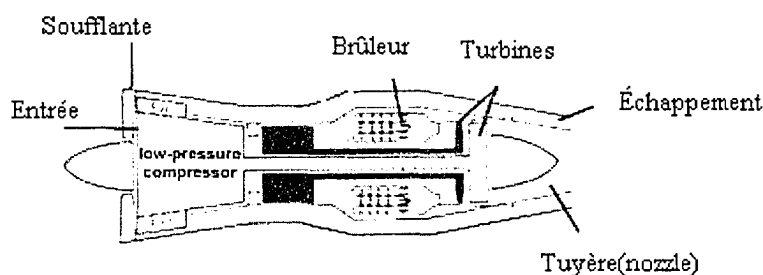


Figure 13 Schéma d'une turbosoufflante [3]

### 4. Le turbomoteur (turboshaft)

C'est un moteur (figure 14[3]) à turbine analogue au turboréacteur mais l'énergie prélevée par la turbine, entraîne d'autres systèmes de propulsion, généralement un rotor d'hélicoptère, avec un système de transmission composé essentiellement de boîte d'engrenage.

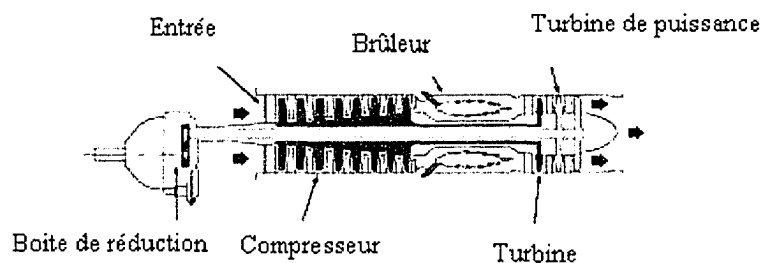


Figure 14 Schéma d'un turbomoteur [3]

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Les systèmes de compression sont toujours assujettis à des perturbations de natures différentes qui empêchent leur bon fonctionnement. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés dans la littérature pour représenter le plus fidèlement possible ces systèmes réels.

Dans ce qui suit, on parlera des non linéarités présentes dans un système de compression et on présentera toute une panoplie de modèles mathématiques offrant une bonne compréhension de ces non linéarités (aérodynamiques) et donnant un moyen pour le développement de stratégies de contrôle.

#### 2.1 Non linéarités dans un système de combustion

Les non linéarités présentes dans un système de combustion sont de natures différentes. On distingue :

- Les instabilités de combustion : comme le cas du rapport air/gaz qui est responsable de l'émission de  $\text{NO}_x$  (dioxyde de nitrogène) en grande quantité.
- Les instabilités reliées à l'aéroélasticité : flottement (flutter) qui prend naissance à l'approche de la fréquence propre de l'aube du rotor. Elle peut causer la détérioration de cette dernière.
- Les instabilités aérodynamiques (pompage et décrochage tournant).

Dans notre étude, on considérera seulement les instabilités de nature aérodynamique.

### **2.1.1 Pompage (surge)**

Le pompage est un phénomène très complexe qui prend naissance dans certaines conditions de fonctionnement. Il se manifeste lorsque le débit volumique d'air descend au dessous d'une certaine limite pour une vitesse de rotation donnée, il se produit alors des variations périodiques importantes de la pression et du débit à une fréquence plus ou moins grande.

Le pompage peut être manifesté par un retour du fluide lorsque la pression dans le plenum (chambre de combustion) est supérieure à celle du compresseur. Ce phénomène se manifeste par une distribution symétrique uniforme (figure 16[5]). On distingue deux types de pompage : le pompage classique et le pompage profond.

#### **2.1.1.1 Pompage classique**

C'est un phénomène qui se manifeste par des oscillations dans la pression et dans le débit.

#### **2.1.1.2 Pompage profond**

Dans ce cas, les oscillations dans le débit sont d'une amplitude tellement importante, que l'inversion de l'écoulement prend place dans le système de compression. Une représentation de cycle de pompage profond est montrée sur la figure 15.

Le pompage prend naissance au point (1). La pression dans le plenum (chambre de combustion) ne décroît pas rapidement et toutes les aubes décrochent (assujetties à des perturbations) en même temps. Il y a inversion de l'écoulement d'air pour équilibrer la haute pression dans le plenum. Le débit-masse atteint la caractéristique inverse (2). Cette transition de (1) à (2) est très rapide. La pression dans le plenum commence à décroître

puisque l'air s'échappe à travers la vanne de contrôle (throttle) et à travers le compresseur. La pression dans le plenum descend au dessous de celle de la caractéristique inverse et le gradient de pression devient positif. L'air commence à accélérer jusqu'à ce que le débit-masse d'air atteigne la valeur zéro (3). Le compresseur commence à délivrer plus de pression. Lorsque le débit à travers le compresseur devient plus important que celui à travers la vanne de contrôle, la pression commence à augmenter et devient plus importante que celle du compresseur (4). Le débit-masse commence à décroître. Lorsqu'il atteint la valeur correspondante au maximum de la caractéristique (1), le cycle recommence.

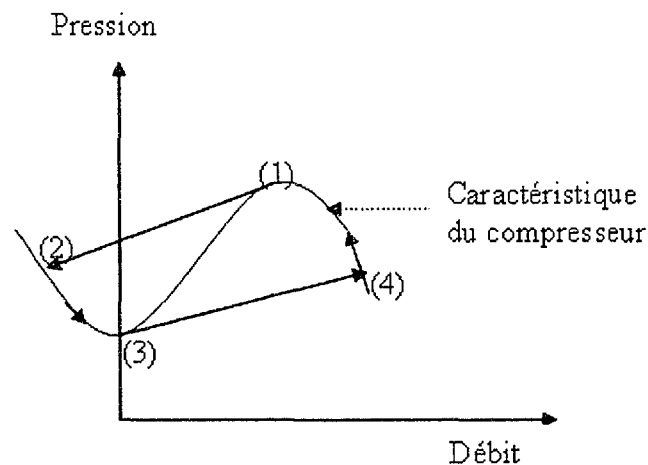


Figure 15 Caractéristique du compresseur avec un pompage profond

### 2.1.2 Décrochage tournant (rotating stall)

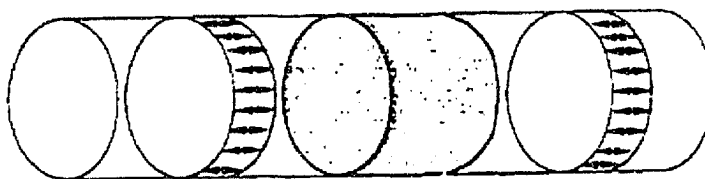
Le décrochage tournant est une perturbation rencontrée dans la plupart des turbomachines. Il se manifeste sous la forme d'une cascade de structures tournantes non stationnaires de distribution non uniforme (figure 16[5]) qui se propagent à travers l'anneau du compresseur (élément sur lequel s'attachent les aubes du stator) avec une vitesse qui varie entre 20-70 % de la vitesse de rotation du rotor. Ce phénomène prend

naissance au niveau des aubes du compresseur. Chaque aube peut être comparée à une aile d'avion qui, lorsqu'elle présente un angle d'attaque élevé, décroche.

Le phénomène de décrochage tournant est représenté sur la figure 17. On suppose que le passage 3-4 est bloqué partiellement. Ceci est caractérisé par la création d'une zone non stationnaire, dû à l'augmentation de l'incidence à l'entrée. L'incidence dans le passage 4-5 décroît alors que celle du passage 2-3 croît, initiant ainsi le blocage dans ce passage. Donc les structures non stationnaires se déplacent de la droite vers la gauche, au sens contraire de la direction de rotation.

Le décrochage tournant cause une réduction de pression et de débit considérables qui limite les performances du système de compression. En pratique on peut avoir une combinaison du pompage et du décrochage, connu sous le nom de pompage modifié.

Pompage : oscillation uniforme du débit



Décrochage tournant : perturbation non uniforme du débit

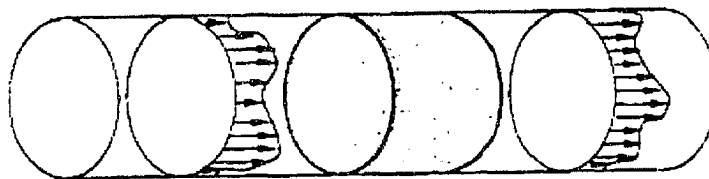


Figure 16 Représentation du pompage et du décrochage tournant [5]

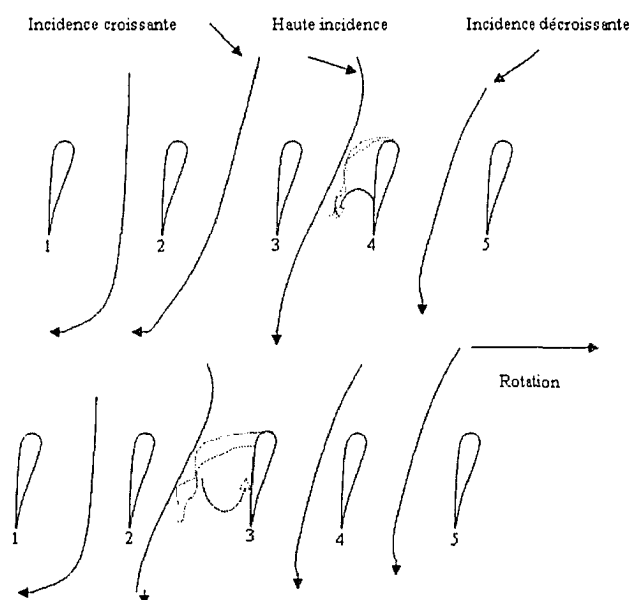


Figure 17 Illustration du phénomène de décrochage tournant

## 2.2 Modélisation d'un Système de compression

### 2.2.1 Modèle de Greitzer

Le système de compression utilisé par Greitzer[6;7] est représenté sur la figure suivante :

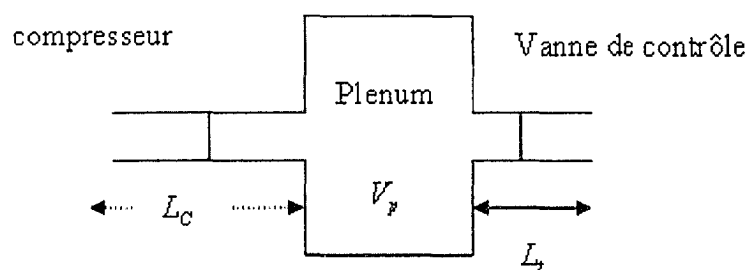


Figure 18 Système de compression du modèle de Greitzer

Il est composé d'un compresseur axial et un plenum contenant un gaz compressible. Le plenum décharge à travers une vanne de contrôle (throttle valve) dans un autre réservoir. Ce système de compression peut être considéré comme un modèle simple d'une turbine à gaz, où le plenum joue le rôle de chambres de combustion et la vanne, le rôle d'une turbine.

Greitzer a montré que le pompage prend place dans le cas de grandes vitesses et grands volumes dans le plenum cependant le décrochage tournant, n'apparaît que dans le cas de petites vitesses et de petits volumes dans le plenum.

Le modèle de Grietzer est donné par :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = B(\Psi_c(\Phi) - \Psi) \quad (2.1)$$

$$\frac{d\Phi_T}{d\xi} = \frac{B}{G}(\Psi - \Psi_T(\Phi_T)) \quad (2.2)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{B}(\Phi - \Phi_T(\Psi)) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\Psi_c}{d\xi} = \frac{1}{\bar{\tau}}(\Phi_{c,ss} - \Psi_c) \quad (2.4)$$

avec :

$$B = \frac{U}{2a_s} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}} \quad (2.5)$$

où toutes les variables sont adimensionnelles :  $U$  est la vitesse tangentielle du compresseur,  $a_s$  est la vitesse du son,  $V_p$  est le volume du plenum,  $L_c$  est la longueur du compresseur et de la conduite,  $A_c$  est la surface de débit,  $\Phi$  est le débit masse dans le compresseur,  $\Psi_c$  est l'augmentation de pression dans le compresseur,  $\Psi$  est la

différence de pression à travers la conduite,  $\Phi_T$  est le débit massique à travers la vanne de contrôle,  $G = \frac{L_c A_c}{L_c A_T}$  est une constante,  $\Psi_T$  est la chute de pression à travers la vanne de contrôle,  $\xi$  est le temps,  $\bar{\tau}$  est la constante de temps du compresseur,  $\Psi_{c,ss}$  est l'augmentation de pression au niveau du compresseur en régime permanent et  $B$  est le paramètre de Greitzer.

### 2.2.1.1 Hypothèses

Le modèle de Greitzer est développé en supposant :

- Un faible  $M$  (nombre de Mach )
- Un rapport de pression faible
- Un écoulement unidimensionnel

La contribution majeure de Greitzer est l'introduction du paramètre  $B$  :

- $B > B_{crit} \Rightarrow$  pompage
- $B < B_{crit} \Rightarrow$  décrochage tournant

### 2.2.2 Modèle de Moore-Greitzer

Ce modèle [8] a été développé pour un compresseur axial à plusieurs étages, en allant d'un étage à un autre. Il est décrit par trois équations différentielles couplées.

Le modèle non linéaire développé par Moore et Greitzer pour modéliser le pompage et le décrochage rotatif est à la base de toutes les études récentes qui portent sur l'étude des non linéarités aérodynamiques discutées précédemment. Ceci est dû principalement à

l'ordre réduit de sa représentation d'état et parce qu'il permet de décrire d'une manière approfondie les caractéristiques de ces non linéarités.

Le système de compression utilisé par Moore-Greitzer est représenté sur la figure 19.

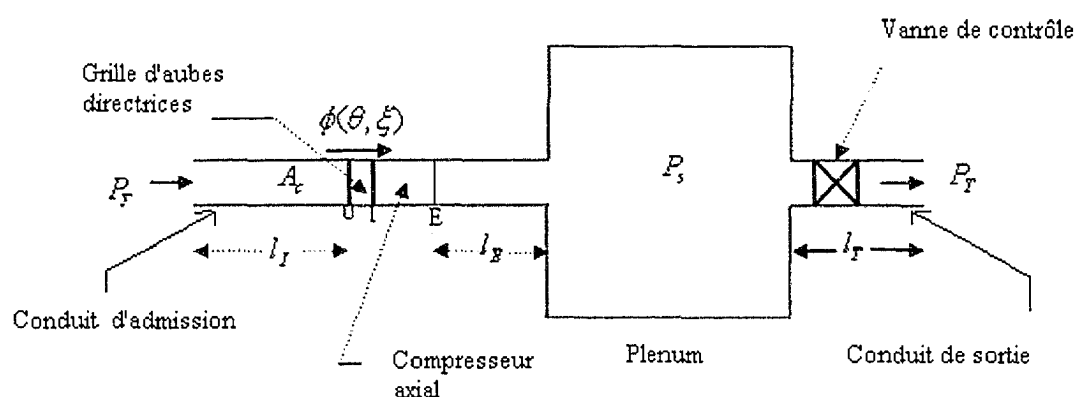


Figure 19 Système de compression pour le modèle Moore-Greitzer

$P_T$  est la pression totale à l'entrée du système et  $P_s$  est la pression statique dans le plenum. L'écoulement est considéré incompressible dans le compresseur mais compressible dans le plenum. De plus l'écoulement est irrotationnel en partant du réservoir jusqu'à l'entrée de la grille d'aubes directrices (IGV) à la station 0. Le système de compression est constitué :

- d'un conduit d'admission
- d'une grille d'aubes directrices
- d'un compresseur axial
- d'un conduit de sortie
- d'un réservoir (plenum)
- d'une vanne de contrôle

Le modèle de Moore et Greitzer est basé sur l'analyse adimensionnelle, il définit le temps :  $\xi = \frac{Ut}{R}$  où  $U$  est la vitesse tangentielle en (m/s) du rotor évaluée à  $R$  (le rayon moyen) en (mètre) et  $t$  est le temps usuel (en secondes). Toutes les distances physiques sont divisées par  $R$  :  $l_l = \frac{L_l}{R}$  et  $l_e = \frac{L_e}{R}$ . Deux coordonnées sont utilisées : une coordonnée axiale, désignée par  $\eta$  et une coordonnée angulaire, désignée par  $\theta$ ; le paramètre de Greitzer  $B$  est donné par :  $B = \frac{U}{2a_s} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}}$ .

Le modèle de Moore-Greitzer est décrit par les équations suivantes :

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \psi_c(\Phi - Y_{\theta\theta}) - mY_\xi + \frac{1}{2a}(2Y_{\xi\theta\theta} + Y_{\theta\theta\theta}) \quad (2.6)$$

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_c(\Phi - Y_{\theta\theta}) d\theta \quad (2.7)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{4B^2 l_c} (\Phi - \Phi_T) = \frac{1}{4B^2 l_c} (\Phi - F^{-1}(\Psi_T)) \quad (2.8)$$

où  $\Phi$  est le coefficient de débit moyen à travers la circonférence,  $\Psi$  est le rapport de compression,  $F^{-1}(\Psi_T)$  est la caractéristique de la vanne de contrôle,  $Y$  est la perturbation de potentiel de vitesse caractérisant les perturbations de l'écoulement et  $\psi_c$  est la caractéristique du compresseur,  $Y_{\theta\theta}$  est la dérivée seconde de  $Y$  par rapport à la coordonnée angulaire  $\theta$ ,  $Y_\xi$  est la dérivée par rapport au temps  $\xi$ ,  $B$  est le paramètre de Greitzer,  $l_c$  est la longueur du compresseur avec les conduits,  $\Phi_T$  est le débit à travers la vanne de contrôle.

L'approximation de Galerkin [9] est utilisée pour transformer l'équation différentielle à dérivées partielles (PDE) (2.6) en équations différentielles ordinaires (ODE). C'est une méthode spectrale qui est basée sur le choix de fonctions de test qui forment une base pour le développement de la série représentant la solution à l'équation différentielle à dérivées partielles. Pour s'assurer que cette solution est très proche de la réalité, une quantité importante qui est le résidu, représentant la différence entre la solution exacte et celle approximée est calculé. Ce résidu satisfait à la condition d'orthogonalité par rapport à chacune des fonctions de test.

On utilise la caractéristique du compresseur (figure 20[10]) décrite par l'équation suivante :

$$\Psi_c(\phi) = \psi_{c0} + H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \quad (2.9)$$

où  $W, H, \psi_{c0}$  sont les paramètres de la caractéristique représentés sur la figure 20.

La perturbation  $Y$  est représentée par une fonction harmonique, notée  $Y^*$ , de la forme :

$$Y^* = WA(\xi) \sin(\theta - r(\xi)) \quad (2.10)$$

où  $A(\xi)$  est l'amplitude et  $r(\xi)$  est l'angle de phase,  $W$  est la demi largeur de la caractéristique du compresseur.

L'approximation de Galerkin du modèle de Moore-Greitzer se présente sous la forme suivante :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}_T(\Psi_T) \right] \frac{H}{l_c} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} \quad (2.12)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (2.13)$$

Une nouvelle variable d'état  $J$  est introduite, fonction de l'amplitude du premier harmonique de la perturbation de potentiel de vitesse  $Y$  est donnée d'après [7] par :

$$J(\xi) = A^2(\xi) \quad (2.14)$$

En mettant  $J = 0$ , dans le modèle de Moore-Greitzer et avec une définition adéquate du temps adimensionnel  $\xi$  (temps normalisé, sans unité), on retrouve le modèle de Greitzer.

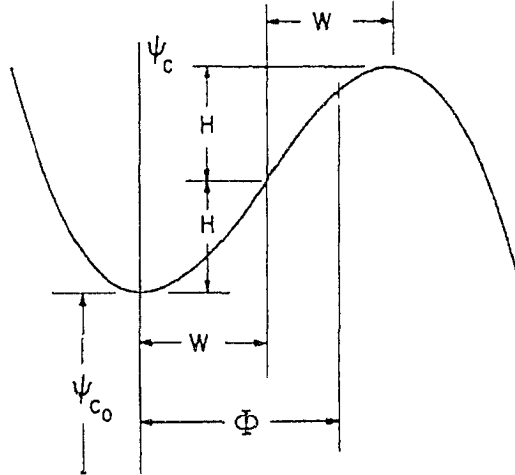


Figure 20 Courbe caractéristique du compresseur [10]

### 2.2.2.1 Hypothèses

Le modèle de Moore-Greitzer est développé, en supposant que :

- L'écoulement est incompressible.
- La vitesse du compresseur est constante.
- Un rapport de rayon élevé du moyeu/carter (hub/tip) du compresseur. D'après[4], ( $r_c \geq 0.8$ ) pour pouvoir considérer que l'écoulement est bidimensionnel.

### 2.2.3 Modèle de Moore-Greitzer avec une vanne couplée (CCV)

Plusieurs actionneurs ont été utilisés dans la littérature pour stabiliser un système de compression.

La vanne de contrôle (throttle) a été utilisée par Krstic et al[11], Badmus[12] et autres. Eveker et Nett[13], Murray et al[14] ont utilisé les vannes d'anti-pompage (bleed valves). Padiano et al[15] ont utilisé des vannes d'entrées variables tandis que Behnken et Murray[14;16] ont utilisé l'injection d'air. Paduano et Wang[17], Spaskovszky et Paduano [18] ont utilisé les roulements magnétiques.

L'utilisation d'une vanne couplée(CCV) pour le contrôle du pompage a été l'œuvre de plusieurs auteurs : Simon et Valavani[19], Jungowski[20], Gravdahl-Egland[21], etc.

On présentera dans cette partie, le modèle de Greitzer-Moore incluant une vanne couplée.

### 2.2.3.1 La vanne couplée(CCV)

D'après Simon et Valvani[19], la CCV est une vanne dont la distance au compresseur est tellement petite qu'on peut considérer qu'aucune masse significative ne peut être emmagasinée.

Une CCV se place en série avec un compresseur, comme le montre la figure 21.

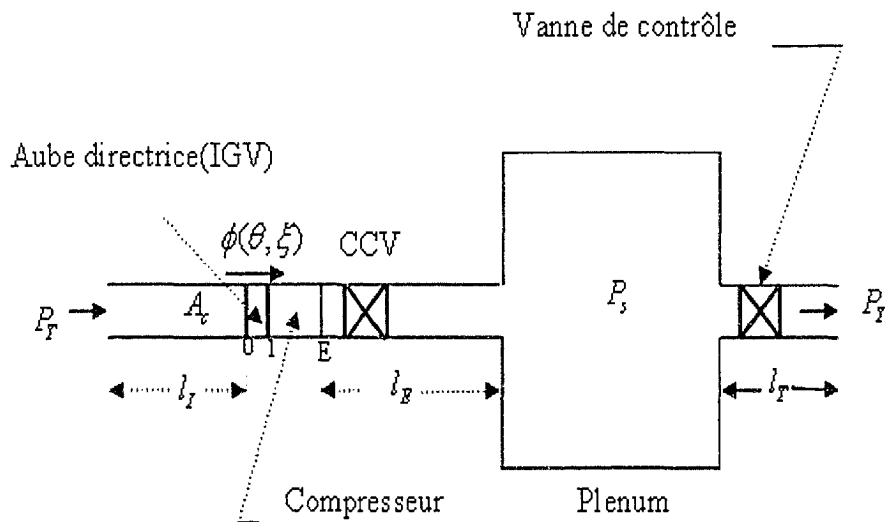


Figure 21 Système de compression avec une CCV

L'hypothèse qu'aucune masse n'est conservée entre le compresseur et la CCV permet de définir la notion de compresseur équivalent :

$$\Psi_e(\Phi) = \Psi_c(\Phi) - \Psi_v(\Phi) \quad (2.15)$$

où  $\Psi_c(\Phi)$  est la pression au niveau du compresseur et  $\Psi_v(\Phi)$  est la chute de pression

au niveau de la CCV.

Sachant que la pente de la caractéristique du compresseur détermine la stabilité des points d'équilibre du système, celle-ci peut être variée en modifiant la pression au niveau de la CCV.

Une CCV a une caractéristique de la forme :

$$\Psi_v = \frac{1}{\gamma_v^2} \Phi^2 \quad (2.16)$$

où  $\gamma_v > 0$  est proportionnel à l'ouverture de la vanne. En utilisant le modèle de Moore-Greitzer (équations 2.6..2.8) et en remplaçant  $\Psi_c(\Phi)$  par  $\Psi_v(\Phi)$ , l'approximation de Galerkin[9] du nouveau modèle [21] se présente ainsi :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}_r(\Psi) \right] \frac{H}{l_c} \quad (2.17)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} \left( \frac{W^2 J}{2H} + \frac{\Phi^2}{H} \right) \right] \frac{H}{l_c} \quad (2.18)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4W\Phi}{3H} \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (2.19)$$

Ce modèle a la même structure que celui de Moore-Greitzer, sauf qu'il contient en plus des expressions contenant  $\gamma_v$  dans les équations (2.18) et (2.19), caractérisant la contribution de la CCV à modifier la position des points d'équilibres.

### 2.2.4 Modèle de (Gravdahl-Egeland)

C'est une extension du modèle de Moore-Greitzer, où il y a lieu de considérer la variation de vitesse du compresseur. C'est aussi un modèle multi modes qui permet une meilleure compréhension des non linéarités aérodynamiques : le décrochage tournant et le pompage.

Ce modèle contient le paramètre  $B$  de Greitzer comme un état. Il intègre de plus la dynamique du spool (arbre).

#### 2.2.4.1 Dynamique du Spool

La dynamique du spool est décrite par :

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau_t - \tau_c \quad (2.20)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire,  $\tau_t$  est le couple développé par la turbine,  $\tau_c$  est le couple développé par le compresseur et  $I$  est le moment d'inertie du Spool.

On a :

$$\omega = \frac{U}{R} \quad (2.21)$$

où  $U$  est la vitesse tangentielle et  $R$  est le rayon moyen. Le développement de ce modèle multi mode est similaire à celui de Moore-Greitzer, sauf qu'il utilise la définition

du temps :  $\xi = \frac{U_d t}{R}$  au lieu de  $\frac{U t}{R}$  où  $U_d$  est la vitesse désirée.

L'équation gouvernant la dynamique du spool est d'après [22] :

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\Lambda_1}{b} (\Gamma_t - \Gamma_c) U^2 \quad (2.22)$$

avec :

$$\Gamma = \Gamma_t - \Gamma_c = \frac{\tau_t - \tau_c}{\rho A_c R U^2} \quad (2.23)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\rho R^3 A_c}{I U_d} b \quad (2.24)$$

$\Gamma_c$  dépend des angles que fait le fluide à l'entrée et à la sortie des aubes du rotor :

$$\Gamma_c = \Phi^2 (\tan \beta_1 - \tan \beta_2) \quad (2.25)$$

En utilisant l'approximation de Galerkin de  $n^{\text{ième}}$  ordre :

$$(\tilde{\phi})^* = \sum_{n=1}^{n=N(\mu)} \frac{W}{n} e^{in\theta} A_n(\xi) \sin(n\theta - r_n(\xi)) \quad (2.26)$$

Avec  $A_n(\xi)$  est l'amplitude du  $n^{\text{ième}}$  mode du décrochage tournant et  $r_n(\xi)$  est l'angle de phase associé.

Le modèle de Gravdahl-Egeland [22] prend la forme suivante :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c(B)} \left( -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{l_E U_d \Gamma \Lambda_1}{bH} \Phi \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2}{B} (\Phi - \Phi_T) - 2\Lambda_1 \Gamma B \Psi \quad (2.28)$$

$$\frac{dJ_n}{d\xi} = J_n \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_n}{4} - \frac{\mu n^2 W}{3aH} - \frac{2U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{3bHn} \right) - \frac{3aHn}{(n - m_B(B)a)W} \quad (2.29)$$

$$\frac{dB}{d\xi} = \Lambda_1 \Gamma B^2 \quad (2.30)$$

avec  $n = 1 \dots N(\mu)$

$$J_n(\xi) = A_n^2(\xi) \quad (2.31)$$

$$J(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N(\mu)} J_n(\xi) \quad (2.32)$$

$$\Lambda_2 = \frac{R}{4L_c U_d} b \quad (2.33)$$

$$l_c(B) = l_l + l_E \frac{U_d}{bB} + \frac{1}{a} \quad (2.34)$$

$$m_B(B) = (1 - m) \frac{U_d}{bB} - 1 \quad (2.35)$$

$\mu$  est le paramètre de viscosité introduit par Adomatis et Abed [23] pour prendre en considération la viscosité présente dans le système de compression.

Adomatis et Abed [23] ont montré que :

$$N = \begin{cases} \infty & \text{pour } \mu = 0 \\ \text{fini} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

### 2.2.5 Autres modèles

Dans le tableau I, on présentera les modèles les plus connus dans la littérature, qui ont été développés pour modéliser un système de compression (turbine à gaz) et qui sont classés suivants :

- La nature de l'écoulement (compressible, incompressible);
- Le type de modèle : unidimensionnel (qui prévoit le pompage) ou bidimensionnel (qui est capable de prévoir le pompage et le décrochage tournant);
- Type de compresseur utilisé (centrifuge ou axial).

Tableau I

Présentation des modèles de systèmes de compression

| <i>Modèle</i>                                                                                 | <i>Description de l'écoulement</i> | <i>machine</i> | <i>Instabilités</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------|---------------------|
| Greitzer[7]                                                                                   | 1-D incompressible                 | A              | P                   |
| Moore-Greitzer[8]                                                                             | 2-D incompressible                 | A              | D/P                 |
| Botros [24]                                                                                   | 1-D incompressible                 | A/C            | P                   |
| Hansen[25]                                                                                    | 1-D incompressible                 | C              | P                   |
| Fink[26]                                                                                      | 1-D incompressible                 | C              | P                   |
| Badmus[27]                                                                                    | 1-D compressible                   | A/C            | P                   |
| Haynes[28]                                                                                    | 2-D incompressible                 | A              | D/P                 |
| Eveker et Nett[29]                                                                            | 2-D incompressible                 | A              | D/P                 |
| Adomatis[23]                                                                                  | 2-D incompressible                 | A              | D/P                 |
| Gravdahl et Egeland[22]                                                                       | 2-D incompressible                 | A              | D/P                 |
| P : pompage<br>D : décrochage tournant<br>C : compresseur centrifuge<br>A : compresseur axial |                                    |                |                     |

### 2.2.6 Modèle de Gravdahl-Egeland avec CCV

Ce modèle est celui que nous avons proposé. Il est basé sur celui de Gravdahl-Egeland [22], qui est un modèle multi mode et qui prend en considération la variation de la vitesse du compresseur; auquel nous avons ajouté une CCV, offrant ainsi la possibilité de décaler la caractéristique du compresseur afin d'éviter au système de tomber dans la zone d'instabilité.

Le choix de la CCV est motivée par l'étude de Hendricks et Gysling[30] et Van de Wall[31] sur les actionneurs. Ils ont montré qu'il est plus avantageux d'utiliser ceux qui sont très proche du compresseur comme la CCV ou les injecteurs d'air[14;16] pour éliminer les délais qui peuvent avoir des effets déstabilisants.

### 2.2.6.1 Développement du modèle

On considère le système représenté sur la figure 21. Le temps est défini comme dans le modèle de Gravdahl-Egeland [22] par :

$$\xi = \frac{U_d t}{R} \quad (2.37)$$

où  $U_d$  est la vitesse désirée de la turbine,  $t$  est le temps (en secondes) et  $R$  est le rayon moyen du compresseur.

Ce modèle est développé pour un compresseur axial à plusieurs étages, en allant d'un étage à un autre.

La procédure consiste à aller de la gauche vers la droite sur la figure 21, puis calculer à chaque fois la différence de pression entre deux points définissant une partie intégrante du système de compression, pour aboutir à la fin à une relation entre la pression à l'entrée du système  $P_T$  et la pression statique du plénum  $P_s$ .

#### A Niveau compresseur

L'augmentation de pression au niveau d'une rangée d'aubes est donnée d'après Moore et Greitzer [8] par :

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho U^2} = F(\phi) - \tau \frac{d\phi}{dt} \quad (2.38)$$

où  $\phi = \frac{C_x}{U}$  est le coefficient de l'écoulement axial local,  $F(\phi)$  est le rapport de compression dans le passage à travers les aubes,  $C_x$  est la composante de la vitesse sur l'axe des  $x$  et  $\tau$  est le coefficient de retard d'élévation de pression.

On commence par calculer  $\frac{d\phi}{dt}$  de l'équation (2.38).

$$\frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{rotor} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{stator} \quad (2.39)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{rotor} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{U_d}{R} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{U}{R} \quad (2.40)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{stator} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{U_d}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (2.41)$$

En remplaçant (2.40) et (2.41) dans (2.39), on aura :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{U_d}{R} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{U}{R} \quad (2.42)$$

Pour un compresseur à  $N$  étages, l'équation (2.38) prend la forme suivante :

$$\frac{p_E - p_1}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2NF(\phi) - N\tau \frac{d\phi}{dt} \quad (2.43)$$

En intégrant la CCV avec le compresseur à  $N$  étages, nous aurons l'équation suivante :

$$\frac{p_E - p_1}{\rho U^2} = NF(\phi) - \frac{1}{2a} \left( 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{U}{U_d} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\gamma_v^2} \phi^2 \quad (2.44)$$

avec :

$$a = \frac{R}{N\tau U_d} \quad (2.45)$$

On définit  $\Phi(\xi, \theta)$  comme la moyenne de  $\phi(\xi, \theta)$  autour de la circonférence, définie par :

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\xi, \theta) d\theta \quad (2.46)$$

En tenant compte de l'équation (2.46) , on peut écrire que :

$$\phi = \Phi(\xi) + g(\xi, \theta) \quad h = h(\xi, \theta) \quad (2.47)$$

où  $g$  est le coefficient de la perturbation de la vitesse axiale et  $h$  est le coefficient de la perturbation de la vitesse circonférentielle.

D'après [8] :

$$\int_0^{2\pi} g(\xi, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} h(\xi, \theta) d\theta = 0 \quad (2.48)$$

## B Conduit et vannes d'entrées (IGV)

La différence de pression entre la station 0 et 1 (figure 21), où l'écoulement est axial, est donnée d'après Moore-Greitzer [8] par :

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho U^2} = \frac{1}{2} K_G h^2 \quad 0 < K_G < 1 \quad (2.49)$$

$k_G$  est le coefficient de rétablissement à l'entrée (entrance recovery coefficient). Il est égal à un dans le cas où il n'y a aucune perte au niveau de l'entrée des IGV.

L'écoulement dans le conduit à l'entrée des (IGV) au point 0 est considéré irrotationnel, d'où l'existence d'une fonction potentielle des vitesses  $\tilde{\phi}$  telle que :

$$\text{grad} \tilde{\phi} = \vec{V} \quad (2.50)$$

$\vec{V}$  est le vecteur vitesse dont les composantes sont  $\phi$  et  $h$ .

D'après l'équation(2.50), on peut écrire que :

$$(\tilde{\phi}_\eta)_0 = \Phi(\xi) + g(\xi, \theta) \text{ et } (\tilde{\phi}_\theta)_0 = h(\xi, \theta) \quad (2.51)$$

où  $(\tilde{\phi}_\eta)_0, (\tilde{\phi}_\theta)_0$  sont les dérivées de  $\tilde{\phi}$  par rapport à  $\eta$  et  $\theta$  respectivement.

L'équation de **Bernoulli** pour un écoulement incompressible, non stationnaire est utilisée pour calculer la chute de pression au niveau du conduit d'entrée. D'après Moore-Greitzer [8] :

$$\frac{p_T - p_0}{\rho U^2} = \frac{1}{2}(\phi^2 + h^2) + (\tilde{\phi}_\xi)_0 \quad (2.52)$$

La quantité  $(\tilde{\phi}_\xi)_0$  est ajoutée pour prendre en considération l'instabilité dans  $\Phi$  et  $g$ . Si on considère le conduit de longueur  $l_l$ , où  $\Phi$  est supposée constante. En vertu de l'équation (2.51), le potentiel de vitesse est donné par :

$$\tilde{\phi} = (\eta + l_l) \Phi(\xi) + \tilde{\phi}'(\xi, \eta) \quad (2.53)$$

où  $\tilde{\phi}'$  est une perturbation du potentiel de vitesse telle que :  $\tilde{\phi}'|_{\eta=-l_l} = 0$ .

En dérivant l'équation (2.53) par rapport à  $\eta$  et  $\theta$  et en utilisant l'équation (2.51), on trouve que :

$$(\tilde{\phi}'_\eta)_0 = g(\xi, \theta) \quad \text{et} \quad (\tilde{\phi}'_\theta)_0 = h(\xi, \theta) \quad (2.54)$$

En dérivant la même équation par rapport à  $\xi$ , on aura :

$$(\tilde{\phi}'_\xi)_0 = l_l \frac{d\Phi}{d\xi} + (\tilde{\phi}'_\xi)_0 \quad (2.55)$$

En utilisant l'équation (2.55), l'équation (2.52) s'écrit alors :

$$\frac{p_T - p_0}{\rho U^2} = \frac{1}{2}(\phi^2 + h^2) + l_l \frac{d\Phi}{d\xi} + (\tilde{\phi}'_\xi)_0 \quad (2.56)$$

### C Conduit et vannes de sortie (OGV)

À la sortie du compresseur, l'écoulement est considéré rotationnel. On définit :

$$P = \frac{p_s(\xi) - p}{\rho U^2} \quad (2.57)$$

où  $p$  est la pression dans le conduit de sortie,  $p_s(\xi)$  est la pression statique dans le plenum.

L'équation d'Euler est utilisée pour calculer la chute de pression au niveau du conduit de sortie :

$$\rho \frac{dV}{dt} = -grad p \quad (2.58)$$

Dans la direction  $x$ , elle est donnée par :

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \frac{dC_x}{dt} \quad (2.59)$$

En considérant la pression au point E (à la sortie du compresseur) sur la figure 21 où

$p_s(\xi) = 0$  et en utilisant la définition de la coordonnée axiale :  $\eta = \frac{x}{R}$ , le gradient de  $p$  au point E se calcule à partir de l'équation (2.57) :

$$\frac{dp_E}{dx} = -\rho U^2 \frac{1}{R} (P_\eta)_E \quad (2.60)$$

où  $P_\eta$  est la dérivée de  $P$  par rapport à  $\eta$ .

En utilisant l'équation (2.51) et la définition de  $\phi$ , on aura :

$$\frac{dC_s}{dt} = \frac{U_d}{R} \frac{d}{d\xi} \{(\phi U)\} = \frac{U_d}{R} \frac{d}{d\xi} \{(\tilde{\phi}_\eta)_0 U\} \quad (2.61)$$

En insérant les équations (2.60) et (2.61) dans (2.59), on aura :

$$(P_\eta)_E = \frac{U_d}{U^2} \left\{ (\tilde{\phi}_{\eta\xi})_0 U + (\tilde{\phi}_\eta)_0 \frac{dU}{d\xi} \right\} \quad (2.62)$$

Or, d'après (2.51) et (2.55) :

$$(\tilde{\phi}_{\eta\xi})_0 = \Phi_\xi(\xi) + (\tilde{\phi}'_{\eta\xi})_0 \quad (2.63)$$

En insérant (2.63) dans (2.62) et en utilisant (2.51) et (2.54), on aura :

$$(P_\eta)_E = \frac{U_d}{U} \left( \frac{d\Phi}{d\xi} + (\tilde{\phi}'_{\eta\xi})_0 \right) + \frac{U_d}{U^2} (\Phi(\xi) + (\tilde{\phi}'_\eta)_0) \frac{dU}{d\xi} \quad (2.64)$$

En intégrant  $(P_\eta)_E$  et en utilisant la condition  $P = 0$  pour  $\eta = l_E$ , on aura :

$$P = \frac{U_d}{U(\xi)} \left\{ (\eta - l_E) \frac{d\Phi}{d\xi} - \tilde{\phi}'_\xi \right\} + \frac{U_d}{U^2} \frac{dU}{d\xi} \{ (\eta - l_E) \Phi(\xi) - \tilde{\phi} \} \quad (2.65)$$

L'équation (2.57) prend la forme suivante :

$$\frac{p_s - p_E}{\rho U^2} = (P)_E = \frac{U_d}{U} \left\{ -l_E \frac{d\Phi}{d\xi} - (m-1)(\tilde{\phi}'_{\xi})_0 \right\} + \frac{U_d}{U^2} \frac{dU}{d\xi} \left\{ -l_E \Phi(\xi) - (m-1)(\tilde{\phi}')_0 \right\} \quad (2.66)$$

Le paramètre  $m$  est introduit pour caractériser le retard à l'extérieur du compresseur. D'après Moore-Greitzer [8] :

$m = 2$  Pour un très long conduit de sortie

$m = 1$  Pour un conduit très court

## D Bilan des pressions

Après avoir étudié les différentes parties du système de compression, on cherche à trouver une relation entre la pression à l'entrée du système  $p_T$  et la pression statique du plenum  $p_s$ . Ceci est faisable en considérant la chute de pression au niveau de chaque partie du système de compression représentée sur la figure 21. On peut écrire que :

$$\frac{p_s - p_T}{\rho U^2} = \frac{p_E - p_1}{\rho U^2} + \frac{p_0 - p_T}{\rho U^2} + \frac{p_1 - p_0}{\rho U^2} + \frac{p_s - p_E}{\rho U^2} \quad (2.67)$$

En utilisant les équations (2.44), (2.49), (2.56) et (2.66), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{p_s - p_T}{\rho U^2} = & (NF(\phi) - \frac{1}{2}\phi^2) - \frac{1}{2}h^2(1 - K_G) - (l_l + l_E \frac{U_d}{U} + \frac{1}{a}) \frac{d\Phi}{d\xi} + \\ & ((1-m) \frac{U_d}{U} - 1)(\tilde{\phi}'_{\xi})_0 + \frac{U_d}{U^2} \frac{dU}{d\xi} (-l_E \Phi(\xi) - (m-1)(\tilde{\phi}')_0) \\ & - \frac{1}{2a} (2(\tilde{\phi}'_{\xi\eta})_0 + \frac{U}{U_d} (\tilde{\phi}'_{\eta\theta})_0) - \frac{1}{\gamma_v^2} \phi^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dans ce qui suit on prend  $K_G = 1$ , en supposant qu'il n'y a aucune perte à l'entrée des (IGV).

En posant :

$$\psi_c(\phi) = NF(\phi) - \frac{1}{2}\phi^2 \quad (2.69)$$

$$l_c(U) = l_l + \frac{1}{a} + l_E \frac{U_d}{U} \quad (2.70)$$

$$m_U(U) = (1 - m) \frac{U_d}{U} - 1 \quad (2.71)$$

On aura :

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) = \frac{p_s - p_T}{\rho U^2} = \psi_c(\Phi + (\tilde{\phi}'_\eta)_0) - l_c(U) \frac{d\Phi}{d\xi} + m_U(U) (\tilde{\phi}'_\xi)_0 + \\ \frac{U_d}{U^2} \frac{dU}{d\xi} (-l_E \Phi(\xi) - (m - 1)(\tilde{\phi}')_0) - \frac{1}{2a} (2(\tilde{\phi}'_{\xi\eta})_0 + \frac{U}{U_d} (\tilde{\phi}'_{\eta\theta})_0 - \mu(\tilde{\phi}'_{\eta\theta\theta})_0) \\ - \frac{1}{\gamma_t^2} \phi^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

Le terme  $\mu$  est ajouté pour prendre en considération la viscosité présente dans le compresseur.

## E Niveau du plenum

En assumant que la variation de pression dans le plenum est isentropique, on a :

$$\frac{\dot{m}_c - \dot{m}_l}{V_p} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a_s^2} \frac{dp_s}{dt} \quad (2.73)$$

où  $V_p$  est le volume dans le plenum,  $a_s$  est la vitesse du son,  $\dot{m}_c$  est le débit de masse entrant dans le plenum issu du compresseur,  $\dot{m}_t$  est le débit sortant du plenum vers la vanne de contrôle.

En divisant et en multipliant la partie gauche de l'équation (2.73) par  $\rho UA_c$ , et la partie droite par  $\rho U^2$ , on aura :

$$\frac{\dot{m}_c - \dot{m}_t}{\rho UA_c} = \frac{V_p U^2}{a_s^2 A_c \rho U^3} \frac{dp_s}{dt} = \Phi - \Phi_t \quad (2.74)$$

Or :

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{dp_s}{d\xi} \frac{U_d}{R} \quad (2.75)$$

La pression  $P_t$  est nulle au niveau du plenum. En utilisant la partie gauche de l'équation (2.72), on peut écrire que :

$$\frac{dp_s}{d\xi} = \rho \frac{d}{d\xi} (\Psi U^2) = \rho \left\{ \frac{d\Psi}{d\xi} U^2 + 2U \frac{dU}{d\xi} \Psi \right\} \quad (2.76)$$

En utilisant les équations (2.75), (2.76), (2.22) et (2.33) et la définition du paramètre de Greitzer (2.5), l'équation (2.74) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2}{B} (\Phi - \Phi_t) - 2\Lambda_1 \Gamma B \Psi \quad (2.77)$$

## F Approximation de Galerkin

Pour transformer l'équation différentielle à dérivées partielle (2.72) en équations différentielles ordinaires, on utilise l'approximation de Galerkin [9] de n<sup>ième</sup> ordre :

$$(\tilde{\phi}')^* = \sum_{n=1}^{n=N(\mu)} \frac{W}{n} e^{in\theta} A_n(\xi) \sin(n\theta - r_n(\xi)) \quad (2.78)$$

où  $A_n(\xi)$  est l'amplitude du n<sup>ième</sup> mode du décrochage tournant,  $r_n(\xi)$  est l'angle de phase associé.

Le résidu est donné par :

$$R_n = (\tilde{\phi}'_\xi)^* - (\tilde{\phi}'_\xi)_0 \quad (2.79)$$

En dérivant (2.78) par rapport à  $\xi$ , et en utilisant l'équation (2.72), on aura :

$$\begin{aligned} R_n = & \frac{W}{n} \left[ \frac{dA_n(\xi)}{d\xi} \sin(\zeta_n) - A_n(\xi) \frac{dr_n(\xi)}{d\xi} \cos(\zeta_n) \right] - \frac{1}{m_U(U)} \\ & \left\{ \Psi(\xi) - \Psi_c(\Phi + WA_n \sin(\zeta_n)) + l_c(U) \frac{d\Phi}{d\xi} + \frac{U_d \Lambda_1 \Gamma l_E}{b} \Phi + \right. \\ & \frac{U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{bn} A_n(\xi) \sin(\zeta_n) + \frac{W}{2a} \left[ 2 \left[ \frac{dA_n(\xi)}{d\xi} \sin(\zeta_n) - A_n(\xi) \frac{dr_n(\xi)}{d\xi} \cos(\zeta_n) \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{Un}{U_d} A_n(\xi) \cos(\zeta_n) + \mu n^2 A_n(\xi) \sin(\zeta_n) \right] + \frac{1}{\gamma_v^2} (\Phi + WA_n(\xi) \sin(\zeta_n))^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

où :

$$\zeta_n = n\theta - r_n(\xi) \quad (2.81)$$

L'approximation de Galerkin se calcule de la manière suivante :

1. On choisit les fonctions de test suivantes :

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sin(\zeta_n), \quad f_3 = \cos(\zeta_n) \quad (2.82)$$

2. On calcule les moments :

$$M_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_n(\zeta) \cdot f_i(\zeta) d\zeta \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.83)$$

3. Finalement, on pose :

$$M_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.84)$$

Le calcul de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  nous donne :

$$\begin{aligned} M_1 = & -\frac{1}{m_U(U)} \left\{ \Psi(\xi) + l_c(U) \frac{d\Phi}{d\xi} + l_E \frac{U_d \Gamma \Lambda_1 \Phi}{b} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_c(\Phi + WA(\xi) \sin(\xi)) d\xi \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi + WA \sin(\xi_n))^2 d\xi_n \right\} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \frac{W}{2n} \frac{dA_n(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{m_U(U)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_c(\Phi + WA \sin(\xi_n)) \sin(\xi_n) d\xi_n - \right. \\ & \frac{U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{2bn} A_n(\xi) - \frac{W}{2a} \left\{ \frac{dA_n(\xi)}{d\xi} + \frac{\mu n^2}{2} A_n(\xi) \right\} - \\ & \left. \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi + WA \sin(\xi_n))^2 \sin(\xi_n) d\xi_n \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & -\frac{W}{2n} A_n(\xi) \frac{dr_n(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{m_U(U)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_c(\Phi + WA \sin(\xi_n)) \cos(\xi_n) d\xi_n + \right. \\
& \left. \frac{W}{2a} A_n(\xi) \frac{dr_n}{d\xi} - \frac{W}{4a} \frac{Un}{U_d} A_n(\xi) - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi + WA \sin(\xi_n))^2 \cos(\xi_n) d\xi_n \right\}
\end{aligned} \tag{2.87}$$

En mettant  $M_1$  égal à zéro, on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_c(\Phi + WA_n(\xi) \sin(\zeta_n)) d\zeta_n = & \Psi(\xi) + l_c(U) \frac{d\Phi}{d\xi} + l_E \frac{U_d \Gamma \Lambda_1}{b} \Phi \\
& + \frac{1}{\gamma_v^2} \left( \Phi^2 + \frac{A_n^2(\xi) W^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

De la même manière pour  $M_2$  :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_c(\Phi + WA_n(\xi) \sin(\zeta_n)) \sin(\zeta_n) d\zeta_n = & \frac{dA_n}{d\xi} \left[ \frac{W}{2a} - \frac{W}{2n} m_U(U) \right] + \\
& \frac{U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1) W A_n(\xi)}{2bn} + \frac{W}{4a} \mu n^2 A_n(\xi) + \frac{A_n(\xi) W}{\gamma_v^2} \Phi
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Finalement pour  $M_3$  :

$$\frac{dr_n}{d\xi} = \frac{b n^2 B}{2U_d(n - m_U(U)a)} \tag{2.90}$$

## G Modèle final

En évaluant les intégrales dans (2.88) et (2.89) en utilisant l'équation de la caractéristique du compresseur  $\Psi_c$  (équation(2.9)), et en considérant les équations (2.22)

et (2.77); le modèle se présente sous la forme suivante :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c(U)} \left[ -\frac{\psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} \left( \frac{\Phi^2}{H} + \frac{W^2 J}{2H} \right) - \frac{U_d \Lambda_1 \Gamma l_E \Phi}{bH} \right] \quad (2.91)$$

$$\frac{dJ_n}{d\xi} = J_n \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_n}{4} - \frac{\mu n^2 W}{3aH} - \frac{2U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{3Hbn} - \frac{4\Phi W}{3H\gamma_v^2} \right) \frac{3aHn}{(n - m_U(U)a)W} \quad (2.92)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_T) - 2\Lambda_1 \Gamma \frac{U}{b} \Psi \quad (2.93)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = \Lambda_1 \Gamma \frac{U^2}{b} \quad (2.94)$$

$$n = 1..N(\mu)$$

C'est un modèle qui a la même structure que celui de Gravdahl-Egeland cependant il inclut la contribution de la CCV, caractérisée par l'apparition du paramètre  $\gamma_v$ . Ce modèle a été développé pour donner plus de flexibilité dans l'élaboration de la stratégie de contrôle de la vitesse du compresseur et des non linéarités aérodynamiques. Ce qui sera exposé dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE 3

### COMMANDE DE LA TURBINE À GAZ

#### 3.1 Introduction

Deux stratégies sont utilisées pour contrôler un système de compression :

##### a. Contrôle passif

Il consiste à faire fonctionner le compresseur à une distance sécuritaire de la zone d'instabilité (figure 22). Dans cette stratégie, une ligne de contrôle est définie à une certaine distance de la ligne de pompage, ce qui constitue une zone de sécurité. Cette zone est dictée par la limitation des capteurs et vannes utilisées. Si le point de fonctionnement du système tente de franchir la ligne de contrôle, il sera maintenu en ouvrant une vanne d'anti-pompage (bleed valve) ou une vanne de recyclage. Elargir la zone de fonctionnement peut réduire les coûts de fonctionnement et le nombre de compresseurs utilisés.

##### b. Contrôle actif

Plusieurs façons sont utilisées pour élargir la plage de fonctionnement stable du compresseur. On peut les classer dans deux catégories distinctes :

1. Des techniques qui consistent à améliorer la conception du système (matériau utilisé, forme des aubes, etc..)[32].
2. Des techniques qui éliminent les instabilités en développant des stratégies de commande [32].

Le contrôle actif augmente la plage de fonctionnement au delà de la ligne de pompage comme le montre la figure 22. Dans notre étude, on considère cette deuxième catégorie.

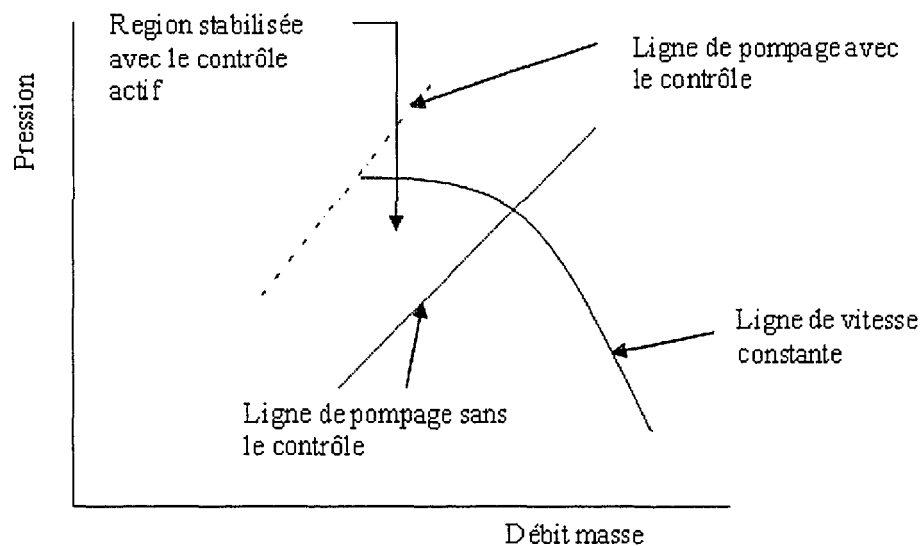


Figure 22 Contrôle passif et actif

Plusieurs techniques de commande ont été développées dans la littérature pour donner des outils susceptibles de contrôler les systèmes dynamiques quelque soit leur degré de complexité. Cependant la difficulté réside dans le choix de la stratégie de commande à utiliser. Parmi les techniques de commande existantes, on peut citer l'approche de la géométrie différentielle [33-36], la méthode backstepping [33;37], le mode de glissement [38;39], la passivité [40] et la théorie de la platitude [41].

Pour le contrôle d'un système de compression (turbine), l'approche de la bifurcation [42-44] ainsi que la méthode de backstepping [37;45] ont été utilisées avec le modèle de Moore-Greitzer. Gravdahl et Egeland [21] ont utilisé la méthode de backstepping pour contrôler le modèle de Moore-Greitzer incluant une CCV. Ils ont proposé aussi un contrôleur proportionnel pour leur modèle[22].

Dans ce chapitre, nous allons appliquer différentes stratégies de contrôle non linéaires aux différents modèles de la turbine présentés au chapitre précédent. Ainsi, nous allons étudier :

1. Le modèle le plus simple (mais le plus utilisé) de Moore-Greitzer auquel nous allons appliquer deux stratégies de commande : la commande par la méthode de backstepping et l'approche de la géométrie différentielle.
2. Le modèle de Moore-Greitzer incluant une CCV auquel nous allons appliquer une commande backstepping [21].
3. Le modèle Gravdahl-Egeland auquel nous allons appliquer une commande proportionnelle (P) [22] et simuler le système pour voir l'effet de cette commande sur l'évolution des états du système.
4. Finalement le modèle que nous avons proposé auquel nous allons appliquer l'approche de la géométrie différentielle et plus précisément la linéarisation exacte par retour dynamique.

### 3.2 Commande du modèle de Moore-Greitzer

#### 3.2.1 Caractéristiques du modèle

Rappelons que le modèle de Moore-Greitzer [8] se présente sous la forme suivante :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}_T(\Psi_T) \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.2)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (3.3)$$

où :

$$J(\xi) = A^2(\xi) \quad (3.4)$$

Les deux phénomènes non linéaires à savoir le pompage pur et le décrochage tournant sont représentés comme suit :

Dans le cas du décrochage pur, on pose  $J = 0$ . On obtient alors :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}_T(\Psi_T) \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.6)$$

Dans le cas du décrochage tournant pur, les dérivés par rapport au temps  $\xi$  des équations (3.1), (3.2) et (3.3) doivent être nulles :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}_T(\Psi_T) \right] \frac{H}{l_c} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} = 0 \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) admet deux solutions : soit  $J = 0$ , soit :

$$J = 4 \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 \right] \quad (3.10)$$

En remplaçant l'équation (3.10) dans l'équation (3.8), on trouve la caractéristique suivante qui décrit le décrochage tournant, notée  $\Psi_s$  :

$$\Psi_s = \psi_{c0} + H \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) + \frac{5}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \quad (3.11)$$

La caractéristique du compresseur, du décrochage tournant (3.11), ainsi que la caractéristique de la vanne de contrôle sont représentées sur la figure 23 pour les données suivantes utilisées par Moore-Greitzer [10] :

$$\bullet \quad W = 0.25 \quad H = 0.18 \quad \psi_{c0} = 0.3 \quad K_T = 5.5 \quad l_c = 8$$

En rappelant que la caractéristique de la vanne de contrôle est donnée par :

$$F_T = \frac{1}{2} K_T \Phi_T^2 \quad (3.12)$$

où  $K_T$  est un coefficient constant.

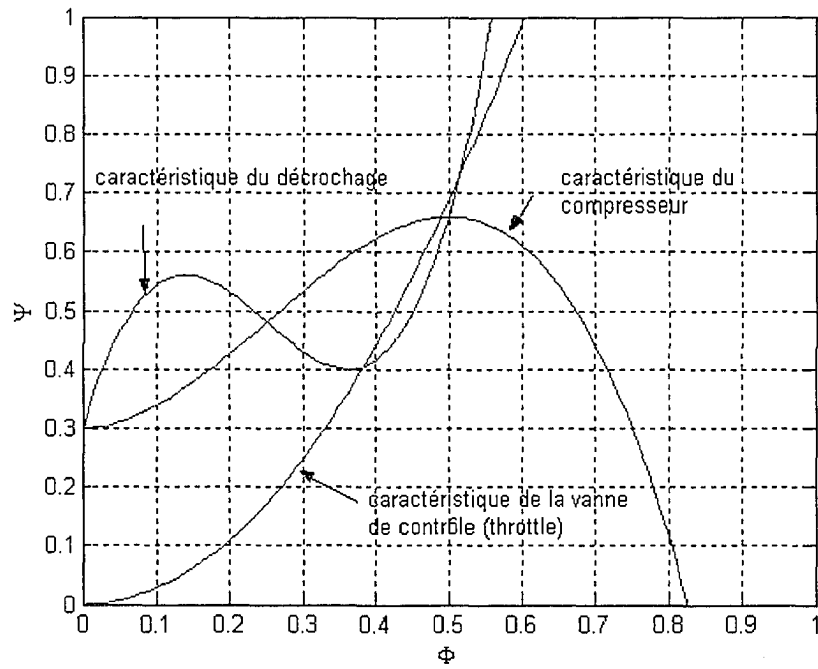


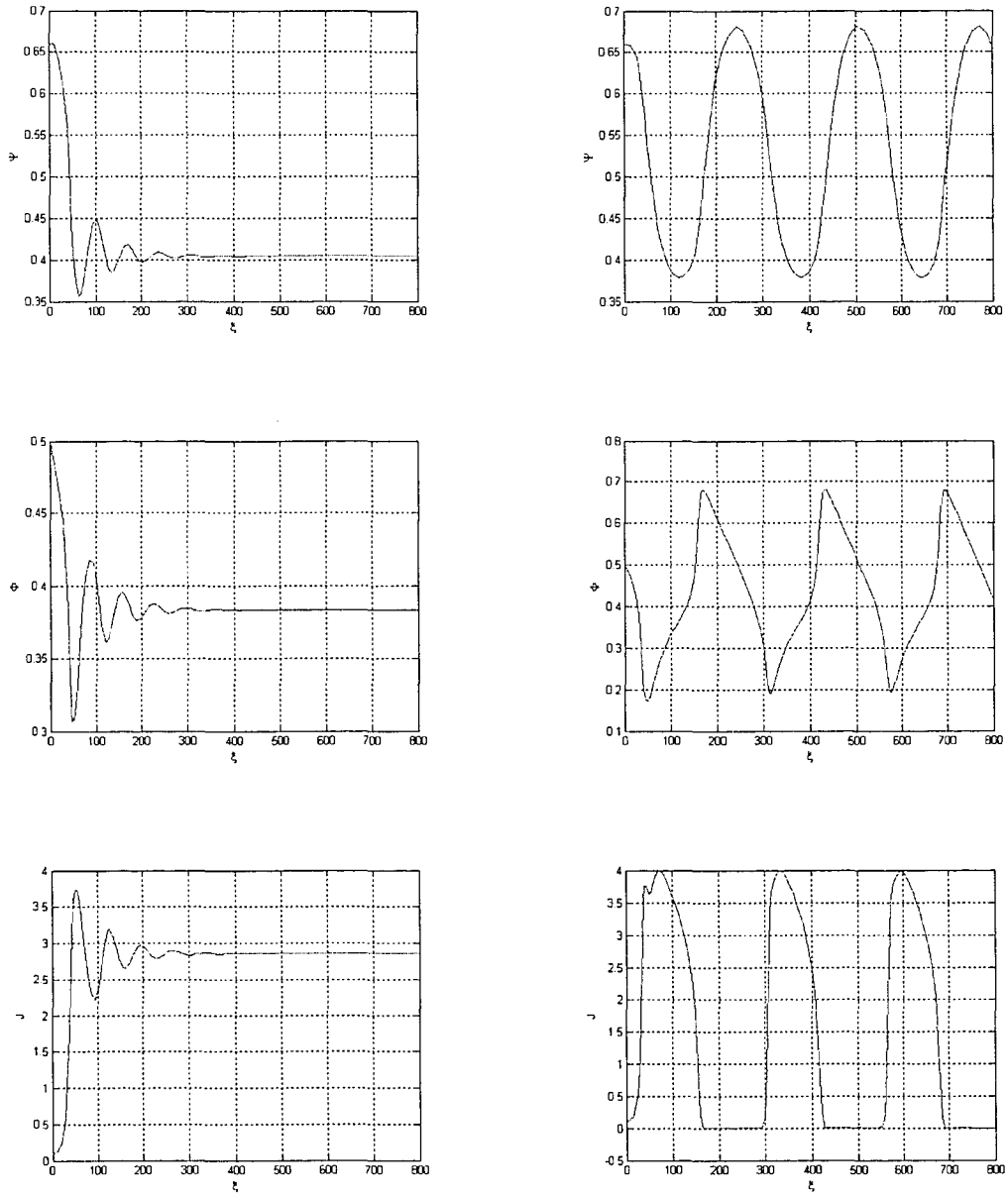
Figure 23 Caractéristiques du compresseur et de la vanne de contrôle

### 3.2.2 Simulation du modèle en boucle ouverte

La simulation du modèle décrit par les équations (3.1), (3.2) et (3.3) en boucle ouverte avec les paramètres suivants :

- $W = 0.25$        $H = 0.18$        $\psi_{c0} = 0.3$        $K_T = 5.5$        $l_c = 8$   
 $a = 1/3.5$        $m = 1.75$        $B = 1.2/0.5$

et la condition initiale :  $(\Phi_0, \Psi_0, A_0) = (0.5, 0.66, 0.1)$ , est représentée sur la figure 24.



$B = 0.5$  (décrochage tournant)

$B=1.2$  (pompage)

Figure 24 Simulation du modèle de M-G pour  $B=0.5$  et  $B = 1.2$

### 3.2.3 Points d'équilibres

En utilisant les transformations suivantes :

$$\tilde{A} = \frac{\sqrt{J}}{2}, \tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{W} - 1, \tilde{\Psi} = \frac{\Psi}{H}, \gamma = \frac{1}{W} \sqrt{\frac{2H}{K_T}}, \tilde{\xi} = \frac{H}{Wl_c} \xi \quad (3.13)$$

et en posant :

$$\beta = \frac{2BH}{W}, \sigma = \frac{3}{2} \frac{al_c}{(1+ma)} \quad (3.14)$$

Les équations (3.1),(3.2) et (3.3) se transforment en :

$$\dot{\tilde{\Psi}} = \frac{1}{\beta^2} (\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_T(\tilde{\Psi})), \tilde{\Phi}_T = \gamma \sqrt{\tilde{\Psi}} - 1 \quad (3.15)$$

$$\dot{\tilde{\Phi}} = -\tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}_c(\tilde{\Phi}) - 3\tilde{\Phi}\tilde{A}^2 \quad (3.16)$$

$$\dot{\tilde{A}} = \sigma \tilde{A}(1 - \tilde{\Phi}^2 - \tilde{A}^2) \quad (3.17)$$

où les dérivées à gauches sont par rapport à  $\tilde{\xi}$ .

Les points d'équilibre du système dépendent du paramètre  $\gamma$  de la vanne de contrôle. Ils sont donnés par :

$$\tilde{\Psi}_e = \tilde{\Psi}_c(\tilde{\Phi}_e) = \tilde{\Psi}_{c0} + 1 + \frac{3}{2} \tilde{\Phi}_e - \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_e^3 \quad (3.18)$$

pour :

$$\gamma^2 = \frac{(\Phi_e + 1)^2}{\tilde{\Psi}_c(\tilde{\Phi}_e)}, \tilde{A}_e = 0 \quad (3.19)$$

et :

$$\tilde{\Psi}_e = \tilde{\Psi}_s(\tilde{\Phi}_e) = \tilde{\Psi}_{c0} + 1 - \frac{3}{2}\tilde{\Phi}_e + \frac{5}{2}\tilde{\Phi}_e^3 \quad (3.20)$$

pour :

$$\gamma^2 = \frac{(\Phi_e + 1)^2}{\tilde{\Psi}_s(\tilde{\Phi}_e)}, \tilde{A}_e = \sqrt{1 - \Phi_e^2} \quad (3.21)$$

L'équation (3.18) représente les points d'équilibre en absence de décrochage tournant, cependant l'équation (3.20) représente les points en présence de ce dernier.

### 3.2.4 Linéarisation du modèle non linéaire

Le point d'équilibre correspond à  $\tilde{A}_e = 0$ . Rappelons que  $\tilde{\Phi}_e$  et  $\tilde{\Psi}_e$  sont déterminés par l'intersection de la caractéristique du compresseur  $\tilde{\Psi}_c$  et de la caractéristique de la vanne de contrôle  $\tilde{\Phi}_v$ .

Le maximum de  $\tilde{\Psi}_c$  est atteint pour  $\tilde{\Phi}_e = 1$  (équation (3.18)). Pour cette valeur,  $\tilde{\Psi}_e = \tilde{\Psi}_c(\tilde{\Phi}_e) = \tilde{\Psi}_{c0} + 2$ .

En posant  $\gamma = \gamma_0 + u$  dans l'équation (3.15) puis en procédant à la linéarisation du modèle décrit par les équations (3.15), (3.16) et (3.17) autour du point d'équilibre

$(\tilde{\Psi}_e, \tilde{\Phi}_e, \tilde{A}_e) = (\tilde{\Psi}_{c_0} + 2, 1, 0)$ . On obtient le modèle sous la forme

$\dot{X} = AX + Bu$  avec,

$$A = \begin{bmatrix} -\beta^{-2} \tilde{\Phi}'_T(\tilde{\Psi}_e) & \beta^{-2} & 0 \\ -1 & \tilde{\Psi}'_e(\tilde{\Phi}_e) - 3\tilde{A}_e^2 & -6\tilde{A}_e\tilde{\Phi}_e \\ 0 & -2\sigma\tilde{\Phi}_e\tilde{A}_e & \sigma(1 - \tilde{\Phi}_e^2 - 3\tilde{A}_e^2) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

où  $\tilde{\Phi}'_T$  est la dérivée par rapport à  $\tilde{\Psi}$  et  $\tilde{\Psi}'_e$  est la dérivée par rapport à  $\tilde{\Phi}$ .

Pour  $\tilde{A}_e = 0$ , la valeur propre  $\lambda = \sigma(1 - \tilde{\Phi}_e^2)$  est positive pour  $\tilde{\Phi}_e^2 < 1$ . Dans ce cas les points d'équilibres  $(\tilde{\Phi}_e, \tilde{\Psi}_e)$  ne sont pas stables.

$$X = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_e \\ \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_e \\ \tilde{A} - \tilde{A}_e \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\beta^{-2} \sqrt{\tilde{\Psi}_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

L'évaluation des matrices A et B au point d'équilibre en question nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} -\beta^{-2} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\Psi}_e}} \gamma_0 & \beta^{-2} & 0 \\ -1 & \frac{3}{2}(1-\tilde{\Phi}_e^2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(1-\tilde{\Phi}_e^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta^{-2} \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\Psi}_e}} \gamma_0 & \beta^{-2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\beta^{-2} \sqrt{\tilde{\Psi}_e} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

On remarque que la dernière ligne de la matrice A ne contient que des zéros. En testant la contrôlabilité du système :

$$W_{con} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

On trouve que le système n'est pas contrôlable car  $\text{rang}(W_{con}) = 2 < 3$ . Le résultat sera le même n'importe quel point d'équilibre pour lequel  $\tilde{A}_e = 0$ .

Le point d'équilibre  $(\tilde{\Psi}_e, \tilde{\Phi}_e, \tilde{A}_e) = (\tilde{\Psi}_{e0} + 2, 1, 0)$  est instable d'après [42-44], en d'autres termes, il subit une bifurcation de type fourche sous critique [33]. Pour stabiliser ce point, plusieurs auteurs[42-44] ont utilisé l'approche de la bifurcation.

D'après ce qui précède, on essaiera de trouver une commande non linéaire qui sera capable de contrôler le décrochage tournant et le pompage. Pour arriver à nos fins, on utilisera d'abord l'approche de la géométrie différentielle puis la commande backstepping.

### 3.2.5 L'approche de la géométrie différentielle

#### 3.2.5.1 Linéarisation au sens entrée-sortie

On considère le modèle de Moore-Greitzer décrit par les équations (3.15), (3.16) et (3.17). L'objectif est de stabiliser le point d'équilibre  $\tilde{A}_e = 0, \tilde{\Phi}_e = 1, \tilde{\Psi}_e = \tilde{\Psi}_{c0} + 2$ . On effectue le changement de variables suivant pour ramener le point à l'origine :

$$\phi = \tilde{\Phi} - 1, \psi = \tilde{\Psi} - \tilde{\Psi}_{c0} - 2 \quad (3.28)$$

Les équations (3.15), (3.16) et (3.17) se transforment en :

$$\dot{\tilde{A}} = -\sigma \tilde{A}^3 - \sigma \tilde{A}(\phi^2 + 2\phi) \quad (3.29)$$

$$\dot{\phi} = -\psi - \frac{3}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - 3\tilde{A}^2 \quad (3.30)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\beta^2}(1 + \phi - \tilde{\Phi}_T) \quad (3.31)$$

On choisit comme entrée :  $\tilde{\Phi}_T$  qui est le débit à travers la vanne de contrôle et comme sortie :

$$y = h(x) = \phi \quad \text{Avec} \quad x = (\tilde{A}, \phi, \psi) \quad (3.32)$$

Le système non linéaire s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g u \quad (3.33)$$

Avec :

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\sigma \tilde{A}^3 - \sigma \tilde{A}(2\phi + \phi^2) \\ -\psi - \frac{3}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - 3\tilde{A}^2 \\ \frac{1}{\beta^2}(1 + \phi) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

En utilisant la définition de la dérivée de Lie [33], on a :

$$L_g h(x) = 0 \quad (3.35)$$

$$L_g L_f h(x) = \frac{1}{\beta^2} \neq 0 \quad (3.36)$$

Le degré relatif  $r = 2 < 3$ , d'où la nécessité d'étudier la dynamique interne.

### 3.2.5.2 Étude de la dynamique interne/dynamique du zéro

On met le système sous la forme normale :

$$\xi_1 = \phi \quad (3.37)$$

$$\xi_2 = L_f h = \dot{\phi} \quad (3.38)$$

Pour compléter la base, on cherche  $\eta_1$ , telle que :

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x} g = 0 \quad (3.39)$$

On choisit :

$$\eta_1 = \tilde{A} \quad (3.40)$$

En posant :

$$\lambda = (\xi_1, \xi_2, \eta_1) \quad (3.41)$$

On vérifie que la matrice Jacobienne  $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$  est non singulière. On a donc :

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (3.42)$$

$$\dot{\xi}_2 = -\frac{1}{\beta^2}(1 + \xi_1) - 3\xi_1\xi_2 + 6\sigma\eta_1^4 + 6\sigma\xi_1\eta_1^2 - 3\eta_1^2\xi_2 + 6\sigma\eta_1^2(2\xi_1 + \xi_1^2)(1 + \xi_1) + \frac{1}{\beta^2}u \quad (3.43)$$

$$\dot{\eta}_1 = -\sigma\eta_1^3 - \sigma\eta_1(2\xi_1 + \xi_1^2) \quad (3.44)$$

La dynamique interne est décrite par l'équation(3.44), qui est fortement non linéaire. Pour étudier la stabilité du système on peut limiter l'étude à la dynamique du zéro [34].

- **Dynamique du zéro**

C'est la dynamique du système limitée à la région définie par :

$$M = \{x \in R^3 / \xi_1 = \xi_2 = 0\} \quad (3.45)$$

Elle est définie par :

$$\dot{\eta}_1 = -\sigma \eta_1^3 \quad (3.46)$$

qui est asymptotiquement stable tant que  $\sigma$  est une quantité strictement positive.

La commande  $u$  qui stabilise le système non linéaire est donnée d'après [34] par la forme générale :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}} (-L_f^r h(x) - \alpha_{r-1} L_f^{r-1} h(x) - \dots - \alpha_1 L_f h(x) - \alpha_0 h(x)) \quad (3.47)$$

Avec :

$$d(p) = p^r + \alpha_{r-1} p^{r-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad (3.48)$$

un polynôme de Hurwitz. Pour notre système de degré relatif  $r = 2$  :

$$u = \frac{1}{L_g L_f h} (-L_f^2 h - \alpha_1 L_f h - \alpha_0 h) \quad (3.49)$$

Avec :

$$L_g L_f h = \frac{1}{\beta^2}, \quad L_f h = \dot{\phi}, \quad h = \phi \quad (3.50)$$

$$L_f^2 h = (-6A - 6A\phi)(-\sigma A^3 - \sigma A(2\phi + \phi^2)) - (3\phi + \frac{3}{2}\phi^2 + 3A^2)\dot{\phi} - \frac{1}{\beta^2}(1 + \phi) \quad (3.51)$$

$\alpha_1, \alpha_0$  à choisir pour que :  $s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$  soit un polynôme de Hurwitz (racines à parties réelles négatives).

### 3.2.5.3 Résultats de la simulation

L'objectif est de travailler au point  $(\phi = 0, \psi = 0)$  qui est le maximum de la caractéristique du compresseur pour assurer un meilleur rendement de la turbine. On

choisit pour cela les mêmes données utilisées par Moore-Greitzer durant leur expérimentation:  $W = 0.25$   $H = 0.18$   $\psi_{c_0} = 0.3$   $l_c = 8$   $a = 1/3.5$   $m = 1.75$   $B = 1.4$

### A Point de fonctionnement dans une zone d'instabilité

On suppose que notre point de fonctionnement s'est déplacé dans une zone d'instabilité localisée à gauche du maximum de la caractéristique, qui est pris comme origine. Soit  $\Phi = -0.2, \psi = -0.056$  le point en question, avec un décrochage tournant d'amplitude  $\tilde{A}(0) = 0.1$ .

La simulation du système en boucle fermée en utilisant la commande  $u$  décrite par l'équation (3.49), avec  $\alpha_1 = 5, \alpha_0 = 6$ , est montré sur la figure 25.

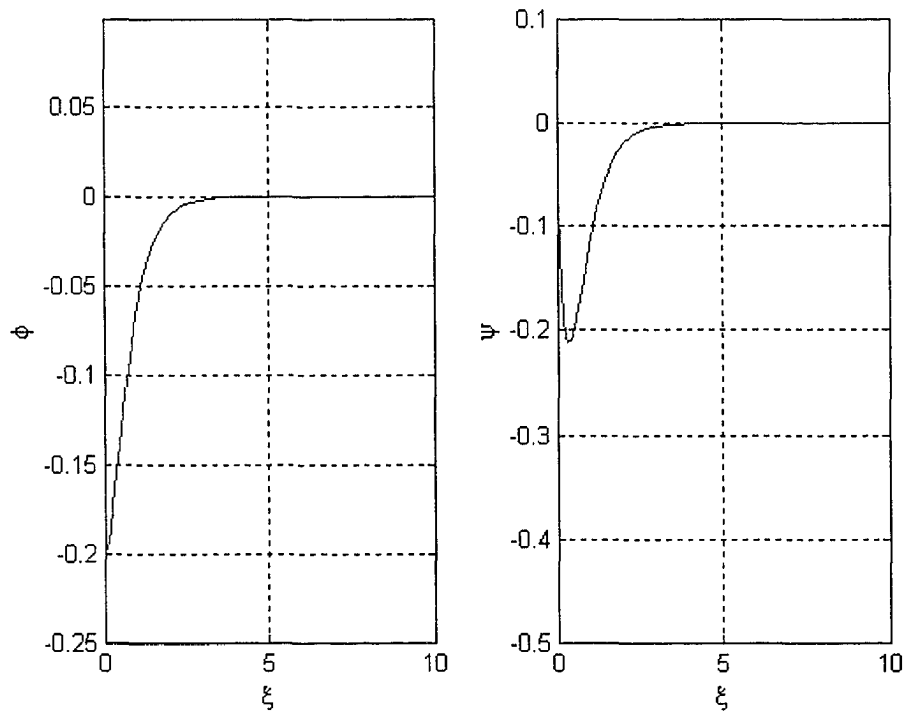


Figure 25 Commande par la linéarisation exacte du modèle de M-G (1)

### B Point de fonctionnement dans une zone stable

On choisit cette fois ci, un point de fonctionnement localisé à la droite du maximum, défini par :  $\Phi = 0.4, \Psi = -0.272$ . Dans ce cas  $\tilde{A}(0) = 0$  (absence de décrochage dans cette zone), on aura alors les allures représentées sur la figure 26.

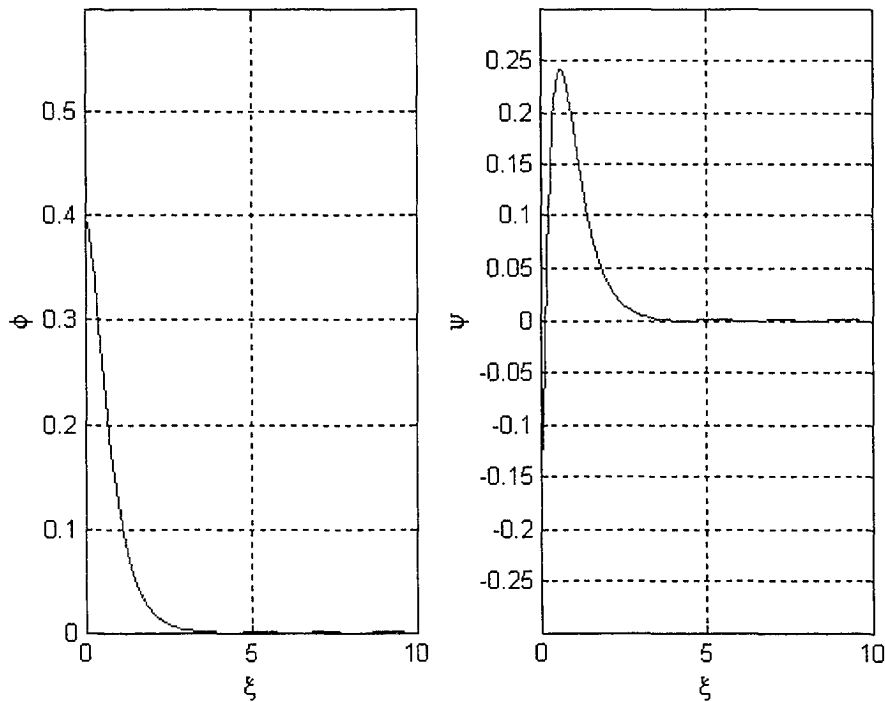


Figure 26 Commande par la linéarisation exacte du modèle de M-G (2)

D'après les figures 26 et 27, la commande  $u$  donnée par l'équation (3.49) stabilise le système décrit par les équations (3.29), (3.30) et (3.31).

#### 3.2.6 Commande par la méthode de backstepping

Rappelons que l'objectif est de stabiliser le point d'équilibre  $\tilde{A}_e = 0, \tilde{\Phi}_e = 1, \tilde{\Psi}_e = \tilde{\Psi}_{c0} + 2$ .

Une commande pour l'équation (3.29) est donnée par :

$$\phi = \alpha(A) = 0 \quad (3.52)$$

L'équation (3.29) devient :

$$\ddot{\tilde{A}} = -\sigma \tilde{A}^3 \quad (3.53)$$

Tant que  $A \geq 0$  d'après [37],  $A(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

Pour la variable  $\psi$ , on choisit comme commande virtuelle pour l'équation (3.30) :

$$\alpha(\phi, A) = c_1 \phi - \frac{3}{2} \phi^2 - 3\tilde{A}^2 \quad (3.54)$$

En ajoutant et en retranchant  $\alpha(\phi, A)$  de l'équation (3.30) et en posant :

$$\bar{\psi} = \psi - \alpha(\phi, A) \quad (3.55)$$

On aura :

$$\dot{\phi} = -\bar{\psi} - \frac{1}{2} \phi^3 - 3\tilde{A}^2 \phi - c_1 \phi \quad (3.56)$$

En différentiant  $\bar{\psi}$  par rapport au temps, on aura :

$$\dot{\bar{\psi}} = \dot{\psi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{A}} \dot{\tilde{A}} \quad (3.57)$$

En utilisant les équations (3.29), (3.30) et (3.31), on aura :

$$\dot{\bar{\psi}} = -u - (c_1 - 3\phi)(-\bar{\psi} - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - c_1\phi) + 6\sigma\tilde{A}^2(-2\phi - \phi^2 - \tilde{A}^2) \quad (3.58)$$

On choisit une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V = \phi^2 + \bar{\psi}^2 \quad (3.59)$$

Alors :

$$\dot{V} = 2\phi\dot{\phi} + 2\bar{\psi}\dot{\bar{\psi}} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & 2\phi(-\bar{\psi} - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - c_1\phi) + 2\bar{\psi}(-u + (3\phi - c_1)(-\bar{\psi} - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - c_1\phi) + \\ & 6\tilde{A}(-\sigma\tilde{A}^3 - \sigma\tilde{A}(\phi^2 + 2\phi))) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ensuite, on cherche  $u$  qui rend  $\dot{V}$  définie négative :

$$u = -(c_1 - 3\phi)(-\bar{\psi} - \frac{1}{2}\phi^3 - 3\tilde{A}^2\phi - c_1\phi) + 6\sigma\tilde{A}^2(-2\phi - \phi^2 - \tilde{A}^2) + c_2\bar{\psi} - \phi \quad (3.62)$$

L'expression de  $\dot{V}$  devient :

$$\dot{V} = -\phi^4 - 6\phi^2\tilde{A}^2 - 2c_1\phi^2 - 2c_2\bar{\psi}^2 \quad (3.63)$$

Avec  $c_1 > 0, c_2 > 0$ .

En remplaçant  $u$  par son expression dans l'équation (3.58), le système résultant est :

$$\dot{\tilde{A}} = -\sigma \tilde{A}^3 - \sigma \tilde{A}(\phi^2 + 2\phi) \quad (3.64)$$

$$\dot{\phi} = -\tilde{\psi} - (c_1 + 3\tilde{A}^2 + \frac{1}{2}\phi^2)\phi \quad (3.65)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \phi - c_2 \bar{\psi} \quad (3.66)$$

Le point d'équilibre  $(\phi, \bar{\psi}, A) = 0$  est globalement asymptotiquement stable. Nous montrerons dans ce qui suit la simulation du modèle en boucle fermée pour deux situations différentes :

#### A) Point d'équilibre instable

On choisit un point d'équilibre instable  $(A = 0.1, \phi = -0.5, \psi = -0.3125)$  situé à gauche du maximum de la caractéristique défini par les coordonnées  $(\phi = 0, \psi = 0)$  et en choisissant comme gains  $c_1 = 0.5$ ,  $c_2 = 1$ , alors la commande  $u$  définie par l'équation (3.62) est capable de ramener le point d'équilibre à l'origine (figure 27).

#### B) Point d'équilibre stable

En choisissant un point d'équilibre stable (à droite du maximum de la caractéristique) défini par  $(A = 0, \phi = 0.2, \psi = -0.064)$ . La commande  $u$  ramène le point d'équilibre à l'origine (figure 28).

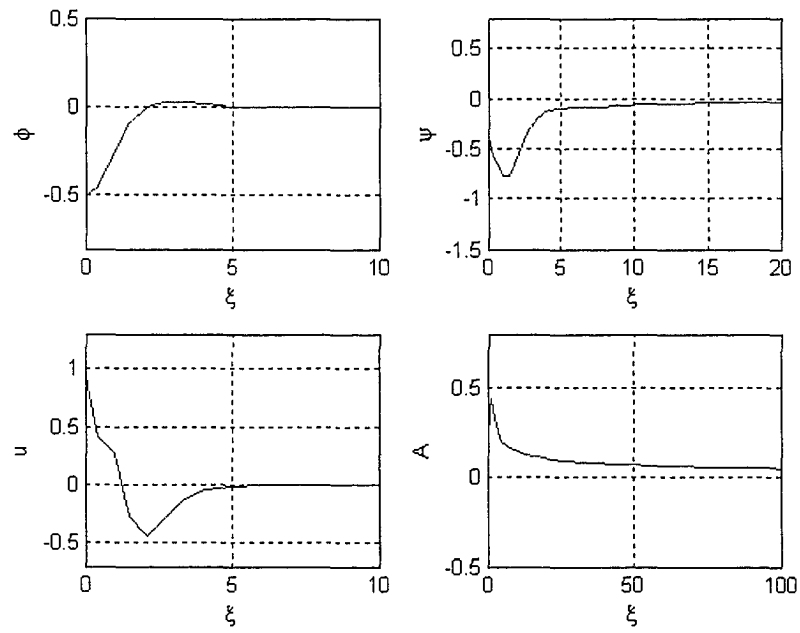


Figure 27 Commande backstepping du modèle de M-G (1)

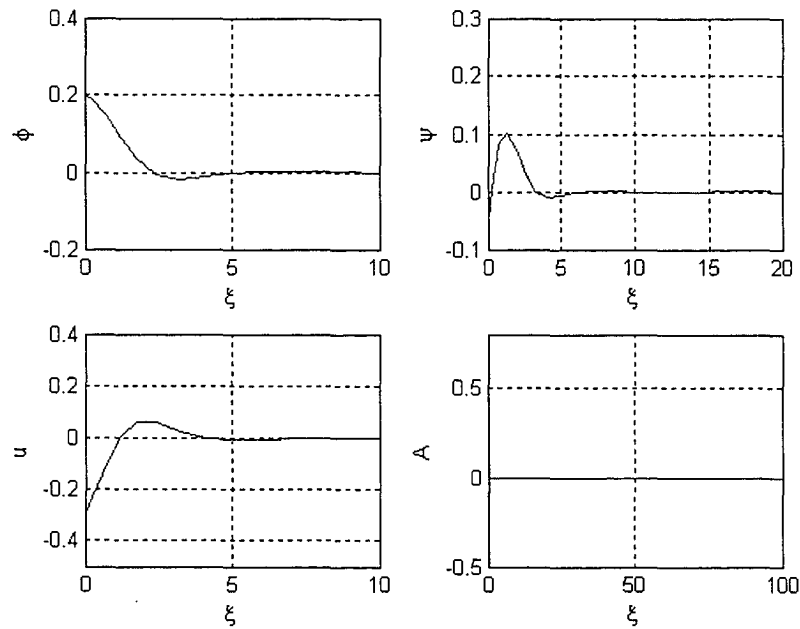


Figure 28 Commande backstepping du modèle de M-G (2)

### 3.3 Commande non linéaire du modèle de Moore-Greitzer incluant une CCV

Rappelons que le modèle de Moore-Greitzer incluant une CCV [21] est donné par les équations suivantes :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} \Phi_r(\Psi) \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.67)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} \left( \frac{W^2 J}{2H} + \frac{\Phi^2}{H} \right) \right] \frac{H}{l_c} \quad (3.68)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4W\Phi}{3H} \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (3.69)$$

Dans le cas d'un pompage pur :  $J = 0$ , le modèle se réduit à :

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{4B^2 l_c} [\Phi - \Phi_r(\Psi)] \quad (3.70)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{1}{l_c} [\Psi_c(\Phi) - \Psi_v(\Phi) - \Psi] \quad (3.71)$$

où :

$$\Psi_c = \psi_{c0} + H \left( 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right) \text{ et } \Psi_v = \frac{1}{\gamma_v^2} \Phi^2$$

#### 3.3.1 Caractéristiques du modèle et points d'équilibres

Les points d'équilibres sont déterminés par :  $\dot{\Psi} = \dot{\Phi} = \dot{J} = 0$ .

$\dot{J} = 0$  est satisfaite pour  $J = 0$  ou

$$J = J_e = 4 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4 W \Phi}{3 H} \right) \quad (3.72)$$

En remplaçant l'équation (3.72) dans l'équation (3.68) puis en mettant  $\dot{\Phi} = 0$ , on aura :

$$\Psi_{es}(\Phi) = \Psi_s(\Phi) + 5 \Psi_v(\Phi) - \frac{8 W}{\gamma_v^2} \left( 1 - \frac{W^2}{3 H \gamma_v^2} \right) \Phi \quad (3.73)$$

où :

$$\Psi_s(\Phi) = \psi_{c0} + H \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) + \frac{5}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right) \quad (3.74)$$

est la caractéristique du décrochage tournant en absence de la CCV.

- Pour  $J = 0$  :

Les points d'équilibres  $\phi_0$  et  $\psi_0$  sont déterminés d'après les équations (3.67) et (3.68) par l'intersection de la caractéristique du compresseur équivalent  $\Psi_e(\Phi)$  avec celle de la vanne de contrôle.

- Pour  $J(0) > 0$  :

Si la caractéristique de la vanne de contrôle rencontre la caractéristique du compresseur équivalent à gauche du maximum local, les points d'équilibres  $\phi_0, \psi_0$  sont donnés par l'intersection de la caractéristique de la vanne de contrôle et la caractéristique du décrochage  $\Psi_{es}(\Phi)$ . La figure 29 montre les différentes caractéristiques.

Le point d'équilibre du système de compression sans la CCV est à l'intersection de la caractéristique du compresseur  $\Psi_c(\Phi)$  et la caractéristique de la vanne de contrôle  $\Phi_T(\Psi)$ . En introduisant la CCV dans le système, le point d'équilibre est déplacé à l'intersection de la caractéristique du compresseur équivalent  $\Psi_e(\Phi)$  et la caractéristique de la vanne de contrôle  $\Phi_T(\Psi)$ .

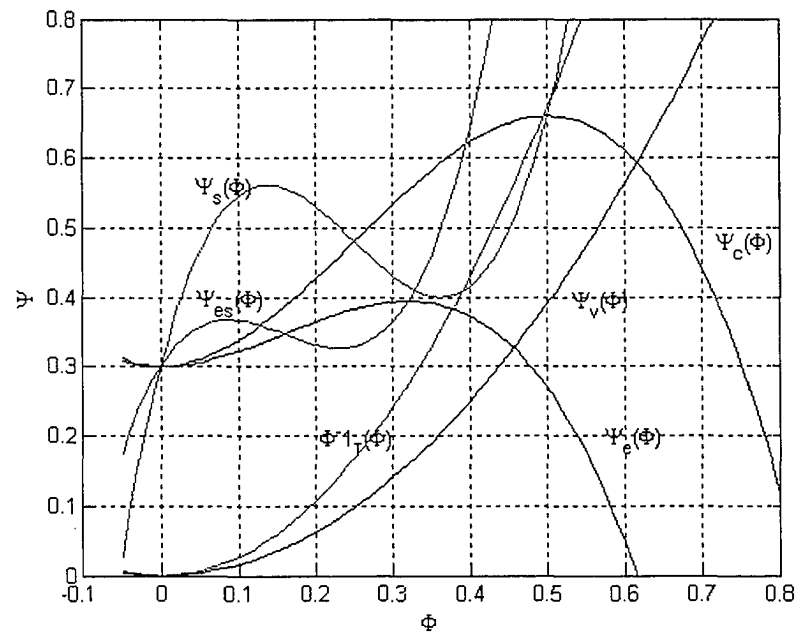


Figure 29 Caractéristiques du compresseur équivalent et de la vanne de contrôle

Les coordonnées du point d'équilibre sont reliés par :

$$\psi_0 = \Phi_T^{-1}(\phi_0) \quad (3.75)$$

Pour analyser le système, un changement de coordonnées est recommandé pour ramener le point d'équilibre à l'origine.

Les nouvelles coordonnées sont alors définies ainsi :

$$\hat{\psi} = \Psi - \psi_0 \quad (3.76)$$

$$\hat{\phi} = \Phi - \phi_0 \quad (3.77)$$

Le modèle de Moore-Greitzer incluant la CCV prend la forme suivante dans le nouveau repère :

$$\frac{d\hat{\psi}}{d\xi} = \frac{1}{4B^2 l_c} \left[ \hat{\phi} - \hat{\phi}_r(\hat{\psi}) \right] \quad (3.78)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = \frac{1}{l_c} \left[ \Psi_v(\phi_0) + \hat{\Psi}_c(\hat{\phi}) - \hat{\psi} - \hat{\Psi}_v(\hat{\phi}) - \psi_0 - \frac{3H}{4} J \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{W^2 J}{2\gamma_v^2} \right] \quad (3.79)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4W\Phi}{3H} \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (3.80)$$

où :

$$\hat{\Psi}_c(\hat{\phi}) = \Psi_c(\Phi) - \psi_0 \quad (3.81)$$

$$\hat{\Psi}_c(\hat{\phi}) = -k_3 \hat{\phi}^3 - k_2 \hat{\phi}^2 - k_1 \hat{\phi} \quad (3.82)$$

Avec :

$$k_1 = \frac{3H\phi_0}{2W^2} \left( \frac{\phi_0}{W} - 2 \right) \quad (3.83)$$

$$k_2 = \frac{3H}{2W^2} \left( \frac{\phi_0}{W} - 2 \right) \quad (3.84)$$

$$k_3 = \frac{H}{2W^3} \quad (3.85)$$

D'après [21], la commande  $u$  est choisie suivant la structure suivante :

$$u = \hat{\Psi}_v(\hat{\phi}) + \psi_0 - \Psi_v(\phi_0) = \Psi_v(\Phi) - \Psi_v(\phi_0) \quad (3.86)$$

Alors le système décrit par les équations (3.78),(3.79) et (3.80) prend la forme suivante :

$$\frac{d\hat{\psi}}{d\xi} = \frac{1}{4B^2l_c} [\hat{\phi} - \hat{\phi}_r(\hat{\psi})] \quad (3.87)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = \frac{1}{l_c} \left[ \hat{\Psi}_c(\hat{\phi}) - \hat{\psi} - u - \frac{3H}{4} J \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{W^2 J}{2\gamma_v^2} \right] \quad (3.88)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4W\Phi}{3H} \right] \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (3.89)$$

Dans le cas d'un pompage pur, le modèle se réduit en :

$$\frac{d\hat{\Psi}}{d\xi} = \frac{1}{4B^2l_c} [\hat{\phi} - \hat{\phi}_r(\hat{\psi})] \quad (3.90)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = \frac{1}{l_c} [\hat{\Psi}_c(\hat{\phi}) - \hat{\psi} - u] \quad (3.91)$$

La stratégie de commande est basée sur la méthode de backstepping.

### 3.3.2 Contrôle du pompage

En considérant le modèle décrit par les équations (3.90) et (3.91), on définit les variables d'erreur :  $z_1 = \hat{\psi}$  et  $z_2 = \hat{\phi} - \alpha$  avec  $\alpha$  une fonction stabilisante.

On choisit une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V_1 = 2B^2 l_c z_1^2 \quad (3.92)$$

$$\dot{V}_1 = z_1(-\hat{\phi}_T(z_1) + z_2 + \alpha) \quad (3.93)$$

$\hat{\phi}_T(z_1)$  est supposée passive, c'est-à-dire  $\hat{\psi} * \hat{\phi}_T(\hat{\Psi}) \geq 0 \quad \forall \hat{\psi}$ .

Comme il est préférable d'éviter l'annulation des non linéarités utiles dans (3.93), on pose  $\alpha = 0$ .

D'où :

$$\dot{V}_1 = -\hat{\phi}_T(z_1) z_1 + z_1 z_2 \quad (3.94)$$

En considérant la deuxième variable :

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{l_c} (\hat{\Psi}_c(z_2) - z_1 - u) \quad (3.95)$$

On choisit une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V_2 = V_1 + \frac{l_c}{2} z_2^2 \quad (3.96)$$

Alors :

$$\dot{V}_2 = -z_1 \hat{\phi}_T(z_1) + z_2 (\hat{\Psi}_c(z_2) - u) \quad (3.97)$$

On choisit  $u$  telle que  $\dot{V}_2$  soit définie négative :

$$u = c_2 z_2 \quad (3.98)$$

où  $c_2 > 0$  est choisi tel que :

$$z_2 \hat{\Psi}_c(z_2) - c_2 z_2^2 < 0 \quad (3.99)$$

D'après [21], on trouve que :

$$c_2 > \frac{k_2^2}{4k_3} - k_1 \quad (3.100)$$

où  $k_1, k_2, k_3$  sont définis par (3.83), (3.84) et (3.85). Le système en boucle fermée prend la forme suivante :

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{4B^2 l_c} (-\hat{\phi}_r(z_1) + z_2) \quad (3.101)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{l_c} (-z_1 + \hat{\Psi}(z_2) - c_2 z_2) \quad (3.102)$$

Le point  $z_1 = z_2 = 0$  est globalement asymptotiquement stable. En considérant les équations (3.86) et (3.98), on peut écrire :

$$\Psi_v(\Phi) - \Psi_v(\phi_0) = c_2(\Phi - \phi_0) \quad (3.103)$$

D'après (3.103), la loi de commande pour  $\gamma_v$  est donnée par l'expression suivante :

$$\gamma_v = \sqrt{\frac{\Phi + \phi_0}{c_2}} \quad (3.104)$$

Cette commande est simulée pour  $B = 1.2$ ,  $\gamma = 0.45$  (paramètre de la vanne de contrôle) et en choisissant  $c_2 = 1.5$  dans la loi de commande (3.98) avec une condition initiale  $(\Psi_0, \Phi_0) = (0.6, 0.60)$ . On aura ce qui est présenté sur la figure 30.

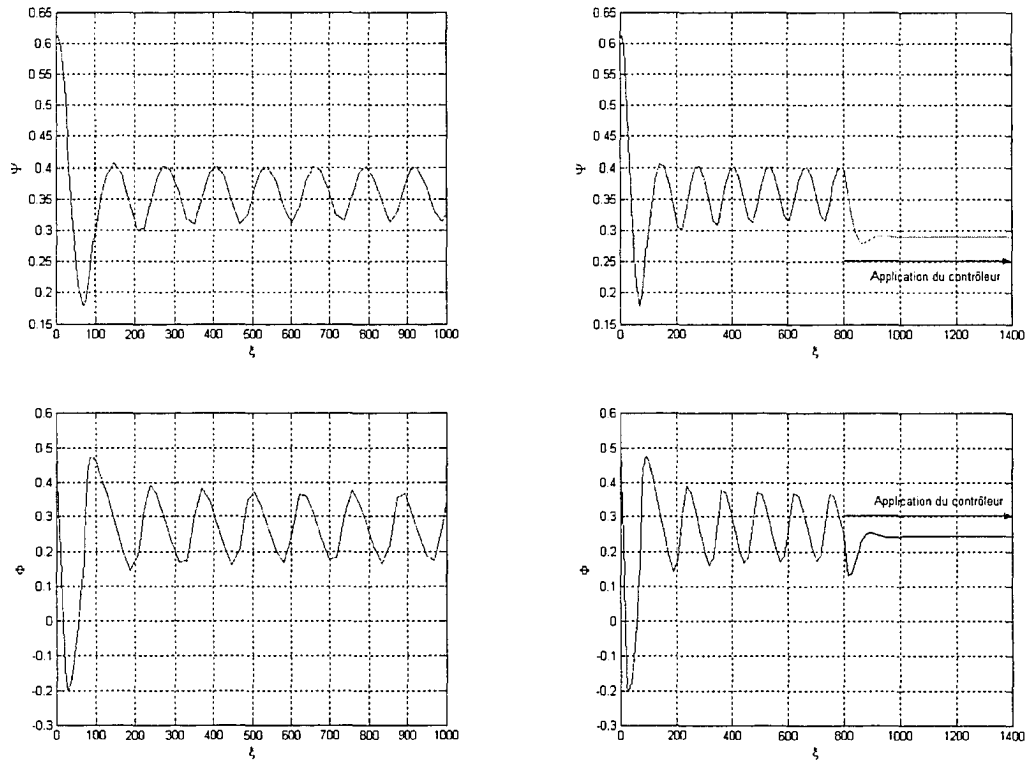


Figure 30 Contrôle du pompage pour le modèle de M-G avec CCV

On voit bien qu'après l'application du contrôleur à l'instant  $\xi = 800$ ,  $(\Psi, \Phi)$  convergent vers le point d'équilibre  $(\psi_0, \phi_0) = (0.2423, 0.29)$  donné par la résolution des deux équations suivantes :

$$\psi_{c_0} + H(1 + \frac{3}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1) - \frac{1}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1)^3) - \frac{c_2 \phi_0}{2} = \frac{1}{\gamma_i^2} \phi_0^2 \quad (3.105)$$

$$\psi_0 = \frac{1}{\gamma_i^2} \phi_0^2 \quad (3.106)$$

### 3.3.3 Contrôle du décrochage tournant

D'après Krstic [37], la variable d'état  $J$  est bornée, c'est-à-dire :

$$\exists J_{\max} < \infty / J(\xi) < J_{\max} \quad \forall \xi > 0 \quad (3.107)$$

De la même manière que précédemment, on définit :

$$z_1 = \hat{\psi}, z_2 = \hat{\phi} - \alpha \quad (3.108)$$

et une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V_1 = 2B^2 l_c z_1^2 \quad (3.109)$$

Alors :

$$\dot{V}_1 = z_1(-\hat{\phi}_r(z_1) + z_2 + \alpha) \quad (3.110)$$

On choisit  $\alpha = 0$ .

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{l_c}(\hat{\Psi}_c(z_2) - z_1 - \frac{3H}{4}J(\frac{\Phi}{W} - 1) - \frac{W^2 J}{2\gamma_v^2}u) \quad (3.111)$$

La fonction de Lyapunov est choisie de la manière suivante :

$$V_2 = V_1 + \frac{l_c}{2} z_2^2 + \frac{1}{\sigma J_{\max}} J \quad (3.112)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -z_1 \hat{\phi}_T(z_1) + z_2 (\hat{\Psi}_c(z_2) - u) + \frac{J}{J_{\max}} \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J}{4} - \frac{1}{\gamma_v^2} \frac{4W}{3H} \Phi \right) - \\ & \frac{3H}{4} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) z_2 J - \frac{W^2 J}{2\gamma_v^2} z_2 \end{aligned} \quad (3.113)$$

D'après [21],  $u$  est choisie de la manière suivante :

$$u = (c_2 + c_3) z_2 \quad (3.114)$$

avec  $c_2, c_3 > 0$ .

$c_2$  se calcule à partir de l'équation (3.100) cependant  $c_3$  est choisi dans l'intervalle :

$$c_3^{\min} < c_3 < c_3^{\max} \quad (3.115)$$

où  $c_3^{\min}, c_3^{\max}$  sont choisis d'après [21].

Pour la simulation, on choisit  $B = 0.5$  pour avoir un décrochage tournant, puis la commande donnée par l'équation (3.114) est appliquée, avec  $c_2 = 1.5, c_3 = 0$ . Le résultat de la simulation est représenté sur la figure 31. Dans cette simulation, le contrôleur est appliqué à l'instant  $\xi = 100$ , il a pour effet de stabiliser le système au point de fonctionnement  $(\psi_0, \phi_0) = (0.2423, 0.29)$ .

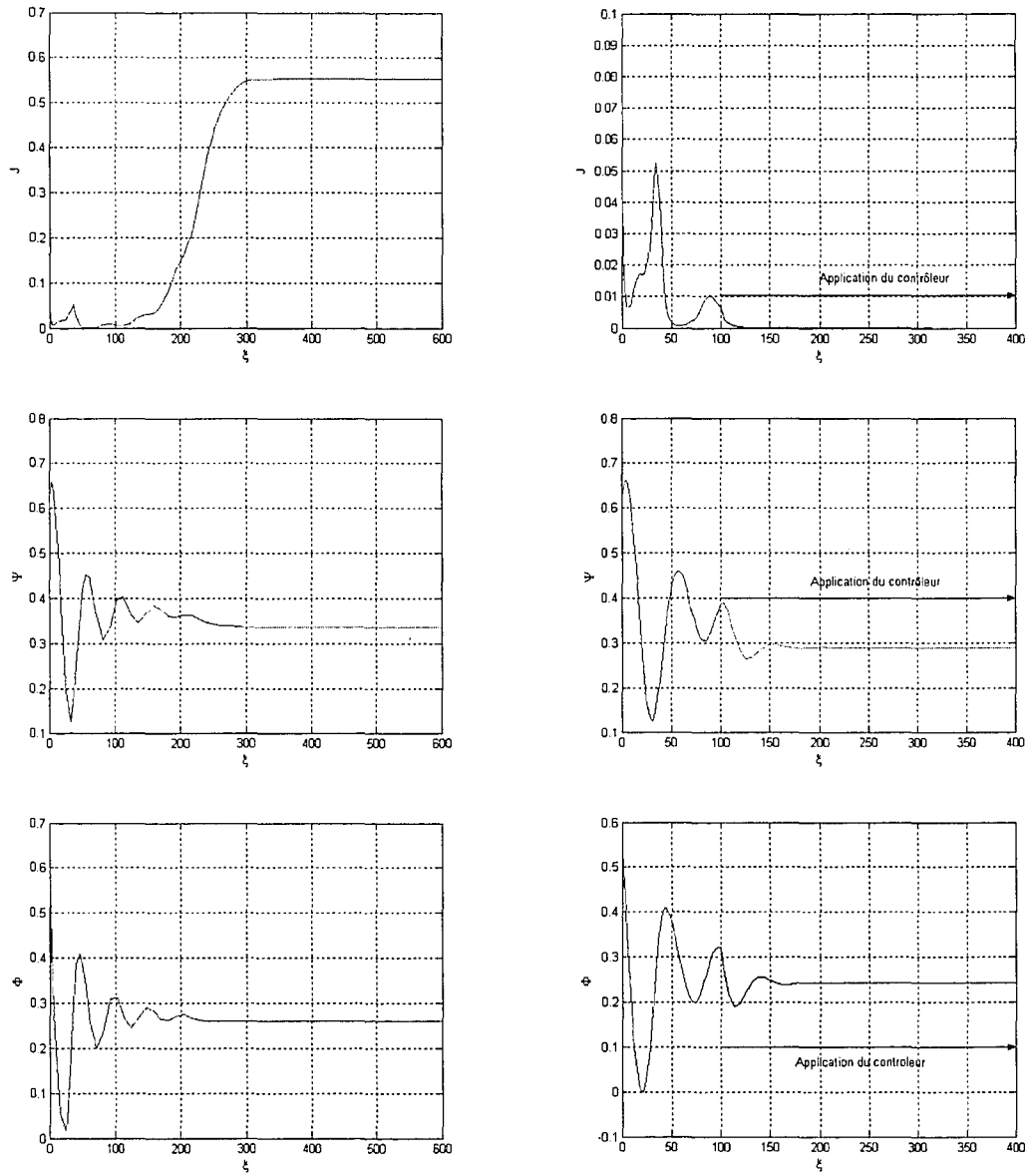


Figure 31 Contrôle du décrochage tournant pour le modèle de M-G avec CCV

### 3.4 Commande du modèle de Gravdahl – Egeland

Rappelons que le modèle de Gravdahl-Egeland[22] est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c(B)} \left( -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{l_E U_d \Lambda_1 \Gamma}{bH} \Phi \right) \quad (3.116)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2}{B} (\Phi - \Phi_T) - 2\Lambda_1 \Gamma B \Psi \quad (3.117)$$

$$\frac{dJ_n}{d\xi} = J_n \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_n}{4} - \frac{\mu n^2 W}{3aH} - \frac{2U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{3bHn} \right) \frac{3aHn}{(n - m_B(B)a)W} \quad (3.118)$$

$$\frac{dB}{d\xi} = \Lambda_1 \Gamma B^2 \quad (3.119)$$

$$n = 1 \dots N(\mu)$$

où tous les paramètres du modèle ont été définis dans la section 2.2.4.

#### 3.4.1 Simulations

Différentes simulations de ce modèle à quatre états sont faites, en utilisant les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} H &= 0.18 & W &= 0.25 & a &= 1/3.5 & l_l &= 2 & l_E &= 8 & R &= 0.1m & V_p &= 1.5m^3 \\ I &= 0.03kg\,m^2 & a_s &= 340m/s & L_c &= 3m & A_c &= 0.01m^2 & \rho &= 1.5kg/m^3 \\ m &= 1.75 & U_d &= 180m/s & \mu &= 0.01 \end{aligned}$$

### A) Seul le premier mode est considéré

On considère la même caractéristique du compresseur que celle de Moore-Greitzer et une caractéristique de la vanne de contrôle de la forme :

$$\Phi_r = \gamma \sqrt{\Psi} \quad (3.120)$$

1. On choisit  $\gamma = 0.5$  tel que le point d'équilibre soit situé à gauche du maximum local de la caractéristique (zone instable). Les conditions initiales sont choisies comme suit :

$$(\Phi, \Psi, J_1, B) = (0.4, 0.62, 0.1, 0.1) \quad (3.121)$$

D'après [22], un contrôleur proportionnel est utilisé pour contrôler la vitesse :

$$\Gamma_t = K(U_d - U) \quad (3.122)$$

La simulation du système est représentée sur la figure 32.

On voit bien que l'état  $B$  se stabilise à :  $\frac{U_d}{b} = \frac{180}{96.16} = 1.88$ . En évoluant de 0.1 jusqu'à 1.88, le système entre en décrochage tournant entre  $\xi = 0$  et  $\xi = 600$ , puis c'est le pompage caractérisé par des oscillations dans  $\Phi$  et  $\Psi$ . Ceci est bien illustré dans le plan de phase.

2. On choisit  $\gamma = 0.65$  tel que le point d'équilibre soit situé à droite du maximum local de la caractéristique (zone stable). Les conditions initiales sont choisies comme suit :

$$(\Phi, \Psi, J_1, B) = (0.59, 0.62, 0.1, 0.1) \quad (3.123)$$

La figure 33 montre l'évolution des différents paramètres.

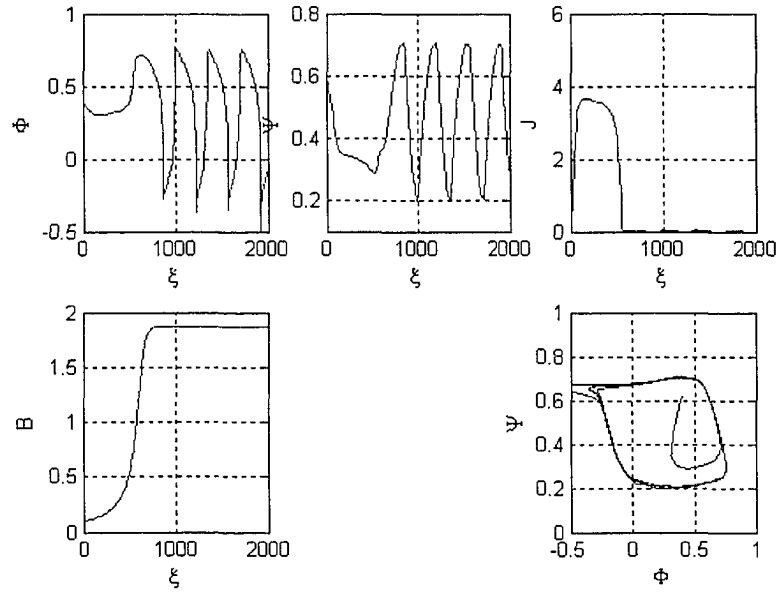


Figure 32 Simulation du modèle de G-E à un seul mode pour  $\gamma = 0.5$

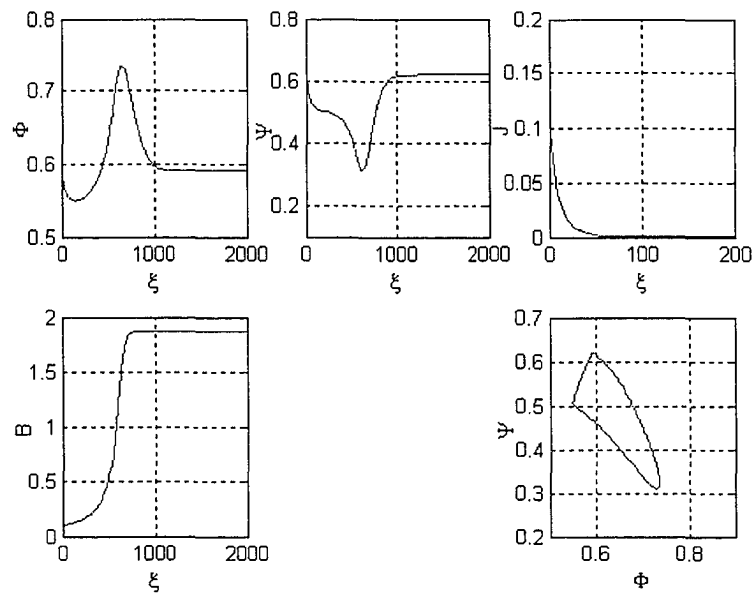


Figure 33 Simulation du modèle de G-E à un seul mode pour  $\gamma = 0.65$

Dans ce cas  $\Phi$  et  $\Psi$  convergent vers le point d'équilibre comme illustré sur le plan de phase.

### B) Les trois premiers modes sont considérés

Dans ce cas, on considère les trois premiers modes :  $J_1, J_2, J_3$ .

#### 1. $\gamma = 0.5$

On choisit les conditions initiales suivantes :

$$(\Phi, \Psi, J_1, J_2, J_3, B) = (0.4, 0.62, 0.1, 0.1, 0.05, 0.1) \quad (3.124)$$

La figure 34 montre l'évolution des différents états du modèle. On remarque que l'amplitude de  $J$  qui est la moyenne arithmétique de  $J_1, J_2, J_3$  est inférieure à celle de  $J_1$  défini dans la section précédente, du fait qu'en allant d'un mode au suivant, l'amplitude diminue, due à la présence du paramètre de viscosité dans le modèle.

#### 2. $\gamma = 0.65$

Pour les conditions initiales suivantes :

$$(\Phi, \Psi, J_1, J_2, J_3, B) = (0.59, 0.62, 0.1, 0.1, 0.05, 0.1) \quad (3.125)$$

On obtient les allures représentées sur la figure 35.

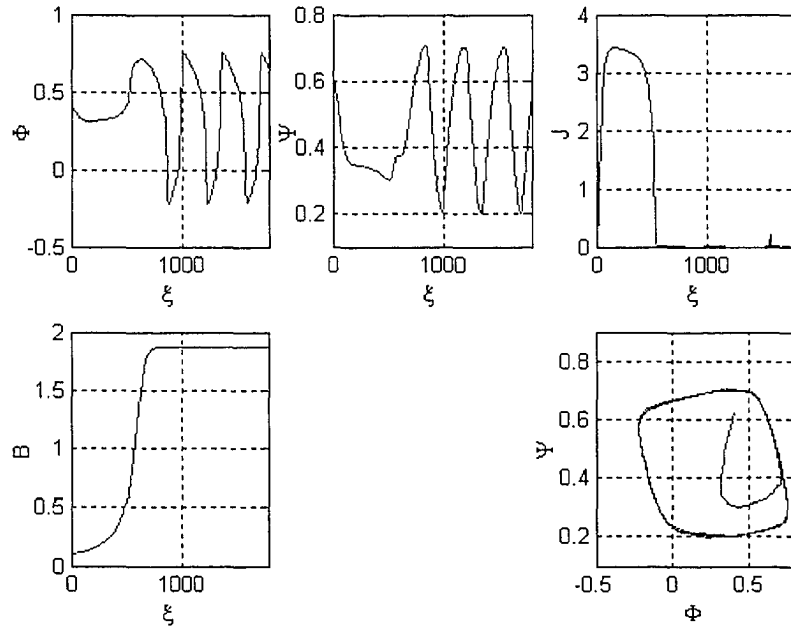


Figure 34 Simulation du modèle de G-E à trois modes pour  $\gamma = 0.5$

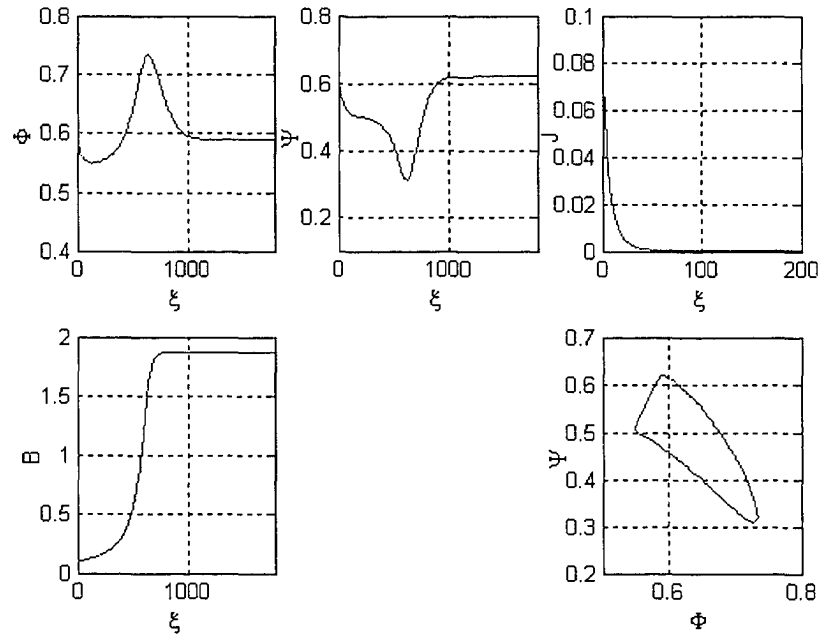


Figure 35 Simulation du modèle de G-E à trois modes pour  $\gamma = 0.65$

### C) Les quatre premiers modes sont considérés

On ajoute encore un mode pour voir l'influence de ce dernier sur l'évolution du système.

#### 1. $\gamma = 0.5$

Pour un choix de conditions initiales :

$$(\Phi, \Psi, J_1, J_2, J_3, J_4, B) = (0.4, 0.62, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.1) \quad (3.126)$$

La figure 36 illustre les allures des différents états du modèle. On voit encore que l'amplitude de  $J$  décroît à l'ajout d'un autre mode.

#### 2. $\gamma = 0.65$

Pour les conditions initiales suivantes :

$$(\Phi, \Psi, J_1, J_2, J_3, J_4, B) = (0.59, 0.62, 0.1, 0.1, 0.05, 0.05, 0.1) \quad (3.127)$$

La figure 37 montre l'évolution des états du système.

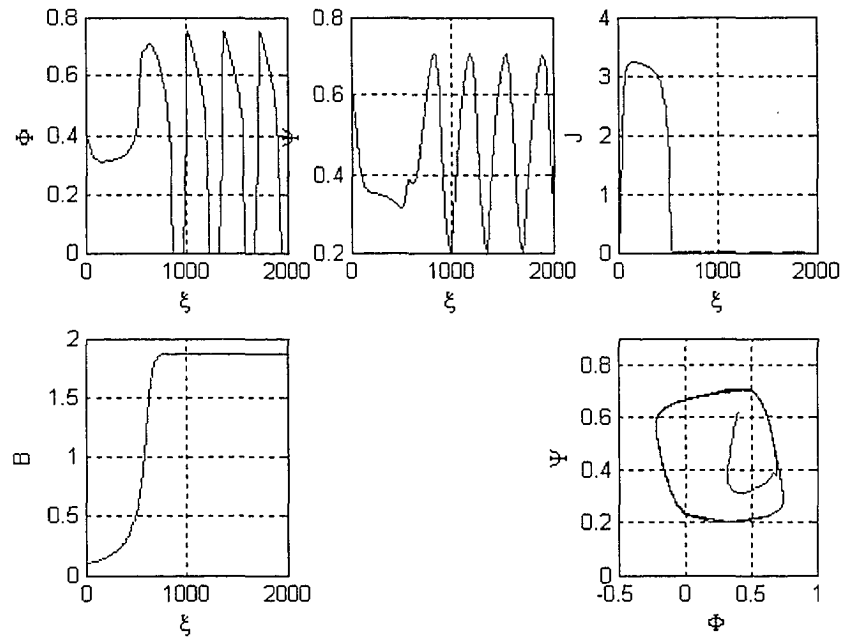


Figure 36 Simulation du modèle de G-E à quatre modes pour  $\gamma = 0.5$

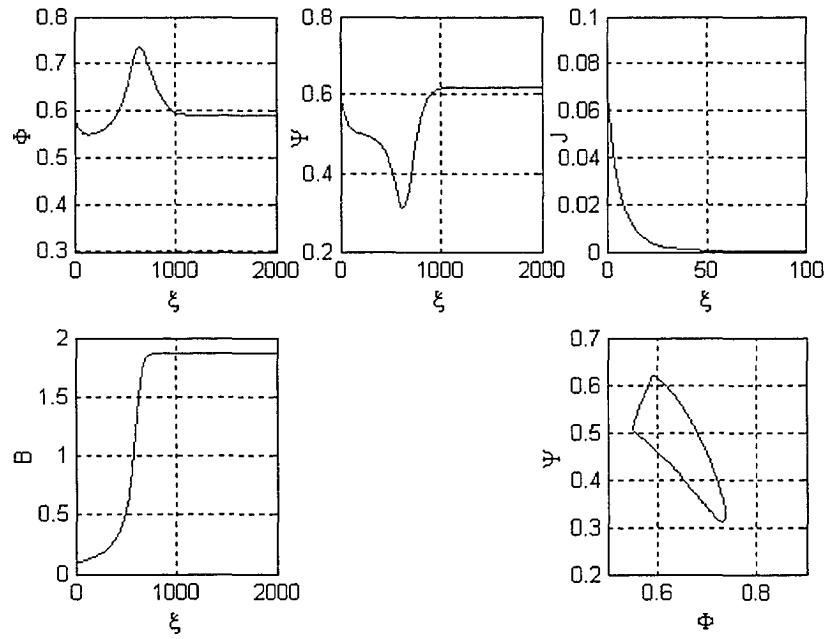


Figure 37 Simulation du modèle de G-E à quatre modes pour  $\gamma = 0.65$

### D) Réduction de la vitesse désirée

On réduit la vitesse désirée à 40 m/s et on simule le système pour les deux cas suivants :

1.  $\gamma = 0.5$

Les conditions initiales sont celles de l'équation (3.121). Dans ce cas, il n'y a aucun pompage. Le système entre en décrochage tournant puis il reste figé dans cet état, du fait que la vitesse désirée est faible, ce qui donne un  $B$  qui ne peut atteindre que

$$\frac{U_d}{b} = \frac{40}{96.16} = 0.42.$$

La figure 38 illustre ce cas.

2.  $\gamma = 0.65$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$(\Phi, \Psi, J_1, B) = (0.59, 0.62, 0.1, 0.1) \quad (3.128)$$

On aura les allures suivantes (figure 39).

D'après les simulations précédentes, la commande utilisée par Gravdahl-Egland (équation 3.122) contrôle la vitesse mais elle n'a aucun contrôle sur les non linéarités, à savoir le pompage et le décrochage tournant.

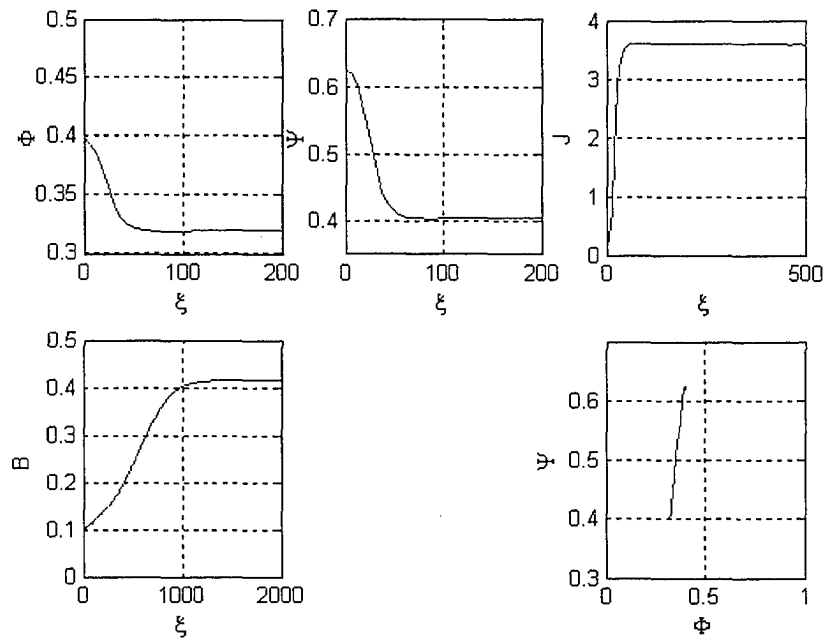


Figure 38 Modèle de G-E à un seul mode pour  $U_d = 40 \text{ m/s}$  et  $\gamma = 0.5$

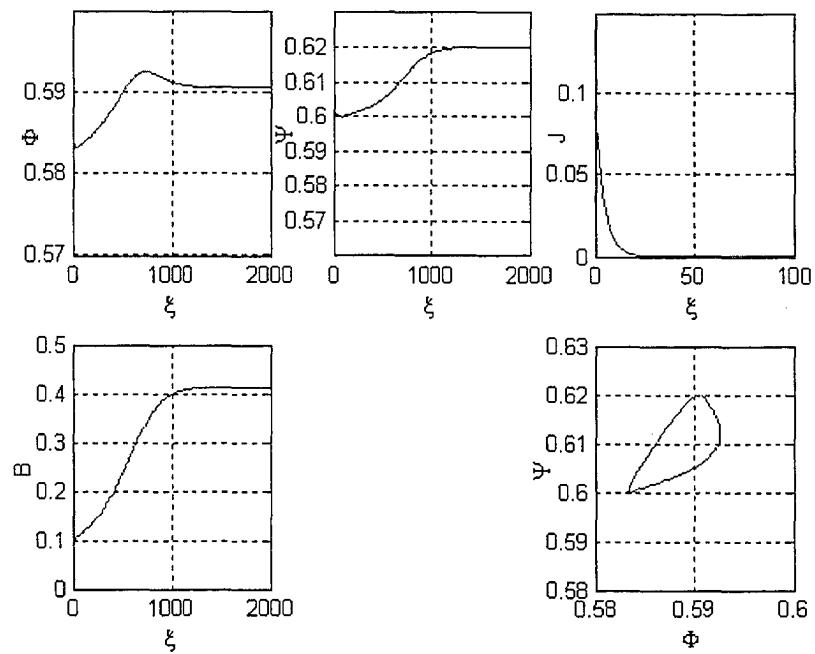


Figure 39 Modèle de G-E à un seul mode pour  $U_d = 40 \text{ m/s}$  et  $\gamma = 0.65$

### 3.4.2 Nécessité d'un modèle multi- mode

En simulant le système pour le cas  $\gamma = 0.5$  et les conditions initiales  $(\Phi, \Psi, J_1, B) = (0.4, 0.62, 0.1, 0.1)$  où le décrochage tournant est le plus prononcé, et en représentant les amplitudes de  $J_1, J_2, J_3, J_4$  des différents modes, on obtient la représentation de la figure 40.

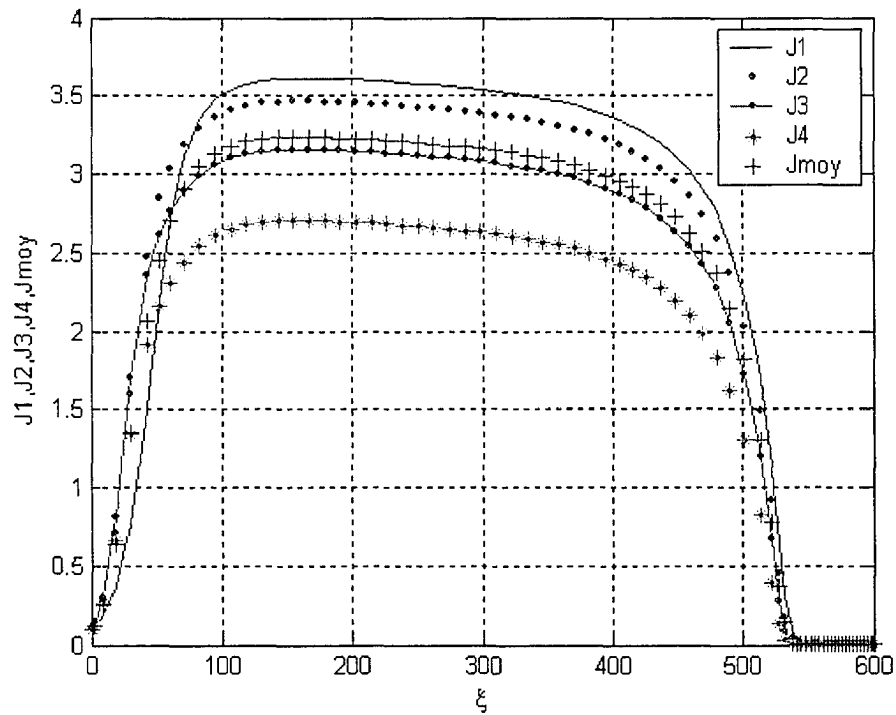


Figure 40 Amplitudes du décrochage tournant pour les différents modes

Une vue plus claire est représentée sur la figure suivante :

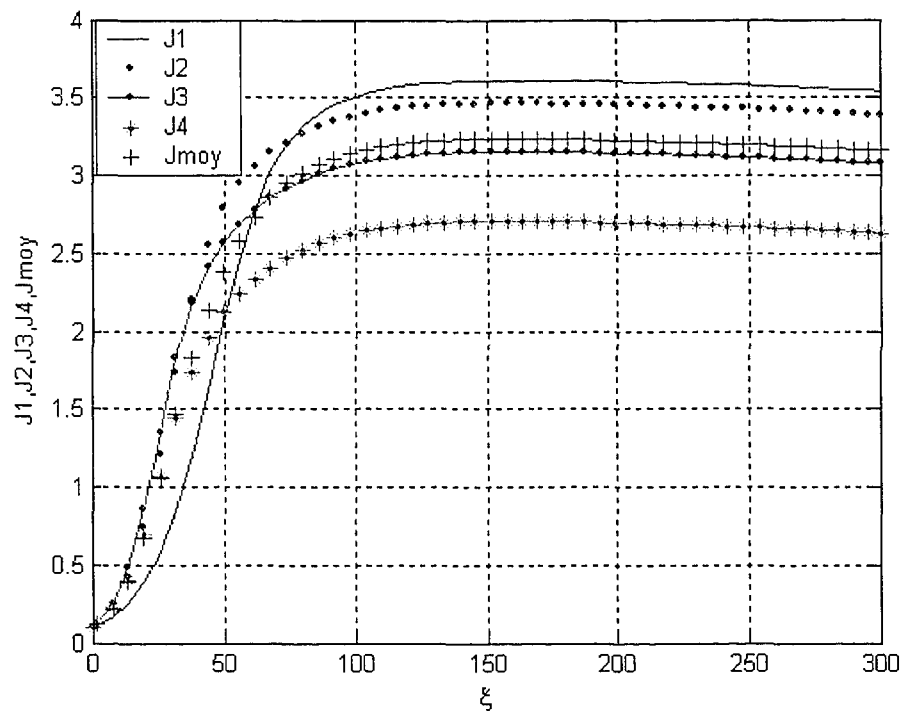


Figure 41 Importance d'un modèle multi mode

On remarque qu'à la naissance du décrochage, le deuxième mode  $J_2$  domine le premier mode  $J_1$ . Ceci montre que l'utilisation d'un modèle multi-mode permet une bonne compréhension du système.

### 3.5 Commande du modèle de Gravdahl-Egeland avec CCV

On reprend le modèle mathématique vu dans la section 2.2.6.

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c(U)} \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} \left( \frac{\Phi^2}{H} + \frac{W^2 J}{2H} \right) - \frac{U_d \Lambda_1 \Gamma l_E \Phi}{bH} \right] \quad (3.129)$$

$$\frac{dJ_n}{d\xi} = J_n \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_n}{4} - \frac{\mu n^2 W}{3aH} - \frac{2U_d \Gamma \Lambda_1 (m-1)W}{3Hb n} - \frac{4\Phi W}{3H\gamma_v^2} \right) \frac{3aHn}{(n - m_U(U)a)W} \quad (3.130)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_T) - 2\Lambda_1 \Gamma \frac{U}{b} \Psi \quad (3.131)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = \Lambda_1 \Gamma \frac{U^2}{b} \quad (3.132)$$

$$n = 1..N(\mu)$$

où tous les paramètres ont été définis dans la section 2.2.4.

#### 3.5.1 Étude des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont déterminés en mettant les équations (3.129), (3.130), (3.131) et (3.132) égales à zéro. On classe ces points de la manière suivante :

1. Pour  $J_n = 0$ ,  $\Gamma = 0$  et  $U \neq 0$

D'après l'équation (3.131), on a :

$$\Phi = \Phi_T \quad (3.133)$$

et d'après (3.129) :

$$\Psi = \psi_{c0} + H(1 + \frac{3}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1) - \frac{1}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1)^3) - \frac{\Phi^2}{\gamma_v^2} \quad (3.134)$$

L'équation (3.134) représente la caractéristique du compresseur équivalent. Les points d'équilibres sont d'après les équations (3.133) et (3.134) à l'intersection de la caractéristique du compresseur équivalent et de la vanne de contrôle.

2. Pour  $J_n \neq 0$ ,  $\Gamma = 0$  et  $U \neq 0$

D'après l'équation (3.130) :

$$J_n = 4(1 - (\frac{\Phi}{W} - 1)^2 - \frac{\mu n^2 W}{3aH} - \frac{4\Phi W}{3H\gamma_v^2}) \quad (3.135)$$

On voit bien que l'amplitude du décrochage tournant décroît en allant du premier mode au mode suivant.

En mettant  $n = 1$  dans l'équation (3.135) puis en remplaçant l'expression résultante dans (3.129), on trouve qu'à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \Psi_{es} = \psi_{c0} + H(1 - \frac{3}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1) + \frac{5}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1)^3) + 5\frac{\Phi^2}{\gamma_v^2} - \frac{8W}{\gamma_v^2}(1 - \frac{W^2}{3H\gamma_v^2})\Phi \\ + \frac{\mu W}{a}(\frac{\Phi}{W} + \frac{2}{3}\frac{W^2}{H\gamma_v^2} - 1) \end{aligned} \quad (3.136)$$

L'équation (3.136) représente la caractéristique en présence du décrochage tournant. En utilisant l'équation (3.133), les points d'équilibre sont déterminés par l'intersection de la caractéristique  $\Psi_{es}$  et la caractéristique de la vanne de contrôle.

### 3.5.2 Linéarisation du modèle

On considère seulement le premier mode ( $n = 1$ ). En posant :

$$C_1 = \frac{W^2}{2H}, \quad C_2 = \frac{4W}{3H}, \quad G_1 = \frac{U_d \Lambda_1 I_E}{bH}, \quad G_2 = \frac{\mu W}{3aH}$$

$$G_3 = \frac{2U_d \Lambda_1 (m-1)W}{3Hb}, \quad G_4 = \frac{3aH}{W}$$

et en choisissant comme entrées :

$$u_1 = \Gamma_t \tag{3.137}$$

où :

$u_1$  est le couple développé par la turbine. Cette entrée est choisie pour contrôler la vitesse de l'arbre reliant la turbine au compresseur, elle peut être interprétée par le débit de gaz injecté.

$$u_2 = \psi_v = \frac{1}{\gamma_v^2} \Phi^2 \tag{3.138}$$

où :

$u_2$  est La chute de pression au niveau de la CCV. Cette entrée est utilisée pour contrôler les non linéarités aérodynamiques, en manipulant la pression d'air.

Le système décrit par les équations (3.129),(3.130), (3.131) et (3.132) se transforme en :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c(U)} \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J_1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{u_2}{H} - \frac{1}{\gamma_v^2} C_1 J_1 - G_1 \Phi u_1 + G_1 K \Phi^3 \right] \quad (3.139)$$

$$\frac{dJ_1}{d\xi} = J_1 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{4} - G_2 - G_3 u_1 + G_3 K \Phi^2 - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2 \Phi \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U) a)} \quad (3.140)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_r) - \frac{2\Lambda_1 U \Psi}{b} u_1 + \frac{2\Lambda_1 K U \Psi \Phi^2}{b} \quad (3.141)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{\Lambda_1 U^2}{b} u_1 - \frac{\Lambda_1 K \Phi^2 U^2}{b} \quad (3.142)$$

On linéarise le système autour d'un point d'équilibre stable  $(\phi_0, J_{10}, \psi_0, U_0)$  (en absence du décrochage tournant) :  $J_{10} = 0$ ,  $U_0 = U_d$  et  $(\phi_0, \psi_0)$  sont déterminés par l'intersection de la caractéristique du compresseur équivalent avec la vanne de contrôle, dans la partie où la pente est négative.

Le système se met sous la forme suivante :

$$\dot{X} = AX + bu \quad (3.143)$$

où :

$$X = \begin{bmatrix} \Phi \\ J_1 \\ \Psi \\ U \end{bmatrix} : \text{ est le vecteur d'état.}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} : \text{ est le vecteur d'entrées.}$$

Les éléments  $a_{ij}$  de la matrice  $A$  sont donnés par :

$$a_{11} = \frac{H}{l_c(U_d)} \left( \frac{3}{2W} \left( 1 - \frac{J_{10}}{2} \right) - \frac{3}{2W} \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right)^2 + 3G_1 K \phi_0^2 \right)$$

$$a_{12} = \frac{H}{l_c(U_d)} \left( -\frac{3}{4} \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right) - \frac{C_1}{\gamma_v^2} \right)$$

$$a_{13} = -\frac{1}{l_c(U_d)}$$

$$a_{14} = \left( -\frac{\psi_0 - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J_{10}}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right)^3 - \frac{C_1 J_{10}}{\gamma_v^2} + G_1 K \phi_0^3 \right) *$$

$$\frac{Ha^2 l_E U_d}{U_d^2 (a(l_E + l_I) + 1)^2}$$

$$a_{21} = J_{10} \left( -\frac{2}{W} \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right) + 2KG_3 \phi_0 - \frac{C_2}{\gamma_v^2} \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U_d)a)}$$

$$a_{22} = \left( 1 - \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right)^2 - G_2 + G_3 K \phi_0^2 - \frac{C_2 \phi_0}{\gamma_v^2} \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U_d)a)} - \frac{J_{10}}{2} \frac{G_4}{(1 - m_U(U_d)a)}$$

$$a_{23} = 0$$

$$a_{24} = \frac{J_{10} \left( 1 - \left( \frac{\phi_0}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_{10}}{4} - G_2 + G_3 K \phi_0^2 - \frac{C_2 \phi_0}{\gamma_v^2} \right) \frac{G_4 U_d (m-1)a}{U_d^2 (1+ma)^2}}{}$$

$$a_{31} = \frac{\Lambda_2 b}{U_d} + \frac{4\Lambda_1 K \phi_0 U_d \psi_0}{b}$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = -\frac{\Lambda_2 b}{U_d} \frac{\gamma_t}{2\sqrt{\psi_0}} + \frac{2\Lambda_1 K \phi_0^2 U_d}{b}$$

$$a_{34} = -\frac{\Lambda_2 b}{U_d^2} (\phi_0 - \gamma_t \sqrt{\psi_0}) + \frac{2\Lambda_1 K \phi_0^2 \psi_0}{b}$$

$$a_{41} = -\frac{2\Lambda_1 U_d^2 K \phi_0}{b}$$

$$a_{42} = 0$$

$$a_{43} = 0$$

$$a_{44} = -\frac{2\Lambda_1 K \phi_0^2 U_d}{b}$$

Les éléments  $b_{ij}$  de la matrice  $b$  sont donnés par :

$$b_{11} = -\frac{G_1 \phi_0 H}{l_c(U_d)}$$

$$b_{12} = -\frac{1}{l_c(U_d)}$$

$$b_{21} = -\frac{J_{10} G_3 G_4}{(1 - m_U a)}$$

$$b_{22} = 0$$

$$b_{31} = -\frac{2\Lambda_1 \psi_0 U_d}{b}$$

$$b_{32} = 0$$

$$b_{41} = \frac{\Lambda_1 U_d^2}{b}$$

$$b_{42} = 0$$

Alors, les matrices  $A$  et  $b$  ont les formes suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ b_{41} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Pour que le système soit contrôlable, on doit vérifier que :

$$W_c = [b, Ab, A^2b, A^3b] \quad (3.145)$$

possède un rang  $r = 4$ .

Or, en calculant  $Ab$ ,  $A^2b$ ,  $A^3b$ , on trouve que ces dernières ont la structure suivante :

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & 0 \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

La matrice  $W_c$  a la deuxième ligne faite de zéro, ce qui conclut que le rang est inférieur à quatre. La linéarisation autour du point d'équilibre en question est non commandable, on cherchera donc une autre commande qui sera susceptible de contrôler le système.

### 3.5.3 Commande non linéaire, non interactive

#### 3.5.3.1 Commande du modèle

Le système décrit par les équations (3.139), (3.140), (3.141) et (3.142) se présente sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + G(x) u \quad (3.146)$$

avec :

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

où :

$$f = \begin{bmatrix} \frac{H}{l_c(U)} \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J_1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} C_1 J_1 + G_1 \Gamma_c \Phi \right] \\ J_1 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{4} - G_2 + G_3 \Gamma_c - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2 \Phi \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U) a)} \\ \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_r) + 2 \Lambda_1 \Gamma_c \frac{U}{b} \Psi \\ - \Lambda_1 \frac{U^2}{b} \Gamma_c \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

et :

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{HG_1\Phi}{l_c(U)} & -\frac{1}{l_c(U)} \\ -\frac{G_4G_3}{(1-m_U(U)a)}J_1 & 0 \\ -2\Lambda_1\frac{U}{b}\Psi & 0 \\ \Lambda_1\frac{U^2}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

On choisit comme sorties :

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x) = U \\ y_2 = h_2(x) = J_1 \end{cases} \quad (3.150)$$

Le travail consiste à concevoir deux contrôleurs : un pour contrôler la vitesse et un deuxième pour contrôler le pompage et le décrochage tournant indépendamment du premier. Dans d'autres termes, assurer le découplage de telle sorte que  $u_1$  contrôle  $y_1$  et  $u_2$  contrôle  $y_2$ .

En utilisant la définition de dérivée de Lie [33], on calcule les expressions suivantes :

$$L_{g_1}h_1 = \frac{\Lambda_1}{b}U^2$$

$$L_{g_2}h_1 = 0$$

$$L_{g_1}h_2 = -\frac{G_3G_4}{(1-m_U(U)a)}J_1$$

$$L_{g_2} h_2 = 0$$

En formant la matrice de découplage qui a la structure suivante :

$$A = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

où  $r_i$  est le degré relatif par rapport à  $h_i$ .

On trouve :

$$A = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1 & L_{g_2} h_1 \\ L_{g_1} h_2 & L_{g_2} h_2 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

On constate que cette dernière est singulière (déterminant égal à zéro), d'où l'impossibilité de trouver une commande non linéaire stabilisante statique de la forme :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.153)$$

où :

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad \beta(x) = -A^{-1}(x) \quad (3.154)$$

$A$  est définie dans (3.151) et  $b$  est donné par :

$$b = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1 \\ L_f^{r_2} h_2 \\ \dots\dots\dots \\ L_f^{r_m} h_m \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

$v$  est l'entrée de référence.

On essaiera dans ce qui suit de trouver un contrôleur dynamique [46].

En dérivant  $y_1$  et  $y_2$ , donnés par l'équation (3.150), on retrouve les équations (3.140) et (3.142), qui dépendent seulement de  $u_1$ . On retarde l'apparition de  $u_1$  en posant :

$$u_1 = \kappa \quad (3.156)$$

$$\dot{\kappa} = v_1 \quad (3.157)$$

$$u_2 = v_2 \quad (3.158)$$

où  $v_1$  est une nouvelle entrée.  $v_2$  est utilisée pour la consistance de la notation.

Après cette transformation, le système prend la forme suivante :

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{f} + \tilde{G}v \quad (3.159)$$

où :

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \Phi \\ J_1 \\ \Psi \\ U \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} \frac{H}{l_c(U)} \left[ -\frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{J_1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 - \frac{1}{\gamma_v^2} C_1 J_1 + G_1 \Gamma_c \Phi - G_1 \Phi \kappa \right] \\ J_1 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{4} - G_2 - G_3 \kappa + G_3 \Gamma_c - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2 \Phi \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U) a)} \\ \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_T) - 2\Lambda_1 \frac{U}{b} \Psi \kappa + 2\Lambda_1 \Gamma_c \frac{U}{b} \Psi \\ \Lambda_1 \frac{U^2}{b} \kappa \quad -\Lambda_1 \frac{U^2}{b} \Gamma_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l_c(U)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

On procède de la même manière que précédemment, en calculant les éléments de  $A$  et  $b$  définies dans (3.151) et (3.155) :

$$L_{\tilde{g}_1} h_1 = 0$$

$$L_{\tilde{g}_2} h_1 = 0$$

$$L_{\tilde{f}} h_1 = \frac{\Lambda_1}{b} U^2 \kappa - \frac{\Lambda_1}{b} U^2 \Gamma_c$$

$$L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_1 = \frac{\Lambda_1}{b} U^2$$

$$L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_1 = \frac{2\Lambda_1 U^2 K \Phi}{b} \frac{1}{l_c(U)}$$

$$L_{\tilde{f}} h_2 = J_1 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{4} - G_2 - G_3 \kappa + G_3 \Gamma_c - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2 \Phi \right) \frac{G_4}{(1 - m_U(U) a)}$$

$$L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_2 = - \frac{G_3 G_4 J_1}{(1 - m_U(U) a)}$$

$$L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_2 = - \frac{J_1 G_4}{l_c(U) (1 - m_U(U) a)} \left( - \frac{2}{W} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{C_2}{\gamma_v^2} + 2G_3 K \Phi \right)$$

En formant la matrice  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_1 & L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_1 \\ L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_2 & L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_2 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

On trouve que son déterminant est donné par l'expression suivante :

$$\det(A) = \frac{\Lambda_1 U^4 J_1 G_4 a (2\Phi - 2W + (c_2 / \gamma_v^2) W^2)}{b W^2 (U - a U_d + a U_d m + a U) (L_I a U + L_E U_d a + U)} \quad (3.164)$$

La matrice  $A$  est non singulière si :

$$J_1 \neq 0 \quad \wedge \quad U \neq 0 \quad \wedge \quad \Phi \neq W(1 - \frac{c_2 W}{2\gamma_v^2}) \quad (3.165)$$

et :

$$U \neq \frac{(1-m)aU_d}{1+a} \quad \wedge \quad U \neq -\frac{l_e U_d a}{1+l_f a} \quad (3.166)$$

Pour les conditions (3.165) et (3.166), le système a un degré relatif  $\{r_1, r_2\} = \{2, 2\}$ . On constate que :

$$r_1 + r_2 < n = 5 \quad (3.167)$$

Le système a donc une dynamique interne non observable de dimension un. Avant de procéder à la détermination de cette dynamique et connaître sa nature, on évalue d'abord la commande non linéaire.

On calcule le vecteur  $b$  :

$$b = \begin{bmatrix} L_{\tilde{f}}^{-2} h_1 \\ L_{\tilde{f}}^{-2} h_2 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

où :

$$L_{\tilde{f}}^{-2} h_1 = -\frac{2\Lambda_1}{b} U^2 K \Phi \tilde{f}(1) + \frac{2\Lambda_1}{b} U (\kappa - K \Phi^2) \tilde{f}(4)$$

où  $\tilde{f}(i)$  désigne l'ième élément du vecteur  $\tilde{f}$  (équation (3.161)).

$$\begin{aligned}
 L_{\tilde{f}}^2 h_2 = & \frac{J_1 G_4 U}{(U - ((1-m)U_d - U)a)} \left( -\frac{2}{W} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) + 2KG_3\Phi - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2 \right) \tilde{f}(1) + \\
 & \frac{G_4 U}{(U - ((1-m)U_d - U)a)} \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{2} - G_2 - G_3\kappa + G_3\Gamma_c - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2\Phi \right) \tilde{f}(2) + \\
 & J_1 G_4 \left( 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{J_1}{4} - G_2 - G_3\kappa + G_3\Gamma_c - \frac{1}{\gamma_v^2} C_2\Phi \right) * \\
 & \frac{(m-1)U_d a}{(U - ((1-m)U_d - U)a)^2} \tilde{f}(4)
 \end{aligned}$$

La commande non linéaire stabilisante se calcule d'après la relation suivante :

$$V = -A^{-1}b + A^{-1}W \quad (3.169)$$

$A$  et  $b$  sont données par les équations (3.151) et (3.155),  $W$  est l'entrée de référence.

### 3.5.3.2 Simulation du système

On simule le système pour les paramètres suivants (Gravdahl-Egeland) :

$\alpha = 1/3.5$ ,  $H = 0.18$ ,  $W = 0.25$ ,  $l_l = 1$ ,  $l_E = 2$ ,  $R = 0.1$ ,  $V_p = 1.5$ ,  $I = 0.01$ ,  $m = 1.75$  et la condition initiale :  $(\phi_0, \psi_0, J_{10}, U_0) = (0.3, 0.45, 0.1, 30)$  et on impose une vitesse tangentielle de 215 m/s et un décrochage tournant nul.

On obtient les résultats suivants :

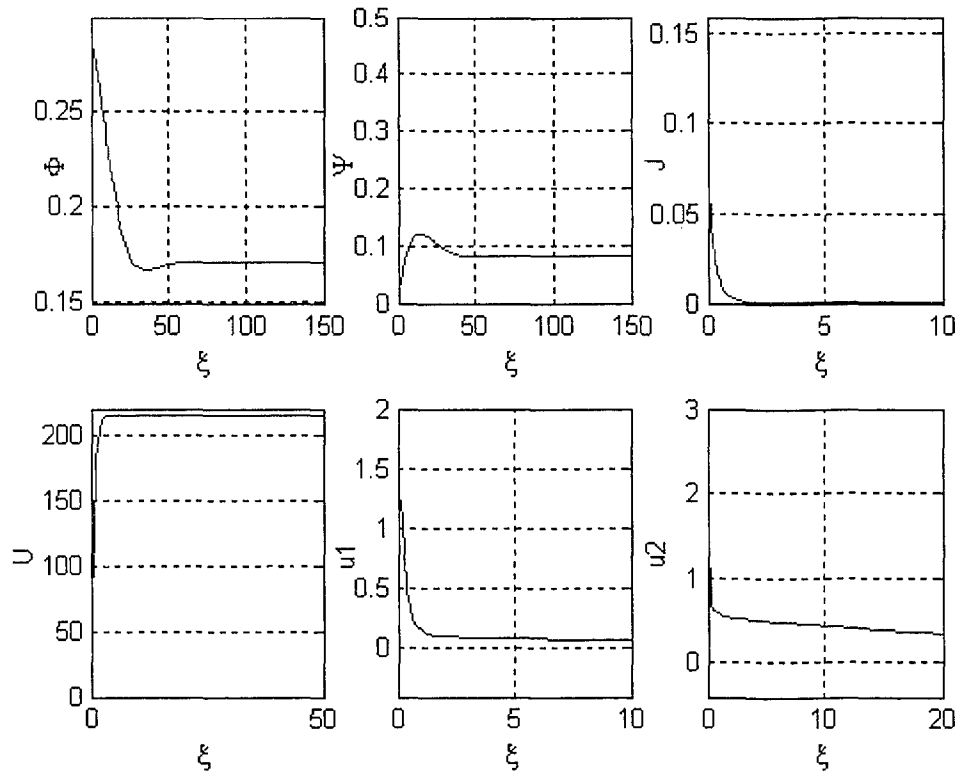


Figure 42 Simulation du modèle proposé en boucle fermée

On voit bien que la vitesse  $U$  converge vers la référence (215m/s), le décrochage tournant  $J$  s'annule, le débit et la pression convergent vers le point d'équilibre stable.  $u_1$  et  $u_2$  sont les efforts de la commande.

Pour un autre choix de paramètres ou une autre condition initiale, la commande (3.169) n'est pas capable de stabiliser le système. Ceci peut être expliqué par les conditions imposées par (3.165) et (3.166) et par la nature de la dynamique interne qu'on doit déterminer.

L'étude de la stabilité de la dynamique interne est simplifiée en étudiant la dynamique du zéro.

### 3.5.3.3 Dynamique du zéro

Cette dynamique [34] est déterminée par :

$$\tilde{f}^* = (\tilde{f} + \tilde{G}u^*)|_{\varepsilon}. \quad (3.170)$$

où :

$$u^* = -A^{-1}b \quad (3.171)$$

$\tilde{f}$  et  $\tilde{G}$  sont définies dans (3.161) et (3.162).

$$z^* = \left\{ x, x \in R^4, L_{\tilde{f}}^k h_j = 0 \right\}, \quad j = 1, 2 \text{ et } 0 < k < r_j - 1$$

Donc :

$$z^* = \left\{ x, x \in R^4, h_1(x) = h_2(x) = l_{\tilde{f}} h_1(x) = l_{\tilde{f}} h_2(x) = 0 \right\} \quad (3.172)$$

En évaluant (3.170), on trouve que la dynamique du zéro se simplifie à :

$$\dot{\eta} = \frac{\Lambda_2 b}{U} (\Phi - \Phi_r) - 2\Lambda_1 \frac{U}{b} \Psi \kappa + 2\Lambda_1 \Gamma_c \frac{U}{b} \Psi|_{U=0} \quad (3.173)$$

Donc :

$$\dot{\eta} = \begin{cases} \infty & si \quad \Phi \neq \Phi_r \\ \text{indéterminée} & si \quad \Phi = \Phi_r \end{cases} \quad (3.174)$$

La dynamique du zéro est donc instable.

### 3.5.4 Conclusion

La difficulté dans le contrôle du nouveau modèle réside dans la présence d'une variable d'état dans le dénominateur, ce qui limite la marge de manœuvrabilité. La linéarisation Jacobienne (linéarisation autour d'un point d'équilibre) de notre système n'est pas commandable, la commande non linéaire interactive n'a pas donné de bons résultats à cause de l'instabilité de la dynamique interne. La méthode du backstepping ne fonctionne pas avec ce système puisqu'il n'a pas la bonne structure (lower triangular form). La théorie de la platitude est très prometteuse pour des systèmes comportant une dynamique interne instable.

## CONCLUSION

Dans le cadre de cette recherche, l'étude des différents modèles mathématiques des turbines à gaz a été réalisée, en commençant par celui de Greitzer(1976). Ces modèles offrent des outils nécessaires pour la compréhension des non linéarités aérodynamiques (pompage et décrochage tournant) présentes dans une turbine à gaz et le développement de stratégies de commande pour rendre ces machines plus performantes.

Nous avons développé un modèle mathématique multi modes qui prend en considération la variation de vitesse du compresseur et qui apporte des solutions au problème de Gravdahl-Egeland (1997), en l'occurrence, celui de contrôler simultanément la vitesse et les non linéarités aérodynamiques.

Nous avons tout d'abord constaté que la linéarisation du modèle au voisinage d'un point d'équilibre stable n'est pas commandable. Ceci nous a incité à chercher du côté des commandes non linéaires, en commençant par la méthode backstepping qui s'est avérée qu'elle n'est pas applicable à notre système, vu qu'il n'a pas la structure triangulaire adéquate. On a utilisé donc la linéarisation exacte en considérant seulement un seul mode. Un contrôleur dynamique a été utilisé. Notons que notre système a une dynamique interne de dimension un qui est instable.

Le travail futur qui entre dans le cadre de mon sujet de doctorat consistera à chercher une commande non linéaire qui sera capable de contrôler le système pour un seul mode et considérer par la suite le cas de plusieurs modes.

La théorie de la platitude (flatness) suscite beaucoup d'intérêts chez les chercheurs puisqu'elle est capable de trouver des solutions pour un système présentant une dynamique interne instable, quoique la complexité réside dans la recherche de la sortie plate qui assure la stabilité du système.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lakshminarayana, B. (1996). *fluid dynamics and heat transfer in turbomachinery*: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] GROUP, PWA. (MAY 1974). *Gas Turbine Engine and its operation*.
- [3] N.Yoon, J. *Jet engine types*, from <http://www.aerospaceweb.org/question/propulsion/q0033.shtml>
- [4] Cohen, H., Rogers, G., & Saravanamutto, H. (2002). *Gas turbine theory*. Essex: Longman Limited.
- [5] Tahmasebi, A. (2002). *Robustness of rotating stall control for axial flow compressors*. Unpublished Master of Applied Science, Windsor, Ontario.
- [6] Greitzer. (1976). Surge and rotating stall in axial flow compressors Part II Experimental results and comparaisn with theory. *ASME journal of Engineering and Power*, 98, 199-211.
- [7] Greitzer, E. M. (1976a). Surge and rotating stall in axial flow compressors Part I : theoritical compression system model. *journal of Engineering for Gaz Turbines and Power*, 98, 190-198.
- [8] Greitzer, E. M., & Moore, F. K. (1986). A theory of post-stall transients in axial compressor systems: Part I: development of equations. *Journal of Engineering for Gaz Turbines and Power*, 108, 68-76.
- [9] Canuto, C., .Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & ZAng, T. (1988). *Spectral methods in fluid dynamics*.
- [10] Greitzer, E. M., & Moore, F. K. (1986). A theory of post-stall transients in axial compressor systems: Part II: Application. *Journal of Engineering for Gaz Turbines and Power*, 108, 231-239.
- [11] Kristic, M., & Kokotovic, P. V. (1995). *Lean backstepping designs for Jet engine compressor model*. Paper presented at the Proceedings of the 4th IEEE conference on control applications.
- [12] Badmus, O., Chowdhury, S., Eveker, K. M., & Nett, C. N. (1996). Nonlinear control of surge in axial compression systems. *Automatica*, 32, 59-70.

- [13] Eveker, K. M., & Nett, C. N. (1991). *Model development for active surge control rotating stall avoidance in aircraft gas turbine engines*. Paper presented at the Proceedings of the 1991 American Control Conference.
- [14] Murray, R., & Behnken, R. L. (1997). *Combined air injection control of rotating stall and bleed valve control of surge*. Paper presented at the Proceedings of the 1997 American Control Conference, Albuquerque, NM.
- [15] Paduano, J. D., Epstein, A. H., Valavani, L., Longeley, J., & Greitzer, E. M. (1993). Active control of rotating stall in a low speed axial compressor. *Journal of Turbomachinery*, 115, 48-56.
- [16] Behnken, R. L. (1997). *Nonlinear control and modeling of rotating stall in an axial flow compressor*. PhD thesis, USA.
- [17] Paduano, J. D., & Wang, Y. (August 1999). *Nonlinear control design of rotating stall with magnetic bearing actuators*. Paper presented at the Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications, Kohala Coast-Island of Hawaii USA.
- [18] Paduano, J. D., & Spakovsky, Z. (2001). Tip clearance actuation with magnetic bearings for high speed compressor stall control. *Journal of turbomachinery*, 123(3), 464-472.
- [19] Simon, J. S., & Valvani, L. (1991). *A Lyapunov based nonlinear control scheme for stabilizing a basic compression system using a close coupled valve*. Paper presented at the Proceeding of the 1991 American control conference.
- [20] Jungowski, W. M., Weiss, M. H., & Price, G. R. (1996). Pressure oscillations occurring in a centrifugal compression system with and without passive and active control. *Journal of Turbomachinery*.
- [21] Gravdahl, J. T., & Egeland, O. (June 1997). *Compressor surge control using a close coupled valve and backstepping*. Paper presented at the Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico.
- [22] Gravdahl, J. T. (1998). *Modeling and control of surge and rotating stall in compressors*. PhD thesis, University of Science and technology, Norway.
- [23] Adomatis, R. A., & Abed, E. H. (1993). *Local nonlinear control of stall inception in axial flow compressors*. Paper presented at the Proceeding of the AIAA/SAE/ASME/ASEE joint propulsion Conference, Monterey, CA.
- [24] Botros, K. K. (1994). Transient phenomena in compressor stations during surge. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 116, 133-142.

- [25] Hansen, K. E., Jorgensen, P., & Larsen, P. S. (1981). Experimental and theoretical study of surge in a small centrifugal compressor. *Journal of Fluids Engineering*, 103, 391-394.
- [26] Fink, D. A., Cumpsty, N. A., & Greitzer, E. M. (1992). Surge dynamics in a free-spool centrifugal compressor system. *Journal of Turbomachinery*, 114, 321-332.
- [27] Badmus, O., Chowdhury, C. N., & Nett, C. N. (1995). Control oriented high frequency turbomachinery modeling: single stage compression system one dimensional model. *Journal of Turbomachinery*, 117, 47-61.
- [28] Haynes, J. M., Hendricks, G. J., & Epstein, A. H. (1994). Active stabilization of rotating stall in a three stage axial compressor. *Journal of Turbomachinery*, 116, 226-239.
- [29] Eveker, K. M., & Nett, C. N. (1991). *Model developement for active surge control rotating stall avoidance in aircraft gas turbine engines*. Paper presented at the Proceedings of the 1991 American Control Conference.
- [30] Hendricks, G. J., & Gysling, D. L. (Feb 1994). Theoretical study of sensor-actuator schemes for rotating stall control. *Journal of Propulsion and Power*, 10, 101-109.
- [31] Wal, V., Willems, F., & de Jager, B. (1997). *Selection of actuators and sensors for active surge control*. Paper presented at the Proceedings of the 1997 International Conference on Control Applications, Hartford.
- [32] Willems, F., & Jager, B. (october 1999). Modeling and control of compressor flow instabilities. *IEEE control systems*, 8-18.
- [33] Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*: Upper Saddle River ,N.J.: Prentice Hall.
- [34] Isidori, A. (1995). *Nonlinear control theory*: Springer.
- [35] H.Nijmeijer, & Schaft, A. J. V. d. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*: Springer-Verlag.
- [36] Sastry, S. (1999). *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and Control*. New York: Springer-Verlag.
- [37] Kristic, M., Kanellakopoulos, I., & Kokotovic, P. V. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*: John Wiley & Sons Inc.

- [38] Daskoc, E., Shtessel, Y., & Katsinis, C. (1998). MIMO sliding mode control of a robotic "pick and place" system modeled as an inverted pendulum on a moving cart. *IEEE control systems*, 6, 379-383.
- [39] Perruquetti, W. & Barbot, J. (2002). *Sliding mode in control engineering*.
- [40] Romeo O., Lauria A., & Hebert, S. (1998). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems*.
- [41] Hebert S., Kagrwal S. (2004). *Differentially flat systems*.
- [42] Abed, E. H., & Liaw, D., C. (1996). Active Control of Compressor Stall Inception : a Bifurcation-theoretic Approach. *Automatica*, 32(1), 109-115.
- [43] Gu, G., Banda, S., & Sparks, A. (1997). Bifurcation Based Nonlinear Feedback Control for Rotating Stall in Axial Flow compressors. *International Journal of Control*, 68(6), 1241-1257.
- [44] Gu, G., Banda, S., & Sparks, A. (1999). An Overview of Rotating Stall and Surge Control for Axial Flow Compressors. *IEEE transactions on control systems technology*, 7(6), 639-647.
- [45] A., B., H., H., & I., M. (1999). A backstepping controller for a nonlinear partial differential equation model of compression system instabilities. *Journal of control and optimisation*, 37(5), 1503-1537.
- [46] Mistler, V., Benallegue, A., & M'sirdi, N. K. (sept 2001). *Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback*. Paper presented at the Proceedings of the 10th IEEE International workshop on Robot and Human Interactive Communication.