N° d'ordre : 03/DEA/TCO Année universitaire : 2008-2009

UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT TELECOMMUNICATION

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

en vue de l'obtention

du DIPLOME d'ETUDES APPROFONDIES

Spécialité : Télécommunication

par : **ANDRIANARISON Maherizo Valinaina**

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LES APPROCHES PRLQG/PRLQR

Soutenu le vendredi 11 Décembre 2009 à 08h30 devant la commission d'Examen composée de :

Président :

Monsieur RATIARISON Adolphe, Professeur

Examinateurs :

Monsieur ANDRIANAHARISON Yvon, Professeur

Monsieur RATSIHOARANA Constant, Maître de Conférences

Monsieur RATSIMBAZAFY Andriamanga, Maître de Conférences

Directeur de mémoire :

Monsieur RANDRIAMITANTSOA Paul Auguste, Professeur

Co-directeur de mémoire :

Monsieur RAZAKARIVONY Jules, Maître de Conférences

« Ma grâce te suffit »

II Cor 12[9]

« Ne crains rien, car Je suis avec toi »

Esaïe 41[10]

« Je t'instruirai et te montrerai la voie que tu dois suivre;
Je te conseillerai, j'aurai le regard sur toi »

Psaumes 32[8]

REMERCIEMENTS

Je rends gloire à Dieu pour sa bonté et sa fidélité de m'avoir donné la connaissance, le courage, la force et la santé durant la réalisation de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude à Monsieur RAMANATSIZEHENA Pascal, Professeur titulaire, Directeur de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur RANDRIAMITANTSOA Paul Auguste, Professeur, Chef du Département Télécommunication et directeur de ce mémoire qui a été pour moi plus qu'un encadreur. Je le remercie pour le temps qu'il m'a accordé et ses précieux conseils malgré les fonctions diverses auxquelles il est rattaché ;

Je suis très reconnaissant à Monsieur RATIARISON Adolphe, Professeur, Enseignant Chercheur de l'Université d'Antananarivo qui, malgré ses lourdes responsabilités, me fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire ;

Je remercie également Monsieur RAZAKARIVONY Jules qui a bien voulu être mon co-directeur de mémoire ;

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux personnes suivantes sans qui ce travail n'aurait pas été réalisé :

- Monsieur RATSIHOARANA Constant, Maître de conférences à l'ESPA, pour sa disposition de bien vouloir juger ce travail en dépit de ses occupations multiples ;
- Monsieur RATSIMBAZAFY Andriamanga, Maître de conférences à l'ESPA, qui a consacré son temps précieux pour juger ce travail ;
- Monsieur ANDRIANAHARISON Yvon, Professeur, qui a accordé son temps précieux pour juger le présent travail.

Je remercie tous les Enseignants et tout le personnel de l'Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo pour la formation durant ces six années.

Je témoigne toute ma reconnaissance à toute la grande famille qui m'a toujours assisté durant mes six années d'études loin de mes parents.

J'adresse une pensée spéciale à mes parents pour leurs sacrifices durant ces longues années d'études, et à mes frères et sœurs, pour avoir été et pour être toujours présents pour moi.

Enfin, je ne saurai oublier mes amis et tous ceux qui n'ont pas ménagé leur force pour m'aider dans mes études et surtout pour l'accomplissement de ce travail.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS i

TABLE DES MATIERES ii

NOTATIONS vii

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE 1 ELEMENTS INTRODUCTIFS A L'ANALYSE DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES 3

1.1 Systèmes linéaires multivariables invariants à temps continu *3*

1.1.1 Modèle d'état des systèmes à un vecteur d'entrées et à un vecteur de sorties 3

1.1.2 Modèle d'état des systèmes à deux vecteurs d'entrées et à deux vecteurs de sorties 4

1.1.3 Interconnexion de systèmes 5

1.2 Critère de commandabilité de Kalman *6*

1.3 Critère d'observabilité de Kalman *6*

1.4 Schéma bloc du système nominal et du système perturbé *6*

1.4.1 Forme standard 7

1.4.2 Transformation fractionnaire linéaire d'une matrice 8

1.4.3 Modèles mathématiques des incertitudes structurées 9

1.4.3.1 Représentation des incertitudes paramétriques par LFT_l *10*

1.4.3.2 Représentation des incertitudes paramétriques par LFT_u *10*

1.5 Calcul de la norme H_∞ *11*

1.6 Analyse en stabilité des systèmes linéaires bouclés à temps continu *11*

1.6.1 Marge de phase 12

1.6.2 Marge de gain 13

1.6.3 Marge de retard 13

1.6.4 Marge de module 13

1.6.5 Autres indicateurs fréquentiels 14

1.7 Stabilité interne *14*

1.8 Théorème du petit gain *15*

1.9 Analyse en performance des systèmes linéaires bouclés à temps continus *15*

1.9.1 Introduction 15

1.9.2 Spécifications fréquentielles de performance nominales 16

1.9.3 Condition de performance nominale 17

1.10 Mise en forme de la boucle de commande *18*

1.11 Modelage des matrices de sensibilité *19*

1.11.1 Marge de module 19

1.11.2 Bande passante en boucle fermée 19
1.12 Analyse robuste* *20
1.12.1 Forme standard pour l’analyse robuste 20
1.12.2 Formulation du problème standard pour l’analyse de la robustesse 21
1.12.3 Robustesse à la stabilité des systèmes linéaires 22
1.12.3.1 Définition 1.11* *22
1.12.3.2 Théorème 1.04* *23
1.12.4 Robustesse en stabilité des systèmes linéaires avec erreurs de modèle non structurées 23
1.13 Les formes de modèles d’erreurs* *24
1.14 Gabarit de la robustesse en stabilité* *24
1.15 Robustesse en performance* *25
1.15.1 Définition 1.12 25
1.15.2 Théorème 1.05 26
1.16 Conclusion* *27
CHAPITRE 2 COMMANDE OPTIMALE ET SYNTHESE LQG DES SYSTEMES LINEAIRES .. 28
2.1 Introduction* *28
2.2 Problème de la commande optimale* *28
2.3 Minimum d’une fonctionnelle* *29
2.3.1 Définition 2.01 29
2.3.2 Propriétés de l’Hamiltonien 30
2.4 Commande optimale quadratique des systèmes linéaires continus* *30
2.4.1 Position du problème 30
2.4.2 Matrice hamiltonienne 31
2.4.3 Expression de K 31
2.4.4 Equation algébrique matricielle de Riccati 32
2.4.4.1 Définition 2.03* *32
2.4.4.2 Propriété 2.01* *32
2.4.5 Schéma fonctionnel de la commande optimale modale 32
2.4.6 Evaluation du critère de performance J 33
2.5 Synthèse Linéaire Quadratique Gaussienne* *34
2.5.1 Méthode Linéaire Quadratique 34
2.5.1.1 Présentation du problème* *34
2.5.1.2 Recherche de la loi optimale* *35
2.5.1.3 Propriétés de robustesse de la méthode LQ* *35
2.5.2 Méthode Linéaire Quadratique Gaussienne 37
2.5.2.1 Position du problème* *37
2.5.2.2 Problème de la synthèse LQG* *37
2.5.2.3 Propriété modale de la commande LQG* *40
2.5.2.4 Matrice de transfert de boucle* *40

2.5.3 Méthode LQG/LTR 42

2.5.3.1 Introduction ***42***

2.5.3.2 Recouvrement asymptotique ***43***

2.5.3.3 Propriétés de robustesse de la méthode LQG/LTR ***44***

2.5.3.4 Propriété modale de la commande LQG/LTR ***46***

2.5.4 Synthèses LQ/LQG à pondérations fréquentielles 46

2.5.5 Choix des matrices de pondération 49

2.6 Conclusion ***50***

CHAPITRE 3 ROBUSTESSE PARAMETRIQUE PAR LES TECHNIQUES LINEAIRES QUADRATIQUES **52**

3.1 Introduction ***52***

3.2 Forme standard de la synthèse LQG ***52***

3.2.1 Le LQ 53

3.2.2 Le G 54

3.2.3 Le LQG 54

3.3 Modèle mathématique du système incertain ***56***

3.4 Synthèse PRLQG ***58***

3.4.1 Rappel des propriétés asymptotiques des commandes LQ 58

3.4.2 Désensibilisation asymptotique du LQR 60

3.4.3 Introduction d'un observateur de Kalman 61

3.4.4 Dualité et analogie avec le LTR 63

3.5 Synthèse PRLQR ***64***

3.5.1 Cadre de l'étude 64

3.5.2 Rappels sur la commande LQR classique 64

3.5.3 Condition suffisante de robustesse 66

3.5.4 Equation de Riccati pour la synthèse PRLQR 66

3.5.5 Propriétés de la synthèse PRLQR 68

3.5.5.1 Rôle de γ ***69***

3.5.5.2 Liens avec les synthèses H_2 et H_∞ ***69***

3.6 Conclusion ***71***

CHAPITRE 4 SIMULATION DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LES SYNTHESES PRLQG ET PRLQR **72**

4.1 Processus nominal ***72***

4.2 Processus perturbé ***72***

4.2.1 Incertitudes structurées (paramétriques) 73

4.2.2 Incertitudes non structurées (modèle d'erreur de forme additive directe) 73

4.2.3 Analyse fréquentielle du système avec incertitudes paramétriques 81

4.3 Cahier de charges du système ***82***

4.3.1 Performance et stabilité nominale 82
4.3.2 Robustesse en stabilité 82
4.3.3 Robustesse en performance 83
4.3.4 Interconnexion du système 84
4.4 Synthèse du correcteur K ***86***
4.4.1 Synthèse PRLQG 86
4.4.1.1 Gain de retour d'état K_c ***86***
4.4.1.2 Gain d'estimation K_f ***86***
4.4.1.3 Correcteur K_{PRLQG} ***86***
4.4.2 Analyse du système avec correcteur K_{PRLQG} 87
4.4.2.1 Diagrammes de Bode du système nominal et du système corrigé ***87***
4.4.2.2 Diagramme des valeurs singulières du système ***88***
4.4.2.3 Fonction de sensibilité S_1 et fonction de sensibilité complémentaire T_1 ***89***
4.4.2.4 Lieu des pôles et lieu des zéros ***91***
4.4.2.5 Réponses impulsionnelles des systèmes ***93***
4.4.2.6 Réponses indicielles des systèmes ***93***
4.4.2.7 Marge de gain et marge de phase ***94***
4.4.2.8 Marge de module ***95***
4.4.3 Synthèse PRLQR 95
4.4.3.1 Gain de retour d'état K_c ***96***
4.4.3.2 Gain du filtre de Kalman K_f *Erreur ! Signet non défini.*
4.4.3.3 Correcteur K_{PRLQR} ***96***
4.4.4 Analyse du système avec correcteur K_{PRLQR} 96
4.4.4.1 Diagrammes de Bode du système nominal et du système corrigé ***97***
4.4.4.2 Diagramme des valeurs singulières des systèmes : nominal et corrigé ***98***
4.4.4.3 Fonction de sensibilité S_2 et fonction de sensibilité complémentaire T_2 ***99***
4.4.4.4 Lieu des pôles et lieu des zéros ***100***
4.4.4.5 Réponses impulsionnelles des systèmes ***101***
4.4.4.6 Réponses indicielles des systèmes ***101***
4.4.4.7 Marge de gain et marge de phase ***102***
4.4.4.8 Marge de module ***103***
4.5 Conclusion ***103***
CONCLUSION GENERALE **104**
ANNEXE 1 ELEMENTS DE THEORIE DE LYAPUNOV SUR LA STABILITE **106**
ANNEXE 2 SYNTHESE $H\infty$ ET μ-SYNTHESE DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES **110**
ANNEXE 3 NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA COMMANDE MODERNE MULTIVARIABLE **114**

ANNEXE 4 PROPRIETES DE LA FORME STANDARD **121**

BIBLIOGRAPHIE **126**

PAGE DE RENSEIGNEMENTS **129**

RESUME **130**

NOTATIONS

1. Minuscules latines

a_i	paramètre nominal
$\boldsymbol{b}$	bruits de mesure
$\boldsymbol{c}$	consigne ou référence
$\boldsymbol{d_e}$	perturbation à l’entrée du processus
$\boldsymbol{d_s}$	perturbation à la sortie du processus
det	déterminant de la matrice
$\boldsymbol{e}$	entrée du processus
g	fonction mesurable au sens de Lesbegue
k	rang de la matrice de transfert
p_i	paramètre nominal
$\boldsymbol{q}$	entrée du modèle d’incertitudes Δ
$\boldsymbol{r}$	sortie du modèle d’incertitudes Δ
s	variable de la Laplace
$\boldsymbol{s}$	sortie du système global
t	variable temps
tr	trace d’une matrice
$\boldsymbol{u}$	Commande
$\boldsymbol{v}$	sortie du processus
$\boldsymbol{w}$	entrée du système standard
w_i	fonction de pondération du paramètre perturbé
w_1	fonction de pondération de performance nominale
w_2	fonction de pondération de robustesse en stabilité
$\boldsymbol{x}$	variable d’état
$\boldsymbol{y}$	signal d’erreur
$\boldsymbol{z}$	sortie du système standard

2. Majuscules latines

A	matrice d’état
A_c	matrice d’état du système bouclé

B	matrice de commande
C	matrice d'observation
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes
$\mathbb{C}^{n\times m}$	espace vectoriel de Hilbert des matrices complexes de dimension $n \times m$
D	matrice d'anticipation
$\mathcal{D}$	domaine de stabilité
E_i	matrice de structure des paramètres
$F_l(M, \Delta_l)$	transformation linéaire fractionnaire telle que les incertitudes du modèle $\boldsymbol{\Delta_l}$ sont appliquées à la partie inférieure de la matrice M
$F_u(M, \Delta_u)$	transformation linéaire fractionnaire telle que les incertitudes du modèle $\boldsymbol{\Delta_u}$ sont appliquées à la partie supérieure de la matrice M
F_K	contrôleur par anticipation (feedforward)
G	matrice de transfert du processus nominal
H_∞	norme des matrices de transfert rationnelles à coefficients réels correspondant à un système stable
I_n	matrice identité d'ordre n
K	correcteur ou régulateur
K_c	gain de retour d'état
K_f	gain du filtre de Kalman
K_K	contrôleur par rétroaction (feedback)
K_m	marge de stabilité maximale
K_R	solution de l'AMRE
L	matrice de transfert en boucle ouverte
M	matrice de transfert du système nominal sous forme standard
M_c	matrice constante
M_{pn}	matrice de performance nominale
M_{rp}	matrice de robustesse en performance
M_{rs}	matrice de robustesse en stabilité
$\boldsymbol{P}$	matrice de transfert du système standard en boucle fermée
P	fonction définie positive solution de l'équation de Riccati
P_c	polynôme caractéristique du système bouclé
Q	matrice de pondération d'état
Q_C	polynôme caractéristique contenant tous les termes de puissances impaires de $\boldsymbol{P_c}$

Q_L	matrice symétrique définie positive de l'équation de Lyapunov
R	matrice de pondération de commande
$\mathbb{R}$	corps des nombres reels
$\mathbb{R}^{n\times m}$	espace vectoriel de Hilbert des matrices réelles de dimension $n \times m$
R_C	polynôme caractéristique contenant tous les termes de puissances paires de $P_{\boldsymbol{c}}$
RH_∞	sous-espace des matrices de transfert rationnelles à coefficients réels correspondant à un système stable
$\mathcal{R}$	représentation minimale dans l'espace d'état du processus G
S	matrice de sensibilité en sortie
S'	matrice de sensibilité en entrée
T	matrice de sensibilité complémentaire en sortie
T'	matrice de sensibilité complémentaire en entrée
T_p	matrice de corrélation entre les bruits d'état et de mesure
T_{xy}	matrice de transfert en boucle fermée entre x et y
U_x	fonction de Lyapunov
V	matrice égale à $BR^{-1}B^T$en commande optimale modale
W_1	matrice de pondération pour l'étude de la performance nominale du système bouclé avec erreurs de modèle non structurées
W_2	matrice de pondération pour l'analyse de la robustesse en stabilité du système bouclé avec erreurs de modèle non structurées
X_L	matrice symétrique définie positive, solution de l'équation de Lyapunov

3. Minuscules grecques

α_i	coefficients du polynôme caractéristique
$\partial\mathcal{D}$	frontière de la région de stabilité
δ_i	incertitude
δa_i	incertitude du paramètre perturbé $\tilde{a}_i$
δp_i	incertitude du paramètre perturbé $\tilde{p}_i$
$\boldsymbol{\varepsilon_y}$	majorant de l'erreur global $\boldsymbol{y}$ du système
γ	constante arbitraire
γ_r	réel positif qui minimise la norme infinie de la LFT_u du système standard
λ_i	valeur propre de la matrice (.)

ξ	coefficient d'amortissement
ρ	rayon de stabilité paramétrique
ρ_s	rayon spectral
ρ_{sh}	rayon de stabilité hypersphère (approche de Lyapunov)
ρ_{sr}	rayon spectral réel
ρ^*	marge de stabilité paramétrique
$\sigma_i(.)$	valeurs singulières de la matrice complexe (.)
$\sigma_{iH}(.)$	valeurs singulières de Hankel de la matrice complexe (.)
$\underline{\sigma}(.)$	valeur singulière inférieure de la matrice complexe (.)
$\overline{\sigma}(.)$	valeur singulière supérieure de la matrice complexe (.)
τ	constante de temps
μ_{inf}	borne inférieure de la valeur singulière structurée
μ_m	maximum de la valeur singulière structurée à la pulsation ω_0
μ_{sup}	borne supérieure de la valeur singulière structurée
$\mu_{\underline{\Delta}}(.)$	valeur singulière structurée de la matrice (.) associée à la structure $\underline{\Delta}$
v_b	sortie de retour bruitée du système
ω	pulsation
ω_n	pulsation propre
ω_0	pulsation de passage d'un pôle de la boucle fermée à l'intersection de l'axe imaginaire pour le jeu de paramètres déstabilisants
ω_{ri}	pulsations, racines du polynôme $R_c(\omega)$
ω_{qj}	pulsations, racines du polynôme $Q_c(\omega)$

4. Majuscules grecques

Δ	matrice d'erreur ou incertitude du modèle
Δa_i	valeur absolue du maximum des incertitudes sur le paramètre $\tilde{a}_i$
Δ_f	matrice d'incertitude fictive pour l'analyse de la robustesse en performance
Δ_l	matrice d'incertitude du modèle appliquée à la partie inférieure de la matrice M
Δ_{ns}	matrice d'incertitudes non structurées pour l'analyse de la robustesse
ΔP_i	valeur absolue des incertitudes sur le paramètre $\tilde{p}_i$
Δ_{pn}	matrice d'incertitudes de la performance nominale
Δ_{rp}	matrice d'incertitudes de la robustesse en performance

Δ_{rs}	matrice d'incertitudes de la robustesse en stabilité
Δ_s	matrice d'incertitudes structurées pour l'analyse de la robustesse
Δ_u	matrice d'incertitude du modèle appliquée à la partie supérieure de la matrice M
$\underline{\Delta}$	ensemble des matrices Δ
Γ	lieu de Nyquist
Φ	matrice égale à $[sI - A]^{-1}B$ en commande optimale
Φ_f	fonction d'Euler
$\Lambda(.)$	valeurs propres de la matrice (.)

5. Notations spéciales

A^T	matrice transposée de A
A^{-1}	matrice inverse de A
A^*	matrice conjuguée de A
$spec(M)$	ensemble des valeurs propres de M
$\tilde{\blacksquare}$	correspond au système ou au paramètre perturbé
$\hat{\blacksquare}$	correspond au système estimé
$\underline{\blacksquare}$	correspond à un ensemble de vecteur
$:=$	défini comme
➢	début de la démonstration
♦	fin de la démonstration
$\|A\|_\infty$	norme - infinie de la matrice A par la forme vectorielle L_∞
$\|G(s)\|_2$	norme H_2 de la matrice de transfert G(s)
$\|G(s)\|_\infty$	norme H_∞ de la matrice de transfert G(s)
$\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$	Matrice

6. Abréviations

2DDL	2 Degrés De Liberté (système à 2DDL)
AMRE	Algebric Matrix Riccati Equation (Equation Algébrique Matricielle de Riccati)
CACSD	Computer-Aided Control System Design

IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
LFT	Linear Fractional Transformation (Transformation Fractionnaire Linéaire)
LMI	Linear Matrix Inequalities
LTR	Loop Transfer Recovery
LQ	Linear Quadratic
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
MATLAB	MATrix LABoratory, logiciel interactif (The MathWorks Inc)
MIMO	Multi-Input Multi-Output (multi-entrées, multi-sorties)
PID	Proportionnel – Intégrale – Dérivée
PRLQ	Parameter Robust Linear Quadratic
PRLQG	Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian
PRLQR	Parameter Robust Linear Quadratic Regulator
QFT	Quantitative Feedback Theory
SISO	Single-Input Single-Output (mono-entrée, mono-sortie)
SSV	Structured Singular Value (Valeur Singulière Structurée)

INTRODUCTION GENERALE

Si les systèmes de commande à contre-réaction sont connus depuis l'Antiquité, le XIX^{e} siècle pour les débuts industriels et surtout le XX^{e} pour sa conceptualisation théorique ont réellement su utiliser l'idée fondamentale de cette structure de commande. Comment expliquer ces siècles d'absence quand la biologie et le comportement animal offrent tant d'exemples de systèmes régulés? Ce n'est certainement pas un hasard si la percée technologique de la rétro-action coïncide avec la révolution industrielle. Il est également peu douteux que la synthèse de la théorie de la commande et de la théorie de la communication opérée par Wiener et donnant naissance à la cybernétique soit la contribution majeure ayant permis de constituer l'Automatique comme champ scientifique à part entière. Le retard dans le développement des boucles de contre-réaction provient de l'absence de définition mathématique claire de la notion d'information qui leur est indispensable. Cela montre à l'évidence que l'Automatique n'est pas un champ scientifique fermé. Ce champ est transversal dans ses applications allant de la régulation de l'économie à celle de la machine électrique en passant par le pilotage des lanceurs, l'asservissement des têtes de lecture dans les disques durs... Il emprunte ses outils aux mathématiques pures et mathématiques appliquées. Enfin, même si le vocabulaire est parfois différent, sa parenté avec le traitement du signal ne fait aucun doute. De nombreux outils privilégiés sont communs (calcul opérationnel, transformation…) mais plus important, le concept d'information y est également primordial.

Les principales avancées en commande des systèmes linéaires multivariables ont eu lieu dans les années 1960 et 1970, principalement suite aux travaux fondateurs de Kalman. En Europe de l'Ouest et en Amérique du Nord, ces résultats ont fait appel au formalisme de l'espace d'état, par opposition aux techniques algébriques ou polynomiales plus en vogue en Europe.

Après une relative accalmie dans les années 1980, la recherche sur les systèmes linéaires a été relancée dans le contexte de la « Commande Robuste ». Outre un formalisme mathématique rigoureux, un dénominateur commun de ces travaux a été le souci d'applicabilité et d'implémentabilité sur ordinateur des techniques développées. En 1982, un numéro spécial de la revue Américaine IEEE Control Systems Magazine a été dédié à l'automatique assistée par ordinateur (CACSD), et un comité technique dédié a vu le jour. C'est l'époque de développement du logiciel de calcul scientifique Matlab sur la base d'outils d'analyse numérique permettant la résolution fiable de problèmes de valeurs propres et d'équations algébriques matricielles (Lyapunov, Riccati).

L’avantage essentiel des techniques de Commande Robuste est de générer des lois de commande qui satisfont à la double exigence : son caractère appliqué et son adéquation aux problèmes pratiques de l’ingénieur automaticien, et sa contribution à la systématisation du processus de synthèse d’un asservissement. Plus précisément, étant donné une spécification fréquentielle du comportement désiré et une estimation de l’ordre de grandeur de l’incertitude, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande (robustesse). Cette démarche de synthèse est systématique et très générale. En particulier, elle est directement applicable aux systèmes à plusieurs entrées/sorties.

Ce mémoire présente les différentes méthodologies de synthèse pour les techniques linéaires quadratiques de type robustesse paramétrique PRLQ.

Le premier chapitre aura comme rôle de présenter une vue d’ensemble des principaux éléments de base pour l’analyse des systèmes linéaires multivariables. Toutes les notions de base nécessaires y sont rappelées.

Le second chapitre sera consacré à la commande optimale et aux synthèses linéaires quadratiques où seront abordés une présentation générale des problèmes d’optimisation, puis les différentes commandes optimales. Ensuite, nous allons faire des études détaillées de ces synthèses en partant de la méthode linéaire quadratique LQ puis la méthode linéaire quadratique gaussienne LQG, et enfin la méthode LQG/LTR. Nous allons de même voir leurs limites.

Le troisième chapitre parlera de la robustesse paramétrique par les techniques linéaires quadratiques en partant de la forme standard de la synthèse LQG. Nous allons exposer les démonstrations de base des différentes techniques PRLQ, PRLQR et PRLQG, objectif de ce mémoire en faisant une modélisation des systèmes incertains et en présentant les améliorations apportées aux synthèses LQR et LQG classiques.

Le dernier chapitre « Simulation de synthèse des systèmes multivariables par les approches PRLQR et PRLQG » s’occupera de l’étude détaillée d’un système linéaire physique du second d’ordre en utilisant les synthèses PRLQG et PRLQR. En plus, des analyses graphiques et interprétation des résultats obtenus seront faits afin de montrer les avantages de ces lois de commande selon les critères de stabilité du système, de sa performance et de sa robustesse.

Une conclusion générale est présentée à la fin de ce mémoire. Elle résume le travail effectué ainsi que les points qui restent à étudier et à définir dans un proche avenir.

CHAPITRE 1
ELEMENTS INTRODUCTIFS A L'ANALYSE DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

1.1 Systèmes linéaires multivariables invariants à temps continu

1.1.1 Modèle d'état des systèmes à un vecteur d'entrées et à un vecteur de sorties

On appelle système linéaire invariant (ou stationnaires) à temps continu tout système affine en état et en commande dont les paramètres sont constants dans le temps [1].
On considère le modèle d'état du processus représenté par la figure 1.01:

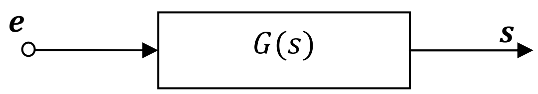


Figure 1.01 : *Schéma fonctionnel du système linéaire*

L'équation d'évolution d'état et l'équation de sortie du système linéaire sont définies par :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{s}(t) = C\,\boldsymbol{x}(t) + D\,\boldsymbol{e}(t) \end{cases} \tag{1.01}$$

où

- $\boldsymbol{x}(t)$: vecteur d'état (variables internes)
- $\boldsymbol{e}(t)$: vecteur des entrées (ou de commande)
- $\boldsymbol{s}(t)$: vecteur des sorties (ou d'observation)
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matrice dynamique du système
- $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$: matrice d'application de la commande
- $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$: matrice d'observation
- $D \in \mathbb{R}^{r\times m}$: matrice d'application directe de la commande

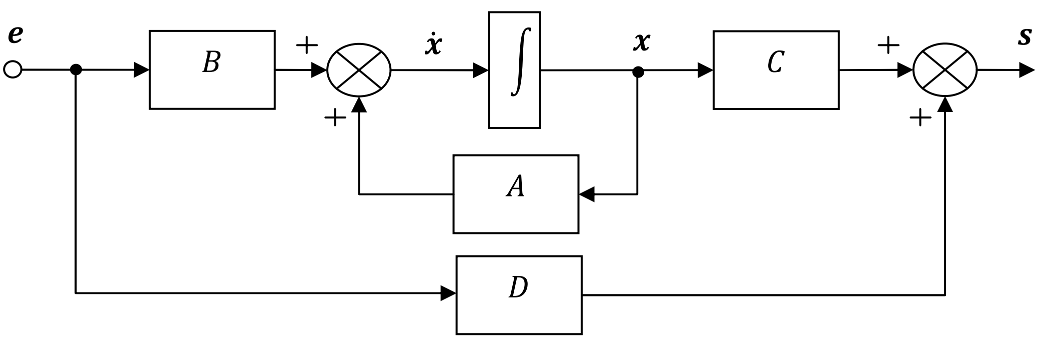


Figure 1.02 : *Schéma fonctionnel d'une représentation d'état*

- $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ est dite représentation d'état du système linéaire.
- La matrice de transfert du processus $G(s)$ s'écrit :

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D \tag{1.02}$$

1.1.2 Modèle d'état des systèmes à deux vecteurs d'entrées et à deux vecteurs de sorties

Considérons un système linéaire multivariable représenté par la figure 1.03 suivante :

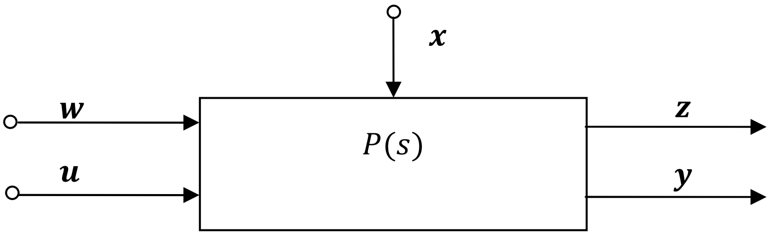


Figure 1.03 : *Représentation d'un système multivariable*

avec

- $\boldsymbol{x}(t)$: vecteur d'état (variables internes)
- $\boldsymbol{w}$: vecteur d'entrées et de perturbations du processus *P*
- $\boldsymbol{z}$: vecteur de sorties du processus *P*
- $\boldsymbol{u}$: vecteur de commande (action) du processus *P*
- $\boldsymbol{y}$: vecteur des sorties (ou de mesures)

Dans l'espace d'état, les équations d'état et d'observation du processus *P* s'écrivent [2] :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\ \boldsymbol{x}(t) + B_1\ \boldsymbol{u}(t) + B_2\ \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C_1\ \boldsymbol{x}(t) + D_{11}\ \boldsymbol{u}(t) + D_{12}\ \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = C_2\ \boldsymbol{x}(t) + D_{21}\ \boldsymbol{u}(t) + D_{22}\ \boldsymbol{w}(t) \end{cases} \tag{1.03}$$

Sous forme matricielle, l'équation du processus *P* s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{1.04}$$

La matrice de transfert du processus $P(s)$ s'écrit :

$$P(s) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} [sI - A]^{-1} [B_1 \quad B_2] + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{1.05}$$

1.1.3 Interconnexion de systèmes

Forme	G equivalent
G	$\forall T \in M[\boldsymbol{\mathcal{C}}]$matrice inversible, $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ CT & D \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_2 & D_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & C_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$
G^T	$\begin{bmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{bmatrix}$
$\overline{G}$	$\begin{bmatrix} -A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$
$G^* = \overline{G}^T$	$\begin{bmatrix} -A^T & -C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^T & C^T \\ -B^T & D^T \end{bmatrix}$
G^{-1}	$\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}$
$G_1 + G_2$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} & D_1 + D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_1 \end{bmatrix} & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$
$G_1 - G_2$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 \\ -B_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} & D_1 - D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} & D_1 - D_2 \end{bmatrix}$
$G_1 . G_2$	$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_1 D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 & D_1 C_2 \end{bmatrix} & D_1 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ B_1 C_2 & A_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 D_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_1 C_2 & C_1 \end{bmatrix} & D_1 D_2 \end{bmatrix}$
sG	$\begin{bmatrix} A & B \\ CA & CB + sD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AB \\ C & CB + sD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A & I \\ 0 & A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$

Tableau 1.01: *Interconnexion de systèmes*

1.2 Critère de commandabilité de Kalman

Considérons un système linéaire défini par la paire (A, B). L'analyse de la commandabilité d'un système est donc caractérisée par l'étude de la matrice de commandabilité M_{com} définie par [3] :

$$M_{com} = [B \quad A^1B \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{1.06}$$

Théorème 1.01: Un système est complètement commandable, si et seulement si, le rang de sa matrice de commandabilité M_{com} est égal à l'ordre du système :

$$rang[M_{com}] = n \tag{1.07}$$

1.3 Critère d'observabilité de Kalman

Considérons un système linéaire défini par la paire (A, B). L'analyse de l'observabilité d'un système est donc caractérisée par l'étude de la matrice d'observabilité M_{obs} définie par [3] :

$$M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.08}$$

Théorème 1.02: Un système linéaire est complètement observable, si et seulement si, le rang de sa matrice d'observabilité M_{obs} est égal à l'ordre du système :

$$rang[M_{obs}] = n \tag{1.09}$$

1.4 Schéma bloc du système nominal et du système perturbé

Le système nominal est le système bouclé à retour unitaire de la figure 1.04 où G représente la matrice de transfert du processus nominal et le correcteur K. $L = GK$ représente la matrice de transfert en boucle ouverte [4].

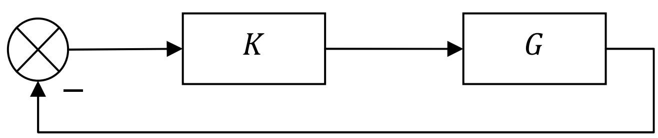


Figure 1.04 : *Schéma bloc du système nominal*

La figure 1.05 représente le schéma bloc du système bouclé perturbé où $\tilde{G}$ représente la matrice de transfert du processus perturbé prenant en compte les erreurs de modélisation Δ.

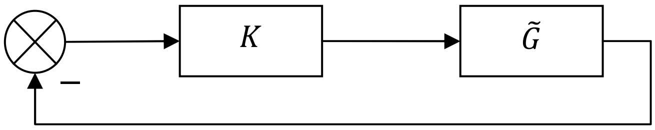


Figure 1.05 : *Schéma bloc du système perturbé*

Nous avons :

$$\tilde{G} = f(G, \Delta) \tag{1.10}$$

1.4.1 Forme standard

La forme standard regroupe dans un modèle augmenté, noté $P(s)$ et fait appel aux transferts multivariables qui sont les entrées exogènes: $\boldsymbol{u}$ (commandes), $\boldsymbol{w}$ (perturbations ou consigne); les mesures $\boldsymbol{y}$ et les sorties $\boldsymbol{z}$ [4].

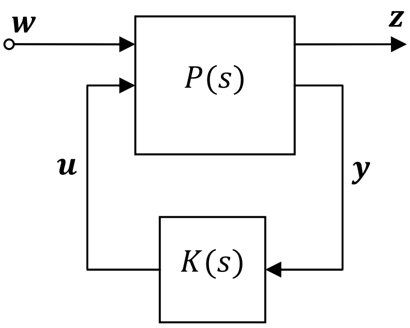


Figure 1.06 : *Représentation sous forme standard*

Si le correcteur $K(s)$ est connu (*problème d'analyse*), cette représentation donne la fonction de transfert en boucle fermée et permet de manipuler les normes.

Si $K(s)$ est à déterminer (*problème de synthèse*), la seule donnée de la matrice de transfert $P(s)$ suffit à exprimer complètement le problème.

Donc on a la représentation suivante:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

1.4.2 *Transformation fractionnaire linéaire d'une matrice*

Dans ce paragraphe, nous rappelons que l'expression des objectifs de synthèse ainsi que la modélisation des incertitudes intervenant sur le modèle, peuvent être traduits par un même formalisme de représentation des systèmes : les transformations linéaires fractionnaires (LFT) [4], [5]. Soit une matrice complexe $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ partitionnée comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

1er cas : *Les incertitudes du modèle sont connectées sur la partie supérieure de* M.

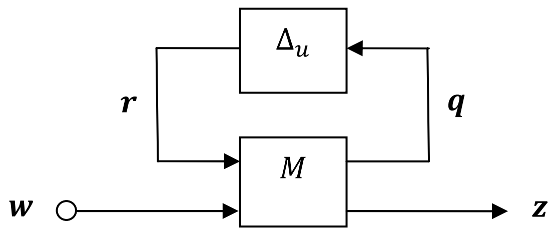


Figure 1.07 : *Représentation par* LFT_u

La matrice d'interconnexions du système perturbé est définie par :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

En connectant la matrice des incertitudes de modèles, nous avons :

$$\boldsymbol{r} = \Delta_u \boldsymbol{q} \tag{1.14}$$

La matrice de transfert en boucle fermée entre $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$ notée T_u satisfait la relation :

$$\boldsymbol{z} = F_u(M, \Delta_u) \cdot \boldsymbol{w} \text{ si } (I - M_{11}\Delta_u)^{-1} \text{ existe} \tag{1.15}$$

Alors

$$F_u(M, \Delta_u) = T_u = [M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}] \tag{1.16}$$

Définition 1.01 : $F_u(M, \Delta_u)$ est appelée transformation fractionnaire linéaire ou LFT_u lorsque les incertitudes de modélisation Δ_u sont appliquées à la partie supérieure de M [4].

2ème cas : Les incertitudes du modèle sont connectées sur la partie inférieure de M

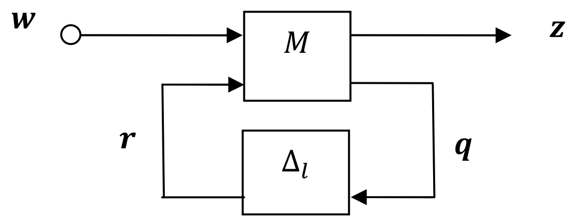


Figure 1.08 : *Représentation par* LFT_l

La matrice d'interconnexions du système perturbé est définie par :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

En connectant la matrice des incertitudes de modèle, nous avons :

$$\boldsymbol{r} = \Delta_l \boldsymbol{q} \tag{1.18}$$

La matrice de transfert en boucle fermée entre w et z notée T_l satisfait la relation :

$$\boldsymbol{z} = F_l(M, \Delta_l) \cdot \boldsymbol{w} \text{ si } (I - M_{22}\Delta_l)^{-1} \text{ existe} \tag{1.19}$$

Alors

$$F_l(M, \Delta_l) = T_l = [M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}] \tag{1.20}$$

Définition 1.02 : $F_l(M, \Delta_l)$ est appelée transformation fractionnaire linéaire ou LFT_l lorsque les incertitudes de modélisation Δ_l sont appliquées à la partie inférieure de M [4].

1.4.3 Modèles mathématiques des incertitudes structurées

Les incertitudes structurées ou paramétriques affectent généralement la valeur d'un ou plusieurs des paramètres réels, qui doivent être considérés. Ces incertitudes, si elles ne sont pas appréhendées correctement, peuvent rendre totalement inefficace toute l'analyse et toute la synthèse du système bouclé (articles de Doyle [1] et Lu, Zhou, Doyle [5]). La structure de ces incertitudes paramétriques est modélisée par l'équation 1.21 pour être proche de la réalité physique.

En général, le paramètre $\tilde{p}_i$ a pour modèle mathématique :

$$\tilde{p}_i = p_i\left(1 + \omega_{p_i}\delta_{p_i}\right) \tag{1.21}$$

où ω_{p_i} est le poids du paramètre $\tilde{p}_i$ et $\left|\delta_{p_i}\right| < 1, \delta_{p_i} \in \mathbb{R}$

1.4.3.1 Représentation des incertitudes paramétriques par LFT_l

Soit

$$\tilde{p}_l = p_l\left(1 + \omega_{p_l}\delta_{p_l}\right) \tag{1.22}$$

Le paramètre $\tilde{p}_l$ a pour modèle LFT_l :

$$\tilde{p}_l = m_{p11} + m_{p12}\delta_{p_l}\left(1 - m_{p22}\delta_{p_l}\right)^{-1} m_{p21} \tag{1.23}$$

En identifiant l'équation (1.22) à (1.23), nous obtenons la matrice LFT_l correspondante :

$$M_{P_l} = \begin{bmatrix} m_{p11} & m_{p12} \\ m_{p21} & m_{p22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_l & p_l\omega_{p_l} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

La figure 1.09 représente la simulation des incertitudes paramétriques par LFT_l

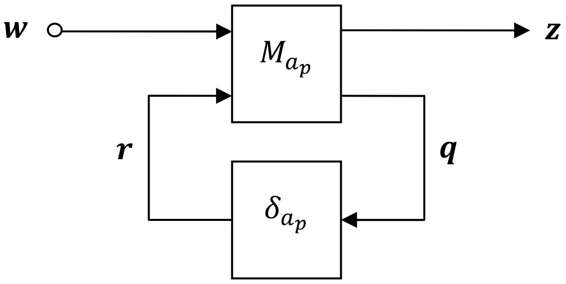


Figure 1.09 : *Représentation des incertitudes paramétriques par LFT_l*

1.4.3.2 Représentation des incertitudes paramétriques par LFT_u

Soit

$$\frac{1}{\tilde{a}_u} = \frac{1}{a_u\left(1 + \omega_{a_u}\delta_{a_u}\right)} = \frac{1}{a_u} - \omega_{a_u}\delta_{a_u}\left[1 - \left(-\omega_{a_u}\right)\delta_{a_u}\right]^{-1}\frac{1}{a_u} \tag{1.25}$$

Le paramètre $\frac{1}{\tilde{a}_u}$ a pour modèle LFT_u :

$$\frac{1}{\tilde{a}_u} = m_{a22} + m_{a21}\delta_{a_u}\left(1 - m_{a11}\delta_{a_u}\right)^{-1} m_{a12} \tag{1.26}$$

En identifiant l'équation (1.25) à (1.26), nous obtenons la matrice LFT_u correspondante :

$$M_{a_u} = \begin{bmatrix} m_{a11} & m_{a12} \\ m_{a21} & m_{a22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{a_u} & \frac{1}{a_u} \\ -\omega_{a_u} & \frac{1}{a_u} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

La figure 1.10 représente la simulation des incertitudes paramétriques par LFT_u

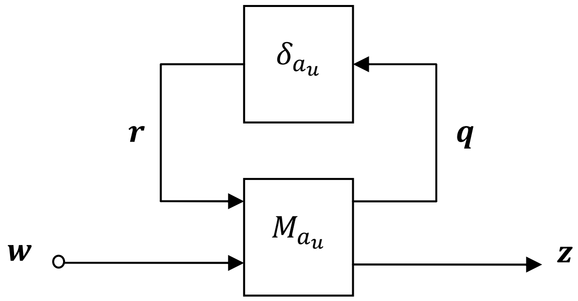


Figure 1.10 : *Représentation des incertitudes paramétriques parLFT_u*

1.5 Calcul de la norme H_∞

En automatique, nous limiterons au cas des systèmes linéaires à temps continu de dimension finie dont la matrice de transfert possède des termes qui sont des fractions rationnelles à coefficients réels. Nous considérons le sous-espace des matrices de transfert $G(s)$ de dimension $n \times n$ strictement propre et sans pôle sur l'axe imaginaire noté RH_∞^n ou plus simplement RH_∞ [6].

Définition 1.03 : La norme$-\infty$ étendue aux matrices de transfert de l'espace RH_∞ est la plus grande valeur singulière définie par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \overline{\sigma}[G(j\omega)] \tag{1.28}$$

$\|G\|_\infty$ est appelé norme H_∞ de la matrice de transfert $G(s)$

Interprétation : La norme H_∞ de la matrice de transfert $G(s)$ d'un système linéaire à temps continu asymptotiquement stable représente donc une mesure du gain maximal atteinte sur l'ensemble des fréquences, par la plus grande valeur singulière de $G(j\omega)$ [7].

1.6 Analyse en stabilité des systèmes linéaires bouclés à temps continu

Les paragraphes suivants sont consacrés à un rappel des outils d'analyse des systèmes bouclés. Après un bref rappel sur l'analyse de la stabilité et de la performance du système bouclé nominal, nous nous intéressons à la notion de robustesse. Nous rappelons le théorème du petit gain appliqué à l'analyse de la robustesse face à des erreurs de modélisation non structurées. La stabilité est la propriété fondamentale que doit impérativement vérifier tout système à commander.

La stabilité d'un système est, de manière qualitative, la capacité de ce dernier à revenir à une position d'équilibre lorsqu'il en est ponctuellement écarté [8].

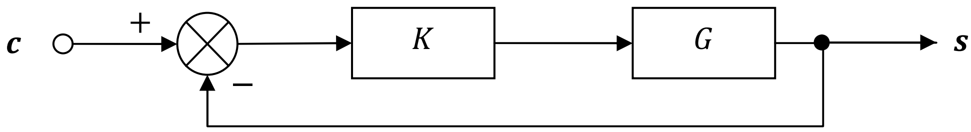


Figure 1.11 : *Schéma bloc du système asservi pour l'étude de la stabilité nominale*

La région de stabilité de la figure 1.11 est définie par :

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \mid, \gamma = 0, \omega \in \mathbb{R}\} \tag{1.29}$$

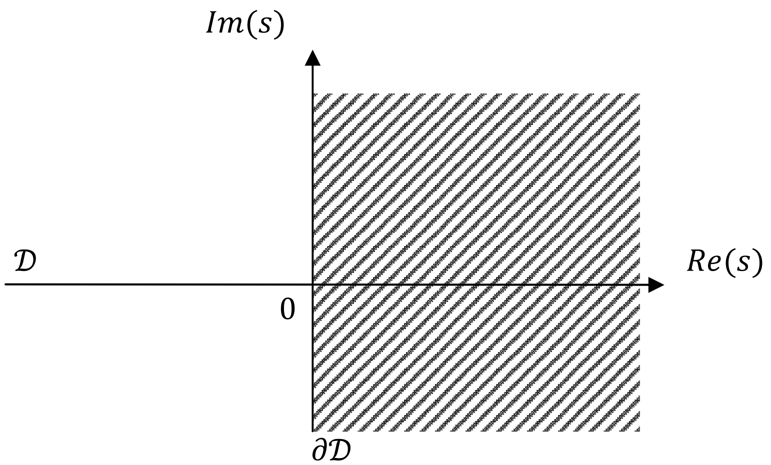


Figure 1.12 : *Région de stabilité $\mathcal{D}$ pour assurer la marge de stabilité asymptotique*

1.6.1 Marge de phase

La marge de phase est définie comme la distance $\Delta\varphi$ du lieu de transfert en boucle ouverte au point critique où la pulsation de coupure en boucle ouverte ou pulsation de croisement du système bouclé est la pulsation ω_{co} pour laquelle $|L(j\omega_{c0}| = 1$. Si $\varphi(\omega_{c0}) = \arg\, L(j\omega_{c0})$, on a donc [4], [8] :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) \tag{1.30}$$

1.6.2 Marge de gain

La marge de gain est définie comme la distance ΔG du point critique au lieu de transfert en boucle ouverte lorsque arg $L(j\omega_{-\pi}) = -180^{\circ}$, on a donc [4], [8] :

$$\Delta G = \frac{1}{|L(j\omega_{-\pi})|} \tag{1.31}$$

1.6.3 Marge de retard

La marge de retard mesure la valeur minimale du retard pur introduit dans la boucle qui déstabilise le système asservi. La marge de retard est liée à la marge de phase exprimée en degré par la relation [8] :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{c0}} \tag{1.32}$$

C'est le calcul du retard additionnel qui ne conduira pas à l'instabilité. La marge de retard permet alors de mettre en évidence qu'une marge de phase même confortable peut être critique si la pulsation ω_{c0} correspondante est élevée. Une grande marge de phase qui intervient en très hautes fréquences n'engendre pas une forte robustesse. Si le transfert en boucle ouverte intercepte le cercle unité à plusieurs pulsations de croisements, caractérisées par les marges de phase correspondantes, nous définissons la marge de retard généralisé. Cette marge qui constitue un minorant de la marge de retard du système est définie par :

$$\Delta\tau = min_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_{c0}^i} \tag{1.33}$$

1.6.4 Marge de module

La marge du module est définie comme la plus petite distance du point critique au lieu de transfert en boucle ouverte [8] :

$$\Delta M = \min_{\omega \in R} \|[1 + L(j\omega)]\|_{\infty} \tag{1.34}$$

Les valeurs typiques de ces grandeurs utilisées pour une conception robuste sont [4] :

- $45^{\circ} \leq \Delta\varphi \leq 60^{\circ}$
- $\Delta G \geq 2$
- $\Delta\tau \geq 0{,}5\, T_r$
- $\Delta M \geq 0{,}5$

1.6.5 Autres indicateurs fréquentiels

Nous rappelons aussi d'autres indicateurs fréquentiels qui sont très importants à définir [8] :

- La ***pulsation de résonnance*** est la pulsation ω_r telle que $\omega_r = arg[max_\omega(L(j\omega)]$.
- L'***amplitude de résonance*** est définie par $M_r = max_\omega[\|F(j\omega_r)\|_\infty]$.
- La ***bande passante en boucle ouverte*** est définie par la pulsation ω_{co} pour laquelle $|L(j\omega_{c0})| = 1$.
- La ***bande passante minimale en boucle fermée*** d'un système asservi est l'ensemble des fréquences ω_c pour lesquelles $\underline{\sigma}[L(\omega_c)] > 1$. La bande passante mesure la zone de fonctionnement du système asservi.

1.7 Stabilité interne

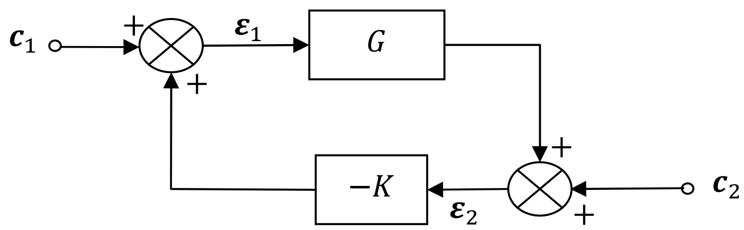


Figure 1.13 : *Diagramme d'analyse de la stabilité interne des systèmes linéaires*

Définition 1.04 : Un système linéaire est dit stable intérieurement si toute matrice de transfert reliant deux points quelconques du système bouclé de la figure 1.11 n'a que des pôles à partie réelle strictement négative [9]. Le système de la figure 1.13 est décrit par les équations :

$$\boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{\varepsilon_1} + K\boldsymbol{\varepsilon_2} \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{c_2} = -G\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon_2} \tag{1.36}$$

Définition 1.05 : Le système de la figure 1.13 est dit stable intérieurement si la matrice de transfert $\begin{bmatrix} I & K \\ I & I \end{bmatrix}^{-1}$ de $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$ à $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ appartient à RH_∞ [9]. Ainsi, le système asservi de la figure 1.11 est dit stable nominalement si le correcteur K stabilise de manière interne le processus ayant pour modèle nominal G.

1.8 Théorème du petit gain

Considérons à nouveau le système asservi de la figure 1.11 et sa matrice de transfert en boucle ouverte $L = GK$ en supposant que tous les matrices $G(s)$ et $K(s)$ ne possèdent que des pôles à partie réelle négative [10].

Théorème 1.02 : Le système bouclé ayant pour matrice de transfert en boucle ouverte GK est *intérieurement stable* si :

$$\|GK\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \forall\omega \in \mathbb{R}, \bar{\sigma}[GK(j\omega)] < 1 \tag{1.37}$$

Démonstration :

- Supposons $\|GK\|_\infty < 1$ et que le système bouclé soit instable. D'après le critère de Nyquist, $det[I + GK(j\omega)] = 0$ et encercle l'origine. Par continuité, il existe donc $\varsigma \in [0,1]$ et ω' tels que $det[I + \varsigma GK(j\omega')] = 0$.

Nous avons alors d'après la propriété des valeurs singulières :

$$\bar{\sigma}[\varsigma GK(j\omega)] \geq \underline{\sigma}(I) = 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}[GK(j\omega')]\frac{1}{\varsigma} \geq 1 \tag{1.38}$$

◆

1.9 Analyse en performance des systèmes linéaires bouclés à temps continus

1.9.1 Introduction

Un système linéaire bouclé à temps continu est calculé afin de modifier les caractéristiques du régime transitoire et celles du régime permanent du système nominal. Les performances d'un système bouclé doivent être définies et spécifiées précisément afin de faire une analyse et une synthèse adéquate du système de commande. Les spécifications de performances pour un système bouclé peuvent être constituées de critères temporels relatifs au régime transitoire, de critères fréquentiels en relations plus ou moins étroites avec ses dernières et des critères de précision sur le régime permanent [11].

Ces spécifications de nature différente ne vont pas s'en opposer parfois les unes aux autres conduisant le concepteur du système de commande à adopter un compromis entre ces différentes exigences contradictoires. Les spécifications de performances doivent être vues comme un moyen une liste de performances souhaitées et concepteur devra nécessairement tenir compte, dans son étape de synthèse, des propriétés du système bouclé à corriger.

L'objet de ce paragraphe est donc de fournir des méthodes permettant de manière systématique la génération de spécifications de performance.

1.9.2 Spécifications fréquentielles de performance nominales

Considérons le système bouclé de la figure 1.11 où G et K désignent respectivement le processus à contrôler et le correcteur. Nous définissons d'après ce schéma bloc les différentes matrices de transfert entre les entrées et les sorties considérées ainsi que leurs différentes significations [11], [12].

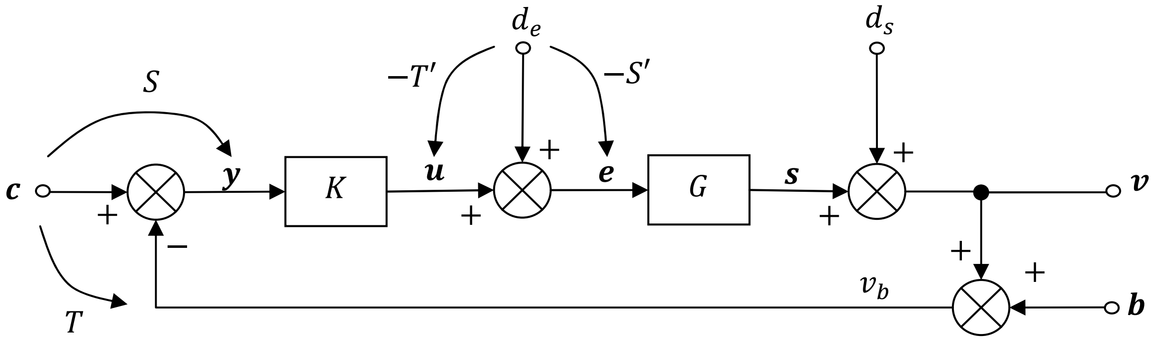


Figure 1.14 : *Schéma bloc du système asservi pour l'étude de la performance nominale*

Comme le système est linéaire, nous obtenons à partir de ce schéma bloc :

- la matrice de transfert entre la référence $\boldsymbol{c}$ et le signal d'erreur du système global $\boldsymbol{y}$ est appelée matrice de sensibilité en sortie et est définie par :

$$S = [I + GK]^{-1} \tag{1.39}$$

- la matrice de transfert entre la référence $\boldsymbol{c}$ et la sortie de retour bruitée $\boldsymbol{v_b}$ du système est appelée matrice de sensibilité complémentaire en sortie et est définie par :

$$\mathrm{T} = [(I + GK)^{-1}\mathrm{GK}] \tag{1.40}$$

- la matrice de transfert entre la perturbation en entrée $\boldsymbol{d_e}$ et l'entrée $\boldsymbol{e}$ du processus G est appelée matrice de sensibilité en entrée et est définie par :

$$S' = [I + KG]^{-1} \tag{1.41}$$

- la matrice de transfert entre la perturbation en entrée $\boldsymbol{d_e}$ et la sortie $\boldsymbol{u}$ du correcteur K est appelée matrice de sensibilité complémentaire en entrée et est définie par :

$$\mathrm{T'} = [(I + KG)^{-1}\mathrm{KG}] \tag{1.42}$$

Propriétés 1.01 :

- Les deux matrices de sensibilité en sortie vérifient l'identité matricielle :

$$S + T = I \tag{1.43}$$

- Les deux matrices de sensibilité en entrée vérifient l'identité matricielle :

$$S' + T' = I \tag{1.44}$$

Remarque : Les matrices de sensibilité caractérisent le comportement du système asservi. Nous souhaitons prendre en considération les points suivants, pour le système bouclé :

- un bon suivi de la référence est obtenue lorsque S est faible ;
- une bonne réjection des bruits de mesure est obtenue lorsque T est faible ;
- la commande reçue par le processus est faible lorsque S' est faible ;
- l'effort de commande est faible lorsque T' est faible.

1.9.3 Condition de performance nominale

La performance nominale des systèmes linéaires à temps continu consiste à assurer, pour le système en boucle fermée correspondant au modèle utilisé pour le calcul de la commande, des propriétés convenables, notamment de précision et de rapidité.

La performance nominale est caractérisée par les différentes matrices de sensibilité de la boucle de régulation. Cette performance nominale du système asservi de la figure 1.11 est jugée satisfaisante si les objectifs de performance sont satisfaits pour le modèle nominal. La performance du système nominal est évaluée en fonction de l'erreur $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{v_b}$. Or la matrice de sensibilité S est le rapport du signal d'erreur global $\boldsymbol{y}$ sur la consigne .

Rechercher la performance nominale revient à fixer un majorant noté ε_y de la norme H_∞ de la matrice de sensibilité S en fonction de la fréquence ω [11].

Définition 1.06: La spécification de la performance nominale du système bouclé peut être exprimée par :

$$\|S(j\omega)\|_\infty < \varepsilon_y \tag{1.45}$$

Dans ce cas l'erreur de régulation est inférieure à ε_y. L'inverse du majorant ε_y définit la matrice de pondération du système linéaire. Cette matrice appartient à RH_∞ et est notée :

$$W_1(s) = w_1(s).I = \frac{1}{\varepsilon_y}I \tag{1.46}$$

où la fonction de pondération w_1 est un filtre du premier ordre ou du second ordre à d degrés de liberté. Cette matrice de pondération traduit la performance nominale du système linéaire. La façon dont cette matrice intervient dans la description du système asservi est représentée schématiquement sur la figure 1.13. Cette matrice de transfert de performance nominale est calculée entre la consigne $\boldsymbol{c}$ et la sortie pondérée $\boldsymbol{z}_1$. Elle est notée M_{pn}.

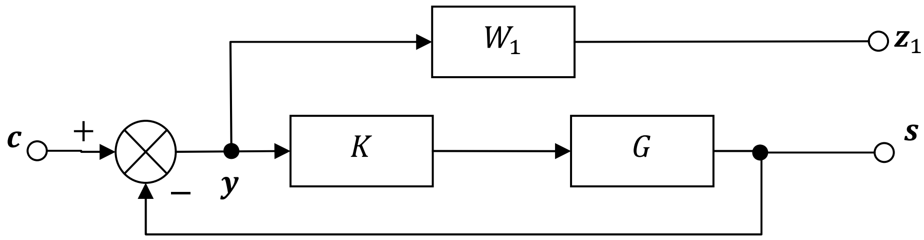


Figure 1.15 : *Schéma bloc du système asservi pour le calcul de la matrice de transfert de performance nominale*

Théorème 1.03 : La performance nominale du système asservi est jugée satisfaisante si :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}\ \|SW_1\| < 1_\infty \tag{1.47}$$

En effet, nous avons d'après la figure 1.15 : $M_{pn} = T_{\boldsymbol{z}_1 c} = [I + GK]^{-1}W_1 = SW_1$.

L'application de (1.39) fournit le résultat suivant : $\|SW_1\| < 1$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

1.10 Mise en forme de la boucle de commande

Définition 1.07 : La mise en forme de la boucle de commande consiste à établir un gabarit tel que la courbe des valeurs singulières de la matrice de transfert en boucle ouverte $G(j\omega)K(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, possède une forme adéquate [4].

Lors de la spécification de la performance nominale, nous souhaitons que la référence c ait une faible influence sur l'erreur d'asservissement $\boldsymbol{y}$. Ainsi l'introduction de la matrice de pondération permet de modeler les différentes matrices de sensibilité et d'assurer la condition (1.47). En basse fréquence, la condition de performance nominale (1.47) devient :

$$\forall\omega \in \,]0, \omega_l], |W_1(j\omega)| < \underline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] \tag{1.48}$$

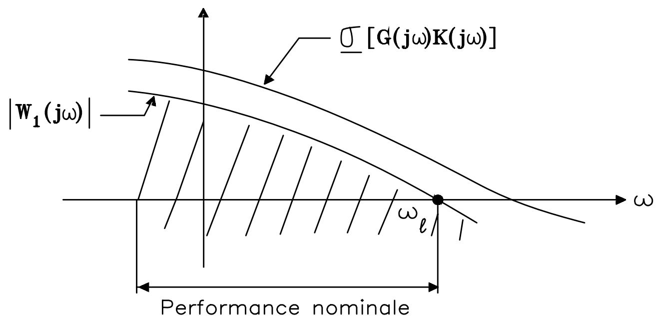


Figure 1.16 : *Gabarit de performance nominale*

Nous obtenons alors le gabarit de performance nominale de la figure 1.16 qui permet de régler la performance nominale lorsque nous effectuons un modelage de la matrice de transfert en boucle ouverte $G(j\omega)K(j\omega)$ par rapport à la matrice de pondération $W_1(j\omega)$.

1.11 Modelage des matrices de sensibilité

Définition 1.08: Nous définissons deux indicateurs de performance à partir de la norme H_∞ sur les matrices de sensibilité et sensibilité complémentaires [13] :

$$M_S = \|S\|_\infty \text{ et } M_T = \|T\|_\infty$$

M_S et M_T correspondent à un pic de la courbe de gain de chacun des transferts considérés. Des valeurs de M_S et M_T grands indiquent une faible performance du système ainsi q'une faible robustesse vis-à-vis des perturbations pouvant l'affecter. Des valeurs typiques sont données par : $Ms \leq 2$ (6 dB) et $M_T \leq 1{,}25$ (2 dB)

1.11.1 Marge de module

La marge du module est donc la plus petite distance du point critique au lieu de transfert en boucle ouverte [8] :

$$\Delta M = \frac{1}{M_S}$$

1.11.2 Bande passante en boucle fermée

La bande passante en boucle fermée est définie par la pulsation de coupure ω_c pour laquelle [8] :

$$\|S(j\omega_c)\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.12 Analyse robuste

La conception d'un asservissement consiste à ajuster le transfert $K(s)$ du correcteur de manière à obtenir les propriétés et le comportement désirés en boucle fermée. Outre la contrainte de stabilité, on recherche typiquement les meilleures performances possibles. Cette tâche est compliquée par deux difficultés principales. D'une part, la conception s'exécute sur un modèle idéalisé du système. Il faut donc assurer la « robustesse » aux imperfections de ce modèle, c'est-à-dire garantir les propriétés désirées pour toute une famille de systèmes autour du modèle de référence. D'autre part, on se heurte à des limitations intrinsèques comme le compromis entre performance et robustesse [4], [11], [14].

L'analyse robuste consiste alors à assurer les critères de robustesse et de performance du système malgré les perturbations et les imperfections du modèle.

1.12.1 Forme standard pour l'analyse robuste

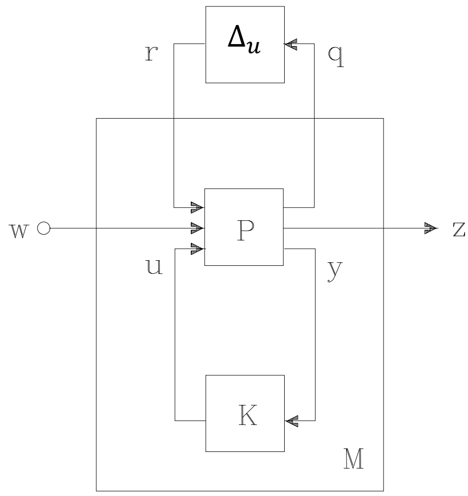


Figure 1.17 : *Forme standard pour l'analyse robuste*

Une représentation générale des systèmes soumis à des incertitudes de modèle structurées ou non structurées est donnée sur la figure 1.18. La matrice de transfert M modélise les interconnexions entre les entrées $\boldsymbol{w}$, les sorties $\boldsymbol{z}$, et les signaux $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$ qui permettent de rassembler les incertitudes de modèle dans un seul bloc défini par la matrice Δ .

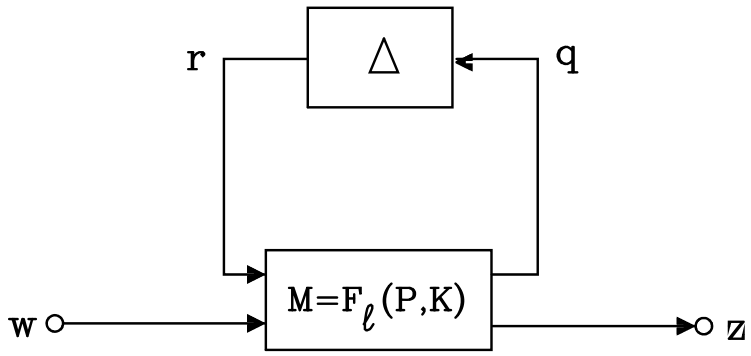


Figure 1.18 : *Problème standard pour l'analyse robuste d'un système linéaire*

La matrice de transfert M en boucle fermée entre $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{z} = M\,\boldsymbol{w} \tag{1.49}$$

Comme le correcteur K est appliqué à la partie inférieure de la matrice P, la matrice de transfert M n'est autre que la transformation fractionnaire linéaire LFT_l.
Si $(I - P_{22}K)^{-1}$ existe, nous avons :

$$\boldsymbol{z} = F_l(P,K)\,\boldsymbol{w} \tag{1.50}$$

$$M = F_l(P,K) = T_{zw} = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}] \tag{1.51}$$

1.12.2 Formulation du problème standard pour l'analyse de la robustesse

L'analyse de la robustesse d'un système standard de la figure 1.18 se traduit alors mathématiquement par la recherche d'une constante γ_{r} qui minimise le transfert M de $\boldsymbol{w}$ vers $\boldsymbol{z}$ au sens d'une norme. Le problème standard H_∞ lors de l'analyse de la robustesse d'un système linéaire peut alors être défini de la manière suivante :

Définition 1.09 :

Etant donné le régulateur K et le système ayant pour matrice de transfert M comportant des erreurs de modèle ayant pour matrice de transfert Δ, le problème standard H_∞ de la robustesse consiste à trouver un réel positif γ_r qui minimise la norme infinie de la LFT_l telle que :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}\,, \|F_u(M,\Delta)\|_\infty < \gamma_{\mathrm{r}} \tag{1.52}$$

Définition 1.10 :

L’analyse robuste consiste à vérifier l’inégalité (1.52) et à attester que les propriétés du système bouclé sont modifiées dans des proportions tolérables, c’est-à-dire que le système est robuste pour une famille prédéfinie de modèles donnés ou à essayer d’estimer quel est le plus vaste domaine d’incertitude pour lequel le système bouclé conserve des propriétés acceptables.

1.12.3 Robustesse à la stabilité des systèmes linéaires

1.12.3.1 Définition 1.11

Rechercher la robustesse en stabilité vis à vis des incertitudes du modèle revient à maintenir la stabilité du système en boucle fermée malgré la présence des erreurs de modélisation [4]. Le système asservi de la figure 1.14 est dit robuste en stabilité si le correcteur K stabilise de manière interne le processus perturbé $\widetilde{G}$.

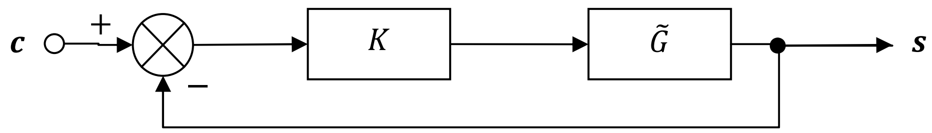


Figure 1.19 : *Schéma bloc du système asservi pour l’étude de la robustesse en stabilité*

Le calcul de la commande d’un processus physique passe nécessairement par l’utilisation d’un modèle qui n’est qu’une représentation imparfaite de la réalité : il y a toujours une incertitude de modélisation. Il convient donc d’étudier la robustesse de la loi de commande appliquée, afin d’être capable de garantir la stabilité et un certain degré de performance en dépit de ces incertitudes.

La figure 1.18 est une représentation générale d'un système soumis à des incertitudes de modélisation. Le processus P bouclé par le régulateur K engendre une matrice d’interconnexion M.

Nous avons :

$$\boldsymbol{z} = F_u[F_l(P,K),\Delta_u]\boldsymbol{w} \tag{1.53}$$

La figure 1.20 représente le schéma bloc du système asservi pour l’étude de la robustesse en stabilité où M_{rs} la matrice de transfert de la robustesse en stabilité qui modélise les interconnexions du système bouclé.

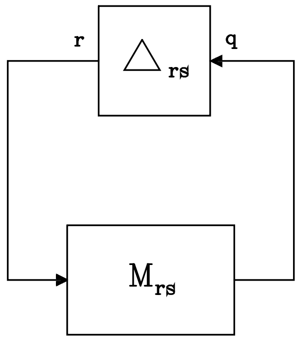


Figure 1.20 : *Schéma général d'étude de la robustesse en stabilité*

1.12.3.2 Théorème 1.04

Sous les hypothèses suivantes :

- la matrice de transfert nominale du système en boucle fermée a tous ses pôles à partie réelle négative ;
- l'incertitude de modèle à tous ses pôles à partie réelle négative ;

Le système de la figure 1.16 est stable pour toute matrice $\Delta(s)$ telle que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ si et seulement si [11], [14] :

$$\|M_{rs}\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \overline{\sigma}[M_{rs}(j\omega)] < 1 \tag{1.54}$$

1.12.4 Robustesse en stabilité des systèmes linéaires avec erreurs de modèle non structurées

Les incertitudes non structurées permettent de modéliser une méconnaissance du processus G haute ou basse fréquence, en entrée ou en sortie. Nous considérons que le « vrai » processus est un élément de la famille $\tilde{\mathcal{G}}$ proche du processus G aux fréquences où celui-ci est connu. Nous définissons tout d'abord une famille de processus avec erreurs de modèle non structurées :

$$\tilde{\mathcal{G}} = \left\{\tilde{G}(s) = f[G(s), \Delta_{ns}(s)]; \|\Delta_{ns}\|_\infty \leq 1\right\} \tag{1.55}$$

Suivant la forme adoptée, posons $\Delta_{ns} = W_2\delta_2$ où W_2 est une matrice de pondération permettant d'avoir $\overline{\sigma}(\Delta_{ns}) \leq 1$. W_2 est une matrice de transfert stable représentant l'incertitude maximale avec δ_2 stable telle que $\|\delta_2\|_\infty \leq 1$. Nous obtenons alors :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \overline{\sigma}(\delta_2(j\omega)) \leq \frac{1}{|W_2(j\omega)|} \Leftrightarrow \|W_2\delta_2\|_\infty \leq 1 \tag{1.56}$$

1.13 Les formes de modèles d'erreurs [4]

Formes du modèle d'erreurs	*Processus perturbé $\widetilde{G}$*	*Condition de robustesse en stabilité*	W_{2h}
Additive directe	$[G + \Delta_{ns}]$	$\|W_2KS\|_\infty < 1$	W_2G^{-1}
Additive inverse	$[(I + G\Delta_{ns})^{-1}G]$	$\|W_2GS\|_\infty < 1$	W_2K^{-1}
Multiplicative directe en sortie	$[(I + \Delta_{ns})G]$	$\|W_2T\|_\infty < 1$	W_2
Multiplicative directe en entrée	$G[(I + \Delta_{ns})]$	$\|W_2T'\|_\infty < 1$	W_2
Multiplicative inverse en sortie	$[(I + \Delta_{ns})^{-1}G]$	$\|W_2S\|_\infty < 1$	$W_2(GK)^{-1}$
Multiplicative inverse en entrée	$[G(I + \Delta_{ns})^{-1}]$	$\|W_2S'\|_\infty < 1$	$W_2(KG)^{-1}$

Tableau 1.02: *Quelques formes de modèles d'erreurs*

1.14 Gabarit de la robustesse en stabilité

Dans le cas général, nous pouvons mettre les différentes conditions de robustesse en stabilité du système perturbé en boucle fermée sous la forme [9] :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}\,, \|W_{2h}T\|_\infty < 1 \tag{1.57}$$

Cette inégalité est équivalente à :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}\,, \overline{\sigma}[T(j\omega)] < \frac{1}{|W_{2h}(j\omega)|} \tag{1.58}$$

En utilisant la propriété des valeurs singulières et l'inégalité (1.47), nous avons :

$$\forall\omega \in (\omega_h, +\infty)\,, \overline{\sigma}[G(j\omega)K(j\omega)] < \frac{1}{|W_{2h}(j\omega)|} \tag{1.59}$$

Nous obtenons le gabarit de la robustesse en stabilité de la figure 1.21 :

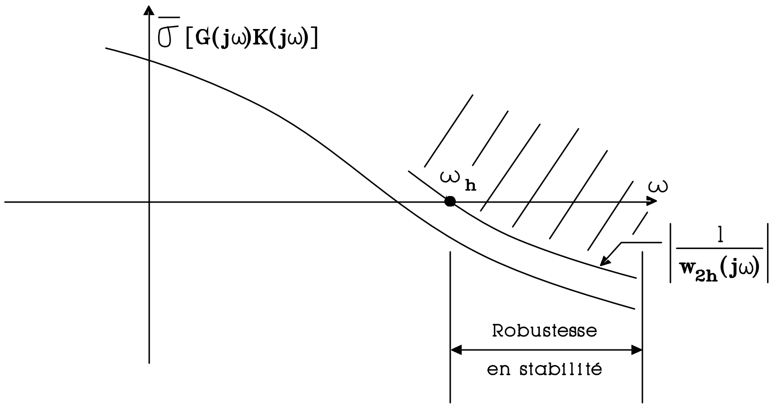


Figure 1.21 : *Gabarit de la robustesse en stabilité*

1.15 Robustesse en performance

Nous dirons que le système bouclé perturbé satisfait la robustesse en performance si la condition de performance nominale est vérifiée pour toute une classe de processus de matrices de transfert $\tilde{G}$, différent de G par l'une quelconque des formes de représentation des incertitudes de modèle.

1.15.1 Définition 1.12

Rechercher la robustesse en performance revient à fixer un majorant noté $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ de l'erreur $\boldsymbol{y}$ du système perturbé, qui est supérieur à la norme-∞ de sa matrice de sensibilité $\tilde{S}$ en fonction de la fréquence ω [11]. La spécification de la robustesse en performance du système perturbé est définie par :

$$\left\|\tilde{S}(j\omega)\right\|_\infty < \boldsymbol{\varepsilon}_y \tag{1.60}$$

La matrice de transfert de robustesse en performance est calculée entre la consigne $\boldsymbol{c}$ et la sortie pondérée $\boldsymbol{z}_1$ de la figure 1.15. Elle est notée M_{rp}.

L'introduction entre le vecteur d'entrée c et le vecteur de sortie z_1 d'une matrice d'erreurs fictives Δ_f avec $\left\|\Delta_f\right\|_\infty < 1$ permet de transformer le schéma d'analyse de robustesse en performance de la figure 1.01 en un schéma d'analyse de la robustesse en stabilité. Nous obtenons alors le schéma - bloc de la figure 1.22.

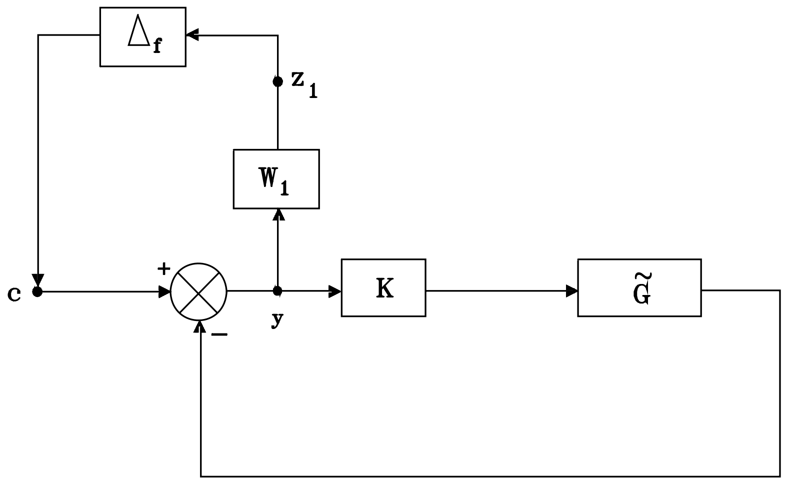


Figure 1.22 : *Schéma bloc du système perturbé avec introduction du modèle d'erreur fictive*

En isolant respectivement les erreurs de modèle Δ_f et Δ, nous obtenons le schéma bloc de la figure 1.23.

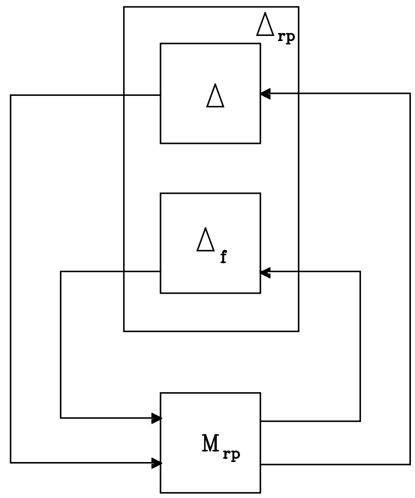


Figure 1.23 : *Schéma bloc du système perturbé pour l'analyse de la robustesse en performance*

1.15.2 Théorème 1.05

Sous les hypothèses suivantes [11] :

- tous les pôles de la matrice de transfert nominale du système en boucle fermée sont à partie réelle négative ;
- la matrice des erreurs de modèle ne possède pas des pôles à partie réelle négative ;

Le système de la figure 1.23 est stable pour toute matrice $\Delta_{rp}(s) \in \underline{\Delta}(s)$ telle que $\left\|\Delta_{rp}\right\|_{\infty} < 1$, si et seulement si :

$$\forall\omega \in \mathbb{R}, \left\|M_{rp}(j\omega)\right\|_{\infty} < 1 \tag{1.61}$$

avec

$$\Delta_{rp} = \left\{diag\left[\Delta, \Delta_f\right]\right\} \tag{1.62}$$

1.16 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit toutes les notions de base nécessaire pour résoudre tout problème d'automatique : l'analyse, la notion de robustesse par l'intermédiaire des asservissements, les outils de mathématiques qui seront utilisées par la suite. Par ailleurs, la notion de boucle fermée d'asservissements est fortement liée à la notion de robustesse, car si le modèle du système et de l'environnement était parfait, alors on adopterait une commande en boucle ouverte qui ne remet pas en cause la stabilité du système si celui est stable. La représentation de l'incertitude non structurée c'est-à-dire les incertitudes fréquentielles et les dynamiques négligées,… et des outils mathématiques permettent d'être traiter par le théorème du petit gain. Enfin, nous avons rappelé particulièrement l'analyse de la robustesse face à des incertitudes structurées, qui fait appel aux outils de la norme H_{∞}.

L'analyse de la robustesse d'un système linéaire à temps continu consiste donc à vérifier que la stabilité et les performances continuent d'être assurées malgré les incertitudes de modélisation.

La modélisation des systèmes linéaires incertains à temps continu n'est toujours qu'une approximation. Il subsiste en effet toujours un certain nombre d'incertitudes qui sont essentiellement de deux types :

- Les incertitudes structurées qui concernent les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus $G(s)$;
- Les incertitudes fréquentielles qui correspondent de manière générales aux dynamiques non modélisées ou négligées. La seule information dont on dispose pour caractériser ce type d'incertitude est une borne supérieure sur la norme de sa réponse fréquentielle.

CHAPITRE 2
COMMANDE OPTIMALE ET SYNTHESE LQG
DES SYSTEMES LINEAIRES

2.1 Introduction

Nous allons exposer dans la première partie de ce chapitre les bases de la commande (régulation) optimale à horizon infini et nous donnons les résultats principaux permettant de résoudre un problème classique de régulation en temps continu. Son origine remonte aux travaux de Kalman vers la fin des années 50.

De nos jours, la théorie des systèmes linéaires s'intéresse plus particulièrement à l'optimisation du comportement. La recherche d'une commande permettant d'atteindre de tels objectifs en minimisant ou en maximisant, un critère donné, constitue le problème fondamental dans la théorie de l'optimisation. Ce problème est subdivisé en quatre parties :

- Définition de l'objectif ;
- Connaissance de la position actuelle par rapport à l'objectif ;
- Connaissance de l'environnement sur le passé, le présent et le futur ;
- Détermination de la meilleure stratégie.

Ainsi, pour résoudre un problème d'optimisation, il faut tout d'abord définir un objectif ou une fonction coût (fonctionnelle) d'où la nécessité d'une définition du problème en termes physiques et sa traduction ou modélisation en termes mathématiques. Pour commander effectivement un processus, il faut tout d'abord connaître son état, d'où le problème de l'estimation de l'état. Aussi, doit-on être capable de caractériser le système par un modèle mathématique qui dépendra, en plus de l'environnement du processus. Le problème qui se pose alors à ce niveau est celui de la modélisation et de l'optimisation. Ensuite, on parlera de la synthèse linéaire quadratique qui est la base de ce mémoire.

2.2 Problème de la commande optimale

Le problème de la commande optimale à horizon infini des systèmes linéaires continus revient à minimiser la fonctionnelle définie par J qui vaut [7], [15] :

$$J = \lim_{t_1 \to +\infty} J[\boldsymbol{u}(t)] \tag{2.01}$$

compte tenu de la seule contrainte égalité différentielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.02}$$

2.3 Minimum d'une fonctionnelle

Le minimum d'une fonctionnelle est un problème de minimisation sans contrainte ou le problème de calcul de variations. Le critère de performance du minimum d'une fonctionnelle consiste à rechercher la fonction continue $\boldsymbol{x}(t)$ avec $t = [t_0, +\infty[$ qui minimise le critère [14] :

$$J = \min_{x} \left\{ \int \Phi_f[\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t)] dt \right\} \tag{2.03}$$

où la fonction Φ_f est une fonction continue dérivable, sachant la condition initiale : $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

La condition nécessaire d'optimum est le minimum de l'équation d'Euler :

$$\Phi_x - \dot{\Phi}_x = 0 \text{ sur } t = [t_0, +\infty[\tag{2.04}$$

L'équation d'Euler s'explicite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_f - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_f = 0 \tag{2.05}$$

Ainsi, la résolution du problème de commande optimale consiste à rechercher la fonction $\boldsymbol{u}(t)$ qui minimise le critère de performance défini par [14] :

$$J = \min_{u} \left\{ \int_{t_0}^{+\infty} \Phi_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) dt \right\} \tag{2.06}$$

Compte tenu de la seule contrainte égalité différentielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \text{ avec } \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.07}$$

En associant le critère (2.06) aux multiplicateurs de Lagrange, on obtient :

$$J = \min_{u} \left\{ \int_{t_0}^{+\infty} \left[\Phi_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \lambda^T(t)[f(\boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}] \right] dt \right\} \tag{2.08}$$

2.3.1 Définition 2.01

La fonction définie par l'expression :

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda) = \Phi_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \lambda^T f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{2.09}$$

est appelée l'Hamiltonien [3].

2.3.2 Propriétés de l'Hamiltonien

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} H = -\dot{\lambda} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} H = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H = \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.12}$$

Remarques :

- $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda)$ est une constante le long d'une trajectoire optimale ;
- La fonction λ, qui est solution de l'équation différentielle, est continue en t ;
- L'équation (2.12) fait apparaître que la commande optimale est fournie par l'équation (2.11) en fonction de λ.

2.4 Commande optimale quadratique des systèmes linéaires continus

2.4.1 Position du problème

Le problème de la commande optimale quadratique consiste à déterminer le vecteur de commande $\boldsymbol{u}(t)$ qui minimise le critère de performance J où l'Hamiltonien est tel que [14], [15] :

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \lambda) - \lambda^T \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \tag{2.13}$$

Compte tenu de la contrainte égalité différentielle :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

Le critère de performance J définie par l'équation (2.08) devient :

$$J = \min_{\boldsymbol{u}} \left\{ \int_{t_0}^{+\infty} [\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}] dt \right\} \tag{2.14}$$

Comme $\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{x}(t)$ en commande modale, alors la commande optimale modale consiste à déterminer la matrice de gain K du vecteur de commande optimale où Q est une matrice de pondération définie positive et R est une matrice de pondération définie positive. Les choix des matrices Q et R sont données par la règle de Bryson [10].

2.4.2 Matrice hamiltonienne

L'hamiltonien défini précédemment par l'équation (2.09) s'écrit dans ce cas :

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda) = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} + \lambda^T \dot{\boldsymbol{x}} \tag{2.15}$$

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda) = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} + \lambda^T (A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}) \tag{2.16}$$

Les équations du minimum sont alors données par :

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\lambda = -\dot{\lambda} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u} + B^T\lambda = 0 \tag{2.18}$$

De l'équation (2.18) on peut déduire l'expression de la commande optimale :

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1}B^T\lambda \tag{2.19}$$

En substituant l'équation (2.19) dans l'équation (2.14), on obtient l'équation différentielle linéaire matricielle suivante :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} + B(-R^{-1}B^T)\lambda \tag{2.20}$$

Les équations (2.20) et (2.17) forment alors le système d'équations différentielles linéaires matricielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\lambda \\ \dot{\lambda} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\lambda \end{cases} \tag{2.21}$$

Ce système s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Définition 2.02 :

La matrice $H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ est appelée matrice hamiltonienne associée au système augmenté (2.22) [3].

2.4.3 Expression de K

La structure linéaire du système (2.22) permet de poser :

$$\lambda(t) = P\boldsymbol{x}(t) \tag{2.23}$$

L’expression (2.19) de la commande optimale quadratique devient :

$$\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t) = -R^{-1}B^T P\boldsymbol{x}(t) = K\boldsymbol{x}(t) \tag{2.24}$$

L’expression (2.24) est donc une commande linéaire par retour d’état ou commande modale. L’expression de K est :

$$K = -R^{-1}B^T P \tag{2.25}$$

2.4.4 Equation algébrique matricielle de Riccati

En dérivant l’équation (2.23), on obtient :

$$\dot{\lambda}(t) = P\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.26}$$

En portant l’équation (2.24) dans le système d’équations différentielles linéaires matricielles (2.21), on a :

$$\begin{cases} P\dot{\boldsymbol{x}} = PA\boldsymbol{x} - PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{x} \\ P\dot{\boldsymbol{x}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T P\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{2.27}$$

On obtient alors l’équation suivante :

$$PA\boldsymbol{x} - PBR^{-1}B^T P\boldsymbol{x} = -Q\boldsymbol{x} - A^T P\boldsymbol{x} \tag{2.28}$$

$$(PA - PBR^{-1}B^T P)\boldsymbol{x} = -(Q\boldsymbol{x} + A^T P)\boldsymbol{x} \tag{2.29}$$

2.4.4.1 Définition 2.03

L’équation algébrique matricielle de Riccati est définie par l’équation [10], [15]:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{2.30}$$

2.4.4.2 Propriété 2.01

$$-\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T[Q + K^T RK]\boldsymbol{x} \tag{2.31}$$

2.4.5 Schéma fonctionnel de la commande optimale modale

La figure 2.01 ci-dessus illustre la commande optimale modale des systèmes linéaires multivariables.

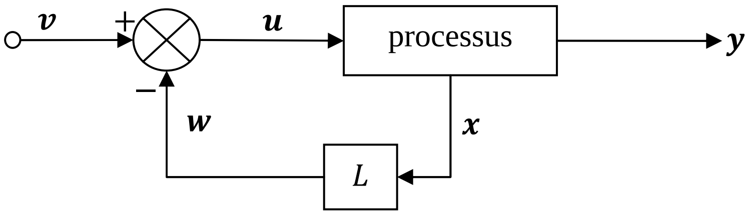


Figure 2.01 : *Schéma fonctionnel de la commande optimale modale des systèmes linéaires*

2.4.6 Evaluation du critère de performance J

L'équation d'évolution d'état du système linéaire s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x} - BK\boldsymbol{x} = (A + BK)\boldsymbol{x} \qquad (2.32)$$

En supposant que la matrice $A_K = A - BK$ est asymptotiquement stable, et comme $\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}^T = -\boldsymbol{x}^T K^T$, sur $[0, +\infty[$ le critère de performance (2.14) s'écrit :

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} [\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T K^T R K \boldsymbol{x}] dt \qquad (2.33)$$

ou encore

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} [\boldsymbol{x}^T (Q + K^T R K) \boldsymbol{x}] dt \qquad (2.34)$$

Et d'après l'équation (2.31), il vient :

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} [\boldsymbol{x}^T (Q + K^T R K) \boldsymbol{x}] dt = [-\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}]_0^{+\infty} \qquad (2.35)$$

Soit

$$J = [-\boldsymbol{x}(+\infty)^T P \boldsymbol{x}(+\infty) + \boldsymbol{x}(0)^T P \boldsymbol{x}(0)] \qquad (2.36)$$

La valeur optimale du coût est donc une fonction quadratique. Comme la matrice $A_K = A - BK$ est supposée asymptotiquement stable alors toutes les valeurs propres de la matrice A_K sont à partie réelle négative et on a $\boldsymbol{x}(+\infty) = 0$. Finalement, on obtient :

$$J = \boldsymbol{x}(0)^T P \boldsymbol{x}(0) \qquad (2.37)$$

Théorème 2.01

La solution du problème de commande optimale modale à horizon infini en temps continu est une commande en boucle fermée, sous la forme d'un retour d'état linéaire donnée par [10] :

$$\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1} B^T P \boldsymbol{x}(t) = K \boldsymbol{x}(t) \qquad (2.38)$$

où K est solution de l'équation algébrique matricielle de Riccati définie par :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{2.39}$$

et qui optimise le critère de performance de l'évolution de l'état et de la commande ayant pour expression :

$$J = \boldsymbol{x}(0)^T P \boldsymbol{x}(0) \tag{2.40}$$

Remarque : Le problème de commande optimale modale à horizon infini en temps continu est de piloter le système linéaire multivariable de manière à réaliser une certaine mission qui consiste à transférer l'état $\boldsymbol{x}$ de sa condition initiale fixée à une condition finale sujette à certaines contraintes.

2.5 Synthèse Linéaire Quadratique Gaussienne

Dans cette partie, nous présentons les propriétés de robustesse des méthodes LQ et LQG. La technique LQG/LTR consiste à générer un régulateur de type LQG dont la boucle fermée retrouve asymptotiquement les propriétés de robustesse de la méthode LQ [15].

2.5.1 Méthode Linéaire Quadratique

2.5.1.1 Présentation du problème

Nous considérons le système linéaire continu, invariant dans le temps, régi par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = N\,\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \tag{2.41}$$

où $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande, et $\boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des sorties régulées. Le vecteur $\boldsymbol{y}(t)$ des sorties observées est le vecteur d'état.

La synthèse Linéaire Quadratique dénommée LQ ou LQR (Linear Quadratic Regulator) consiste en la recherche d'une matrice gain K_c, telle que la commande par retour d'état $\boldsymbol{u}(t) = -K_c\boldsymbol{x}(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique (2.42) [15]:

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{z}^T Q \boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u})dt = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u})dt \tag{2.42}$$

où les matrices de pondérations Q, Q_x et R satisfont :

$$Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0, Q_x = N^T Q N \tag{2.43}$$

2.5.1.2 Recherche de la loi optimale

Compte tenu du fait que le critère J est scalaire, l'expression (2.42) peut s'écrire :

$$J = Trace\left[\int_0^{\infty} (\boldsymbol{x}^T Q_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt\right]$$

Soit encore, en remplaçant $\boldsymbol{u}(t)$ par $-K\boldsymbol{x}(t)$

$$J = Trace[(Q_x + K^T R K)L] \tag{2.44}$$

avec

$$L = \int_0^{\infty} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T dt$$

Le système bouclé est alors caractérisé par la dynamique :

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A_f t}\boldsymbol{x}_0$$

où $A_f = A - BK_c$ obéit à l'équation de Lyapunov (si le système est stabilisable)

$$A_f L + L A_f^T = -\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{x}_0{}^T \tag{2.45}$$

2.5.1.3 Propriétés de robustesse de la méthode LQ

Le schéma général de cette commande peut se représenter comme indiqué sur la figure (2.02) suivante :

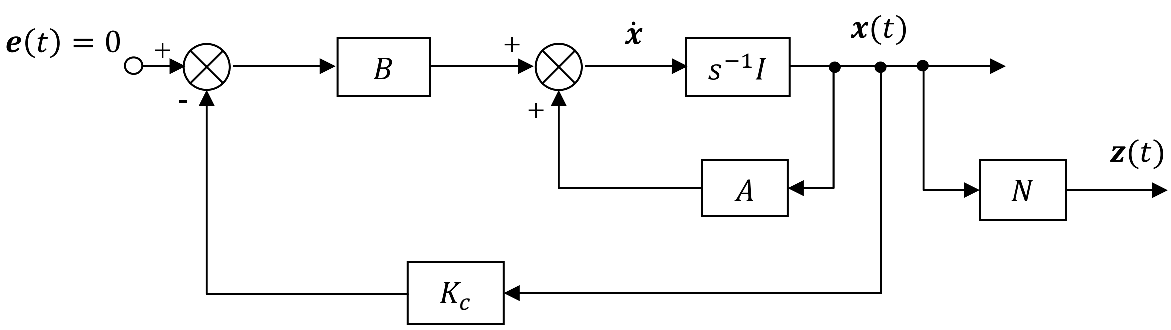


Figure 2.02 : *Schéma général de la commande linéaire quadratique*

Nous allons analyser la robustesse de cette boucle fermée en précisant les propriétés de la fonction de sensibilité à l'entrée du système.

En boucle ouverte, la matrice de transfert s'écrit :

$$L_c(s) = K_c(sI - A)^{-1}B$$

Et nous désignerons par $F_c(s)$ l'expression :

$$F_c(s) = I + K_c(sI - A)^{-1}B = (S_u(s))^{-1}$$

Pour faire apparaître l'expression $F_c(s)$, quelques manipulations de l'équation de Riccati sont nécessaires. L'équation de Riccati peut se mettre sous la forme :

$$N^TQN - PBR^{-1}B^TP - (-sI - A^T)P - P(sI - A) = 0 \tag{2.46}$$

En multipliant chaque terme de cette dernière expression, à gauche par $B^T(sI - A)$ et à droite par $(sI - A)^{-1}B$; et en tenant compte de la définition : $G_c(s) = N(sI - A)^{-1}B$ et du fait que $K_c = R^{-1}B^TP$, nous obtenons :

$$\left(I + L_c^T(-s)\right)R\left(I + L_c(s)\right) = R + G_c^T(-s)QG_c(s)$$

ou

$$F_c^T(-s)RF_c(s) = R + G_c^T(-s)QG_c(s) \tag{2.47}$$

On en déduit donc :

$$F_c^T(-j\omega)RF_c(j\omega) \geq R \tag{2.48}$$

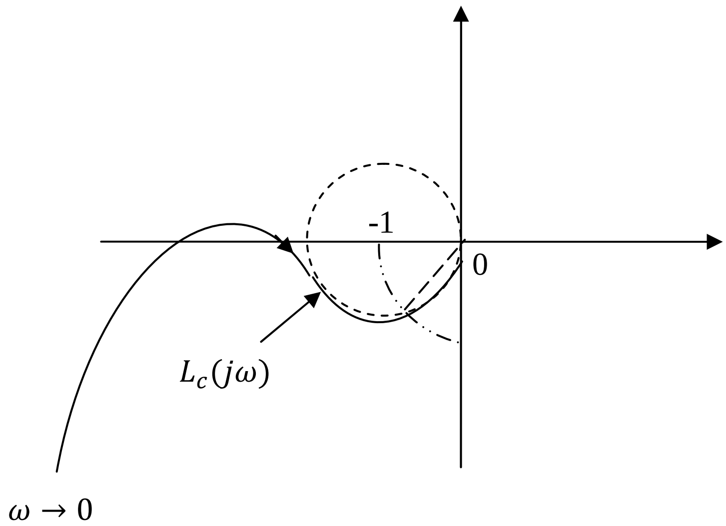


Figure 2.03 : *Lieu de Nyquist de la fonction de transfert de boucle LQ*

Dans le cas monovariable ($\dim(\boldsymbol{u}) = 1$), on obtient :

$$|1 + L_c(j\omega)| \geq 1 \; ou \; |S_u(j\omega)| \leq 1 \,, \forall\omega \tag{2.49}$$

Cela signifie que le lieu de Nyquist de la fonction de transfert de boucle $L_c(j\omega)$ reste toujours à l'extérieur du cercle unité centré en -1. Il en résulte les marges de stabilité.

$$\text{Marge de gain } [0.5; +\infty], \text{Marge de phase } [-60°; +60°] \tag{2.50}$$

On peut aussi remarquer que le lieu de Nyquist (quand $\omega \rightarrow \infty$) tangente l'axe imaginaire négatif car dans le triplet (K_c, A, B) le produit $K_c B = R^{-1} B^T P B$ reste toujours posistif. Cela signifie que le numérateur de la fonction $L_c(s)$ est d'ordre $n - 1$ et que son terme le plus haut degré est toujours positif. Ces résultats sur la robustesse de la méthode LQ sont très intéressants. Il importe cependant de remarquer :

- qu'ils ne concernent que des commandes à retour d'état. Généralement, pour les commandes LQG par retour sur l'état estimé, ces propriétés sont perdues [16].
- ces marges de robustesse sont également perdues si, dans le critère, des termes croisés apparaissent de la forme :

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^T S \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt$$

2.5.2 Méthode Linéaire Quadratique Gaussienne (méthode LQG)

2.5.2.1 Position du problème

La méthode Linéaire Quadratique (synthèse LQ) exige la connaissance du vecteur d'état. Dans la majorité des problèmes de commande, on ne dispose que d'une connaissance partielle du vecteur d'état. La synthèse LQG consiste donc à rechercher, à partir de cette mesure partielle, un régulateur qui minimise un critère quadratique de nature stochastique [15], [17]. Nous rappellerons ici les traits généraux de cette méthode en focalisant notre attention sur les propriétés de robustesse de cette technique qui nous conduiront tout naturellement à la synthèse LQG/LTR.

2.5.2.2 Problème de la synthèse LQG

Nous supposons que le système linéaire d'ordre n obéit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\,\boldsymbol{x} + B\,\boldsymbol{u} + M_c\,\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = C\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \end{cases} \tag{2.51}$$

où $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{v}$ représentent les bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance W et V.

$$E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}(t)^T] = W\delta(t) \text{ et } E[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}(t)^T] = V\delta(t)$$
$$E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{v}(t)^T] = 0 \text{ avec } W \geq 0 \text{ et } V \geq 0 \tag{2.52}$$

On note aussi $W_x = M_c W {M_c}^T$ la matrice de covariance du bruit d'état. A partir du vecteur $\boldsymbol{y}$ de mesures bruitées, nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère

$$J = \lim_{T\to\infty} E\left[\int_0^T (\boldsymbol{z}^T Q\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{z}\right] \tag{2.53}$$

où $\boldsymbol{z} = N\boldsymbol{x}$ désigne le vecteur à réguler et Q et R deux matrices de pondération avec, comme précédemment,

$$Q = Q^T \geq 0 \ \ et\ R = R^T \geq 0$$

La solution de ce problème s'appuie sur le *principe de séparation* qui établit que la commande optimale est obtenue [5].

- en recherchant l'estimé optimal $\hat{\boldsymbol{x}}$ (au sens de la variation d'erreur minimale) de l'état x par la méthode du Filtre de Kalman
- en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ)

Pour être plus précis, deux étapes composent donc cette synthèse [16]:

1ère étape :

On estime l'état x par l'équation classique du filtre de Kalman à condition que le triplet $(A, M_c W^{1/2}, C)$ soit détectable et stabilisable.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\,\hat{\boldsymbol{x}} + B\,\boldsymbol{u} + K_f(\boldsymbol{y} - C\hat{\boldsymbol{x}})$$

avec $K_f = P_f C^T V^{-1}$ où P_f obéit à l'équation de Riccati suivante :

$$P_f A^T + AP_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + M_c W {M_c}^T = 0 \tag{2.54}$$

avec $P_f = P_f^T > 0$.

2ème étape :

En supposant la détectabilité et stabilisabilité du triplet $\left(A, B, Q^{1/2}N\right)$, la commande optimale est alors de la forme :

$$\boldsymbol{u} = -K_c\hat{\boldsymbol{x}}$$

avec

$$\begin{cases} K_c = R^{-1}B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

La synthèse LQG exige donc la résolution de 2 équations de Riccati duales. On peut ainsi représenter cette commande optimale sous la forme du bloc-diagramme de la figure 2.04 où nous allons visualiser le processus $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, précédé de la matrice gain d'estimation K_f.

Les équations précédentes font apparaître une remarquable dualité entre l'estimation et la commande avec les correspondances suivantes :

$$\begin{array}{cc} A \leftrightarrow A^T & N \leftrightarrow {M_c}^T \\ B \leftrightarrow C^T & K_c \leftrightarrow K_f^T \\ R \leftrightarrow V & P_c \leftrightarrow P_f \\ \multicolumn{2}{c}{Q \leftrightarrow W} \end{array}$$

$$Q_x = N^T Q N \leftrightarrow W_x = M_c W {M_c}^T \tag{2.56}$$

En se référant à la figure 2.04 suivante, le correcteur $K(s)$ reliant $Y(s)$ à $U(s)$ s'écrit immédiatement :

$$K(s) = -K_c(sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f$$

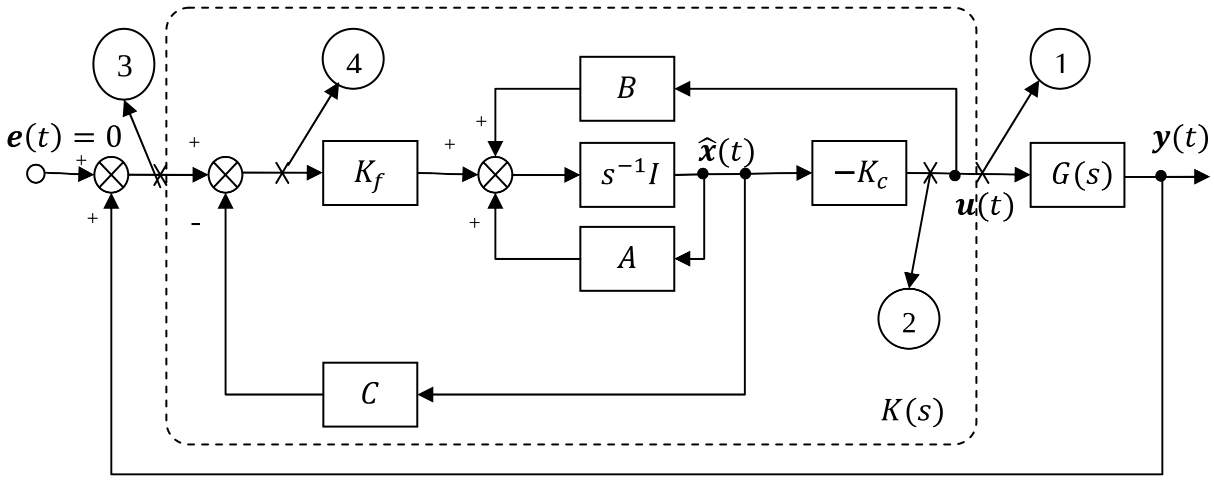


Figure 2.04 : *Structure d'une commande LQG avec son compensateur*

2.5.2.3 Propriété modale de la commande LQG

On voit immédiatement que le correcteur a la même dimension que le système [15]. En choisissant comme vecteur d'état du système bouclé le vecteur $\boldsymbol{x}$ et son estimé $\hat{\boldsymbol{x}}$, les équations d'état d'ordre $2n$ du système régulé ($\boldsymbol{e} = 0$) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_c \\ K_f C & A - BK_c - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{M_c} & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{v} \tag{2.57}$$

En choisissant comme nouveau vecteur d'état le vecteur x et le vecteur d'erreur $\varepsilon = x - \hat{x}$, les équations précédentes deviennent alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_C & BK_C \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_c & 0 \\ M_c & -K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Sur cette dernière équation, nous voyons qu'en boucle fermée, les $2n$ modes du système bouclé sont constitués

- des n modes de commande qui sont les valeurs propres de la matrice $A - BK_c$,
- des n modes d'estimation qui sont les valeurs propres de la matrice $A - K_f C$.

2.5.2.4 Matrice de transfert de boucle

Le bloc-diagramme du compensateur LQG et du processus $G(s)$ (figure 2.04) fait apparaître la présence de boucles imbriquées. Les transferts qui leur sont associés vont jouer un rôle capital dans l'analyse de la robustesse de cette structure. Dans ce qui suit, « *ouvrir la boucle au point i* » suppose la dénomination de l' « entrée » e_i et de la « sortie » s_i conformément au schéma suivant :

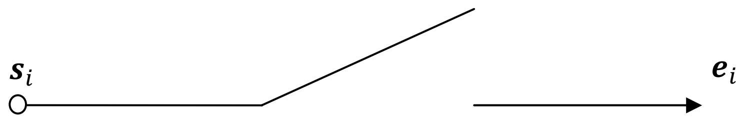


Figure 2.05 : *Ouverture de la boucle*

- si on ouvre la chaîne au point (1) la matrice de transfert reliant l'entrée e_1 à la sortie s_1 est égale à $K(s)G(s)$ et désigne le transfert de boucle à l'entrée du système,

- si on ouvre la chaîne au point (2) le transfert reliant $\mathrm{e_2}$ à $\mathrm{s_2}$ est égale à $-\mathrm{K_c}(\mathrm{sI} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}$ et représente le transfert de la chaîne LQ.

Justification :

- Pour le montrer, il suffit d'écrire les équations du système et du filtre sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\,\boldsymbol{x} + B\,\boldsymbol{e}_2 \tag{2.59}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\,\hat{\boldsymbol{x}} + B\,\boldsymbol{e}_2 + K_f C(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{2.60}$$

$$\boldsymbol{s}_2 = -K_c \hat{\boldsymbol{x}} \tag{2.61}$$

En soustrayant les équations (2.59) et (2.60) et en notant $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (A - K_f C)\boldsymbol{\varepsilon}$$

Comme nous nous intéressons au transfert reliant e_2 à s_2, les conditions initiales sont donc supposées nulles ce qui entraîne $\varepsilon \equiv 0$.

Par suite, nous obtenons :

$$\boldsymbol{s}_2(s) = -K_c(sI - A)^{-1} B \boldsymbol{e}_2(s)$$ ◆

- si on ouvre la chaîne au point (3) à la sortie du système $G(s)$, nous obtenons immédiatement :

$$\boldsymbol{s}_3(s) = K(s)G(s)\boldsymbol{e}_3(s)$$

- si on ouvre la chaîne au point (4) à l'intérieur de la structure du filtre, le transfert reliant $\boldsymbol{e}_4$ à $\boldsymbol{s}_4$ s'écrit $-C(sI - A)^{-1}K_f$.

Justification :

- En effet, nous pouvons écrire :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\,\boldsymbol{x} - B\,K_c \hat{\boldsymbol{x}} \tag{2.62}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (A - BK_c)\hat{\boldsymbol{x}} + K_f \boldsymbol{e}_4 \tag{2.63}$$

$$\boldsymbol{s}_4 = C(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{2.64}$$

En soustrayant les équations (2.62) et (2.63), nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = A\boldsymbol{\varepsilon} - K_f \boldsymbol{e}_4$$

$$\boldsymbol{s}_4 = C\boldsymbol{\varepsilon}$$

D'où

$$\boldsymbol{s}_4(s) = -C(sI - A)^{-1} K_f \boldsymbol{e}_4(s) \tag{2.65}$$

Ce transfert représente le transfert de boucle du filtre de Kalman. ◆

Ces résultats montrent que les transferts aux points (1) et (2) sont de manières générales très différentes. La robustesse de la boucle LQ liée aux propriétés de transfert de boucle en (2) $-K_c(sI - A)^{-1}B$ n'entraîne en aucun cas celle de la boucle LQ mesurée à l'entrée du système par le transfert au point (1). De même par dualité, la robustesse en sortie mesurée au point (3) ne coïncide pas avec celle de la boucle du filtre de Kalman mesurée au point (4).

Le but de la commande robuste LQG/LTR que nous développerons dans un paragraphe ultérieur sera précisément de faire correspondre les transferts (1) et (2) (ou les transferts (3) et (4) pour retrouver sous certaines hypothèses d'excellentes propriétés de robustesse). Pour cela, nous échapperons au cadre rigide de la commande LQG en ne considérant plus les grandeurs M_c, W, V comme des données réelles mais comme des paramètres de synthèse pour améliorer la robustesse de la commande LQG. Les bruits stochastiques apparaissant alors comme des bruits fictifs générant une commande LQG/LTR robuste.

2.5.3 Méthode LQG/LTR (Loop Transfer Recovery)

2.5.3.1 Introduction

Puisque le régulateur linéaire quadratique et le filtre de Kalman, chacun pris isolément, ont d'excellentes propriétés de robustesse, on pourrait penser que les compensateurs LQG constitués de l'un et de l'autre possèdent ces bonnes propriétés [18]. En plus, on remarque que la synthèse LQG entraîne généralement de faibles marges de stabilité [19].

Idée de base de la synthèse LQG/LTR

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'idée de base due à Kwakernaak (1968) [20] et reprise par Doyle et Stein (1979-1981) [21] a été de synthétiser une commande de type LQG qui « recouvre » asymptotiquement soit les propriétés de robustesse de la méthode LQ, soit celle du filtre de Kalman.

Pour être plus précis, le but est de faire tendre asymptotiquement $K(s)G(s)$ (transfert au point (1) de la figure (2.04) vers le transfert de boucle $-K_c(sI - A)^{-1}B$ (transfert au point (2)) par des choix appropriés des grandeurs M_c, W et V. La modélisation de nature stochastique de l'environnement du système disparaît alors au profit de la nécessité d'une bonne robustesse associée à des performances nominales imposées. Ces bruits d'état et de mesure devenus fictifs servent à engendrer une matrice gain de Kalman K_f et, par voie de conséquence, un régulateur dynamique de sortie qui assure dans un cadre déterministe d'excellentes propriétés de robustesse.

2.5.3.2 Recouvrement asymptotique

La démonstration des propriétés de recouvrement asymptotique peut se décomposer en trois étapes :

1ère étape : Transfert de boucle à l'entrée du système

Par définition ce transfert de boucle au point (1) peut s'écrire :

$$K(s)G(s) = -K_c(sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f C(sI - A)^{-1}B \tag{2.66}$$

En désignant par

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \tag{2.67}$$

Et

$$\Psi(s) = (sI - A + BK_c)^{-1} \tag{2.68}$$

Ainsi

$$K(s)G(s) = -K_c \Psi (I + K_f C \Psi)^{-1} K_f C \Phi B \tag{2.69}$$

L'application de l'égalité matricielle $(I + BA)^{-1}B = B(I + AB)^{-1}$ à la relation (2.69) conduit à l'expression (2.70) sur laquelle nous nous appuierons :

$$K(s)G(s) = -K_c \Psi K_f (I + C \Psi K_f)^{-1} C \Phi B \tag{2.70}$$

2ème étape : Propriété fondamentale du filtre de Kalman

L'équation de Riccati qui permet la détermination de la matrice P_f s'écrit :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + M_c W M_c{}^T = 0 \tag{2.71}$$

Dans la synthèse LQ, lorsque la pondération sur la commande (facteur ρ) tend vers zéro, alors $P_c \to 0$ quand le transfert $N(sI - A)^{-1}B$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit et que le nombre d'entrées est au moins égal au rang de Q_x. Grâce aux correspondances mentionnées dans (2.56), nous en déduisons une propriété analogue, concernant le filtre de Kalman que nous pouvons formuler ainsi. En choisissant $W = I$ et $V = \rho V_0$ (V_0 étant la covariance nominale), alors $\lim_{\rho \to 0} P_f \to 0$ si le système $C(sI - A)^{-1}M_c$ n'a aucun zéro de transmission dans le demi-plan droit et si le nombre de sorties est au moins égal au rang de W.

On déduit de (2.71) :

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-1/2} P_f C^T V_0^{-1/2} = M_c$$

D'où

$$K_f = \frac{P_f C^T V_0^{-1}}{\rho} \underset{\rho \to 0}{\rightarrow} \rho^{-1/2} M_c V_0^{-1/2} \tag{2.72}$$

Cette expression (2.72) du gain de Kalman, valable asymptotiquement pour les systèmes (C, A, M_c) à minimum de phase et lorsque nous choisissons $W = I$ et $V = \rho V_0$, va maintenant être utilisée dans l'équation (2.66) pour obtenir les conditions de recouvrement.

3ème étape : Recouvrement asymptotique. Méthode LQG/LTR

Sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} W = I,\ \ V = \rho V_0 & avec\ \rho \to 0 \\ M_c = B & (bruit\ d'état\ dans\ la\ direction\ de\ l'entrée) \\ C(sI - A)^{-1} B & \text{à}\ minimum\ de\ phase \\ m = p & (nombre\ égal\ d'entrées\ et\ de\ sorties) \end{cases}$$

Nous avons le résultat fondamental suivant :

$$\lim_{\rho \to 0} K(s) G(s) \to K_c \Phi B \tag{2.73}$$

2.5.3.3 Propriétés de robustesse de la méthode LQG/LTR

Sous les hypothèses que nous venons de mentionner, nous voyons donc que la méthode LQG/LTR retrouve les propriétés de robustesse de la méthode LQ (robustesse au sens des marges de stabilité, et non de la robustesse paramétrique), car les transferts de boucle à l'entrée du système sont égaux [17], [18]. La procédure de synthèse pour les systèmes à minimum de phase avec $m = p$ peut donc prendre les deux formes suivantes :

Recouvrement à l'entrée

La procédure que nous venons de démontrer consiste à :

- Synthétiser, dans une première étape, le correcteur LQ par un choix approprié des pondérations Q_x et R obéissant aux exigences du cahier des charges. Les aspects de cette première synthèse concernent le comportement basse fréquence des valeurs singulières du transfert $-K_c(sI - A)^{-1}B$, les fréquences de coupures correspondantes, l'affaiblissement haute fréquence, etc…

- Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal W_{x0} et V_0 du filtre de Kalman, on augmentera le paramètre q du nouveau réglage :

$$W_x = W_{x0} + qBB^T, \;\; V = V_0$$

  jusqu'à ce que le transfert de boucle $K(s)G(s)$ du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle d'état LQ $(-K_c(sI - A)^{-1}B)$.

Il importe, bien sûr, de se limiter dans cette augmentation pour éviter une dynamique d'estimation trop rapide qui entraînerait une amplification des bruits haute fréquence et pour permettre un affaiblissement conséquent de la fonction de sensibilité complémentaire en sortie aux fréquences élevées afin d'y assurer une bonne robustesse aux incertitudes non structurées.

Recouvrement en sortie

Il est souvent plus judicieux d'effectuer ce recouvrement à la sortie du système, où les notions de performance et de robustesse prennent tout leur sens. Dans ce cas, la procédure duale est la suivante (se référant toujours aux correspondances (2.60)) :

- Synthétiser le filtre de Kalman en manipulant les covariances W_x et V afin que le transfert $-C(sI - A)^{-1}K_f$ soit satisfaisant à la sortie du système

- Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal Q_{x0} et R_0 du retour d'état LQ, on augmentera le paramètre q du nouveau réglage :

$$Q_x = Q_{x0} + qC^TC, \;\; R = R_0$$

  jusqu'à ce que le transfert de boucle $K(s)G(s)$ du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle du filtre de Kalman $(-C(sI - A)^{-1}K_f)$.

2.5.3.4 Propriété modale de la commande LQG/LTR

Propriété 2.02

Lorsque $\rho \rightarrow 0$, les pôles d'estimation du transfert en boucle fermée de la commande LQG/LTR tendent vers les zéros du système tandis que les pôles restants sont rejetés à l'infini [18].

Justification

- En effet, nous avons :

$$det\left(sI - A + K_f C\right) = \det\left(sI - A + \rho^{-1/2} B V_0^{-1/2} C\right)$$

$$det\left(sI - A + K_f C\right) = \det\ (sI - A)\left(I_n + \rho^{-1/2}(sI - A)^{-1} B V_0^{-1/2} C\right)$$

Et en appliquant la propriété matricielle :

$$det\left(\begin{bmatrix} I_m & N_1 \\ -N_2 & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\ (I_n + N_2 N_1) = \det\ (I_m + N_1 N_2)$$

Nous obtenons :

$$det\left(sI - A + K_f C\right) = \det\ (sI - A)\det\left(I_m + \rho^{-1/2} C (sI - A)^{-1} B V_0^{-1/2}\right)$$

Par suite, en régime asymptotique lorsque $\rho \rightarrow 0$, nous pouvons écrire :

$$det\left(sI - A + K_f C\right) \rightarrow \rho^{-m/2} \det(sI - A)\det\big(G(s)\big)\det\left(V_0^{-1/2}\right) \tag{2.74}$$

Comme le produit polynômial $\det\,(sI - A)\det\,(G(s))$ représente le polynôme des zéros du système, nous voyons donc, que les modes d'estimation en boucle fermée tendent vers les zéros du système, les autres devenant infiniment rapides. ♦

Ce résultat confirme, a posteriori, la nécessité que le système soit à déphasage minimal pour que cette technique trouve sa justification.

2.5.4 Synthèses LQ/LQG à pondérations fréquentielles

L'analyse des propriétés de robustesse de la méthode LQ a montré [16], [18] :

- d'une part de remarquables marges de gain $[1/2, +\infty[$ et de phase $\pm 60°$,
- d'autre part une décroissance des valeurs singulières du transfert de boucle $(L_c(s) = -K_c(sI - A)^{-1}B)$ de -20 dB/décade aux hautes fréquences.

Or, cette dernière limitation peut s'avérer insuffisante pour se prémunir des erreurs de modélisation aux hautes fréquences. De plus, on peut être amené à exiger des décroissances plus rapides dans une bande fréquentielle précise. Pour ces deux raisons principalement, nous allons maintenant présenter une commande de type LQG permettant d'agir de façon préférentielle dans une bande de fréquence particulière. Ensuite, nous allons étendre les résultats de méthode LQ pour introduire des pondérations fréquentielles dans le critère de performance [19].

La méthode linéaire quadratique synthétise un régulateur qui minimise le critère

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{z}^T Q \boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt, Q \geq 0 \; et \;\; R > 0$$

où $z = Nx$ désigne la sortie régulée, le système obéissant aux équations (2.41). En utilisant le théorème de Parseval, ce critère J s'écrit :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [Z(j\omega)^* Q Z(j\omega) + U(j\omega)^* R U(j\omega)] \, d\omega$$

où les pondérations Q et R, indépendantes de la fréquence, limitent les propriétés fréquentielles de la méthode LQ. La généralisation de cette méthodologie consiste à prendre comme nouveau critère :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [Z(j\omega)^* Q(j\omega) Z(j\omega) + U(j\omega)^* R(j\omega) U(j\omega)] d\omega \qquad (2.75)$$

avec les mêmes conditions que précédemment $Q(j\omega) \geq 0$ et $R(j\omega) > 0$. Nous supposerons, par la suite, que $Q(s)$ et $R(s)$ sont des fonctions rationnelles en s^2. La décomposition spectrale suivante :

$$Q(s) = Q^{1/2}(s) * Q^{1/2}(s)$$
$$R(s) = R^{1/2}(s) * R^{1/2}(s)$$

où $Q^{1/2}(s)$ et $R^{1/2}(s)$ sont les deux termes stables à déphasage minimal. La condition sur l'inversibilité de R requise dans la synthèse LQG se généralise sur tout le domaine des fréquences : $R(j\omega)$ dans l'équation (2.75) doit être inversible quel que soit ω. Le filtre $R^{1/2}(s)$ doit donc être inversible (c'est-à-dire avec une transmission directe inversible). Ces deux filtres permettent alors de définir deux variables auxiliaires.

$$\overline{U}(s) = R^{1/2}(s) U(s)$$
$$\bar{Z}(s) = Q^{1/2}(s) Z(s)$$

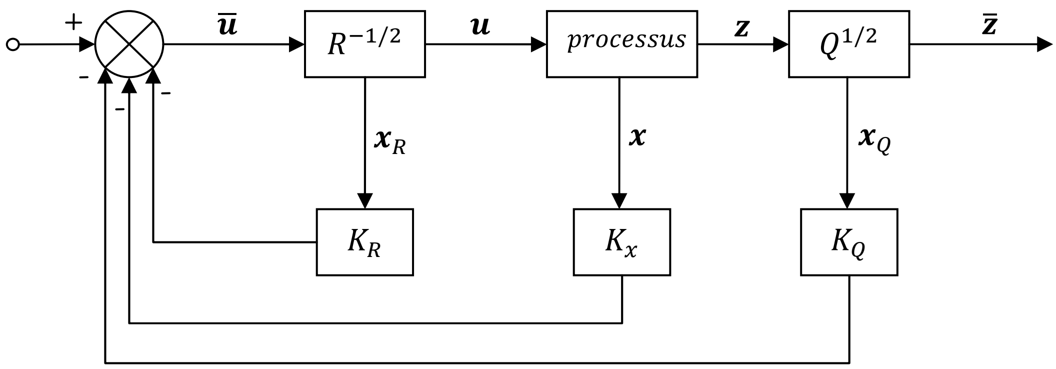


Figure 2.06 : *Commande LQ à pondérations fréquentielles*

Par cet artifice, qui revient à placer deux filtres en amont et en aval du système, le critère J s'écrit :

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\bar{Z}(j\omega)^*\bar{Z}(j\omega) + \bar{U}(j\omega)^*\bar{U}(j\omega)]\, d\omega$$

On est ainsi ramené à une commande de type LQ sur le système augmenté constitué :

- du filtre $R^{1/2}(s)$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_R = A_R\boldsymbol{x}_R + B_R\bar{u} \\ \boldsymbol{u} = C_R\boldsymbol{x}_R + D_R\bar{u} \end{cases} \tag{2.76}$$

- du système

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = N\boldsymbol{x} \end{cases}$$

- du filtre $Q^{1/2}(s)$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_Q = A_Q\boldsymbol{x}_Q + B_Q\boldsymbol{z} \\ \bar{\boldsymbol{z}} = C_Q\boldsymbol{x}_Q + D_Q\boldsymbol{z} \end{cases}$$

Sur ce système augmenté, la commande optimale s'écrit donc :

$$\bar{\boldsymbol{u}} = -K_R\boldsymbol{x}_R - K_x\boldsymbol{x} - K_Q\boldsymbol{x}_Q$$

Ramenée à l'entrée réelle du système, la commande effective définit un retour dynamique sur l'état du système x de la forme :

$$U(s) = -K_c(s)X(s) \tag{2.77}$$

avec

$$K_c(s) = \left((C_R - D_RK_R)(sI - A_R + B_RK_R)^{-1}B_R + D_R\right)\left(K_x + K_Q\left(sI - A_Q\right)^{-1}B_QN\right) \tag{2.78}$$

Lorsque le vecteur d'état n'est pas entièrement mesurable (régulateur LQG), la procédure de recouvrement s'applique dans les mêmes conditions pour les systèmes à minimum de phase [10], [18]. La matrice de transfert $K(s)G(s)$ tend vers $-K_c(s)(sI - A)^{-1}B$ lorsque le paramètre $\rho \rightarrow 0$.

Choix des filtres $R^{-1/2}(s)$ et $Q^{1/2}(s)$

On retiendra les points suivants :

- Les propriétés de robustesse de la commande LQ (marge de gain et marge de phase) sont conservées à l'entrée du système étendu (sur la commande $\bar{u}$). Toutefois si la bande passante du filtre $R^{-1/2}(s)$ est plus large que celle du système bouclé, ces propriétés se maintiennent généralement à l'entrée du système.
- Si n_R désigne la différence d'ordre entre dénominateur et numérateur du filtre $R^{-1/2}(s)$, on constate alors une décroissance des valeurs singulières du transfert de boucle $L_c(s)$ aux hautes fréquences plus rapide et égale à $(-1 - n_R) \times 20\, dB/décade$. Cette rapide atténuation améliore la robustesse à la stabilité de la commande bouclée.
- Le filtre $Q^{1/2}(s)$ permet, un accroissement de pente dans la bande passante de $n_Q \times 20\, dB/décade$ où n_Q désigne l'ordre du filtre $Q^{1/2}(s)$. Par conséquence, les performances s'en trouvent améliorées telles que la précision ou le rejet des perturbations.

2.5.5 Choix des matrices de pondération

Dans l'application de la commande linéaire quadratique, le choix des matrices de pondération reste souvent délicat [11]. Le critère quadratique n'obéit pas à des contraintes énergétiques données mais apparaît le plus souvent comme le chemin indirect dans l'obtention de réponses temporelles satisfaisantes. Il importe donc de relier ces synthèses LQ et LQG à des paramètres généraux (paramètre T_c spécifiant l'ordre de grandeur des constantes de temps dominantes du système en boucle fermée, paramètre T_f qui désigne un horizon de filtrage dans la commande LQG).

Pour concilier ces deux synthèses avec des spécifications temporelles imposées, on génère des matrices de pondération qui placent des pôles en boucle fermée dans une région imposée du plan complexe et ce, en évitant que les déplacements des pôles (de la boucle ouverte à la boucle fermée) ne soient trop importants.

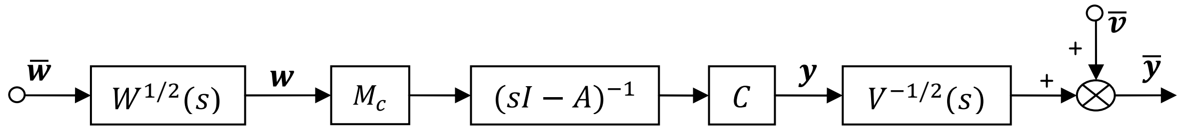


Figure 2.07 : *Modèle de Kalman pour la synthèse LQG fréquentielle*

De Larminat [22] propose deux choix simples pour l'obtention de ces matrices de pondération :

- La pénalité sur l'état dans la commande LQ est donnée par l'expression

$$Q_x = \left[T_c \int_0^{T_c} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt\right]^{-1} \text{ avec } R = I$$

  Avec le critère quadratique $J = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}^T Q_x \boldsymbol{x}) dt$

  L'expression de cette matrice Q_x, qui est proportionnelle à l'inverse de la matrice de commandabilité sur l'horizon T_c, s'appuie sur l'énergie maximale de transfert de l'état depuis l'origine jusqu'à un état donné. L'auteur vérifie, en particulier, que quel que soit T_c les valeurs propres en boucle fermée se trouvent alors pratiquement toutes à gauche d'une verticale d'abscisse $-1/T_c$.

- Par dualité, la matrice de covariance du bruit d'état qui permet le calcul du gain de Kalman est donnée par :

$$W_x = \left[T_f \int_0^{T_f} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\right]^{-1} \text{ avec } V = I$$

Cette contrainte de temps T_f permet le réglage du compromis robustesse-performance en régulation.

On a montré que grâce à ces deux paramètres judicieusement choisis (T_c et T_f) la synthèse par optimisation LQG permet de gérer les compromis fondamentaux inhérents à toute commande : performance-robustesse, sollicitation des actionneurs et sensibilité aux bruits.

2.6 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre la commande optimale et la synthèse LQG avec ses principales propriétés :

- la robustesse en stabilité du retour d'état LQ,
- la fragilité de la commande LQG. C'est en fait lorsqu'on introduit le filtre de Kalman dans la boucle, c'est-à-dire lorsqu'on considère le retour de sortie, que les problèmes liés aux limitations naturelles du système apparaissent,
- l'alternative LTR qui permet de recouvrir la robustesse de la commande LQ et dualement du filtre de Kalman sous des hypothèses assez restrictives relatives au nombre de commandes par rapport au nombre de mesures et aux zéros du système.

Les pondérations fréquentielles de la synthèse LQG permettent de faire la relation avec les techniques fréquentielles H_∞ et H_2 qui visent à satisfaire les mêmes objectifs mais avec un formalisme plus clair et plus général. Il nous a semblé toutefois nécessaire de rappeler que la méthode LQG fréquentielle développée dès la fin des années 60 proposait déjà une solution pour prendre en compte des spécifications fréquentielles, tout en étant une technique fondée sur les variables d'état.

CHAPITRE 3
ROBUSTESSE PARAMETRIQUE
PAR LES TECHNIQUES LINEAIRES QUADRATIQUES

3.1 Introduction

Les synthèses classiques de type LQ (LQR, LQG et LQG/LTR), exposées dans le chapitre 2, n'assurent pas explicitement une robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques, mais plutôt une robustesse de nature fréquentielle. Appliquées aux structures flexibles, ces techniques sont susceptibles de produire des simplifications pôles/zéros entre le processus et le compensateur, particulièrement sensibles aux variations paramétriques. Même la synthèse LQG/LTR, connue pour recouvrer les garanties de marges de stabilité d'un régulateur LQR ou d'un filtre de Kalman, ne donne aucune garantie de robustesse paramétrique à la stabilité.

Ce chapitre va donc être consacré à la robustification des synthèses LQR et LQG vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Ces différentes synthèses robustes sont fondées sur une modélisation en espace d'états de l'incertitude inhérente au système. Cette modélisation fait l'objet de la première partie après avoir introduit la forme standard correspondant à la synthèse LQG. La seconde partie concerne la robustification de la synthèse LQG vis-à-vis des incertitudes paramétriques. L'approche s'appuie sur des considérations asymptotiques. Nous allons aussi donner la démonstration originale de cette synthèse PRLQG (Parameter Robust LQG) qui se démarque de la théorie de Thak et Speyer [23], [24]. La troisième partie présente une seconde façon de procéder qui consiste à dériver, à partir de la méthodologie LQR, une équation de Riccati qui tient compte des incertitudes paramétriques. Et s'il y a une solution, le gain de retour qui s'en déduit assure une robustesse des performances vis-à-vis des paramètres incertains. C'est ainsi que va être définie la synthèse PRLQR (Parameter Robust LQR).

3.2 Forme standard de la synthèse LQG

L'intérêt de la forme standard réside dans la clarté de son formalisme et l'interprétation physique du critère de synthèse puisqu'il est défini par une fonction de transfert voire même un schéma fonctionnel faisant apparaitre des pondérations statiques et dynamiques placées sur les signaux physiques d'entrée et de sortie du système et cela indépendamment de la norme que l'on désire minimiser (H_2 ou H_∞) [25].

3.2.1 Le LQ

Une utilisation élémentaire de la forme standard consiste à ré-exprimer la synthèse Linéaire Quadratique. Considérons un problème LQ « classique », c'est-à-dire :

- Un modèle

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \quad + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = N\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{3.01}$$

  où $\boldsymbol{z}$ est la variable régulée de dimension q , fonction linéaire de l'état $\boldsymbol{x}$ de dimension , gouvernable par une commande u de dimension m.

- Et un critère :

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{z}^T Q \boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt \tag{3.02}$$

La « stabilisation » de ce problème conduit à introduire deux sorties indépendantes $\boldsymbol{z_1}$, de dimension q et $\boldsymbol{z_2}$, de dimension m dans le vecteur des sorties régulées $\boldsymbol{z}$, décomposant le critère selon ses deux termes principaux, et un vecteur d'entrées exogènes $\boldsymbol{w}$, de dimension n, qui fait apparaitre une impulsion $\delta(t)$ sur chacun des composantes de l'état, ou de manière équivalente un vecteur de condition initiales x_0 en écrivant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}_0 \delta(t)$. Le critère à minimiser est proportionnel à la norme 2 du vecteur $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{z}_1^T \boldsymbol{z}_2^T]^T$ et la forme standard $P_{LQ}(s)$ associée au problème LQ s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{z_2} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I_n & B \\ Q^{1/2}N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{1/2} \\ I_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{3.03}$$

qui fait apparaitre comme seules matrices non triviales les matrices A, B, N du problème initial et les pondérations Q et R du critère. C'est une forme standard à n états, $m_1 = n$ entrées exogènes, $p_1 = q + m$ sorties régulées, $m_2 = m$ entrées de commande, $p_2 = n$ sorties mesurées.

Cependant, l'expression du problème sous cette forme est de peu d'utilité dans la pratique des interpréteurs de synthèse (bien que le problème soit bien posé dans le cadre H_2 et ait une solution unique $\boldsymbol{u} = -K_c\boldsymbol{x}$), car les conditions nécessaires requises par les algorithmes ne sont pas remplies : le rang de D_{21} n'est pas égal à p_2 puisque cette matrice est nulle.

3.2.2 Le G

Par dualité, on peut écrire sans hésitation la forme standard $P_G(s)$ associée à la synthèse du filtre de Kalman

$$P_G(s) \equiv \begin{bmatrix} A & M_c W^{1/2} & 0 & I_n \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & V^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.04}$$

Elle fait apparaitre le bruit de l'état de covariance W injecté à travers la matrice M_c et le bruit de mesure de covariance V selon les notations précédemment introduites. L'équation d'estimation :

$$\hat{\boldsymbol{x}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{u} + K_f(\boldsymbol{y} - C\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{3.05}$$

où K_f est le gain de Kalman recherché, retranchée au modèle d'état (A3.05) permet de montrer que l'équation d'évolution de l'erreur d'estimation $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ correspond à l'équation d'état de la transformation linéaire fractionnaire $F_l\left(P_G, -K_f\right)$, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = A\boldsymbol{\varepsilon} + M_c\boldsymbol{w} - K_f(C\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{v}) \tag{3.06}$$

Ceci permet de comprendre que la forme standard $P_G(s)$ a pour état l'erreur d'estimation ε, pour entrées exogènes $\boldsymbol{w_1}$ et $\boldsymbol{w_2}$ les bruits d'état et de mesure normalisés ($\boldsymbol{w} = W^{1/2}\boldsymbol{w_1}$ et $\boldsymbol{v} = V^{1/2}\boldsymbol{w_2}$) et pour sortie régulée l'erreur d'estimation $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\varepsilon}$. La forme linéaire inférieure statique $-K_f$ rebouche alors l'erreur de prédiction ($C\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{v}$). Le problème de synthèse du filtre de Kalman est bien de rechercher le gain K_f minimisant l'erreur d'estimation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sous l'effet des bruits $\boldsymbol{w_1}$ et $\boldsymbol{w_2}$.

3.2.3 Le LQG

On peut alors réunir les deux schémas précédents en un seul en remplaçant la réponse à la condition initiale par l'injection de bruits, sous la forme suivante :

$$P_{LQG}(s) = \begin{bmatrix} A & M_c W^{1/2} & 0 & B \\ Q^{1/2}N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2} \\ C & 0 & V^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.07}$$

La relation de Parseval permet de faire le lien entre le critère LQG et la norme H_∞ et la norme H_2 du transfert en boucle fermée $F_l\left(P_{LQG}, K\right)$ (en régime permanent) :

$$
\begin{aligned}
J &= \lim_{T\to\infty} E\left[\int_0^T (\boldsymbol{x}^T N^T Q N \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Trace(F_l(P_{LQG}, K)(-j\omega)^T F_l(P_{LQG}, K)(j\omega)^T) \\
&= \left\|F_l(P_{LQG}, K)\right\|_2^2
\end{aligned}
$$

D'une façon plus générale, une synthèse LQG sur un système représenté par un quadruplet $(A_{n\times n}, B_{n\times m}, C_{p\times n}, D_{p\times m})$ et réglée à partir de trois matrices de pondération $(Q_x, R, S_p)^2$ et de trois matrices de covariance $(W_x, V, T_p)^3$ est équivalente à la synthèse H_2 sur la forme standard présentée par la figure 3.01.

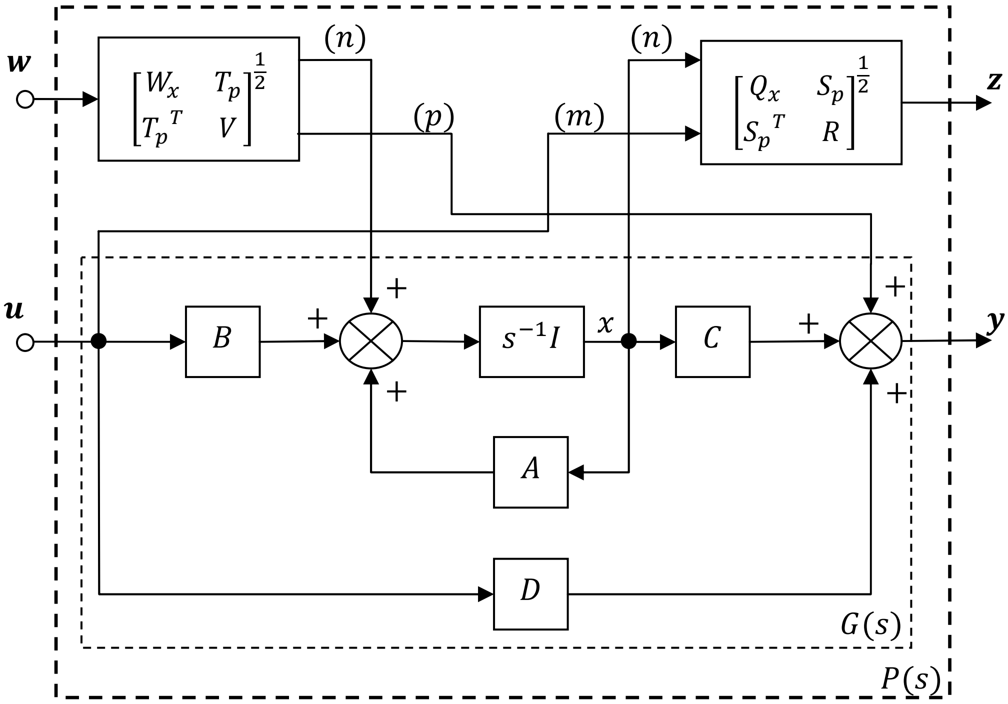


Figure 3.01 *: Forme standard associée à la synthèse LQG*

Ce schéma fait apparaitre que, dans la cadre de cette mise en forme, le signal d'entrée w correspond, non pas à des consignes, mais au vecteur des bruits d'état et de mesure qui perturbent le système. Les deux transferts $P_{12}(s)$ (c'est-à-dire $P_{u\to z}(s)$) et $P_{21}(s)$ (c'est-à-dire $P_{w\to y}(s)$) caractérisent respectivement le critère LQ et les bruits sur le système.

Sur la figure 3.01 :

- les trois matrices de pondération (Q_x, R, S_p) du critère LQ vérifient :

$$\begin{bmatrix} Q_x & S_p \\ {S_p}^T & R \end{bmatrix} = [C_1 \quad D_{12}]^T [C_1 \quad D_{12}] = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T D_{12} \\ D_{12}^T C_1 & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix} \tag{3.08}$$

- les trois matrices de covariance (W_x, V, T_p) des bruits d'état et de mesures vérifient :

$$\begin{bmatrix} W_x & T_p \\ {T_p}^T & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix} \tag{3.09}$$

Réciproquement : La synthèse H_2 sur la forme standard générale $P(s)$ décrite par la figure 3.01 est rigoureusement équivalente à une synthèse LQG sur le système représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_2\boldsymbol{u} + w_x \\ \boldsymbol{y} = C_2\boldsymbol{x} + D_{22}\boldsymbol{u} + v \end{cases} \tag{3.10}$$

Rappelons que :

Dans le cas général, le critère LQ s'écrit :

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T Q_x \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^T S_p \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}\right) dt$$

T_p est la matrice de corrélation entre les bruits d'état $w_x(t)$ et de mesure $v(t)$:

$$E[w_x(t) v^T(t)] = T_p \delta(t)$$

Il n'y a donc pas de limite quant à l'interprétation de la synthèse H_2 en termes de synthèse LQG et on retrouvera les mêmes propriétés et les mêmes comportements asymptotiques.

3.3 Modèle mathématique du système incertain

Considérons un système linéaire stationnaire incertain dont le modèle nominal est représenté par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

et le modèle perturbé par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

où $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement l'état, la commande et la mesure du système.

Nous supposerons dans la suite du développement que :

$$\Delta A = \tilde{A} - A \neq 0, \Delta B = \tilde{B} - B = 0 \text{ et } \Delta C = \tilde{C} - C = 0 \tag{3.13}$$

c'est-à-dire qu'il est supposé que seule la matrice dynamique (matrice d'état) A est sujette à des variations paramétriques.

Nous supposerons aussi que ΔA est une fonction de r variations paramétriques indépendantes $\delta = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ et peut être décomposée de la façon suivante :

$$\Delta A(\delta) = M_c \Delta(\delta) N \tag{3.14}$$

avec :

- $M_c \in \mathbb{R}^{n \times l}$ et $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$: matrices constantes,
- $\Delta(\delta) \in \mathbb{R}^{l \times q}$: fonction matricielle de $= \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$.

Une telle décomposition n'est pas unique et nous supposerons pour simplifier que M_c et N sont de plein rang, c'est-à-dire de dimensions minimales. Cette représentation des incertitudes paramétriques est aussi appelée représentation par rebouclage interne (ou IFL : Internal Feedback Loop) et permet d'écrire le modèle perturbé sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A & M_c & B \\ \hline N & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{w} = \Delta(\delta) \boldsymbol{z}$$

où deux variables (vectorielles) $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$ sont introduites respectivement comme une entrée et une sortie auxiliaires, connectées par une boucle de retour sur un gain $\Delta(\delta)$ selon la figure 3.02.

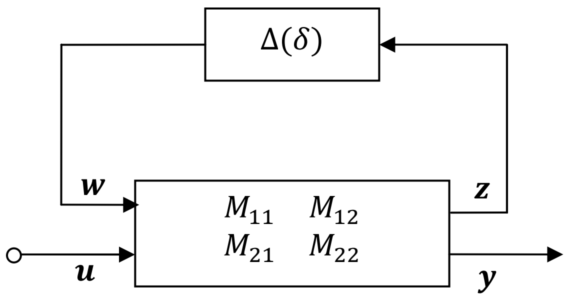


Figure 3.02 : *Représentation des incertitudes paramétriques*

On note aussi en boucle ouverte :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\phi M_c & N\phi B \\ C\phi M_c & C\phi B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

avec $\phi = (sI - A)^{-1}$.

3.4 Synthèse PRLQG

Dans cette section, nous allons nous appuyer sur les propriétés asymptotiques des synthèses LQ et LQG pour développer une technique de synthèse de loi de commandes, asymptotiquement robustes aux variations paramétriques [16]. On appelle cette technique la synthèse PRLQG.

3.4.1 Rappel des propriétés asymptotiques des commandes LQ

Nous rappelons ici un théorème fondamental qui est à la base des démonstrations asymptotiques des régulateurs LQ, déjà mentionnées dans le chapitre 2.

Théorème 3.01

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{z}(t) = N\,\boldsymbol{x}(t) & \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^q \end{cases} \tag{3.17}$$

La commande par retour d'état qui minimise le critère LQ :

$$J = \int_0^\infty \big(\boldsymbol{z}^T(t)\boldsymbol{z}(t) + \rho\boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)\big)dt \tag{3.18}$$

$$= \int_0^\infty \big(\boldsymbol{x}^T N^T N(t)\boldsymbol{x}(t) + \rho\boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)\big)dt$$

avec $R > 0$ et ρ un scalaire positif, s'écrit :

$$\boldsymbol{u}(t) = -K_c\boldsymbol{x}(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho}R^{-1}B^T P \text{ et } P = Ric\begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho}BR^{-1}B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Nous avons alors :

$\lim_{\rho\to 0}(P) = P_0$ *existe* et $\lim_{\rho\to 0}(J) = \boldsymbol{x}^T(0)P_0\boldsymbol{x}(0)$

enfin, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $dim(\boldsymbol{z}) \leq dim(\boldsymbol{u}) \quad (q \leq m)$,
- *le transfert* $Z/U(s) = N(sI - A)^{-1}B$ *n'a pas de zéros*

  dans le demi-plan droit, (3.20)

  alors $P_0 = 0$.

La dernière hypothèse illustre le fait que, dans le cas de système à déphasage non minimal (c'est-à-dire avec des zéros « instables »), on ne peut pas « pousser » indéfiniment les performances même si l'on s'autorise des commandes sans aucune limitation ; ceci est tout fait logique puisque les zéros (du système comme du correcteur) attirent les pôles en boucle fermée quand le gain de boucle augmente (où lorsque la pondération sur u diminue dans le critère (3.18)).

Désignons par λ une valeur propre de la boucle fermée et par v (de norme unitaire) son vecteur propre à droite associé, soit :

$$(A - BK_c - \lambda\, I_n)v = \left(A - \frac{1}{\rho}BR^{-1}B^TP - \lambda\, I_n\right)v = 0 \tag{3.21}$$

alors λ et $\begin{bmatrix} v \\ Pv \end{bmatrix}$ sont de valeur et vecteur propres de la matrice hamiltonienne (d'après 3.09) :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda\, I_n & -\frac{1}{\rho}BR^{-1}B^T \\ -N^TN & -A^T - \lambda\, I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ Pv \end{bmatrix} = 0 \tag{3.22}$$

Si les hypothèses (3.20) sont satisfaites, alors : $\lim_{\rho\to 0}(P) = 0$

Pour que la seconde composante de l'égalité vectorielle (3.22) soit vérifiée quand $\to 0$.

- soit λ est rejeté à l'infini : $\lim_{\rho\to 0}(\lambda) = \infty(a + ib)$; avec λ, v, P vérifiant asymptotiquement $(N^TN + \lambda P)v = 0$
- soit λ est fini : $\lim_{\rho\to 0}(\lambda) = \lambda_0$ et $\lim_{\rho\to 0}(v) = v_0$; avec v_0 tel que $Nv_0 = 0$.

Ce résultat montre que, asymptotiquement, la commande LQ découple du critère les modes qu'elle n'a pu accélérer indéfiniment. Ces modes sont placés sur les zéros stables (ou l'image stable par rapport à l'axe imaginaire des zéros instables) du transfert $Z/U(s)$ puisque λ_0 et v_0 vérifient :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_0\, I_n & B \\ N & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_0 \\ -\frac{1}{\rho}R^{-1}B^TPv_0 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} A - BK_c - \lambda_0\, I_n \\ N \end{bmatrix} v_0 = 0 \tag{3.24}$$

3.4.2 *Désensibilisation asymptotique du LQR*

On déduit de la dernière égalité (3.24) que les valeurs propres finies de la boucle fermée sont asymptotiquement inobservables par la sortie contrôlée. Si cette sortie $\boldsymbol{z}$ correspond à la sortie auxiliaire introduite pour modéliser les variations paramétriques (3.15), alors ces valeurs propres finies seront insensibles à tout rebouclage de cette sortie et notamment à la perturbation $\Delta(\delta)$.

Le modèle perturbé corrigé s'écrit [25] :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & M_c \\ N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

soit :

$$\frac{Z}{W}(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} M_c \tag{3.26}$$

Si l'on décompose ce transfert sur les différentes valeurs propres λ_i, nous obtenons :

$$\frac{Z}{W}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N v_i u_i^T M_c}{s - \lambda_i} \tag{3.27}$$

où u_i et v_i désignent respectivement le vecteur propre à gauche et le vecteur propre à droite associés à λ_i.

Il est alors facile de montrer que ce transfert tend asymptotiquement vers 0 avec ρ puisque :

- soit $\lambda_i \to \infty$,
- soit $N v_i \to 0$.

Donc :

$$\frac{Z}{W}(s) \to 0 \text{ quand } \rho \to 0$$

D'un point de vue pratique, cette propriété sera utilisée de la façon suivante : à partir d'un réglage de pondération Q_x et R du critère LQ satisfaisant les spécifications de performance, on robustifiera la solution obtenue, en prenant compte d'une pondération selon la sortie auxiliaire $\boldsymbol{z} = N\boldsymbol{x}$ par le biais d'un paramètre de réglage q :

$$Q_x \to Q_x + qN^T N \tag{3.28}$$

et on augmentera ce paramètre jusqu'à l'obtention d'un compromis satisfaisant entre les performances et la robustesse aux variations paramétriques construites autour de $\boldsymbol{z}$.

Le problème de désensibilisation asymptotique de la méthode LQ peut se résoudre de la manière suivante :

Définition 3.01 : Méthodologie PRLQ

Pour un système incertain défini par (3.15) et vérifiant les propriétés (3.20), la loi de commande LQ, $\boldsymbol{u} = -K_c\boldsymbol{x}$, issu d'un certain choix de pondérations Q_{x0} et R_0, peut être désensibilisée asymptotiquement en ajustant la constante q du nouveau problème LQ défini par [25] :

$$G_1 = R^{-1}B^TP \text{ et}$$

$$PA_0 + A_0^TP + (Q_{x0} + qN^TN) - PBR_0^{-1}B^TP = 0 \tag{3.29}$$

3.4.3 Introduction d'un observateur de Kalman

Si l'on considère maintenant que seules les sorties $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$ sont accessibles à la mesure, par analogie avec la méthode LQG, on synthétisera un observateur de Kalman [26] pour estimer l'état et appliquer sur cet état estimé, noté $\widehat{\boldsymbol{x}}$, le gain K_c calculé précédemment. La représentation d'état du correcteur dynamique ainsi obtenu s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_c - K_fC & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

où K_f désigne le gain de l'observateur de Kalman. La représentation d'état, entre $\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{z}$, de la boucle fermée par la commande $\boldsymbol{u} = -K_c\widehat{\boldsymbol{x}}$ s'écrit maintenant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A & -BK_c & M_c \\ K_fC & A - BK_c - K_fC & 0 \\ \hline N & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

ou encore, en faisant apparaître l'erreur d'estimation $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$ dans le vecteur d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A - BK_c & K_fC & 0 \\ 0 & A - K_fC & M_c \\ \hline N & N & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Le transfert $Z/W(s)$ s'écrit donc maintenant :

$$\frac{Z}{W}(s) = [\,N \quad N\,]\begin{bmatrix} sI_n - A + BK_c & -K_fC \\ 0 & sI_n - A + K_fC \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ M_c \end{bmatrix}$$

$$= N\left[(sI_n - A + BK_c)^{-1}K_fC + I_n\right](sI_n - A + K_fC)^{-1}M_c$$

Posons $\varphi(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1}K_f$, alors, comme précédemment (équation 3.27), nous pouvons décomposer le transfert $\varphi(s)$ sur ses valeurs propres λ_i, ses vecteurs propres à droite à droite v_i et à gauche u_i. Soit :

$$\varphi(s) \; = \sum_{i=1}^{n}\frac{Nv_iu_i^TK_f}{s-\lambda_i} \tag{3.33}$$

et de la même façon, le réglage asymptotique de la commande LQ, tel qu'il a été présenté précédemment, entraîne $\varphi(s) = 0$. Donc :

$$Z/U(s) = N\left(sI_n - A + K_fC\right)^{-1}M_c \tag{3.34}$$

c'est-à-dire que de la perturbation $\Delta(\delta)$, on ne « voit » que les modes d'observation (valeurs propres de $A - K_fC$). Ces modes sont donc sensibles aux variations paramétriques mais les modes de commande (valeurs propres de $A - BK_c$), comme dans le cas du retour d'état, y sont insensibles. Il faut donc que le réglage du filtre de Kalman permette d'obtenir une dynamique d'estimation aussi peu sensible que possible aux variations paramétriques pour que l'ensemble de la dynamique de la boucle fermée présente de bonnes propriétés de robustesse.

Définition 3.02 : Première formulation de la méthodologie PRLQG

Pour un système incertain défini par (3.15) et vérifiant les propriétés (3.20), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG, la robustesse paramétrique du filtre de Kalman en ajustant la constante q dans le critère LQ défini par [24] :

$$Q_x = Q_{x0} + qN^TN \text{ et } R = R_0$$

où Q_{x0} et R_0 sont des matrices de pondérations réglées pour satisfaire la performance sur le système nominal.

3.4.4 Dualité et analogie avec le LTR

Nous avons vu dans les paragraphes précédents comment robustifier la commande LQ en pondérant le critère dans la direction de $\boldsymbol{z}$ ($Q_x \rightarrow N^T N$) ; on peut aussi, par dualité, robustifier l'observateur de Kalman en injectant un bruit d'état dans la direction de $\boldsymbol{w}$ ($W_x \rightarrow M_c {M_c}^T$).

Dans ce dernier cas, le transfert en boucle fermée vu de la perturbation devient :

$$Z/W(s) = N(sI_n - A + BK_c)^{-1} M_c \tag{3.35}$$

Les modes d'observation sont donc maintenant insensibles aux variations paramétriques et ce transfert répond comme celui que l'on obtiendrait par une commande LQ qui supposerait tout l'état mesurable.

Définition 3.03 : Seconde formulation de la méthodologie PRLQG

Pour un système incertain défini par (3.15) et vérifiant les propriétés (3.20), il est possible de retrouver, par la synthèse LQG, la robustesse paramétrique du retour d'état LQ en ajustant la constante q dans le réglage du filtre de Kalman défini par [24] :

$$W_x = W_{x0} + q M_c {M_c}^T \text{ et } V = V_0$$

où W_{x0} et V_0 sont les matrices de covariance réglées sur le système nominal. Cette synthèse PRLQG force la partie « filtre de Kalman » à être asymptotiquement insensible aux variations paramétriques. Nous l'appellerons donc, par abus d'écriture, synthèse PRG.

D'un point de vue pratique, c'est cette dernière formulation du PRLQG qui est la plus utilisée, car les systèmes sont généralement plus riches en mesures qu'en commande et l'hypothèse (3.20), qui le nombre de paramètres incertains indépendants au nombre de commandes (cas du PRLQ) ou au nombre de mesures (cas du PRG), est donc moins restrictive dans le cas du PRG que dans le cas du PRLQ.

Une autre alternative consiste à robustifier le gain de retour d'état vis-à-vis de certains paramètres et l'observateur vis-à-vis d'autres paramètres selon l'interprétation physique de ces paramètres et selon le savoir-faire du concepteur.

Enfin, on remarquera que le LQG/LTR est un cas particulier du PRLQG où l'on a choisi :

$$M_c = B \text{ et } N = C \tag{3.36}$$

c'est-à-dire que la perturbation $\Delta(\delta)$ correspond alors à un gain statique entre l'entrée et la sortie du système. C'est donc pour cette dernière raison que le LTR tend asymptotiquement à restaurer la marge de gain infinie du LQ.

3.5 Synthèse PRLQR

Cette nouvelle méthode est très proche de la synthèse PRLQ, notamment au niveau de la modélisation des incertitudes ; par contre, elle permet de prendre en compte l'amplitude des variations paramétriques contrairement à la synthèse PRLQ fondée sur une désensibilisation asymptotique [27], [28].

3.5.1 Cadre de l'étude

Le modèle et ses incertitudes sont représentés de la même façon que précédemment, soit $\Delta A(\delta) = M_c \Delta(\delta) N$ (3.04), avec toutefois la restriction suivante :

$$\Delta(\delta) = \begin{bmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \delta_r \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad |\delta_i| \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \qquad (3.37)$$

Enfin, dans l'optique d'une loi de commande LQR, tous les états sont supposés mesurables.

3.5.2 Rappels sur la commande LQR classique

Rappelons brièvement les principaux résultats de la synthèse LQR (chapitre 2). Pour cela, considérons le système nominal :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t)$$

Le retour d'état optimal

$$\boldsymbol{u}(t) = -K_c \boldsymbol{x}(t)$$

qui minimise le critère quadratique

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q_x \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt$$

$$\text{où } Q_x = Q_x^T \geq 0 \text{ et } R = R^T > 0,$$

est déterminé par :

$$K_c = R^{-1} B^T P$$

où P est la solution de l'équation de Riccati algébrique suivante :

$$-PA - A^T P - Q_x \boldsymbol{x} + PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{3.38}$$

Théorème 3.02 : Robustesse des performances du LQR aux incertitudes paramétriques

Si l'on veut parler de robustesse paramétrique, il faut, de toute manière, faire intervenir la matrice $\tilde{A}$, la seule qui soit dépendante de l'incertitude inhérente au système.

Par ajout et retrait des termes $P\tilde{A} + \tilde{A}^T P$ et $s\,P$ à l'équation de Riccati (3.38), nous obtenons l'équation :

$$P\left(sI - \tilde{A}\right) - \left(sI + \tilde{A}^T\right)P + P\left(\tilde{A} - A\right) + \left(\tilde{A}^T - A^T\right)P - Q_x + PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{3.39}$$

Post-multipliée par $(sI - \tilde{A})^{-1}B$ et pré-multipliée par $B^T(-sI - \tilde{A}^T)^{-1}$, l'équation (3.39) se ré-écrit :

$$\begin{aligned} &B^T\Phi^*(s)\left[P\left(A - \tilde{A}\right) + \left(A - \tilde{A}\right)^T P + Q_x\right]\Phi(s)B \\ &= B^T\Phi^*(s)K_c^T R + RK_c\Phi(s)B + B^T\Phi^*(s)K_c^T RK_c\Phi(s)B \end{aligned} \tag{3.40}$$

où il a été posé :

$$RK_c = B^T P \qquad K_c^T R = PB \tag{3.41}$$

$$\Phi(s) = (sI - \tilde{A})^{-1} \quad \Phi^{\mathrm{T}}(-s) = \Phi^*(s) = (-sI - \tilde{A}^T)^{-1} \tag{3.42}$$

Supposons que la matrice de pondération R soit proportionnelle à la matrice identité selon :

$$R = \rho I$$

alors, si la quantité ρI est ajoutée de part et d'autre de l'égalité (3.40), nous obtenons finalement :

$$[I + K_c\Phi B]^*[I + K_c\Phi B] = I + \frac{1}{\rho}B^T\Phi^*[-P\Delta A - \Delta A^T P + Q_x]\Phi B \tag{3.43}$$

On peut reconnaître la matrice de transfert en boucle ouverte $K_c\Phi(s)B$, tandis que $(I + K_c\Phi(s)B)^{-1}$ n'est rien d'autre que la fonction de sensibilité du système en boucle fermée. Ce premier résultat, obtenu dans le domaine fréquentiel, montre comment le lieu de Nyquist évolue en fonction des différentes valeurs de la matrice $\tilde{A}$.

En particulier, si le gain de retour K_c est appliqué au système nominal ($\Delta A = 0$), l'équation (3.43) permet de retrouver un résultat très intéressant de la commande LQR, puisqu'elle se réduit à :

$$\|I + K_c(sI - A)^{-1}B\|_\infty \geq 1$$

Cette dernière égalité assure que le lieu de Nyquist reste toujours à l'extérieur du cercle unité et implique d'excellentes marges de stabilité.

En outre, si le gain de retour K_c est appliqué à un système perturbé ($\Delta A \neq 0$), il est plus difficile de tirer des conclusions quant à l'allure du lieu des racines. Il s'avère même que dans certains cas, la stabilité peut être mise en défaut.

En résumé, malgré les «excellentes marges de gain et de phase qu'elle assure, la loi de commande LQR ne garantit rien quant à la robustesse aux variations paramétriques. Il est donc tentant de trouver une synthèse s'inspirant de la méthodologie LQR pour ses propriétés intéressantes et qui puisse tenir compte des incertitudes paramétriques. C'est en l'occurrence la dernière relation trouvée (3.43) qui va nous aider à développer la synthèse PRLQR.

3.5.3 Condition suffisante de robustesse

En effet, lors de l'examen de l'équation fréquentielle (3.43), un cas a été occulté. Il est évident que si

$$-P\Delta A - \Delta A^T P + Q_x \geq 0 \tag{3.44}$$

alors on déduit de (3.43) que :

$$\|I + K_c \Phi(s) B\|_\infty \geq 1$$

Par analogie aux résultats obtenus dans le chapitre 2 (2.54) : $F_c^T(-j\omega) R F_c(j\omega) \geq R$, la condition (3.44) permet donc de garantir une robustesse aux performances identique à celle obtenue par la synthèse LQR, à l'exception ici, que cette garantie est valable quelle que soit la valeur de la perturbation ΔA. Ainsi, nous avons obtenu une condition suffisante pour assurer à la fois une certaine robustesse en stabilité et en performance vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

3.5.4 Equation de Riccati pour la synthèse PRLQR

Le problème est donc de trouver un critère J, c'est-à-dire un réglage (Q_x, ρ) tel que la solution P de l'équation de Riccati (3.38) garantisse (3.44) pour toutes les valeurs ΔA admissibles. Nous allons utiliser, pour cela, une démarche déjà bien connue dans le domaine de la synthèse robuste pour les systèmes incertains. Issue du travail de Petersen [29], elle est fondée sur la « *borne de* Petersen – Hollot » [29], [30], qui consiste à donner un majorant d'un ensemble d'équations de Lyapunov sous la forme d'une simple équation de Riccati :

L'équation (3.44) s'écrit aussi :

$$PM_c\Delta(\rho)N + N^T\Delta(\rho){M_c}^T P \leq Q_x \tag{3.45}$$

Or $|\delta_i| \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, l'équation (3.45) est vérifiée si :

$$\left|PM_cN + N^T{M_c}^TP\right| \leq Q_x$$

A ce niveau, on fait appel à l'inégalité $2|ab| \leq \gamma a^2 + \frac{1}{\gamma}b^2$ où γ est une constante positive choisie arbitrairement. Matriciellement, on peut alors écrire :

$$\gamma N^TN + \frac{1}{\gamma}PM_c{M_c}^TP \leq Q_x$$

Ce qui est vérifié s'il existe une matrice définie positive Q_{x0} telle que :

$$Q_x = Q_{x0} + \gamma N^TN + \frac{1}{\gamma}PM_c{M_c}^TP$$

En reportant cette valeur dans l'équation (3.38), nous obtenons l'équation de Riccati pour la synthèse PRLQR :

$$PA + A^TP - \frac{1}{\rho}PBB^TP + Q_{x0} + \gamma N^TN + \frac{1}{\gamma}PM_c{M_c}^TP = 0 \tag{3.46}$$

On constate donc que la pondération sur l'état Q_x recherchée dépend de la solution P de l'équation de Riccati par le terme $\frac{1}{\gamma}PM_c{M_c}^TP$ qui est d'autant plus important que γ est faible. Le critère J ne peut donc être exprimé a priori. Cela entraîne également le fait que l'équation de Riccati (3.46) n'admet pas toujours de solution P définie positive si γ est trop faible. Sur le plan pratique, on règle Q_{x0} et ρ pour satisfaire les performances sur le modèle nominal en oubliant les termes $\frac{1}{\gamma}PM_c{M_c}^TP$ et γN^TN dans le critère. Puis on introduit ces termes par le biais du paramètre γ réglé de façon à ce que la solution P de l'équation de Riccati (3.46) soit définie positive.

La méthode PRLQR peut donc se résumer comme suit :

Définition 3.04 : Méthodologie PRLQR

Pour un système incertain défini par (3.15) et vérifiant les hypothèses (3.37), la synthèse PRLQR permet d'obtenir un gain de retour d'état, robuste aux incertitudes paramétriques bornées. Ce retour d'état est défini par [28] :

$$\boldsymbol{u}(t) = -K_c\boldsymbol{x}(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho}B^TP \tag{3.47}$$

P est la solution définie positive ($P = P^T > 0$), si elle existe, de l'équation de Riccati suivante :

$$PA + A^T P + (Q_{x0} + \gamma N^T N) - P\left(\frac{1}{\rho}BB^T - \frac{1}{\gamma}M_c {M_c}^T\right)P = 0 \tag{3.48}$$

où Q_{x0} et ρI sont respectivement les pénalisations sur l'état et la commande, choisies pour le système nominal, et γ une constante positive choisie a priori et suffisamment élevée pour que P existe.

3.5.5 *Propriétés de la synthèse PRLQR*

Revenons sur l'expression de la fonction coût que la commande PRLQR cherche à minimiser. L'expliciter revient à la décomposition en quatre termes pénalisants :

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T Q_{x0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \gamma N^T N\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \frac{1}{\gamma} PM_c {M_c}^T P\boldsymbol{x} + \rho\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}\right) dt \tag{3.49}$$

- Le premier d'entre eux, $\boldsymbol{x}^T Q_{x0}\boldsymbol{x}$, est la pénalisation sur la performance choisie pour le système nominal.

- Le second terme, $\boldsymbol{x}^T \gamma N^T N\boldsymbol{x}$, traduit l'énergie incertaine, c'est-à-dire l'énergie du système vue par les directions incertaines (les plus sensibles) de l'espace d'état.

- Le terme $\frac{1}{\gamma} PM_c {M_c}^T P$ est en fait un terme, comme nous le verrons dans le paragraphe relatif au lien avec la synthèse H_∞, permettant de prendre en compte une perturbation pire-cas dans la direction M_c définie par les paramètres incertains.

- Enfin, $\rho\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u}$ est le terme de pondération sur la commande. Il permet de limiter l'amplitude de $\boldsymbol{u}$. Et, selon la valeur de ρ, la bande passante du système diffère.

Nous avons donc augmenté la garantie de robustesse de stabilité par rapport aux incertitudes modélisées et les garanties de robustesse de performance en ajoutant des termes au critère LQR. Les effets de ces termes sont de minimiser l'influence de l'énergie incertaine stockée par le système et de réaliser une barrière aux perturbations pire-cas agissant dans la direction des paramètres incertains M_c. Leur importance relative est pondérée par γ.

3.5.5.1 Rôle de γ

γ réalise un compromis entre la minimisation de l'énergie incertaine ($\gamma N^T N$) et la désensibilisation aux perturbations pire-cas orientées dans la direction des paramètres incertains ($\frac{1}{\gamma} P M_c {M_c}^T P$). Si γ est très grand, l'énergie incertaine du système est fortement pondérée. Cette pondération suffit à rendre le système robuste aux incertitudes paramétriques, mais les performances sont dégradées dès que $\gamma N^T N \gg Q_{x0}$. En revanche, quand γ tend vers 0, plus aucune perturbation n'est permise dans la direction M_c. Autrement dit, les paramètres incertains ne doivent pas influencer la réponse du système.

Pour un meilleur compromis, il est préférable de prendre une valeur intermédiaire de γ. Ce choix est d'autant plus judicieux que la bande passante du système boucle fermée est très large pour les valeurs extrêmes de γ (gains de K_c élevés). Le second rôle de γ est, de fait, d'influencer la bande passante du système boucle fermée. Il est facile de vérifier que la commande PRLQR donne une bande passante plus grande que la commande LQR, puisqu'on désensibilise le système aux variations paramétriques. Par ailleurs, plus la bande passante est large et moins le système est robuste aux incertitudes hautes fréquences non modélisées. C'est la contrepartie « redoutable » de la bonne robustesse aux incertitudes paramétriques.

3.5.5.2 Liens avec les synthèses H_2 et H_∞

Reprenons l'équation de Riccati (3.48) :

$$PA + A^T P + (Q_{x0} + \gamma N^T N) - P\left(\frac{1}{\rho} BB^T - \frac{1}{\gamma} M_c {M_c}^T\right) P = 0$$

et supposons qu'il existe une solution définie positive P.

En ajoutant et en retranchant $\frac{1}{\rho} PBB^T P$ au premier membre, il vient :

$$PA + A^T P - \frac{1}{\rho} PBB^T P + \frac{1}{\rho} PBB^T P - \frac{1}{\rho} PBB^T P + \frac{1}{\gamma} PM_c {M_c}^T P + Q_{x0} + \gamma N^T N = 0$$

Or, $K_c = \frac{1}{\rho} B^T P$, on peut donc écrire :

$$P(A - BK_c) + (A - BK_c)^T P + \frac{1}{\gamma} PM_c {M_c}^T P + Q_{x0} + \gamma N^T N + K_c^T \rho K_c = 0$$

P est donc aussi solution positive d'une nouvelle équation de Riccati relative à la dynamique en boucle fermée $A - BK_c$ dont la matrice hamiltonienne associée s'écrit :

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - BK_c & \frac{1}{\gamma} M_c {M_c}^T \\ -(\gamma N^T N + Q_{x0} + \rho K_c^T K_c) & -(A - BK_c)^T \end{bmatrix}$$

Cette matrice hamiltonienne n’a donc pas de valeurs propres sur l’axe imaginaire. Ainsi, on peut affirmer que le transfert en boucle fermée $T_{\boldsymbol{zw}}(s)$ défini par :

$$T_{\boldsymbol{zw}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_c & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} M_c \\ \hline \sqrt{\gamma} N & 0 \\ Q_{x0}^{-1/2} & 0 \\ -\sqrt{\rho} K_c & 0 \end{array}\right]$$

est tel que $\|T_{\boldsymbol{zw}}(s)\|_\infty < 1$.

$T_{\boldsymbol{zw}}(s)$ peut être représenté par la LFT de la figure 3.03 qui met en évidence la forme standard associée à la synthèse PRLQR.

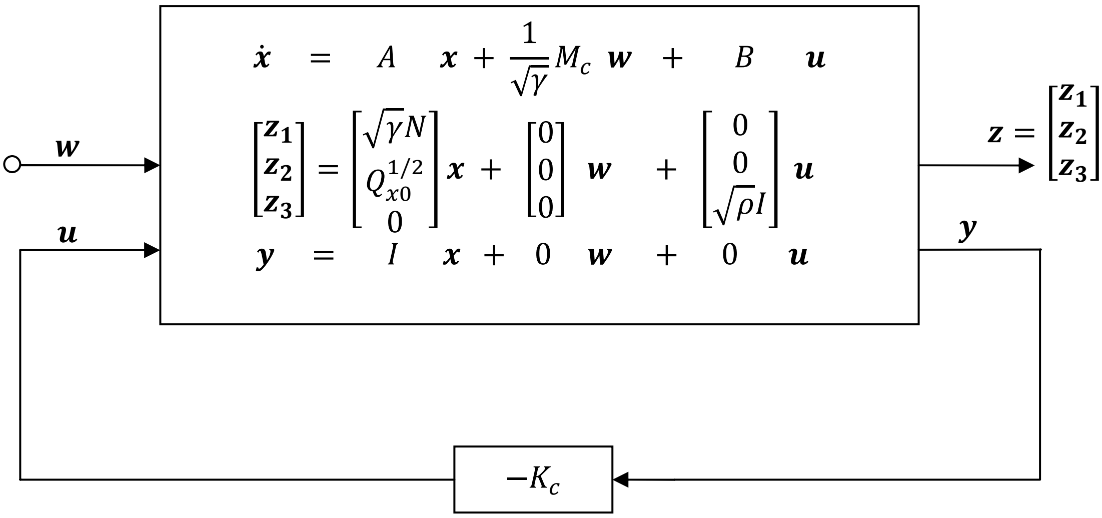


Figure 3.03 : *Forme standard de la synthèse PRLQR*

On pourrait également montrer que la synthèse H_∞ d’un retour d’état sur cette forme standard fournit la même solution $(-K_c)$ que la synthèse PRLQR. On voit donc que quel que soit γ, la synthèse PRLQR permet de minimiser le critère H_2 :

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T(\gamma N^T N + Q_{x0})\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}) dt$$

tout en garantissant $\|T_{\boldsymbol{zw}}(s)\|_\infty < 1$.

C'est une autre interprétation du critère quadratique (3.49) dans lequel la pondération sur l'état, dépendant de la solution P (par le terme $\frac{1}{\gamma}PM_cM_c{}^TP$), rendait l'interprétation physique de ce critère plus délicate.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la robustesse paramétrique en performance, on a intérêt à choisir γ le plus faible possible afin que le critère J tende vers le critère de performance initial

$$J_{perf} = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q_{x0}\boldsymbol{x} + \rho \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})dt$$

traduit par les sorties $\boldsymbol{z_2}$ et $\boldsymbol{z_3}$; la robustesse des performances obtenues étant assurée par la contrainte

$$\left\|T_{\boldsymbol{z_1w}}\right\|_\infty < \|T_{\boldsymbol{zw}}\|_\infty < 1$$

En contrepartie, le gain résultant K_c sera élevé et risque de poser des problèmes vis-à-vis des incertitudes non structurées hautes fréquences (dynamiques négligées) comme nous l'avons déjà mentionné.

Ce lien avec la synthèse H_∞ met en évidence le conservatisme éventuel de la loi de commande PRLQR en ce qui concerne la robustesse paramétrique en stabilité. En utilisant le théorème des Petits Gains, on suppose implicitement que Δ est complexe, non structurée. Donc, cette synthèse ignore complètement le fait que Δ est une matrice diagonale, réelle et constante.

3.6 Conclusion

Les techniques présentées dans ce chapitre permettant d'appréhender le problème de la robustesse paramétrique sous le formalisme LQ et LQG.

La synthèse PRLQG est en fait une technique de désensibilisation asymptotique et ne nécessite pas la connaissance des amplitudes des variations paramétriques. Cela permet entre autre d'alléger l'étape de modélisation des incertitudes. Elle est fondée sur la propriété asymptotique de la commande LQ et fait intervenir, de façon analogue à la synthèse LQG/LTR, un paramètre de réglage haut-niveau permettant de maîtriser le compromis performance/robustesse.

La synthèse PRLQR permet le calcul d'un retour d'état robuste aux incertitudes paramétriques en tenant compte des amplitudes de ces variations. Elle fait également intervenir un paramètre de réglage haut-niveau qui s'apparente à la valeur du critère (γ) utilisée en synthèse H_∞.

CHAPITRE 4
SIMULATION DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LES SYNTHESES PRLQG ET PRLQR

Dans cette dernière partie, nous proposons une illustration des méthodes de synthèse de lois de commande PRLQR et PRLQG présentées dans le chapitre précédent. Pour cela, il nous a paru nécessaire de définir un exemple d'application : système d'ordre 2 avec 3 incertitudes paramétriques et incertitude non structurée de forme additive directe. Nous allons détailler le processus d'étude pour le traitement des problèmes de synthèse de lois de commande robuste dans cette application. D'abord pour la synthèse PRLQG et ensuite pour la synthèse PRLQR.

L'objectif de la synthèse du système linéaire est de déterminer un correcteur $K(s)$ permettant de corriger le processus afin d'avoir une bonne stabilité du système.

4.1 Processus nominal

Soit le système nominal à retour unitaire suivant :

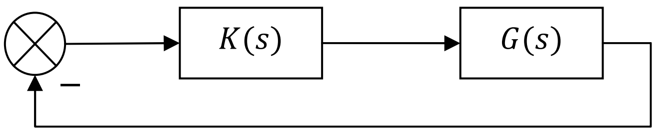


Figure 4.01 : *Schéma bloc du système nominal*

La matrice de transfert du processus nominal (4.01) d'un système de 2nd ordre est monovariable :

$$G(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{4.01}$$

4.2 Processus perturbé

Soit le système à retour unitaire dont le processus est perturbé :

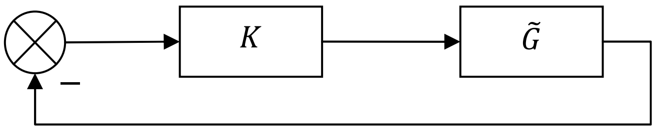


Figure 4.02 : *Schéma bloc du système perturbé*

La figure 4.02 représente le schéma bloc du système bouclé perturbé où $\tilde{G}$ représente la matrice de transfert du processus perturbé prenant en compte les erreurs de modélisation Δ.

4.2.1 Incertitudes structurées (paramétriques)

La matrice de transfert du processus perturbé (4.02) du système de 2[nd] ordre devient alors un système multivariable de la forme :

$$\tilde{G}_s(s) = \frac{1}{\tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \tag{4.02}$$

4.2.2 Incertitudes non structurées (modèle d'erreur de forme additive directe)

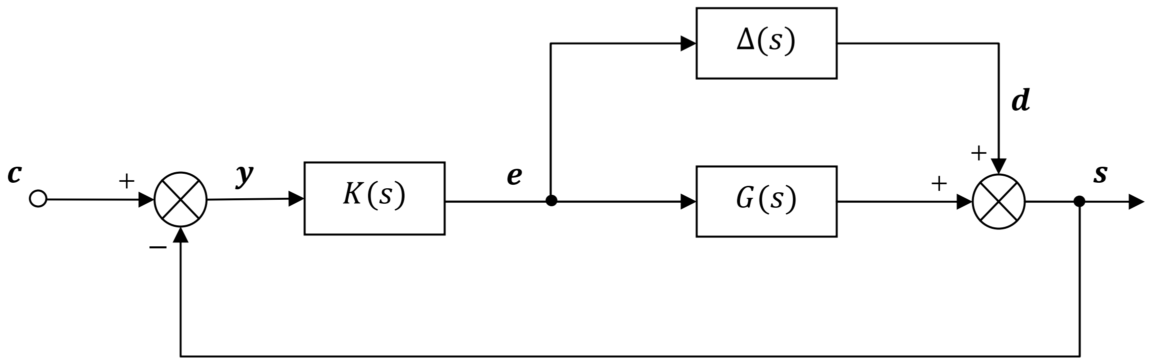


Figure 4.03 : *Schéma bloc du système perturbé*

La fonction de transfert en boucle fermée du signal est : $T_{ed} = -K(I + GK)^{-1}$. Le correcteur K doit stabiliser le processus nominal G. On choisira le vecteur de sortie $\boldsymbol{s}$ est la variable d'état x.

Application à un système linéaire dont le processus linéaire est perturbé avec 3 incertitudes paramétriques et une incertitude non structurée de forme additive directe

Le processus nominal de ce système (système à un degré de liberté) est décrit par l'équation différentielle linéaire à temps continu suivante :

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = e(t) \tag{4.03}$$

Les variations de chaque paramètre sont définies comme :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2 + \delta_{a_2} \\ \tilde{a}_1 &= a_1 + \delta_{a_1} \\ \tilde{a}_0 &= a_0 + \delta_{a_0} \end{aligned} \tag{4.04}$$

Avec a_2, a_1 et a_0 représentent les valeurs des paramètres nominaux ; et δ_{a_2}, δ_{a_1} et δ_{a_0} représentent les variations possibles de a_2, a_1 et a_0.

Ainsi, le système avec processus perturbé devient :

$$\tilde{a}_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \tilde{a}_1 \frac{dx}{dt} + \tilde{a}_0 x = e(t)$$

ou

$$(a_2 + \delta_{a_2}) \frac{d^2x}{dt^2} + (a_1 + \delta_{a_1}) \frac{dx}{dt} + (a_0 + \delta_{a_0})x = e(t) \tag{4.05}$$

Si l'on choisit x_1 et x_2 comme variables d'état, alors la représentation d'état de ce système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} = \dfrac{1}{a_2 + \delta_{a_2}} \left[-\left(a_0 + \delta_{a_0}\right)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} - \left(a_1 + \delta_{a_1}\right)\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{e} \right] \\ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}} \end{cases} \tag{4.06}$$

Ainsi, le diagramme de simulation de ce système est :

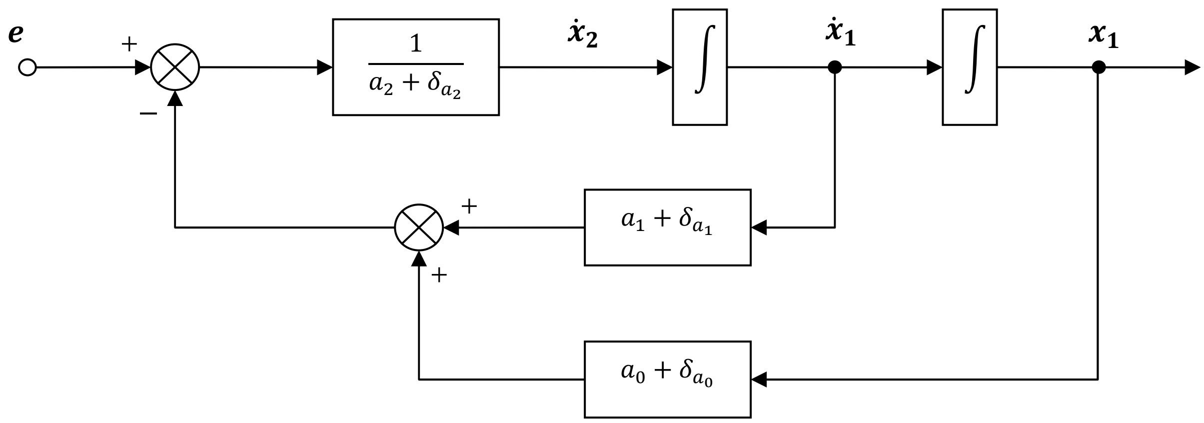


Figure 4.04 : *Bloc diagramme du système de* 2^{nd} *ordre avec processus perturbé*

Notons que $\frac{1}{a_2+\delta_{a_2}}$ peut aussi être représentée en deux termes $\frac{1}{a_2}$ et δ_{a_2}. Alors, la figure 4.04 peut être reproduite, en mettant en rétroaction les variations incertaines, par la figure 4.05 suivante :

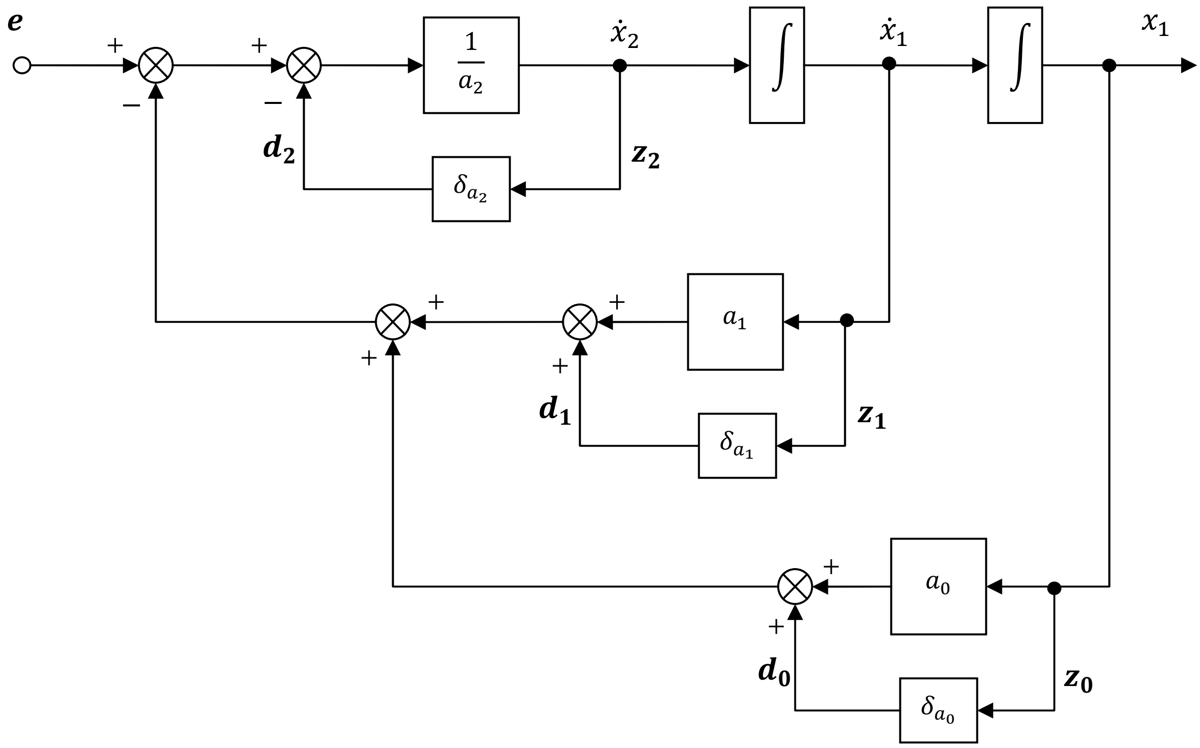


Figure 4.05 : *Bloc diagramme des incertitudes paramétriques*

En considérant les variables $\boldsymbol{d}_0$, $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{z}_1$ et $\boldsymbol{z}_2$, le système avec processus perturbé peut être représenté dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_2} \end{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_0}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{d}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.07}$$

D'après ces équations, nous pouvons obtenir :

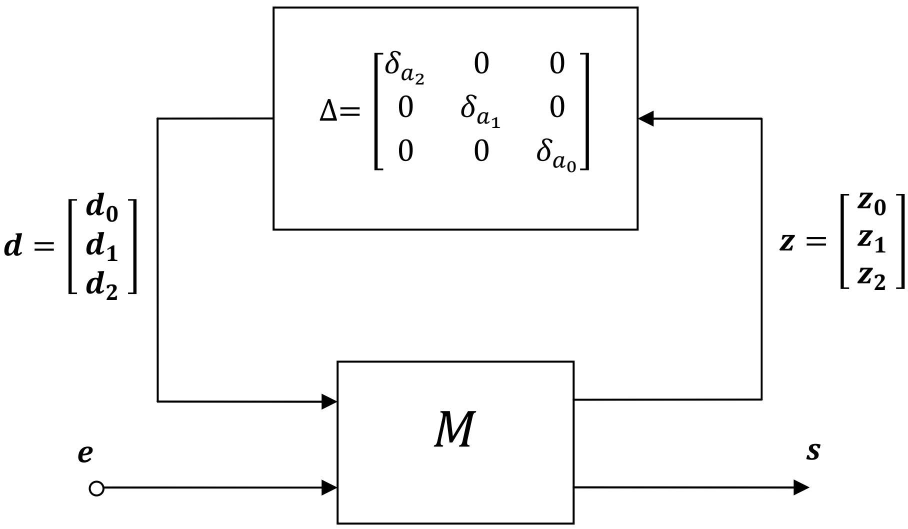


Figure 4.06 : *Représentation du système sous forme standard*

Or, d'après (sous paragraphe 1.4.3, chapitre 1), l'étude du système avec processus perturbé peut aussi se faire comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2(1+\omega_{a_2}\delta_{a_2}) \\ \tilde{a}_1 &= a_1(1+\omega_{a_1}\delta_{a_1}) \\ \tilde{a}_0 &= a_0(1+\omega_{a_0}\delta_{a_0}) \end{aligned} \tag{4.08}$$

avec :

$$|\delta_{a_2}| \leq 1,\ |\delta_{a_1}| \leq 1 \text{ et } |\delta_{a_0}| \leq 1 \tag{4.09}$$

- a_2, a_1 et a_0 sont les valeurs nominales respectives de $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_0$;
- ω_{a_2}, ω_{a_1} et ω_{a_0} représentent les variations possibles de a_2, a_1 et a_0 ;
- δ_{a_2}, δ_{a_1} et δ_{a_0} représentent les incertitudes des paramètres perturbés $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_0$.

Pour cette présente étude, on prendra :

- a_2 = 2 ; a_1 = 0.75 et a_0 = 1
- ω_{a_2} = 0.2 ; ω_{a_1}= 0.2 et ω_{a_0}= 0.2 : soit 20 % de variation pour chaque paramètre nominal

Les trois blocs de constantes $\frac{1}{a_2+\delta_{a_2}}$, $(a_1+\delta_{a_1})$ et $(a_0+\delta_{a_0})$ de la figure 4.04 peuvent alors être remplacés par un bloc diagramme unifié en termes de a, ω_a, δ_a.

Notons que la quantité $\frac{1}{\tilde{a}_2}$ peut être représentée par une forme LFT_u en δ_{a_2} :

$$\frac{1}{\tilde{a}_2} = \frac{1}{a_2(1+\omega_{a_2}\delta_{a_2})} = \frac{1}{a_2} - \frac{\omega_{a_2}}{a_2}\delta_{a_2}(1+\omega_{a_2}\delta_{a_2})^{-1}$$

$$\frac{1}{\tilde{a}_2} = F_u\left(M_{a_{2i}}, \delta_{a_2}\right)$$

avec

$$M_{a_{2i}} = \begin{bmatrix} -\omega_{a_2} & \frac{1}{a_2} \\ -\omega_{a_2} & \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

De même, le paramètre $\tilde{a}_1 = a_1(1+\omega_{a_1}\delta_{a_1})$ peut être représenté par une forme LFT_u en δ_{a_1} :

$$a_1 = F_u\left(M_{a_1}, \delta_{a_1}\right)$$

avec

$$M_{a_1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ \omega_{a_1} & a_1 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Enfin, le paramètre $\tilde{a}_0 = a_0(1+\omega_{a_0}\delta_{a_0})$ peut être représenté par une forme LFT_u en δ_{a_0} :

$$a_0 = F_u\left(M_{a_0}, \delta_{a_0}\right)$$

avec

$$M_{a_0} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ \omega_{a_0} & a_0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Soit :

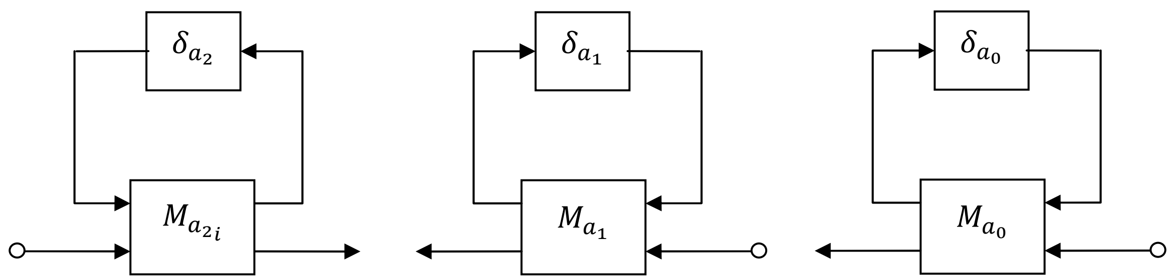


Figure 4.07 : *Représentation des paramètres incertains sous forme LFT*

De plus, nous allons noter les entrées et les sorties respectives des perturbations δ_{a_2}, δ_{a_1} et δ_{a_0} par $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_2}}$, $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_1}}$ et $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_0}}$ et $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_2}}$, $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_1}}$ et $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_0}}$.

D'où, en considérant ces vecteurs d'entrée et de sortie, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_2}} \\ \ddot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\omega_{a_2} & \dfrac{1}{a_2} \\ -\omega_{a_2} & \dfrac{1}{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_2}} \\ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a_1}} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a_0}} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_1}} \\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a_1}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ \omega_{a_1} & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_1}} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_0}} \\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{a_0}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_0 \\ \omega_{a_0} & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_0}} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_2}} &= \delta_{a_2} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_2}} \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_1}} &= \delta_{a_1} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_1}} \\
\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a_0}} &= \delta_{a_0} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{a_0}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Soit alors :

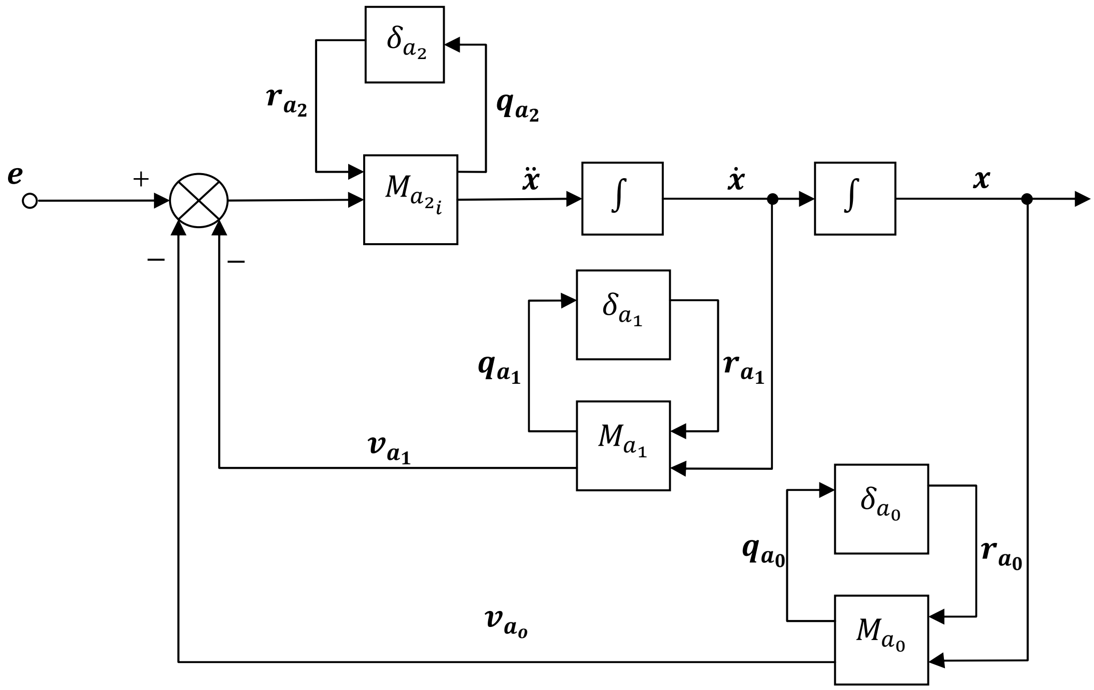


Figure 4.08 : *Schéma bloc général du système avec les incertitudes paramétriques*

Ensuite, posons :

$$\boldsymbol{x_1 = x\,;\; x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1\,;\; s = x_1}$$

tel que :

$$\boldsymbol{\dot{x}_1 = \ddot{x} = \ddot{x}_1}$$

Ainsi, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{\dot{x}_1} & = & \boldsymbol{x_2} \\
\boldsymbol{\dot{x}_2} & = & -\omega_{a_2}\boldsymbol{r_{a_2}} + \frac{1}{a_2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v_{a_1}} - \boldsymbol{v_{a_0}}) \\
\boldsymbol{q_{a_2}} & = & -\omega_{a_2}\boldsymbol{r_{a_2}} + \frac{1}{a_2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v_{a_1}} - \boldsymbol{v_{a_0}}) \\
\boldsymbol{q_{a_1}} & = & a_1\boldsymbol{x_2} \\
\boldsymbol{q_{a_0}} & = & a_0\boldsymbol{x_1} \\
\boldsymbol{v_{a_1}} & = & \omega_{a_2}\boldsymbol{r_{a_1}} + \boldsymbol{a_1 x_2} \\
\boldsymbol{v_{a_0}} & = & \omega_{a_0}\boldsymbol{r_{a_0}} + \boldsymbol{a_0 x_1} \\
\boldsymbol{s} & = & \boldsymbol{x_1} \\
\boldsymbol{r_{a_2}} & = & \delta_{a_2}\boldsymbol{q_{a_2}} \\
\boldsymbol{r_{a_1}} & = & \delta_{a_1}\boldsymbol{q_{a_1}} \\
\boldsymbol{r_{a_0}} & = & \delta_{a_1}\boldsymbol{q_{a_1}}
\end{array}$$

En éliminant les variables $\boldsymbol{v_{a_1}}$ et $\boldsymbol{v_{a_0}}$, les équations qui gouvernent le système dynamique sont données par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline q_{a_2} \\ q_{a_1} \\ q_{a_0} \\ \hline s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} & -\omega_{a_2} & -\frac{\omega_{a_1}}{a_2} & -\frac{\omega_{a_0}}{a_2} & \frac{1}{a_2} \\
\hline
-\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} & -\omega_{a_2} & -\frac{\omega_{a_1}}{a_2} & -\frac{\omega_{a_0}}{a_2} & \frac{1}{a_2} \\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline r_{a_2} \\ r_{a_1} \\ r_{a_0} \\ \hline e \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r_{a_2}} \\ \boldsymbol{r_{a_1}} \\ \boldsymbol{r_{a_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{a_1} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_{a_2}} \\ \boldsymbol{q_{a_1}} \\ \boldsymbol{q_{a_0}} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

G tient en compte les paramètres incertains qui seront représentés par la figure 4.09 ci-dessous.

G possède :

- quatre entrées : $\boldsymbol{r_{a_2}}, \boldsymbol{r_{a_1}}, \boldsymbol{r_{a_0}}, \boldsymbol{e}$
- quatre sorties : $\boldsymbol{q_{a_2}}, \boldsymbol{q_{a_1}}, \boldsymbol{q_{a_0}}, \boldsymbol{s}$
- deux états : $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$

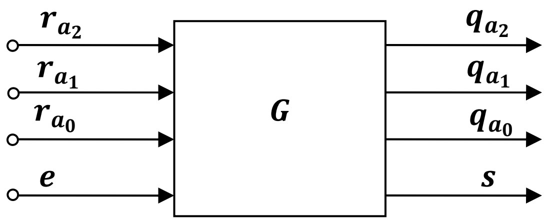


Figure 4.09 : *Schéma bloc des entrées/sorties du système*

La représentation en espace d'état du processus G est alors :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{4.16}$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{a_2} & -\frac{\omega_{a_1}}{a_2} & -\frac{\omega_{a_0}}{a_2} \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \\ 0 & a_1 \\ a_0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{11} = \begin{bmatrix} -\omega_{a_2} & -\frac{\omega_{a_1}}{a_2} & -\frac{\omega_{a_0}}{a_2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [\ 1 \quad 0\ ] \qquad D_{21} = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ] \qquad D_{22} = \ 0$$

Notons enfin que G dépend seulement de a_2, a_1, a_0, ω_{a_2}, ω_{a_1}, ω_{a_0} et de l'équation différentielle originale qui interconnecte $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{e}$. Par conséquent, G est connu et ne contient aucun paramètre incertain.

Les caractéristiques incertaines du système original peuvent être décrites par une représentation sous forme LFT_u :

$$\boldsymbol{s} = F_u(G, \Delta)\boldsymbol{e} \tag{4.17}$$

avec $\Delta = diag(\delta_{a_2}, \delta_{a_1}, \delta_{a_0})$: matrice d'incertitude diagonale.

Soit alors :

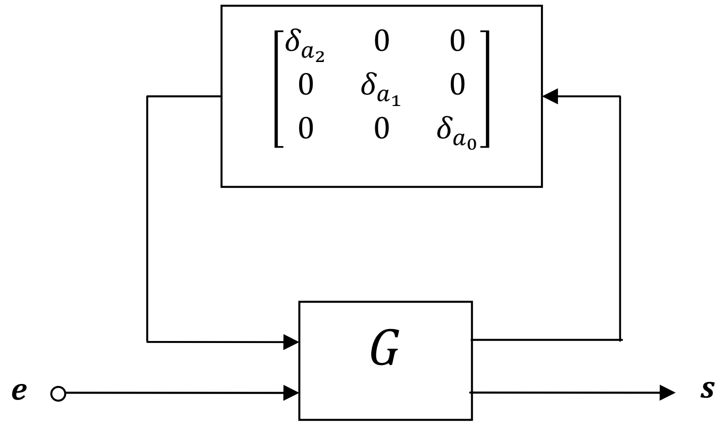


Figure 4.10 : *Représentation sous forme LFT du système avec incertitudes paramétriques*

4.2.3 Analyse fréquentielle du système avec incertitudes paramétriques

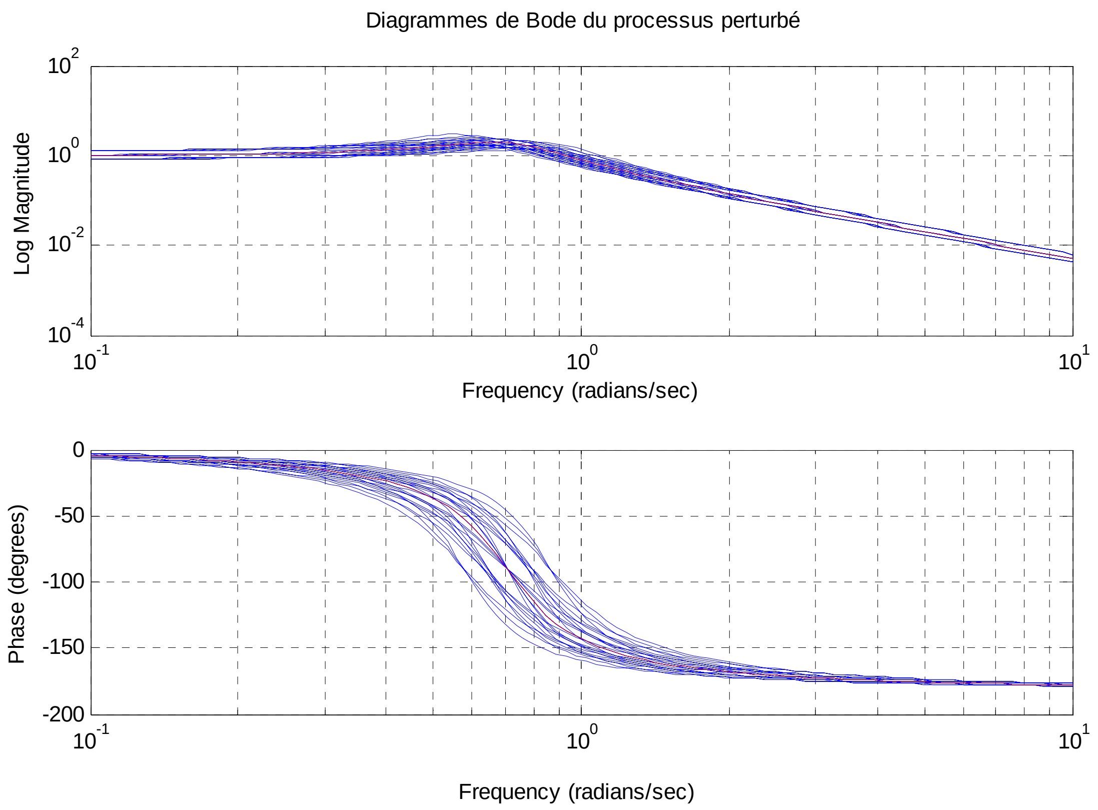


Figure 4.11 : *Diagrammes de Bode du système en boucle fermée avec incertitudes paramétriques*

La figure 4.11 représente les diagrammes de Bode de la famille du système avec incertitudes paramétriques dont les paramètres suivent les conditions :

$$\begin{cases} -1 \leq \delta_{a_0} \leq 1 \\ -1 \leq \delta_{a_1} \leq 1 \\ -1 \leq \delta_{a_2} \leq 1 \end{cases}$$

4.3 Cahier de charges du système

L'objectif de notre étude pour ce système est de déterminer le correcteur K du système bouclé avec $\boldsymbol{e}(s) = K(s)\boldsymbol{s}(s)$; le système ayant des incertitudes paramétriques.

4.3.1 Performance et stabilité nominale

La commande à concevoir doit vérifier la stabilité interne du système bouclé. D'abord, le critère de performance doit être satisfait par le système en boucle fermée.

Dans notre cas, le critère de performance fait intervenir la matrice de sensibilité S, c'est-à-dire :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{4.18}$$

où S et T sont respectivement la fonction de sensibilité et la fonction de sensibilité complémentaire et rappelons que :

$$\begin{gathered} S = (I + GK)^{-1} \\ T = K(I + GK)^{-1} \end{gathered} \tag{4.19}$$

De plus, W_1 et W_2 sont les fonctions de pondération choisies pour représenter les caractéristiques fréquentielles des perturbations externes $\boldsymbol{d}$. Si l'inégalité (4.18) est satisfaite, alors on peut dire que le système bouclé réduit suffisamment les effets des perturbations à un niveau acceptable.

4.3.2 Robustesse en stabilité

Le système sera robuste en stabilité en boucle fermé si le système satisfait la condition de stabilité interne en boucle fermée pour tout model de $\widetilde{G} = LFT_u(G, \Delta)$.

Dans notre cas, cela signifie que le système doit rester stable pour :

$$\begin{cases} 1.8 \leq \tilde{a}_2 \leq 2.4 \\ 0.6 \leq \tilde{a}_1 \leq 0.9 \\ 0.8 \leq \tilde{a}_0 \leq 1.2 \end{cases} \tag{4.20}$$

4.3.3 *Robustesse en performance*

En plus de la robustesse en stabilité, le système doit aussi satisfaire, pour tout $\widetilde{G} = LFT_u(G, \Delta)$, le critère de performance :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1(I+GK)^{-1} \\ W_2K(I+GK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{4.21}$$

Il est préférable que la complexité du correcteur soit acceptable, c'est-à-dire, l'ordre du correcteur doit être le moins élevé que possible.

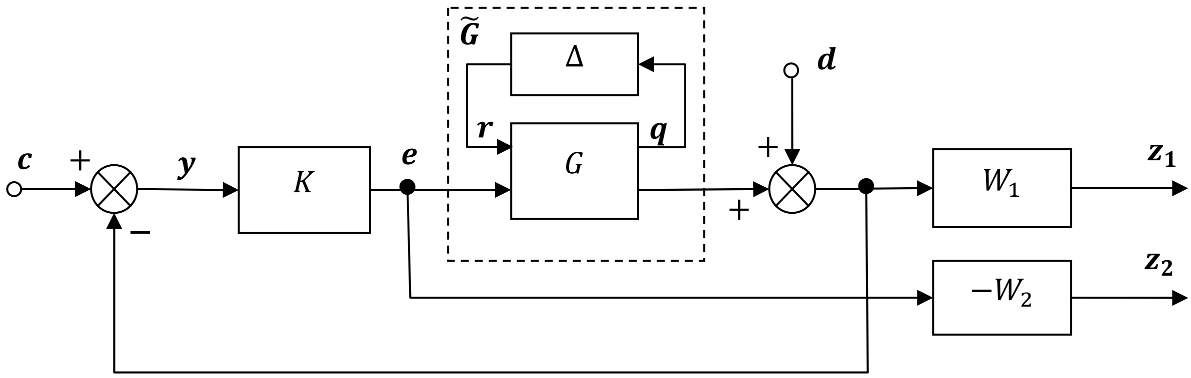


Figure 4.12 : *Schéma bloc du système en boucle fermée avec incertitudes paramétriques*

Δ est la matrice des incertitudes. En général, Δ peut être une matrice de transfert et doit satisfaire la condition $\|\Delta\|_\infty < 1$. Le variable $\boldsymbol{d}$ représente les perturbations. Et l'on a :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z_1} \\ \boldsymbol{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(I+GK)^{-1} \\ W_2K(I+GK)^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{d} \tag{4.22}$$

Par conséquent, le critère de performance est que la fonction de transfert de $\boldsymbol{d}$ vers $\boldsymbol{z_1}$ et $\boldsymbol{z_2}$ doit être petit au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour toute matrice d'incertitude Δ. Les fonctions de pondérations W_1 et W_2 sont utilisées pour faire apparaître la signification relative de la performance pour toutes les gammes de fréquence.

Dans notre cas, nous allons prendre comme fonction de pondération la fonction scalaire :

$$W_1(s) = 0.95\frac{s^2 + 1.8s + 10}{s^2 + 8s + 0.01}$$
$$W_2(s) = 10^{-2} \tag{4.23}$$

Pour atteindre la performance désirée, il est nécessaire de satisfaire l'inégalité $\|W_1(I+GK)^{-1}\|_\infty < 1$. Ici, la fonction de pondération est une fonction scalaire, alors les valeurs singulières de la fonction de sensibilité $(I+GK)^{-1}$ sur toutes les plages de fréquence doivent être obtenues par la courbe de $\frac{1}{W_1}$. Cela signifie que $\|W_1(I+GK)^{-1}\|_\infty < 1$ si et seulement si toutes les fréquences $\sigma[(I+GK)^{-1}(j\omega)] < \left|\frac{1}{W_1(j\omega)}\right|$.

Les valeurs singulières de $\frac{1}{W_1}$ sur la plage de fréquence $[10^{-4}, 10^{4}]$ sont représentées sur la figure 4.13 suivante :

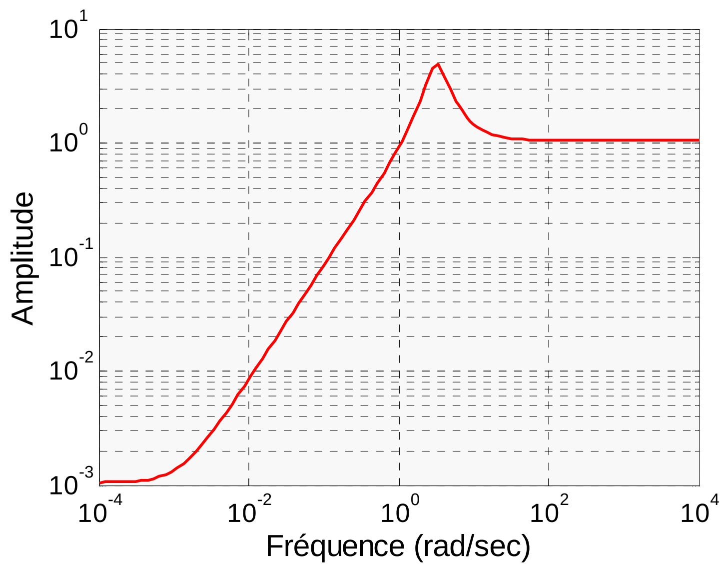


Figure 4.13 : *Schéma bloc du système en boucle fermée avec incertitudes paramétriques*

4.3.4 Interconnexion du système

La figure 4.14 illustre le schéma du système en boucle ouverte si on isole K :

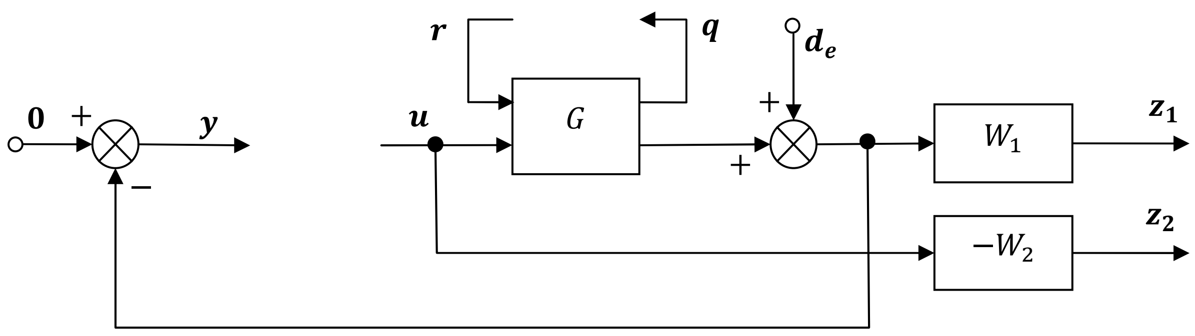


Figure 4.14 : *Structure du système en boucle ouverte*

Si on simplifie le schéma, on a :

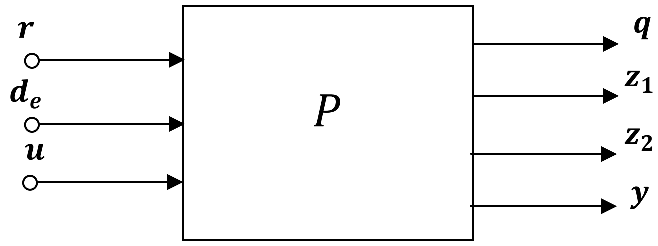


Figure 4.15 : *Schéma bloc de l'ensemble du système en boucle ouverte*

Donc finalement, si on effectue la synthèse du correcteur K suivant toutes les conditions énoncées précédemment et en tenant compte des méthodes de synthèse utilisées : PRLQG ou PRLQR, nous pouvons illustrer ceci par les figures ci-après :

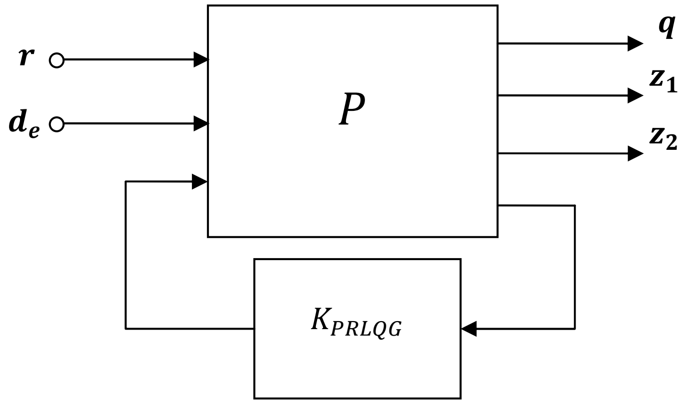


Figure 4.16 : *Forme standard pour la synthèse PRLQG*

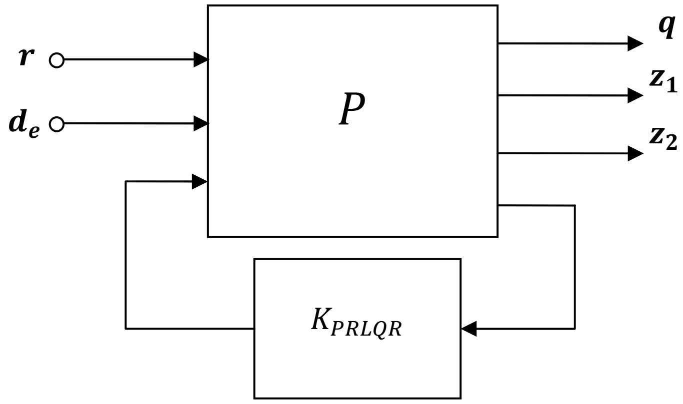


Figure 4.17 : *Forme standard pour la synthèse PRLQR*

4.4 Synthèse du correcteur K

Pour cela, nous allons calculer deux correcteurs K_{PRLQG} et K_{PRLQR}.

4.4.1 Synthèse PRLQG

Nous avons vu dans les propriétés des synthèses LQ que le nombre de commandes doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres incertains. Or ici, nous avons une seule commande et trois paramètres incertains. Dans cet exemple d'application, nous démontrons que le comportement asymptotique désiré peut être exploité de façon partielle mais satisfaisante, même lorsque les hypothèses ne sont pas satisfaites. Nous pourrons aussi constater que l'approche PRLQG permet d'augmenter significativement le domaine de stabilité dans l'espace paramétrique et de résoudre, au vu des réponses temporelles, le problème de la robustesse en performance notamment dans le cas PRLQG/LTR. C'est sur les réponses temporelles que le gain de robustesse en performance est le plus manifeste. L'allure de ces réponses est beaucoup moins sensible aux variations paramétriques.

Rappelons que pour calculer K_{PRLQG}, il faut tout d'abord calculer le gain de retour d'état K_c et le gain du filtre de Kalman K_f. Plus précisément, nous allons concevoir ici un correcteur PRLQG/LTR.

4.4.1.1 Gain de retour d'état K_c

$$K_c = [-0.1235 \ -0.4015 \ -0.0000 \ -0.0000] \tag{4.24}$$

4.4.1.2 Gain d'estimation K_f

$$K_f = \begin{bmatrix} 44.3368 \\ 982.8738 \\ -1.0873 \\ 2.5333 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

4.4.1.3 Correcteur K_{PRLQG}

La fonction de transfert du correcteur K_{PRLQG} obtenu est :

$$K_{PRLQG} = \frac{400.1\,s^3 + 3315\,s^2 + 920.1\,s + 1.145}{s^4 + 52.75\,s^3 + 1360\,s^2 + 8015\,s + 10.02} \tag{4.26}$$

Sous forme matricielle, ce correcteur K_{PRLQG} s'écrit :

$$A_{K_1} = \begin{bmatrix} -52.75 & -42.49 & -15.65 & -0.1565 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{K_1} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{K_1} = [\,25.01 \quad 6.476 \quad 0.1123 \quad 0.001118\,] \qquad D_{K_1} = 0$$

Ainsi, après avoir obtenu le correcteur K_{PRLQG}, on va faire l'analyse du système de la figure 4.18 suivante :

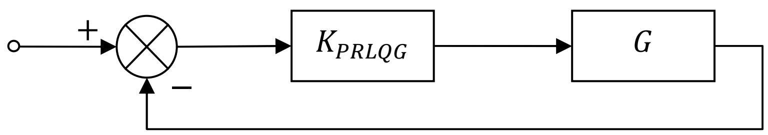


Figure 4.18 : *Système avec correcteur K_{PRLQG}*

4.4.2 Analyse du système avec correcteur K_{PRLQG}

D'après la figure 4.18, la fonction de transfert du système corrigé en boucle ouverte est :

$$L_{c_1}(s) = G(s)K_{PRLQG}(s) \tag{4.27}$$

tel que :

$$L_{c_1}(s) = \frac{400.1\, s^3 + 3315\, s^2 + 920.1\, s + 1.145}{2\, s^6 + 106.3\, s^5 + 2760\, s^4 + 17100\, s^3 + 7391\, s^2 + 8022\, s + 10.02} \tag{4.28}$$

$L_{c_1}(s)$ s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$A_{L_1} = \begin{bmatrix} -53.13 & -43.13 & -16.7 & -1.804 & -1.959 & -0.03913 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{L_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{L_1} = [\,0 \quad 0 \quad 0.3907 \quad 0.8094 \quad 0.2246 \quad 0.004473\,] \qquad D_{L_1} = 0$$

4.4.2.1 Diagrammes de Bode du système nominal et du système corrigé

Comparons les diagrammes de Bode du système nominal $L = G$ et du système corrigé $L_{c_1} = GK_{PRLQG}$ sur une même figure.

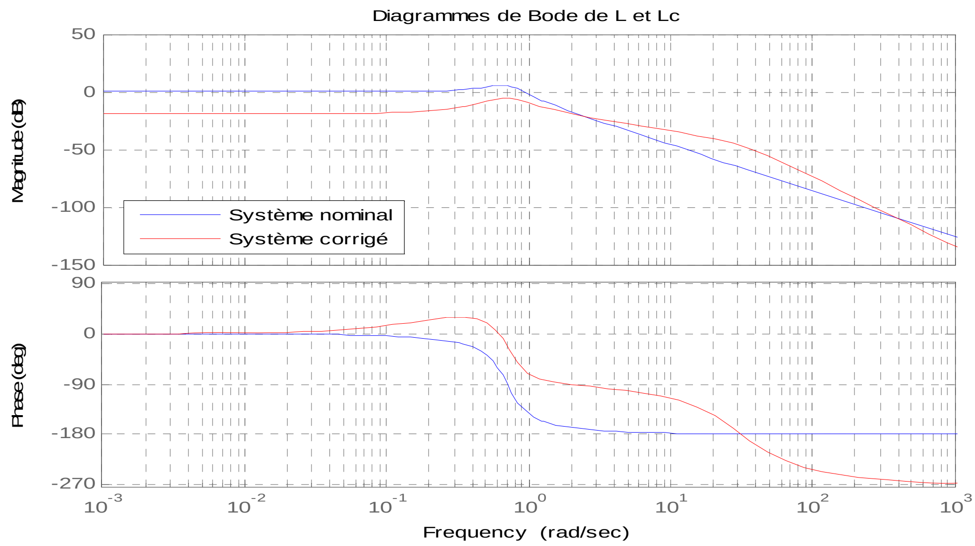


Figure 4.19 : *Diagrammes de Bode du système nominal L et du système corrigé L_{c_1}*

D'après le diagramme d'amplitude de Bode, nous remarquons que le système nominal devient supérieur à 1 (0 dB) au voisinage de la fréquence 0,1 à 1 rad/s (basse fréquence), ce qui provoque l'instabilité du système. Ainsi, après correction du système par le correcteur K_{PRLQG}, l'amplitude devient inférieure à 1 à cette fréquence. De même, puisqu'il n'y a plus de pulsation de coupure après correction, alors la marge de phase a augmenté.

Tout ceci montre qu'on a bien obtenu un bon correcteur.

4.4.2.2 Diagramme des valeurs singulières du système

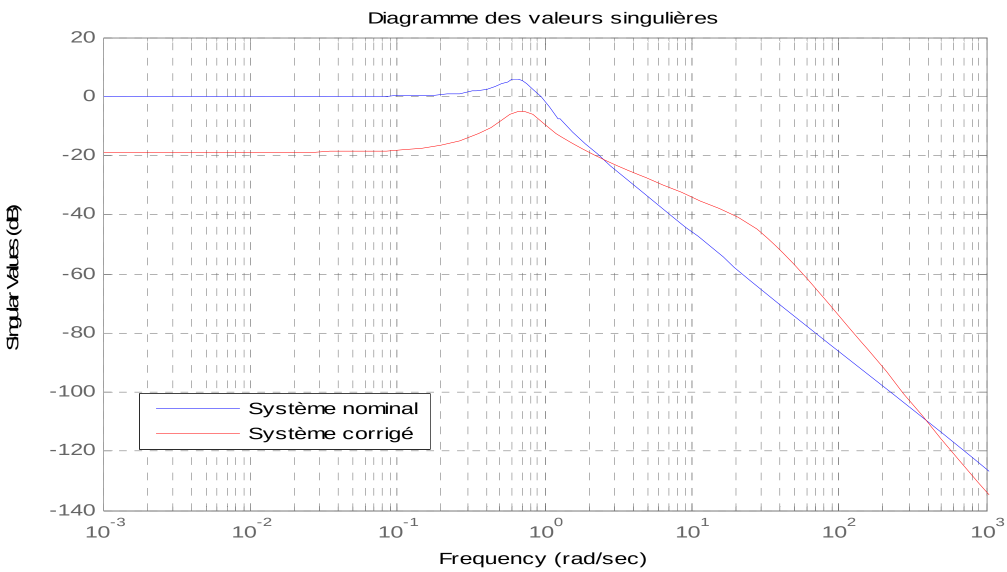


Figure 4.20 : *Diagramme des valeurs singulières (amplitude en dB)*

Cette figure 4.20 présente compare les diagrammes des valeurs singulières des deux systèmes : système nominal et système corrigé. Pour bien faire cette comparaison et pour bien voir la différence entre ces deux systèmes, nous allons utiliser une autre unité pour représenter l'amplitude, soit absolue au lieu de dB. De même, nous allons utiliser l'unité Hz pour représenter la fréquence.

Ainsi, la figure 4.21 suivante nous permet de bien observer la correction apportée au système nominal.

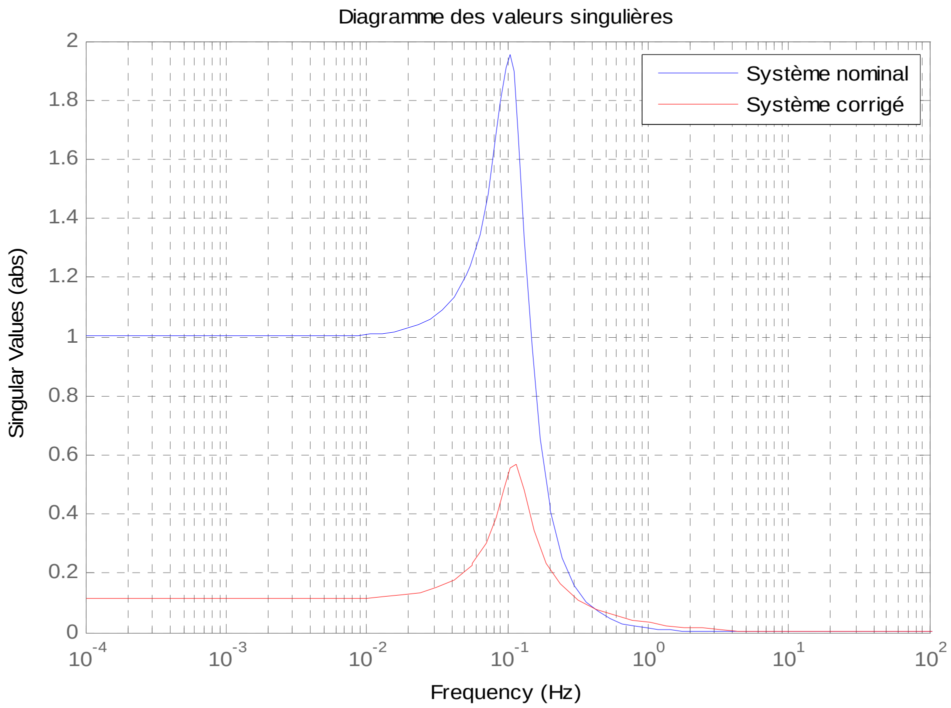


Figure 4.21 : *Diagramme des valeurs singulières (amplitude en abs)*

Au voisinage de la basse fréquence (0.1 Hz), il y a un pic très élevé qui déstabilise le système. La marge de 1 (0 dB) est très dépassée. Et le correcteur K_{PRLQG} arrive à réduire ce pic jusqu'à une amplitude supérieure à 0.6.

Ce qui montre encore que le correcteur choisi est bon.

4.4.2.3 Fonction de sensibilité S_1 et fonction de sensibilité complémentaire T_1

- *Diagrammes de Bode de S_1 et T_1*

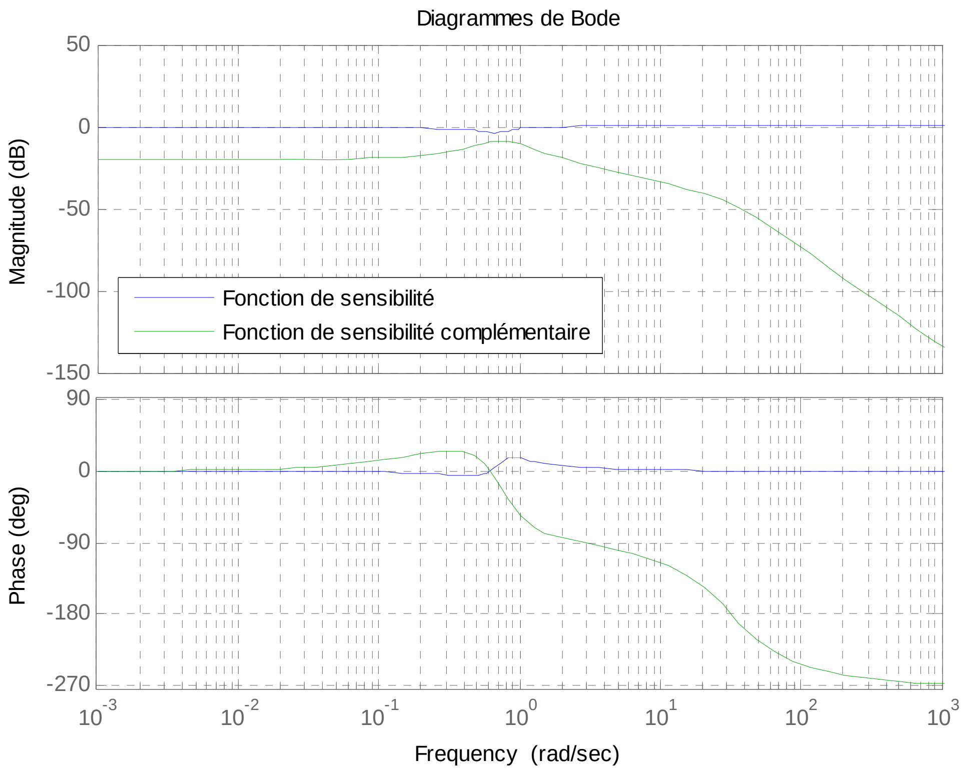


Figure 4.22 : *Diagrammes de Bode de S_1 et T_1*

Cette figure 4.22 montre les diagrammes de Bode de la fonction de sensibilité S_1 et de la fonction de sensibilité complémentaire T_1. Sur cette figure, nous remarquons que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, S_1 tend vers 1 (0 dB), sauf au voisinage de 0.1 Hz (fréquence de travail du système).

Et nous avons :

$$\begin{aligned} & M_{\mathrm{S}_1} = \|\mathrm{S}_1\|_\infty = 1.0084 < 2 \text{ (6 dB)} \\ \text{et} \quad & M_{T_1} = \|T_1\|_\infty = 0.3741 < 1.25 \text{ (2 dB)} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ces valeurs de M_{S_1} et M_{T_1} indiquent une bonne performance du système ainsi qu'une bonne robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

- *Fonctions de transfert de* S_1 *et* T_1

Fonction de sensibilité S_1 :

$$\mathrm{S}_1(s) = \frac{2\,s^6 + 106.3\,s^5 + 2760\,s^4 + 17100\,s^3 + 7391\,s^2 + 8022\,s + 10.02}{2\,s^6 + 106.3\,s^5 + 2760\,s^4 + 17500\,s^3 + 10710\,s^2 + 8942\,s + 11.16} \tag{4.30}$$

Sous forme matricielle :

$$A_{S_1} = \begin{bmatrix} -53.13 & -43.13 & -17.09 & -2.614 & -1.092 & -0.04361 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03125 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{S_1} = [\,0 \quad 0 \quad -0.3907 \quad -0.8094 \quad -0.1123 \quad -0.004473\,] \qquad D_{S_1} = 0$$

Fonction de sensibilité complémentaire T_1 :

$$T_1(s) = \frac{400.1\, s^3 + 3315\, s^2 + 920.1\, s + 1.145}{2\, s^6 + 106.3\, s^5 + 2760\, s^4 + 17500\, s^3 + 10710\, s^2 + 8942\, s + 11.16} \tag{4.31}$$

Sous forme matricielle :

$$A_{T_1} = \begin{bmatrix} -53.13 & -43.13 & -17.09 & -2.614 & -1.092 & -0.04361 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03125 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{T_1} = [\,0 \quad 0 \quad 0.3907 \quad 0.8094 \quad 0.1123 \quad 0.004473\,] \qquad D_{T_1} = 0$$

En calculant $S_1 + T_1$, nous avons trouvé :

$$S_1 + T_1 \approx I \tag{4.32}$$

Cela signifie aussi que nous avons obtenu un bon correcteur performant et robuste.

4.4.2.4 Lieu des pôles et lieu des zéros

En traçant les pôles et zéros des deux systèmes : système nominal L et système corrigé L_{c_1}.

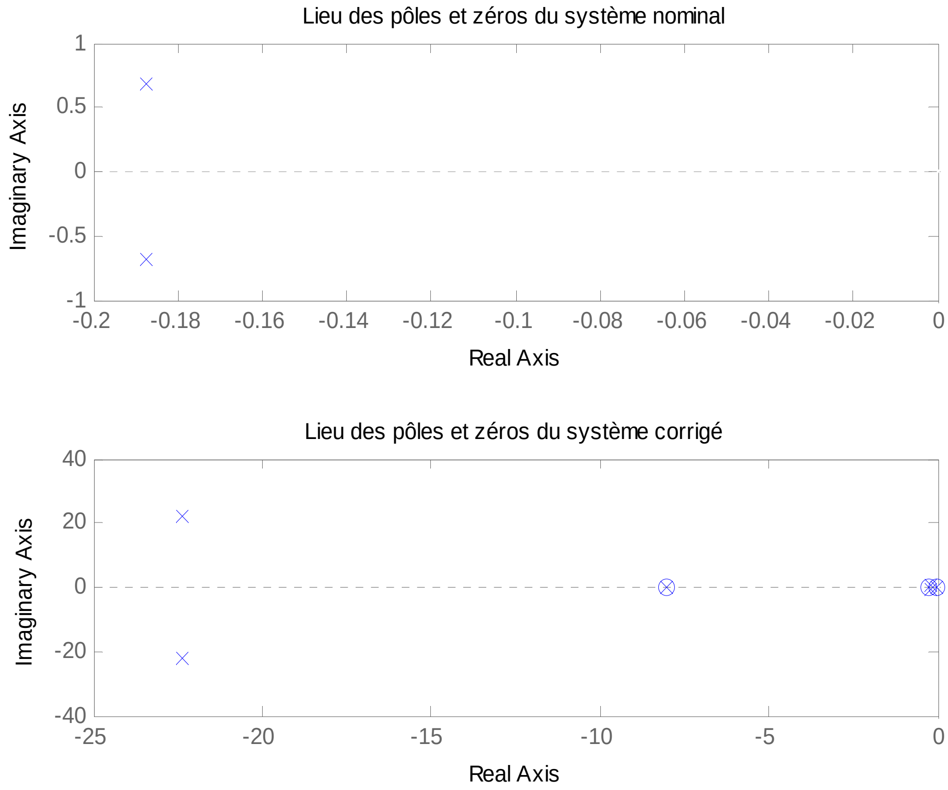


Figure 4.23 : *Pôles et zéros de L et* L_{c_1}

Récapitulant ces pôles et zéros dans un tableau.

Si nous effectuons un calcul direct, nous trouvons les mêmes résultats que ceux obtenus graphiquement :

Valeur	Système nominal		Système corrigé	
	Pôles	Zéros	Pôles	Zéros
- 0.1875 + 0.6818 i	*		*	
- 0.1875 - 0.6818 i	*		*	
- 7.9987			*	*
- 0.2862				*
- 0.0013			*	*
-22.3760 + 22.3855 i			*	
-22.3760 - 22.3855 i			*	

Tableau 4.01: *Les pôles et les zéros du système nominal et perturbé*

En considérant les pôles dominants du système corrigé, on ne prend que : - 0.1875 $\pm$ 0.6818 i et - 0.0013, ce qui rend l'étude du système comme un système du second ordre.

4.4.2.5 Réponses impulsionnelles des systèmes

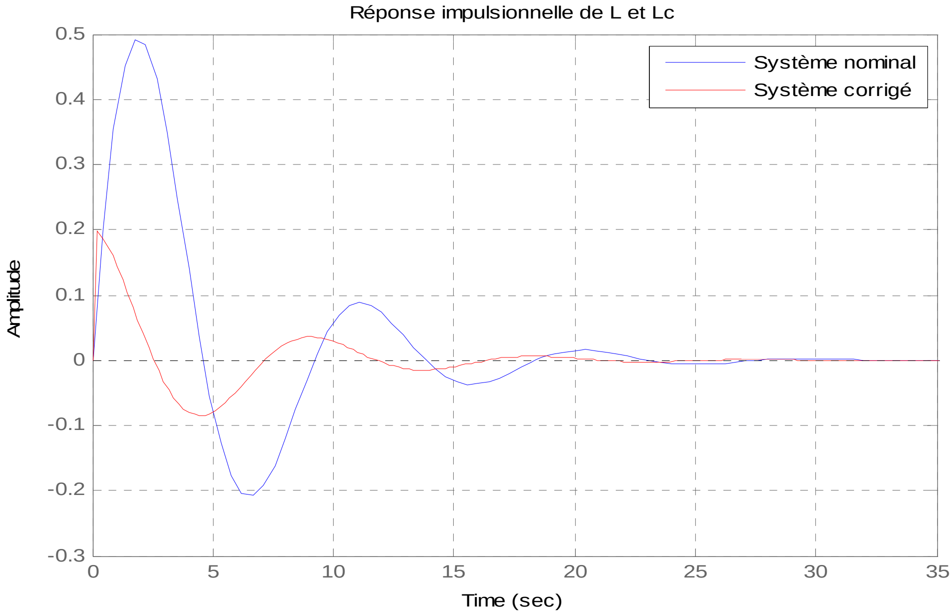


Figure 4.24 : *Réponses impulsionnelles de L et* L_{c_1}

Nous remarquons que l'amplitude du système corrigé par K_{PRLQG} est réduite à presque la moitié de celle du système nominal. Le système corrigé se stabilise plus vite par rapport au système nominal.

4.4.2.6 Réponses indicielles des systèmes

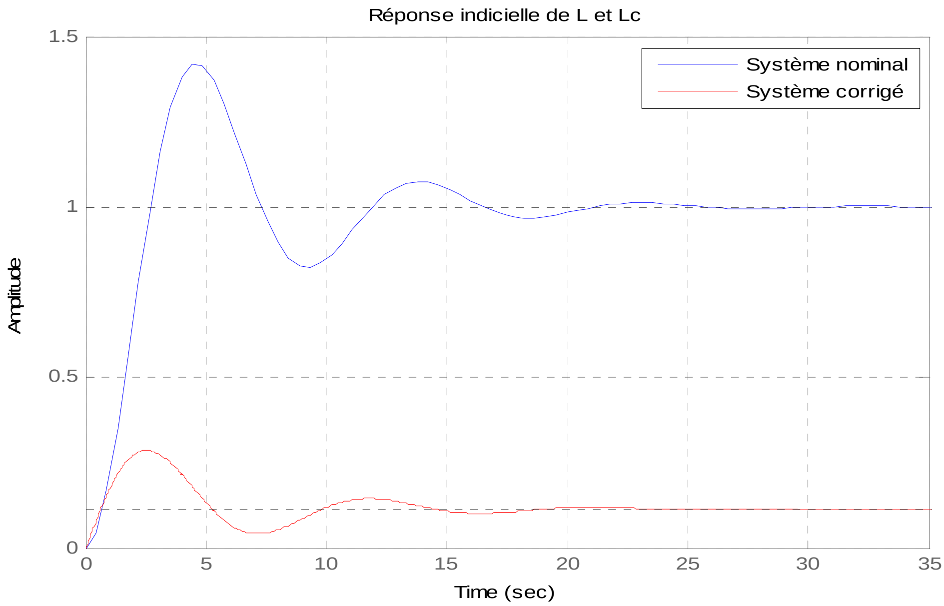


Figure 4.25 : *Réponses indicielles de L et* L_{c_1}

L'amplitude du système corrigé L_{c_1} est très petite par rapport à celle du système nominal L.

De même :

- temps de montée de L_{c_1} est inférieur à celui de L : le système devient plus rapide
- temps de réponse de L_{c_1} est inférieur à celui de L : le système devient plus performant
- dépassement (%) de L_{c_1} est inférieur à celui de L
- L_{c_1} se stabilise plus rapidement.

4.4.2.7 Marge de gain et marge de phase

- Système nominal

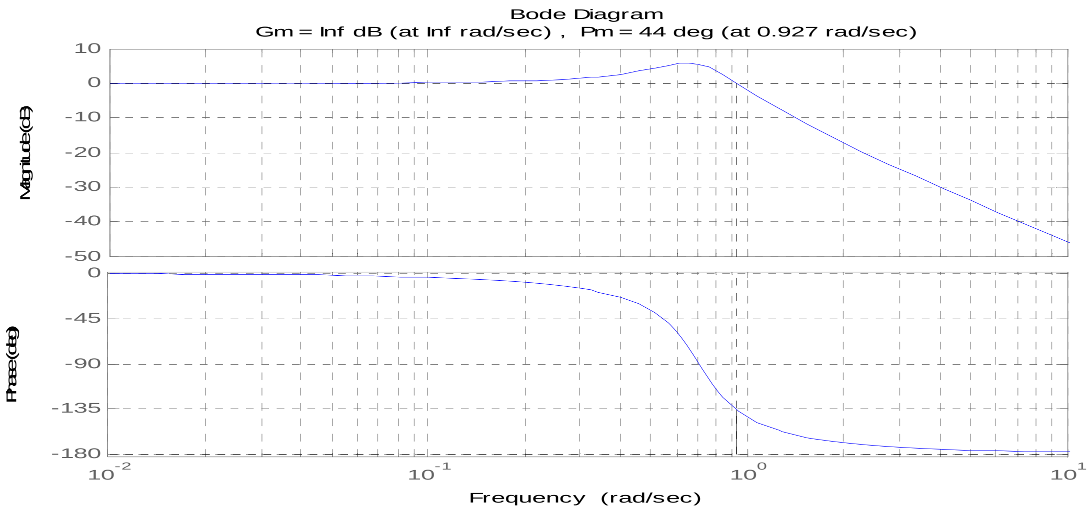


Figure 4.26 : *Diagrammes de Bode illustrant la marge de gain et la marge de phase*

- Système corrigé

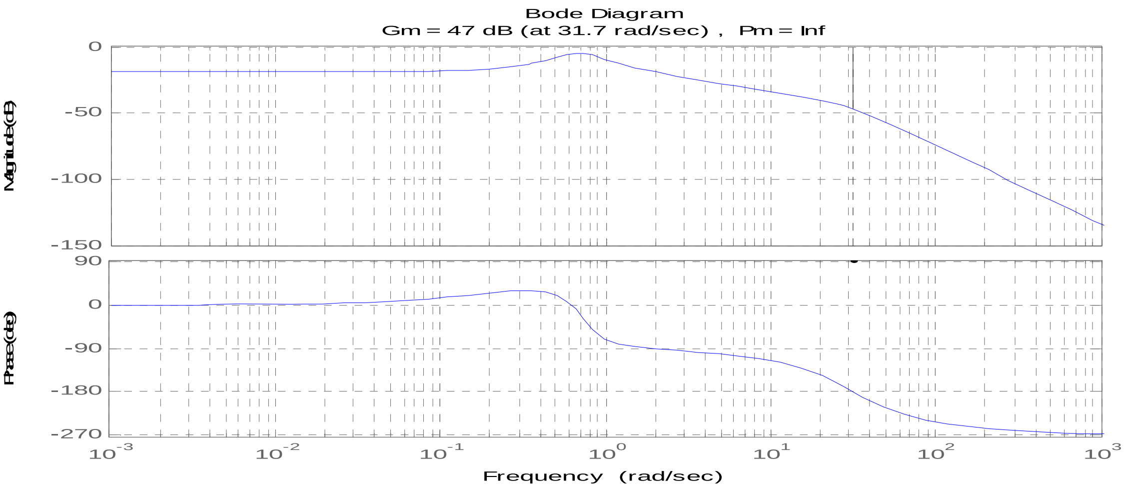


Figure 4.27 : *Diagrammes de Bode illustrant la marge de gain et la marge de phase*

Après correction : nous avons obtenu un système avec une grande marge de phase largement supérieure à 60°. Ce qui justifie encore le bon choix du correcteur K_{PRLQG}.

4.4.2.8 Marge de module

Après calcul, nous avons :

$$\Delta M = 0.9917 \tag{4.33}$$

Soit : $\Delta M > 0.5$. Cette valeur montre que nous avons une conception robuste.

4.4.3 Synthèse PRLQR

La procédure de robustification de la synthèse LQR par la méthode PRLQR utilise des matrices M_c et N issue de la modélisation des incertitudes sur la matrice dynamique $\Delta A(\delta) = M_c \Delta(\delta) N$ (équation 3.14) du chapitre précédent. Cette procédure de robustification peut se résumer de la façon suivante :

- normaliser à 1 les amplitudes de variation paramétrique en pondérant les matrices M_c et N ;
- initialiser γ à une valeur faible ;
- augmenter γ jusqu'à ce que l'équation de Riccati :

$$PA + A^T P + (C^T C + \gamma N_r^T N_r) - P\left(BB^T - \frac{1}{\gamma} M_r M_r^T\right) P = 0 \tag{4.34}$$

  admette une solution P définie positive ;
- calculer le gain $K_c = B^T P$.

Sur cet exemple, nous varions γ de 1, 2, 4, 10 et 100.

Pour γ = 4, on constate que les propriétés de robustesse en performance sont excellentes. Par contre, le gain K_c est très élevé, et il est préférable d'utiliser une valeur intermédiaire γ = 10 comme indiqué dans (3.5.5.1) qui donne des gains raisonnables et une solution tout à fait satisfaisante alors que pour γ = 100 les performances sont très dégradées.

Ainsi, nous allons choisir γ = 10 pour cette synthèse PRLQR.

Comme pour la synthèse PRLQG, pour calculer K_{PRLQR}, il faut tout d'abord calculer le gain de retour d'état K_c et le gain du filtre de Kalman K_f.

4.4.3.1 Gain de retour d'état K_c

Pour γ = 10, nous avons :

$$K_c = [-0.1725 \quad -0.6876 \quad -0.0000 \quad -0.0000] \tag{4.35}$$

4.4.3.2 Correcteur K_{PRLQR}

La fonction de transfert du correcteur K_{PRLQR} obtenu est :

$$K_{PRLQR} = \frac{683.5\ s^3 + 5625\ s^2 + 1264\ s + 1.571}{s^4 + 52.78\ s^3 + 1361\ s^2 + 8025\ s + 10.03} \tag{4.36}$$

Sous forme matricielle, ce correcteur K_{PRLQR} s'écrit :

$$A_{K_2} = \begin{bmatrix} -52.78 & -42.54 & -15.67 & -0.1567 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{K_2} = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{K_2} = [\,21.36 \quad 5.493 \quad 0.07715 \quad 0.0007673\,] \qquad D_{K_2} = 0$$

Ainsi, après avoir obtenu le correcteur K_{PRLQR}, on va faire l'analyse du système de la figure 4.28 suivante :

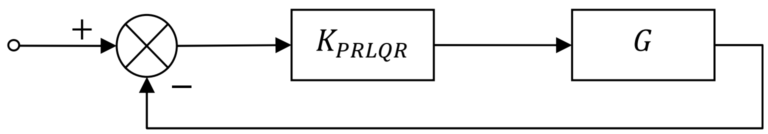


Figure 4.28 : *Système avec correcteur* K_{PRLQR}

4.4.4 Analyse du système avec correcteur K_{PRLQG}

D'après la figure 4.28, la fonction de transfert du système corrigé en boucle ouverte est :

$$L_{c_2}(s) = G(s)K_{PRLQR}(s)$$

tel que :

$$L_{c_2}(s) = \frac{683.5\ s^3 + 5625\ s^2 + 1264\ s + 1.571}{2\ s^6 + 106.3\ s^5 + 2763\ s^4 + 17120\ s^3 + 7400\ s^2 + 8032\ s + 10.03} \tag{4.37}$$

$L_{c_2}(s)$ s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$A_{L_2} = \begin{bmatrix} -53.16 & -43.18 & -16.72 & -1.807 & -1.961 & -0.03918 \\ 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0625 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{L_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{L_2} = [\,0 \quad 0 \quad 0.3337 \quad 0.6866 \quad 0.1543 \quad 0.003069\,] \qquad D_{L_2} = 0$$

Et nous avons successivement pour l'analyse de $L_{c_2}(s)$:

4.4.4.1 Diagrammes de Bode du système nominal et du système corrigé

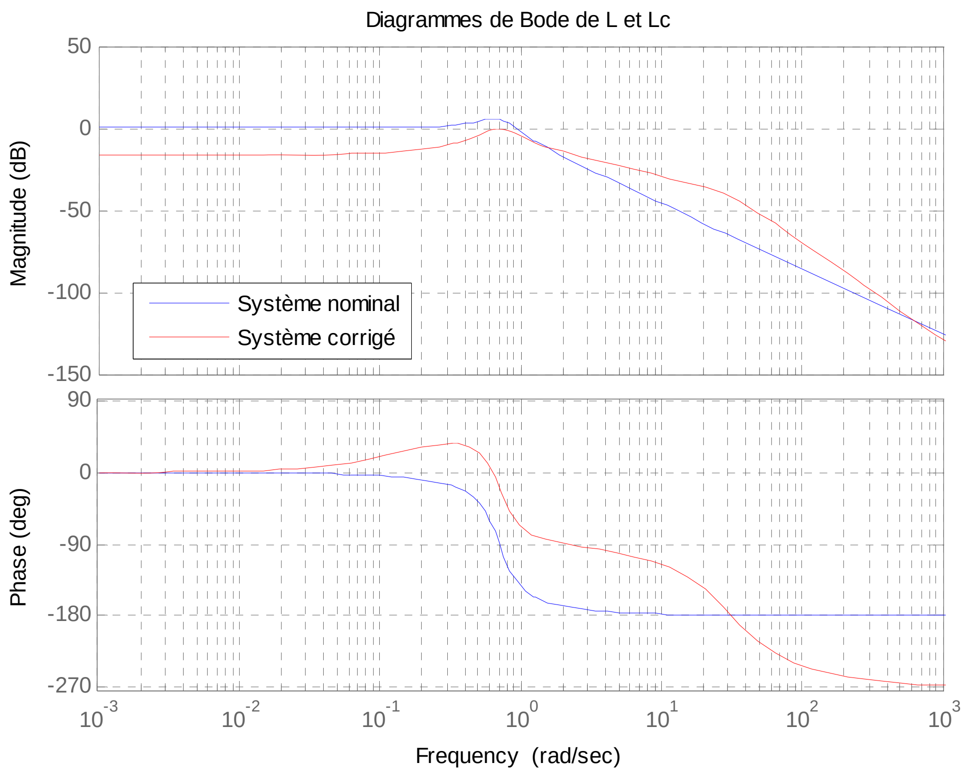


Figure 4.29 : *Diagrammes de Bode du système nominal L et du système corrigé* L_{c_2}

4.4.4.2 Diagramme des valeurs singulières des systèmes : nominal et corrigé

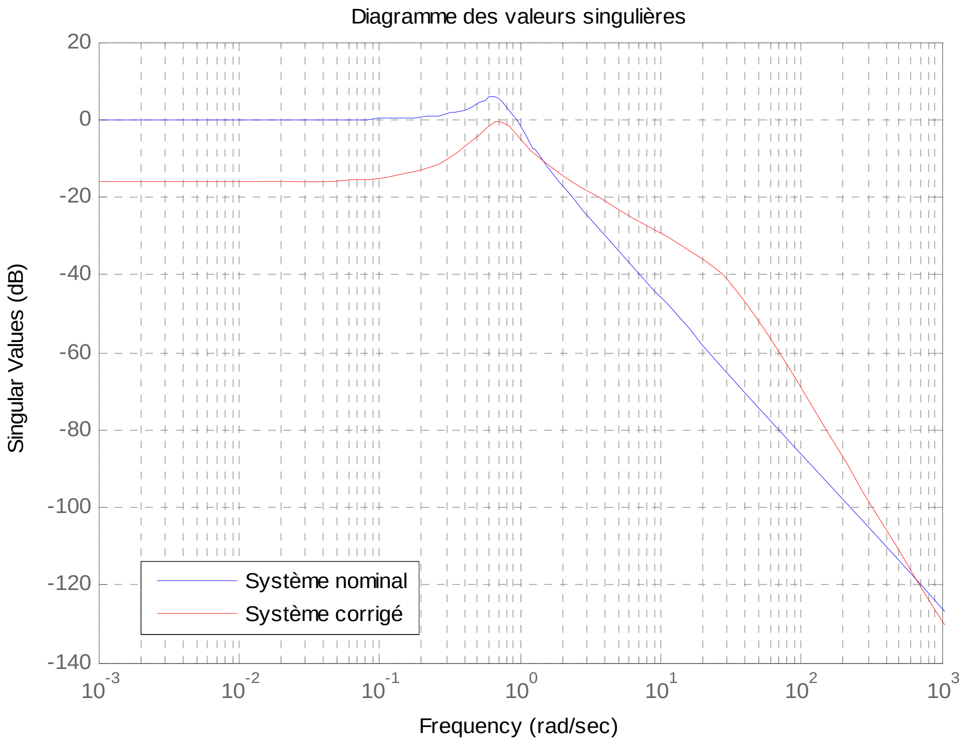


Figure 4.30 : *Diagramme des valeurs singulières (amplitude en dB)*

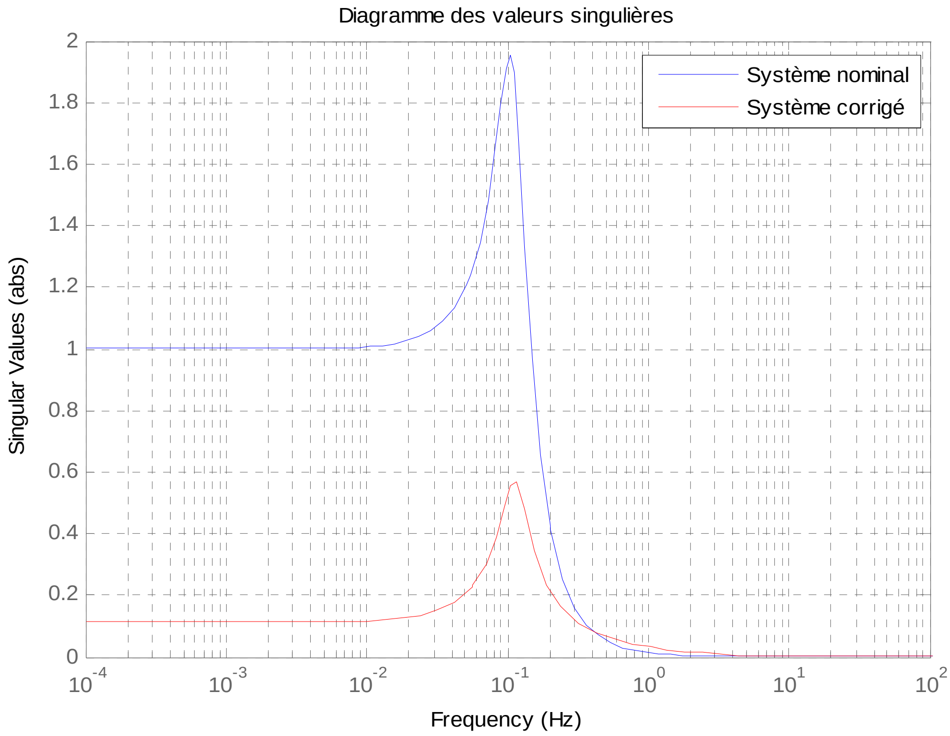


Figure 4.31 : *Diagramme des valeurs singulières (amplitude en abs)*

4.4.4.3 Fonction de sensibilité S_2 et fonction de sensibilité complémentaire T_2

- Diagrammes de Bode :

Nous avons :

$$M_{S_2} = \|S_2\|_\infty = 1.0143 < 2 \text{ (6 dB)} \tag{4.38}$$

et $$M_{T_2} = \|T_2\|_\infty = 0.4999 < 1.25 \text{ (2 dB)}$$

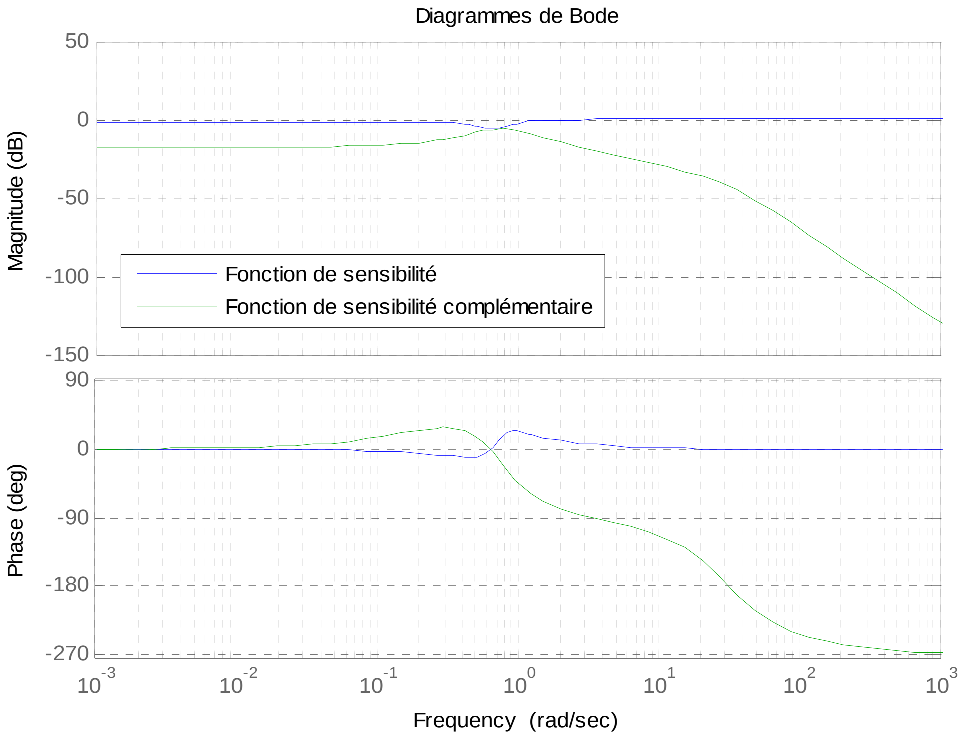


Figure 4.32 : *Diagrammes de Bode de S_2 et T_2*

- Fonction de transfert :

Fonction de sensibilité S_2 :

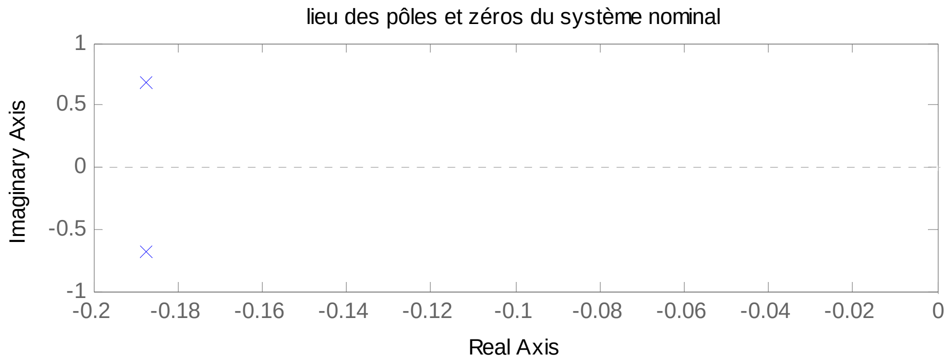
$$S_2(s) = \frac{2\,s^6 + 106.3\,s^5 + 2763\,s^4 + 17120\,s^3 + 7400\,s^2 + 8032\,s + 10.03}{2\,s^6 + 106.3\,s^5 + 2763\,s^4 + 17810\,s^3 + 13020\,s^2 + 9296\,s + 11.6}$$

Fonction de sensibilité complémentaire T_2 :

$$T_2(s) = \frac{683.5\,s^3 + 5625\,s^2 + 1264\,s + 1.571}{2\,s^6 + 106.3\,s^5 + 2763\,s^4 + 17810\,s^3 + 13020\,s^2 + 9296\,s + 11.6}$$

En calculant $S_2 + T_2$, nous avons trouvé que : $S_2 + T_2 \approx I$

4.4.4.4 Lieu des pôles et lieu des zéros



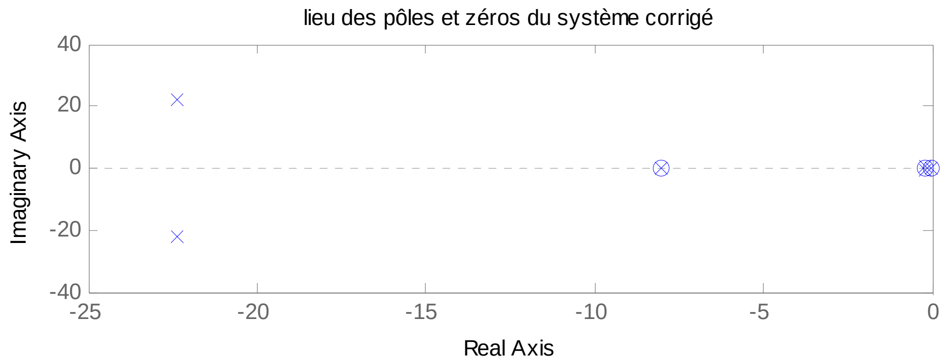


Figure 4.33 : *Pôles et zéros de L et* L_{c_2}

Soit :

Valeur	Système nominal		Système corrigé	
	Pôles	Zéros	Pôles	Zéros
- 0.1875 + 0.6818 i	*		*	
- 0.1875 - 0.6818 i	*		*	
- 7.9987			*	*
- 0.2299				*
- 0.0013			*	*
-22.3903 + 22.3996 i			*	
-22.3903 - 22.3996 i			*	

Tableau 4.02: *Les pôles et les zéros du système nominal et perturbé*

En considérant les pôles dominants du système corrigé, on ne prend que : - 0.1875 $\pm$ 0.6818 i et - 0.0013.

4.4.4.5 Réponses impulsionnelles des systèmes

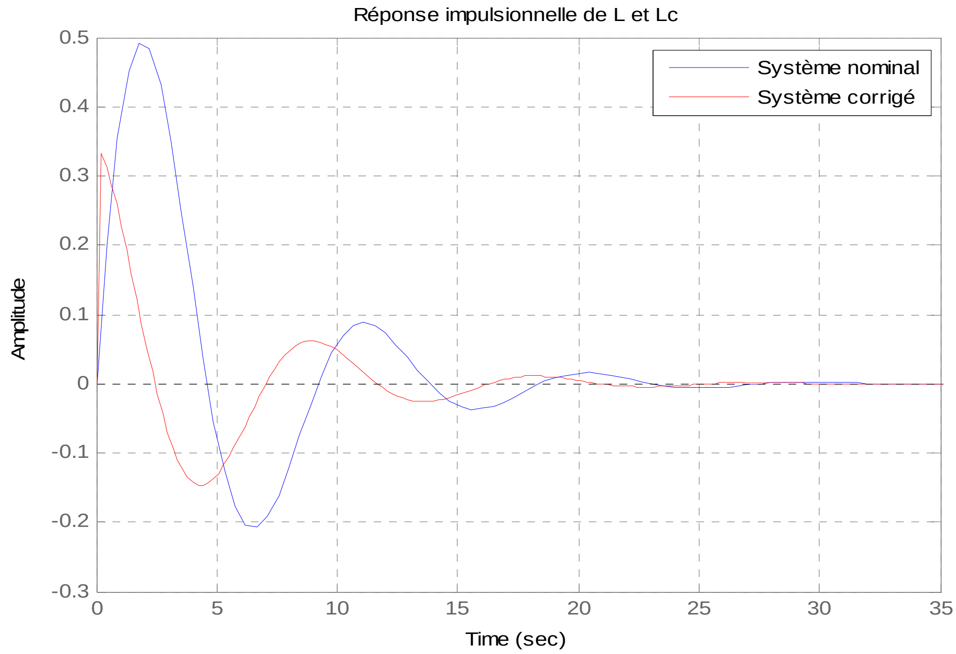


Figure 4.34 : *Réponses impulsionnelles de L et L_{c_2}*

4.4.4.6 Réponses indicielles des systèmes

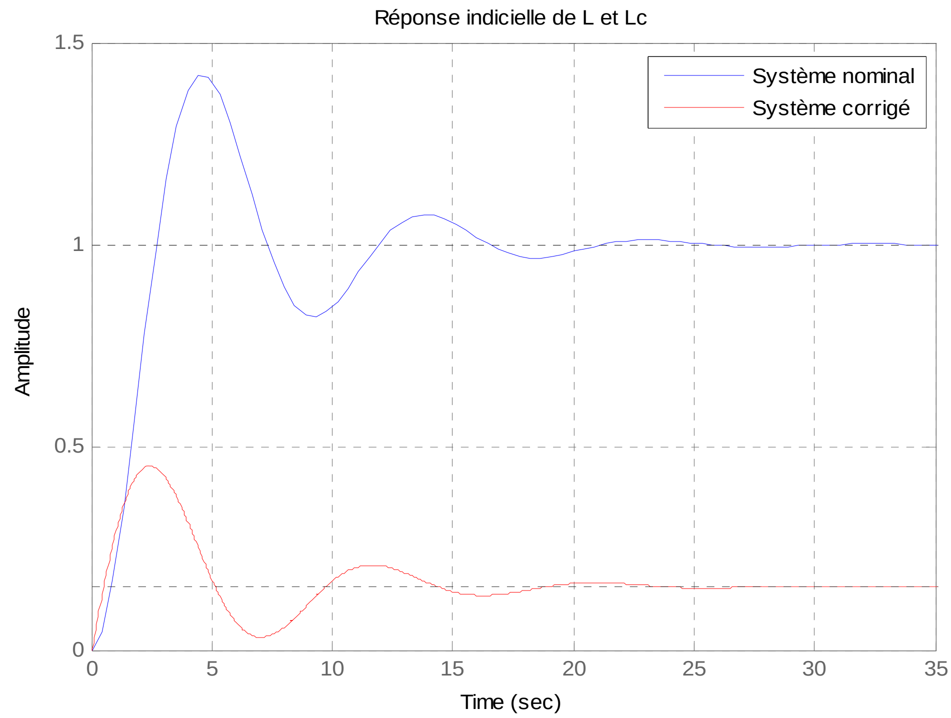


Figure 4.35 : *Réponses indicielles de L et L_{c_2}*

4.4.4.7 Marge de gain et marge de phase

- Système nominal

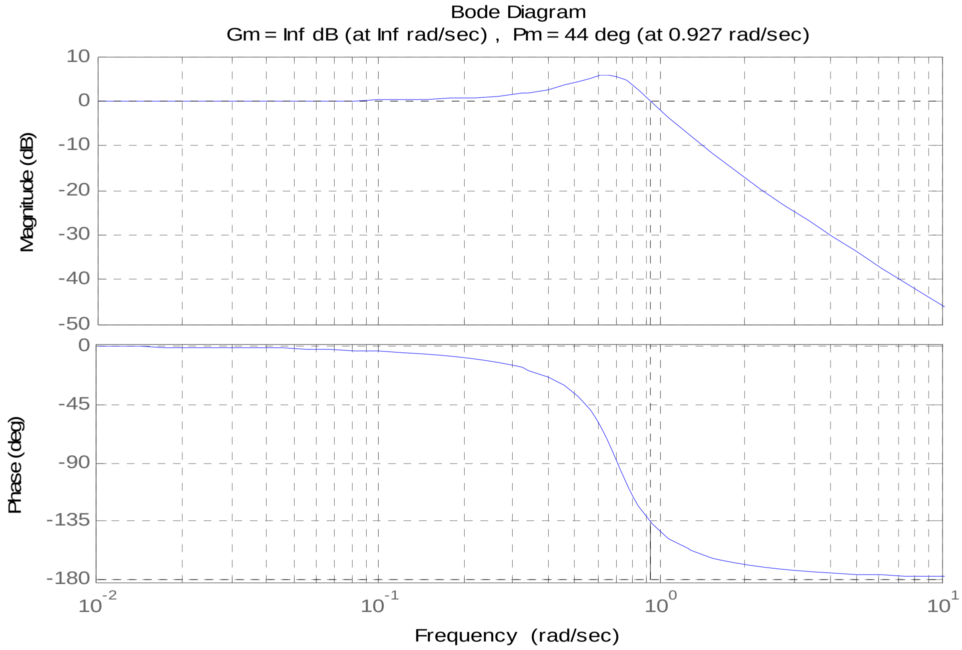


Figure 4.36 : *Diagrammes de Bode illustrant la marge de gain et la marge de phase*

- Système corrigé

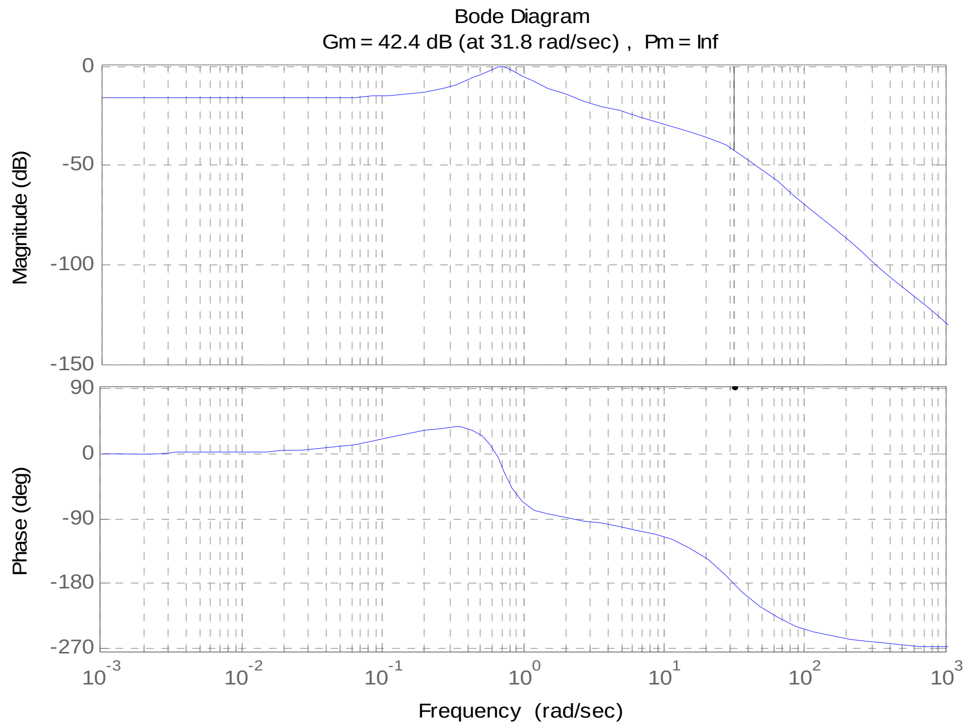


Figure 4.37 : *Diagrammes de Bode illustrant la marge de gain et la marge de phase*

4.4.4.8 Marge de module

Après calcul, nous avons :

$$\Delta M = 0.9859 \tag{4.39}$$

Résumé de la synthèse PRLQR

$L_{c_2}(s) = G(s)K_{PRLQR}(s)$

- valeurs singulières < 1
- temps de réponse de L_{c_2} < temps de réponse de L : le système devient plus performant
- temps de montée de L_{c_2} < temps de montée de L : le système devient plus rapide
- dépassement (%) de L_{c_2} est inférieur à celui de L
- L_{c_2} se stabilise plus rapidement
- $M_{S_2} = \|S_2\|_\infty = 1.0143 < 2$ (6 dB) et $M_{T_2} = \|T_2\|_\infty = 0.4999 < 1.25$ (6 dB)
- $S_2 + T_2 \approx I$
- $\Delta M = 0.9859 > 0.5$ (abs)
- $\Delta\varphi$ largement supérieur à 60°

Ainsi : le choix du correcteur K_{PRLQR} permet d'obtenir un système performant, stable et robuste.

Remarquons enfin que : $amplitude(L_{c_1}) < amplitude(L_{c_2})$.

4.5 Conclusion

Nous avons pu présenter les synthèses PRLQG et PRLQR à l'aide de cet exemple de système linéaire du second ordre. Et nous avons démontré que les correcteurs conçus avec ces deux méthodes de synthèse basées sur les techniques linéaires quadratiques nous permettent d'obtenir des systèmes stables, performants et robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Nous avons bien remarqué les différences entre le système nominal et le système corrigé. Ceci montre l'avantage des synthèses PRLQG et PRLQR par rapport aux synthèses LQ classiques.

Mais entre les deux correcteurs conçus K_{PRLQG} et K_{PRLQR}, les systèmes corrigés $L_{c_1} = K_{PRLQG}G$ et $L_{c_2} = K_{PRLQR}G$ présentent aussi une petite différence. D'après les résultats obtenus (courbes et valeurs numériques), nous observons que le système corrigé par K_{PRLQG} présente plus d'avantages par rapport à celui corrigé par K_{PRLQR}.

CONCLUSION GENERALE

La théorie de la « commande robuste » des systèmes linéaires a connu un essor remarquable durant ces dix dernières années. Sa popularité gagne aujourd'hui le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l'analyse et la conception des systèmes asservis.

Pour apprécier l'originalité et l'intérêt des outils de « commande robuste », rappelons qu'un asservissement a deux fonctions essentielles : façonner la réponse du système asservi pour lui imprimer le comportement désiré et maintenir ce comportement face aux aléas et fluctuations qui affectent le système pendant son fonctionnement (rafales de vent pour un avion, usure pour un système mécanique,…). La seconde exigence est qualifiée de « robustesse à l'incertitude ». Elle revêt une importance critique pour la fiabilité du système asservi. En effet, l'asservissement est typiquement conçu à partir d'un modèle idéalisé et simplifié du système réel. Pour fonctionner correctement, il doit donc être robuste aux imperfections du modèle, c'est-à-dire aux écarts entre le modèle et le système réel, aux dérives des paramètres physiques, et aux perturbations externes.

Dans une certaine mesure, la théorie de la « commande robuste » réconcilie l' « automatique classique » à dominante fréquentielle (bode, nyquist, P.I.D) et l' « automatique moderne » à dominante variables d'état (commande Linéaire Quadratique, Kalman).

A travers ce mémoire, nous avons pu décrire les éléments de bases d'automatique nécessaires à l'analyse des systèmes linéaires multivariables et les commandes optimales avec la synthèse linéaire quadratique gaussienne. Et nous avons vu que les synthèses classiques de type LQ n'assurent pas explicitement une robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques, mais plutôt une robustesse de nature fréquentielle. Même la synthèse LQG/LTR, connue pour recouvrer les garanties de marges de stabilité d'un régulateur LQR ou d'un filtre de Kalman, ne donne aucune garantie de robustesse paramétrique à la stabilité. L'approche s'appuyant sur des considérations asymptotiques. Ainsi, nous avons pu voir comment robustifier les synthèses LQ classiques pour avoir des synthèses PRLQ robustes vis-à-vis de ces incertitudes paramétriques.

Dans le dernier chapitre, nous avons simulé un processus linéaire du second ordre avec trois incertitudes paramétriques et une incertitude non structurée de forme additive directe. L'ensemble constitue un système linéaire multivariable.

Les résultats de simulations réalisées montrent un comportement très satisfaisant de la commande et de l'observateur.

Grâce aux avantages des techniques PRLQ apportées pour améliorer les synthèses LQ classiques, il est bien intéressant de les exploiter en les appliquant à tout système physique sensible aux perturbations et aux variations incertaines surtout les grands systèmes comme avion, satellite de télécommunication... Une nouvelle voie très intéressante aussi s'ouvre sur l'application de ces méthodes à des systèmes linéaires à temps discret en D-stabilité. Enfin, la combinaison de ces synthèses avec des synthèses fréquentielles comme la μ-synthèse s'avère très intéressante et indispensable.

ANNEXE 1
ELEMENTS DE THEORIE DE LYAPUNOV SUR LA STABILITE

A1.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{A1.01}$$

Définition A1.01 : Point d'équilibre

Un vecteur $x_e \in \mathbb{R}^n$ est dit point ou état d'équilibre si :

$$f(x_e) = 0$$

Remarque : Tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable $x \leftarrow x - x_e$. Les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant : $x_e = 0$.

Définition A1.02 : Stabilité locale simple et asymptotique

L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système (A1.01) est :

- *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r = r(\varepsilon)$, tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \;\; => \;\; \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > 0 \tag{A1.02}$$

- *instable*, si non stable,

- *asymptotiquement stable*, s'il est stable et si r peut être choisi tel que :

$$\|x(t=0)\| < r \;\; => \;\; \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{A1.03}$$

- *marginalement stable*, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Physiquement, la stabilité au sens de Lyapunov garantit que la trajectoire $x(t)$ dans l'espace d'état restera à l'intérieur de la boucle $\mathcal{B}(x_e, \varepsilon)$ si son point de départ appartient à une boucle $\mathcal{B}(x_e, r)$. La stabilité asymptotique inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée dans la boucle $\mathcal{B}(x_e, r)$ converge vers x_e.

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

Définition A1.03 : Stabilité asymptotique globale

Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial $x(t = 0)$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.

A1.2 Fonctions de Lyapunov

Définition A1.04 : Fonction définie positive

Une fonction scalaire $U(x)$ continuement différentiable (par rapport à x) est dite *définie positive* dans une région Ω autour de l'origine si :

(1) $U(0) = 0$,

(2) $U(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega$ / $x \neq 0$.

si (2) est remplacée par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite *définie semi-positive*.

Définition A1.05 : Fonction quadratique définie positive

La fonction *quadratique* $U(x) = x^T Q x$, où $Q_{n\times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite *définie positive* si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n\times n}$ sont strictement positives.
Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonctions de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

A1.3 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuement (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La méthode directe cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème A1.01 : Stabilité locale

L'état d'équilibre $x_e = 0$ est *stable* si il existe une fonction continuement dérivable $U(x)$ telle que :

(1) $U(0) = 0$,

(2) $U(x) > 0 \ \forall \mathrm{x} \neq 0, x \in \Omega$,

(3) $\dot{U}(x) \leq 0 \ \forall \mathrm{x} \neq 0, x \in \Omega$.

où $\dot{U}$ est la dérivée de U par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{U}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

La fonction $U(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. Les formes quadratiques sont les plus utilisées, notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif).

Théorème A1.02 : Stabilité globale

L'état d'équilibre $\boldsymbol{x_e}$ est *globalement asymptotiquement stable* si il existe une fonction continuement dérivable $\boldsymbol{U(x)}$ telle que :

(1) $U(0) = 0$,

(2) $U(x) > 0 \ \forall \mathrm{x} \neq 0$,

(3) $\dot{U}(x) \leq 0 \ \forall \mathrm{x} \neq 0$,

(4) $\dot{U} \rightarrow \infty \quad quand \quad \|x\| \rightarrow \infty$.

A1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{A1.04}$$

alors le système est *globalement asymptotiquement stable* (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives, soit :

$$R_e\big(\lambda_i(A)\big) < 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Théorème A1.03 : Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires

Le système linéaire (A1.04) est *asymptotiquement stable* (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q, il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'´equation de Lyapunov :

$$A^T P + PA + Q = 0 \tag{A1.05}$$

Démonstration de la condition suffisante :

Considérons la fonction de Lyapunov candidate :

$$U(x) = x^T P x$$

alors :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P A x + x^T A^T P x \\ &= x^T (PA + A^T P) x \end{aligned}$$

Soit Q une matrice définie positive, si P est solution positive de (A1.05) alors :

$$U(x) > 0 \ \ \forall \, \mathrm{x} \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{U}(x) = -x^T Q x \ \ \text{==>} \quad \dot{U}(x) < 0 \quad \forall \, \mathrm{x} \neq 0 \, .$$

Donc, d'après le théorème général, le système est asymptotiquement stable. ◻

Démonstration de la condition nécessaire :

Pour un couple (A, Q) quelconque donné, l'équation (A1.05) d'inconnue P peut ne pas admettre une solution unique. Mais si A est stable alors l'équation de Lyapunov admet une solution unique :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt \tag{A1.06}$$

En effet :

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt \\ &= -Q \end{aligned} \tag{A1.07}$$

car $e^{At} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ si A est stable. ◻

ANNEXE 2
SYNTHESE H_∞ ET μ-SYNTHESE
DES SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

A2.1 Synthèse H_∞

La synthèse H_∞ des systèmes linéaires à temps continu propose un cadre général pour le calcul d'un correcteur, en manipulant des concepts fréquentiels. Elle permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, de marges de stabilité et de modelage de différentes matrices de transfert.

A2.1.1 Problème H_∞ standard

L'objectif principal de la synthèse H_∞ des systèmes linéaires à temps continu est d'assurer la stabilité de la boucle fermée ainsi qu'un certain degré de performance, mais aussi de réduire la sensibilité de la structure de commande en présence de variations paramétriques et d'éventuelles perturbations affectant le modèle du système à commander.

A2.1.2 Définition A2.01

La synthèse H_∞ des systèmes linéaires à temps continu est définie par le *problème H_∞ optimal* suivant :

> $P(s)$ étant donné, minimiser $\|F_l(P,K)\|_\infty$ sur l'ensemble des correcteurs $K(s)$ qui stabilisent le système bouclé de manière interne.

A2.1.3 Définition A2.02

La synthèse H_∞ des systèmes linéaires à temps continu est définie par le *problème H_∞ sous optimal* suivant :

> $P(s)$ et $\gamma \succ 0$ étant donnés, trouver un correcteur $K(s)$ qui stabilisent le système bouclé de manière interne et qui minimise $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$.

Les correcteurs assurant la plus petite valeur possible de γ seront dits optimaux ou centraux.
Le minimum de γ est noté γ_o et appelé gain ou atténuation $H_\infty -$ optimal.

A2.1.4 Résolution du problème H_∞

A2.1.4.1 Introduction

Nous présentons dans ce paragraphe les techniques de résolution par variable d'état des problèmes H_∞ optimaux et sous optimaux. Différentes méthodes peuvent être envisagées pour résoudre le problème H_∞ standard utilisant la représentation d'état et la matrice d'interconnexion $P(s)$ par :

- l'approche de l'équation algébrique matricielle de Riccati (AMRE);

- le formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI) conduisant à des problèmes convexes.

Nous présentons ci-dessous l'approche par l'équation algébrique matricielle de Riccati, dans laquelle la valeur optimale de γ est recherchée par dichotomie (algorithme de Glover, Doyle).

A2.1.4.2 Résolution du problème H_∞ standard par l'équation de Riccati

On considère le processus augmenté $P(s)$ définie par :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + (sI - A)^{-1}[B_1 \quad B_2] \tag{A2.01}$$

Cette équation est associée à la description interne suivante :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{w} + B_2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{z} = C_1\boldsymbol{x} + D_{11}\boldsymbol{w} + D_{12}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C_2\boldsymbol{x} + D_{21}\boldsymbol{w} + D_{22}\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{A2.02}$$

$D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$, $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$ avec $m_1 \geq p_2$ et $p_1 \geq m_2$. Enfin n désignera la dimension de la matrice d'évolution d'état A, c'est-à-dire, l'ordre du processus augmenté $P(s)$. La solution par variable d'état n'est applicable que si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

Hypothèses :

H1 : (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable.

H2 : Les matrices D_{21} et D_{12} sont de rang plein.

H3 : Pour tout $\omega \in R$, $rang\left(\begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}\right) = n + m_2$ (A2.03)

et $rang\left(\begin{bmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{bmatrix}\right) = n + p_2$ (A2.04)

H4 : $D_{12}^T(D_{12,}C_1) = (I,0)$ et $D_{21}(D_{21}^T, B_1^T\ ) = (I,0)$

H5 : $D_{22} = 0$ et $D_{11} = 0$

Ces deux dernières hypothèses sont des hypothèses simplificatrices de normalisation.

Théorème 2.01 : Dans l'hypothèse *H1* à *H5*, le correcteur $K(s)$ stabilise le système de manière interne et assure $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si :

Les équations de Riccati ont des solutions stabilisantes X_∞ et Y_∞:

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \qquad \text{(A2.05)}$$

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0 \qquad \text{(A2.06)}$$

Ces solutions vérifient :

$$X_\infty \geq 0 \qquad Y_\infty \geq 0 \qquad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \qquad \text{(A2.07)}$$

Les conditions de positivité (2.07) assurent une stabilité interne du système linéaire.

L'existence de solutions stabilisantes traduit la contrainte : $\|F_l(P,K)\|_\infty < \gamma$.

Et que si $K(s) = D_K + C_K(I - A_K)^{-1}B_K$ est une réalisation minimale du correcteur, la matrice d'état du système est :

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix} \qquad \text{(A2.08)}$$

Et la stabilité interne est équivalente à la stabilité A_{BF}.

A2.2 µ-synthèse

La μ-synthèse consiste en la construction explicite d'un compensateur $K(s)$ minimisant la valeur singulière structurée du système. Il s'agit donc d'une technique de commande robuste qui s'appuie sur l'outil d'analyse que nous venons d'introduire. Pour calculer la valeur de μ en utilisant la borne supérieure que nous avons définie précédemment.

A2.2.1 Définition A2.03

La μ-synthèse est la minimisation, à travers tous les contrôleurs stabilisants $K(s)$, de la valeur du pic de $\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta\big(F_l(P,K)\big)$:

$$\min_{K(s)} \left[\max_{\omega} [\mu_{\Delta}(F_l(P,K))] \right] < 1 \qquad \text{(A2.09)}$$

La μ-synthèse s'effectue au fait au moyen du processus itératif D-K itération. Il existe des matrices D (multiplieurs), telles que $\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1})$. Le processus consiste à effectuer une synthèse H_{∞} sur $(D(j\omega)M(j\omega)D^{-1}(j\omega))$ plutôt que sur $M(j\omega)$ où les matrices D et K sont alternativement optimisées pour minimiser μ. A chaque pas le contrôleur est augmenté à cause de l'addition des multiplieurs.

3.1.1.2 *Définition A2.04*

Soit $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice complexe de mêmes dimensions que la matrice d'incertitude $\Delta(s)$. La valeur singulière structurée de la matrice M relative à l'ensemble $\underline{\Delta}$ est définie par :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) = \frac{1}{\min\left\{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \underline{\Delta}, \det[I - M\Delta] = 0 \right\}} \qquad \text{(A2.10)}$$

Si aucune matrice $\Delta \in \underline{\Delta}$ ne rend $[I - M\Delta]$ singulière, alors $\mu_{\underline{\Delta}}(M) = 0$.

D'après cette définition, $\mu_{\underline{\Delta}}(M)^{-1}$ est donc la valeur minimale de la norme de la matrice $\Delta \in \underline{\Delta}$ qui rend $[I - M\Delta]$ singulière. Il est important de remarquer qu'une valeur singulière structurée dépend à la fois de la matrice M et de la structure $\underline{\Delta}$ envisagée.

ANNEXE 3
NOTIONS PRELIMINAIRES SUR
LA COMMANDE MODERNE MULTIVARIABLE

Tout système dynamique contrôlé par rétroaction (feedback), aussi complexe soit-il, peut être catalogué comme étant contrôlé, soit par retour de sortie (avec ou sans observateur), soit par retour d'état. Le contrôleur de ce système, lui, peut être catalogué comme étant soit un régulateur, soit un suiveur. De plus, il peut être utile d'envisager une structure de contrôle à deux degrés de liberté (2DDL), c'est à dire faisant intervenir aussi un pré-compensateur (feedforward). Cette annexe définit ces termes tout en expliquant sommairement les avantages, les inconvénients et l'utilité de ces diverses structures.

A3.1 Schéma-bloc d'un système linéaire multivariable

Un système linéaire est représenté sous forme d'équations d'état par le système d'équations (A3.01) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\,\boldsymbol{x} + B\,\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\,\boldsymbol{x} + D\,\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{A3.01}$$

L'objectif général de la conception d'un contrôleur pour ce système est de déterminer $K(s)$ tel que le système en boucle fermée (composé du contrôleur et du processus) représenté sur la figure A3.01 respecte des critères de stabilité et de performances. Le plus souvent, le système subit des perturbations représentées par le vecteur d et ses capteurs sont bruités. On représente les bruits de mesure par le vecteur n.

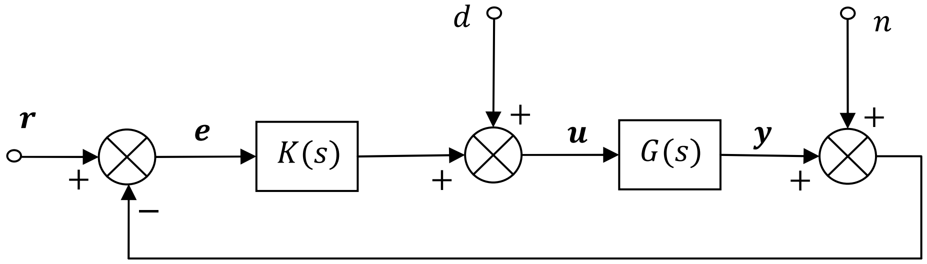


Figure A3.01 : *Schéma-bloc du contrôle d'un système linéaire MIMO*

Avec :

$\boldsymbol{r}$: consigne	$\boldsymbol{d}$: perturbation	$\boldsymbol{y}$: sortie
$\boldsymbol{e}$: erreur	$\boldsymbol{u}$: commande	$\boldsymbol{n}$: bruit de mesure

Définition A3.01 (processus) : *Le processus est le système dynamique que l'on désire contrôler.*

Sur la figure A3.01, le processus est représenté par le bloc $G(s)$.

Définition A3.02 (contrôleur) : *Le contrôleur est le système dynamique ajouté par le concepteur pour asservir le processus.*

Sur la figure A3.01, le contrôleur est représenté par le bloc $K(s)$.

A3.2 Gouvernabilité et observabilité

Définition A3.03 (gouvernabilité) : *Un système multivariable d'équations (A3.01) est gouvernable par retour d'état à un temps t_0 s'il est possible de transférer son état initial $x(t_0)$ vers n'importe quel autre état final $x(t_f)$ pendant un intervalle de temps fini $t_f - t_0 < \infty$ en agissant de façon appropriée sur les entrées e du système.*

En d'autres mots, dans un système gouvernable, les entrées u peuvent agir de façons indépendantes sur tous les états ; c'est-à-dire que la position de chaque pôle du système peut être modifiée dans le plan complexe.

La stabilisabilité est une notion moins forte que la gouvernabilité :

Définition A3.04 (stabilisabilité) : *Un système multivariable d'équations (A3.01) est stabilisable si on peut déplacer ses pôles instables dans le plan complexe. Les états non gouvernables sont tous stables.*

Les notions duales de la gouvernabilité et de la stabilisabilité sont l'observabilité et la détectabilité.

Définition A3.05 (observabilité) : *Un système multivariable d'équations (A3.01) est observable si n'importe quel état $x(t_0)$ à t_0 peut être déterminé par l'observation (la mesure) de la sortie y(t) pendant un intervalle de temps fini $t_0 \leq t \leq t_f$.*

L'observabilité réfère à la capacité d'estimer les états d'un système à travers ses sorties.

Définition A3.06 (détectabilité) : *Un système multivariable d'équations (A3.01) est détectable si ses modes instables sont observables.*

Cette définition est équivalente à dire qu'un système est détectable si tous les états non observables sont stables.

A3.3 Structures d'asservissement des systèmes dynamiques linéaires

A3.3.1 Observateur

Bien souvent, le nombre de sorties (donc de capteurs) d'un processus à contrôler est inférieur au nombre d'états de celui-ci. Si le système est observable, il est possible d'avoir recours à un observateur pour estimer les états à partir des sorties.

Définition A3.07 (observateur) : *Un observateur est un système dynamique d'équation (A3.02) dont les entrées sont les signaux de commande et de sorties du système observé et dont les sorties sont les variables d'état estimées du système observé. L'observateur minimise la différence entre* y *et* $\hat{C}\hat{x}$.

L'équation mathématique de ce système est :

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} + K_e(y - \hat{C}\hat{x}) \quad \text{(A3.02)}$$

L'observateur comporte un système dynamique qui modélise le système réel. Ce système dynamique caractérisé par les matrices $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ est déterminé par le concepteur. Dans l'équation (A3.02), $\hat{x}$ est le vecteur d'état estimé à partir des mesures y. La matrice de gain K_e est choisie de façon à minimiser l'erreur $x - \hat{x}$.

A3.3.2 Régulation et poursuite

Nous définissons ici deux structures de contrôleurs : le régulateur et le suiveur, qui répondent à deux objectifs bien différents de contrôle. En effet, les objectifs de contrôle ne sont pas les mêmes pour tous les systèmes. Pour certains systèmes, l'erreur en régime permanent entre une consigne et une sortie n'est pas un critère important. Ce qui est important, c'est que le système soit peu perturbé par une perturbation externe. Dans ce cas, seul l'aspect transitoire de la réponse du système a de l'importance et l'erreur en régime permanent n'est pas considérée. Ce type de contrôle est appelé « régulateur » et on peut le définir comme suit :

Définition A3.08 (régulateur) : *Un régulateur est un système dynamique qui maintient son point d'opération peu importe les perturbations qui lui sont appliquées.*

Le schéma-bloc de la figure A3.03 présente un régulateur par retour d'états. Dans ce schéma-bloc, le contrôleur se réduit à une matrice de gains, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition A3.09 (correcteur) : *Un correcteur est la matrice de gain à laquelle se réduit le contrôleur d'un régulateur par retour d'état.*

Pour les régulateurs par retour d'état, le contrôleur n'a pas de dynamique interne, il n'est qu'un correcteur c'est-à-dire une matrice de gain et on peut considérer que ce type de contrôle est un proportionnel généralisé. Cependant, certains états d'un système sont bien souvent, soit la dérivée, soit l'intégrale d'un autre état. Donc, quoi qu'il n'y ait pas de bloc spécifique d'intégration ou de dérivation, ces deux actions peuvent être implicites.

Pour d'autres systèmes, il est important que des sorties spécifiques du système (sorties de performances) suivent de manière très précise des consignes. Cela implique une réponse temporelle performante en régime transitoire, mais aussi en régime permanent où l'erreur doit être (idéalement) nulle. Le type de contrôleur nécessaire est alors un « suiveur » et on peut le définir comme suit :

Définition A3.10 (suiveur) : *Un suiveur est un système dynamique qui poursuit une consigne peu importe ses variations.*

L'algorithme de contrôle d'un suiveur est plus complexe que celui d'un régulateur, puisqu'en plus d'une boucle de retour interne identique à celle du régulateur, une boucle externe permet la comparaison des sorties de performances et des consignes. Les signaux d'erreurs sont traités par un compensateur avant d'être comparés à la boucle interne pour donner le signal de commande. Le schéma-bloc de la figure A3.02 présente ce type de contrôleur. Le contrôleur d'un suiveur est donc composé de deux sous-systèmes : un correcteur sur la boucle interne et un compensateur sur la boucle externe. Nous donnons maintenant la définition du terme « compensateur » :

Définition A3.11 (compensateur) : *Un compensateur est un système dynamique placé sur la boucle externe d'un suiveur. C'est une partie du contrôleur.*

La dynamique du compensateur est aussi complexe que le concepteur le souhaite pour que le système complet en boucle fermée ait les critères de stabilité et de performance désirés.

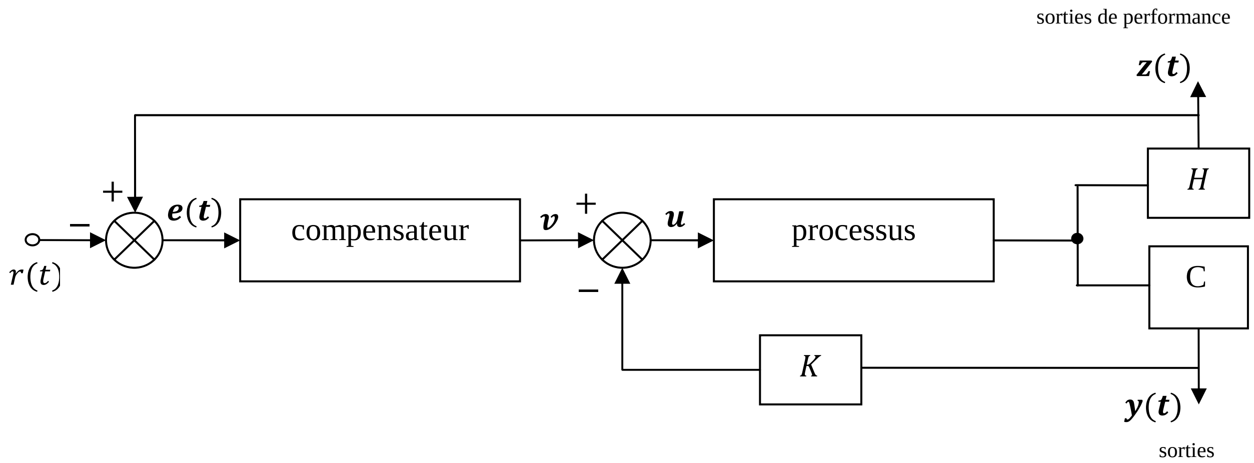


Figure A3.02 : *Schéma-bloc d'un « suiveur » par retour de sortie*

A3.4 Retour d'états

Le contrôle par retour d'états est défini de la manière suivante :

Définition A3.12 (contrôle par retour d'états) : *Le contrôle par retour d'états est le cas où tous les états sont parfaitement mesurés (la matrice C est une matrice identité de dimension $n \times n$) et servent tous d'entrées au contrôleur :* $u = -K(s)x$.

Le schéma-bloc de la figure A3.03 illustre un tel contrôleur. On constate, en effet, sur ce schéma que la boucle de rétroaction est directement connectée aux états du système dynamique à contrôler.

Pour effectuer un tel contrôle, le processus doit être gouvernable et bien sûr tous les états doivent être disponibles.

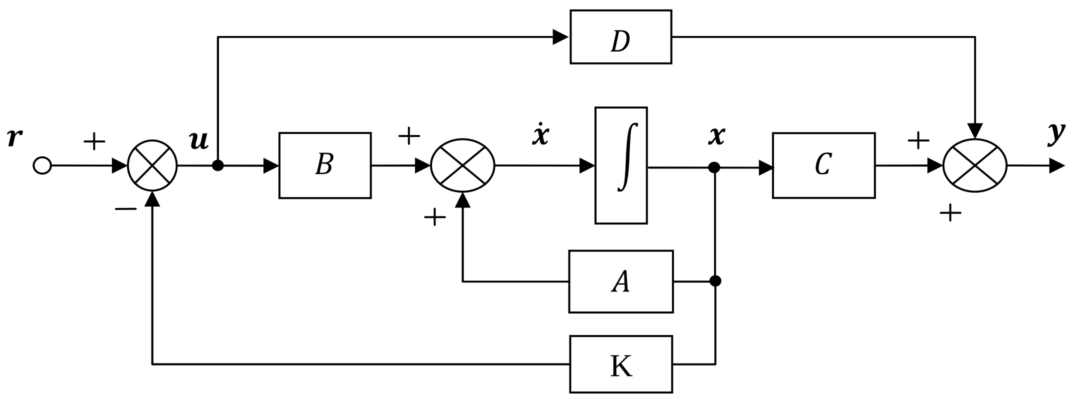


Figure A3.03 : *Schéma-bloc d'un régulateur par retour d'état*

A3.5 Retour de sorties

Pour un système complexe, le nombre d'états du système peut être très grand. Il est impossible d'avoir des capteurs mesurant tous les états. Il faut donc effectuer un contrôle à partir des mesures partielles des états fournis par les sorties du système à contrôler.

Définition A3.13 (contrôle par retour de sortie) : *Un contrôleur où les signaux de sorties du système à contrôler sont les entrées du contrôleur est un contrôle par retour de sorties.*

Ce cas général est présenté sur la figure A3.01. En effet, sur cette figure, si on néglige la consigne r, le bruit n et la perturbation d, alors $u = -K(s)y$, et les signaux de commandes sont fonction des signaux de sorties. On dispose alors de deux manières de faire ce contrôle par retour de sortie :

- Le retour de sortie sans observateur. Dans ce cas, la dynamique du contrôleur vient d'un éventuel compensateur et s'il n'y a pas de compensateur, alors le contrôleur se réduit à un correcteur et $u = -Ky$. Le retour de sortie n'est applicable que si le processus est stabilisable par retour de sortie, c'est-à-dire seulement s'il est possible de trouver une matrice de gain K telle que $(A - BKC)$) soit stable ; où les matrices A, B et C sont les matrices de l'équation d'état du processus à contrôler.
- Le retour de sortie avec observateur. Si le processus est observable, alors il est possible d'estimer les états du système avec un observateur. De plus, si le système est gouvernable, il devient possible d'effectuer un contrôle par retour d'état à partir des états estimés. Le schéma-bloc de la figure A3.04 présente ce type de régulateur par retour de sortie avec observateur.

Remarquons que pour les régulateurs, la dynamique du contrôleur est entièrement liée à l'observateur. Le correcteur n'est qu'une matrice de gain. Pour les suiveurs, en plus de la dynamique de l'observateur, la dynamique du contrôleur dépend aussi de celle du compensateur.

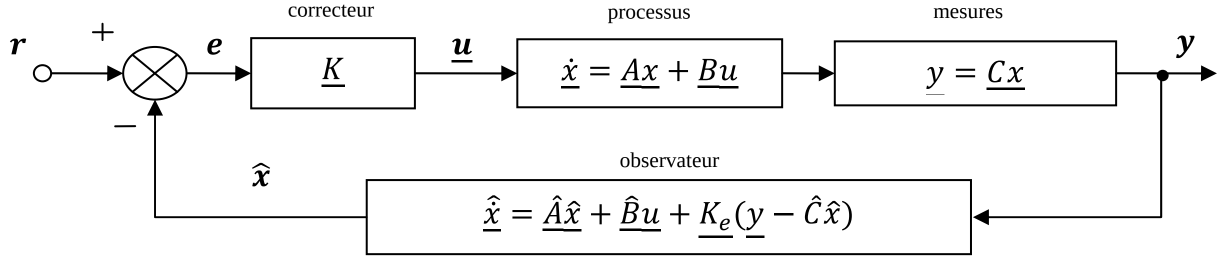


Figure A3.04 : *Schéma-bloc d'un contrôle par retour d'état avec observateur*

A3.6 Contrôleur à deux degrés de liberté (2DDL)

La structure la plus connue de contrôleur à 2DDL est celle de la figure A3.05 pour laquelle le contrôleur K est décomposé en deux matrices de transfert indépendantes, F_K et K_K.

Le premier degré de liberté, K_K, est un contrôleur par rétroaction (feedback) servant à la stabilisation du système et le deuxième, F_K, est un contrôleur par anticipation (feedforward) pouvant servir à différentes fins (découplage, time response shaping). Si $F_K = I$, on retombe sur la classique structure de contrôle par rétroaction.

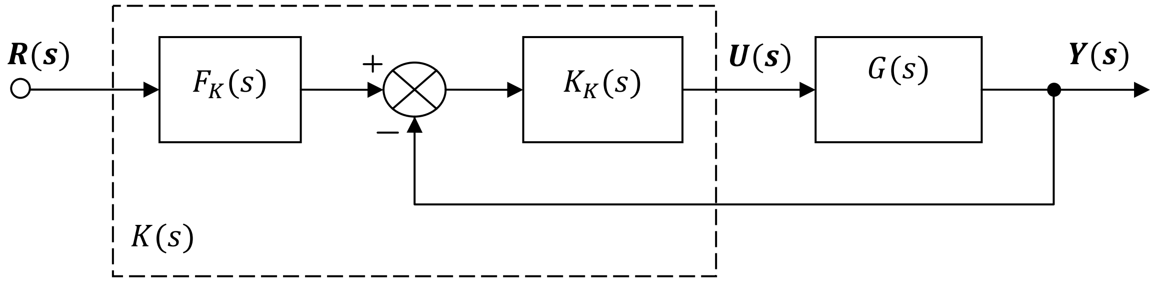


Figure A3.05 : *Structure à 2DDL : rétroaction et anticipation*

Certaines méthodes de contrôle peuvent mener à des structures à 2DDL où la dynamique de rétroaction et celle d'anticipation ne sont pas aussi découplées. Dans ce cas, on utilise une représentation du contrôleur plus générale. Cette structure générale d'un contrôleur à 2DDL est donnée par la figure A3.06. Sur cette figure on distingue un système dynamique représenté par la matrice de transfert G ayant pour entrées le vecteur U et pour sorties le vecteur Y.
Ce système est contrôlé par la matrice de transfert K dont les sorties sont le vecteur U et les entrées sont d'une part le vecteur de sorties Y et d'autre part le vecteur de consignes R.

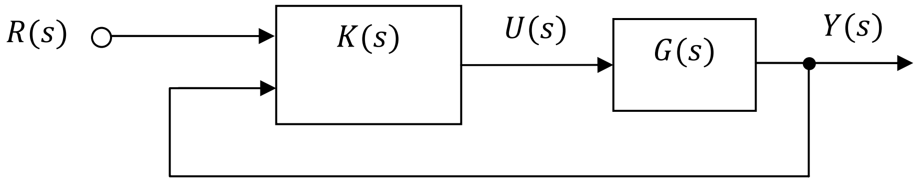


Figure A3.06 : *Structure générale de contrôleur à 2DDL*

ANNEXE 4
PROPRIETES DE LA FORME STANDARD

Dans cette annexe, nous allons nous référer à la figure A4.01 suivante :

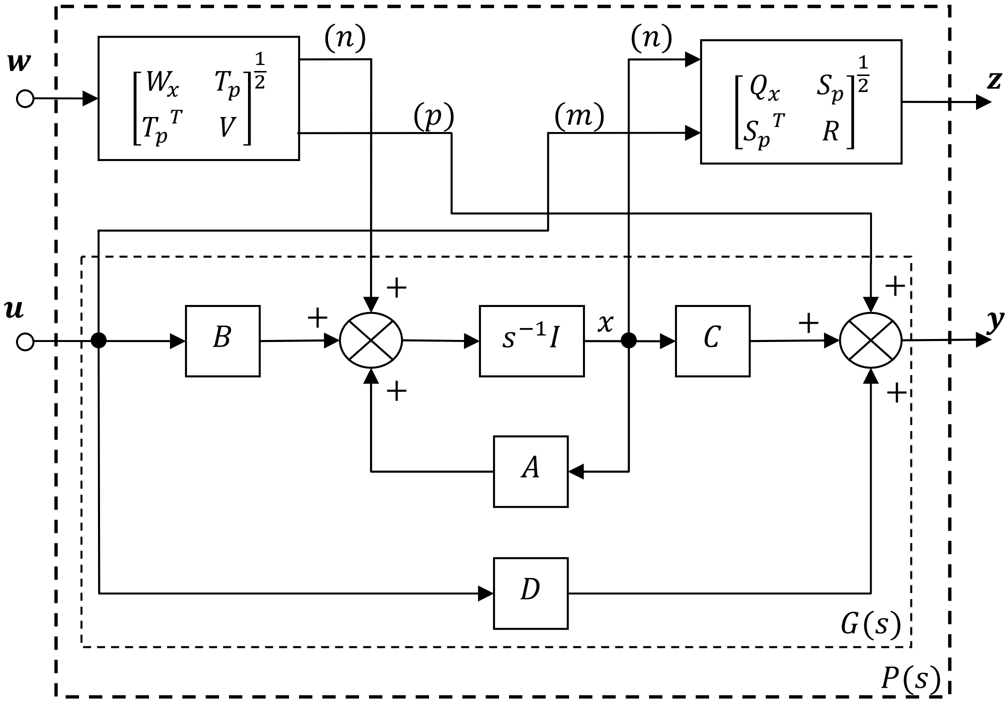


Figure A4.01 *: Forme standard associée à la synthèse LQG*

A4.1 Rappel des propriétés de la matrice hamiltonienne

Les valeurs et vecteurs propres de la matrice H_c vérifie les propriétés suivantes :

- $\det(sI_{2n} - H_c) = \det(sI_n - A + B_2K_c)\det(sI_n + A^T - B_c^T B_2^T)$, les valeurs propres de la matrice hamiltonienne sont donc composées des n valeurs propres de la dynamique de commande en boucle fermée (toujours stables) complétées par leurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

- La matrice des vecteurs propres (de longueur $2n$) de H_c associés aux n valeurs propres stables s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V \\ P_c V \end{bmatrix} \quad \text{(A4.01)}$$

avec V matrice des vecteurs propres en boucle fermée (vecteurs propres de $A - B_2K_c$).

Les propriétés duales peuvent être également énoncées à partir de la matrice hamiltonienne H_f.

A4.2 Propriétés de placement de valeurs propres

Nous montrons ici que la synthèse H_2 sur la forme standard $P(s)$ permet de placer des pôles en boucle fermée sur les zéros stables des transferts $P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$.

Justification

- Supposons qu'il existe un zéro β dans le transfert $P_{12}(s)$, c'est-à-dire qu'il existe une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{bmatrix} A - sI_n & B_2 \\ C_n & D_{12} \end{bmatrix}_{s=\beta} \begin{bmatrix} v \\ v' \end{bmatrix} = 0 \tag{A4.02}$$

ou encore

$$\begin{cases} (A - \beta I_n)v \ + B_2 v' = 0 \\ \qquad C_1 v + D_{12} v' = 0 \end{cases} \tag{A4.03}$$

En multipliant la deuxième équation par D_{12}^T, ces deux équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \quad (A - B_2 D_{12}^T C_1)v = \beta v \\ \left(I_{p_1} - D_{12} D_{12}^T\right) C_1 v \ = 0 \end{cases} \tag{A4.04}$$

En comparant ces équations avec la première colonne de H_c est immédiat que β et $\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ sont valeur et vecteur propre de la matrice hamiltonienne H_c. Enfin, d'après les propriétés de la matrice hamiltonienne, nous pouvons conclure que :

- Si β est stable alors la système possédera en boucle fermée la couple (β, v) comme valeur et vecteur propres de la dynamique de commande $(A - B_2 K_c)$,

- Si β est instable alors ce sera son image stable qui sera placée en boucle fermée (mais on ne peut rien conclure sur la vecteur propre associé),

- Si β est sur l'axe imaginaire alors la solution de l'équation de Riccati P_c est singulière car elle n'est pas strictement stabilisante.

D'après cette dernière remarque, on peut également démontrer, à partir de la matrice hamiltonienne H_f, la propriété duale relative aux zéros du transfert $P_{21}(s)$ et à la dynamique en boucle fermée d'estimation $(A - K_f C)$. ♦

A4.3 Dualité et principe de séparation

Le correcteur H_2 est entièrement défini par un gain de retour d'état estimé $u = e - K_c\hat{x}$ et un gain de Kalman tels que :

$$\begin{aligned} K_c &= R^{-1}(B_2^T P_c + {S_p}^T) \\ K_f &= (T_p + P_f C_2^T)V^{-1} \end{aligned} \tag{A4.05}$$

Avec P_f et P_c respectivement solutions des équations de Riccati suivants :

$$\begin{aligned} P_c\left(A - B_2R^{-1}{S_p}^T\right) + \left(A - B_2R^{-1}{S_p}^T\right)^T P_c - P_cB_2R^{-1}B_2^TP_c + Q_x - S_pR^{-1}S_p \\ P_f\left(A - T_pV^{-1}C_2\right)^T + (A - T_pV^{-1}C_2)^TP_f - P_fC_2^TC_2P_f + W_x - T_pV^{-1}{T_p}^T = \end{aligned} \tag{A4.06}$$

où Q_x, R, S_p, W_x, V, T_p sont données par les équations (3.08) et (3.09) dans le chapitre 3. La représentation d'état du correcteur entre la mesure y et la commande u s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2K_2 - K_fC_2 + K_fD_{22}K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \tag{A4.07}$$

Les $2n$ valeurs propres du système en boucle fermée sont composées des :

- n valeurs propres de la dynamique de commande (soit $spec(A - B_2K_c)$) qui ne dépend, pour un couple (A, B_2) donné, que des matrices Q_x, R, S, c'est-à-dire des matrices C_1 et D_{12} de la forme standard. Ces valeurs propres sont inobservables en boucle fermée par l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ (mais pas par z),
- n valeurs propres de la dynamique d'estimations (soit $spec(A - K_fC_2)$) qui ne dépend, pour un couple (A, C_2) donné, que des matrices W_x, V, T, c'est-à-dire des matrices B_1 et D_{21} de la forme standard. Ces valeurs propres sont ingouvernables par e en boucle fermée (mais pas par w)

A4.4 Désingularisation

La forme standard doit satisfaire les hypothèses suivantes :

- D_{12} de rang m_2 (m_2 étant le nombre de commandes). C'est l'équivalent de la condition sur l'invisibilité de R pour la synthèse LQ : toutes les commandes doivent être pondérées :

$$\dim(z) \geq \dim(u) \tag{A4.08}$$

- D_{21} de rang p_2 (p_2 étant le nombre de mesures). C'est l'équivalent de la condition sur l'inversibilité de V pour la synthèse du filtre de Kalman : il y a au moins autant de bruits indépendants que de mesures :

$$\dim(w) \geq \dim(y) \tag{A4.09}$$

Ces conditions de rang sur les matrices D_{12} et D_{21} sont aussi des conditions nécessaires pour la synthèse H_∞

A4.5 Comportement LTR

Pour reproduire la synthèse H_2 le comportement LTR de la synthèse LQG il suffit d'apparaitre dans la mise en forme les mesures (y) parmi les variables contrôlées (z) par le biais de pondérations statiques ajustable ou dualement de faire apparaitre les commandes (u) parmi les entrées exogènes (w).

A4.6 Propriété de simplification pôles/zéros

Un cas particulier et pourtant courant de la propriété précédente apparaît en présence de pôles inobservables par z ou ingouvernable par w en boucle ouverte. Ces inobservabilités et ingouvernabilités se traduisent par des zéros sur les transferts $P_{12}(s)$ et $P_{21}(s)$ et la propriété précédente s'applique. Nous allons démontrer de plus qu'il en résulte des simplifications pôles/zéros sur le transfert de boucle $L(s) = K(s)P_{22}(s)$.

Justification

- Soit λ une valeur propre de A inobservable par z et v son vecteur propre associé, alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C_1 \end{bmatrix} v = 0 \tag{A4.10}$$

On en déduit, comme précédemment, que λ et $\begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ sont valeur et vecteur propres du système en boucle fermée. La solution de Riccati est donc telle que $P_c v = 0$, et le gain de retour d'état tel que

$K_c v = 0$. Soit K_f le gain d'estimation réglé par ailleurs, la représentation d'état du transfert de boucle $L(s) = K(s)P_{22}(s)$ est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_2 \\ -K_f C_2 & A - B_2 K_c - K_f C_2 + K_f D_{22} K_c & 0 \\ 0 & K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ u \end{bmatrix} \tag{A4.11}$$

Ce transfert est carré et la relation :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B_2 \\ -K_f C_2 & A - B_2 K_c - K_f C_2 + K_f D_{22} K_c - sI_n & 0 \\ 0 & K_c & 0 \end{bmatrix}_{s=\lambda} \begin{bmatrix} v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{A4.12}$$

montre que, quel que soit le réglage de K_f, λ est zéro du transfert de boucle $L(s) = K(s)P_{22}(s)$, il y a donc simplification pôle/zéro sur ce transfert. □

Dans le cas des systèmes carrés (autant de mesures que de commandes), λ est aussi zéro de $K(s)$ puisque :

$$\begin{bmatrix} A - B_2 K_c - K_f C_2 + K_f D_{22} K_c - sI_n & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix}_{s=\lambda} \begin{bmatrix} v \\ C_2 v \end{bmatrix} = 0 \tag{A4.13}$$

Dualement, si dans la mise en forme un mode stable est ingouvernable par w, alors la synthèse H_2 résultante placera un zéro sur ce mode indépendamment du réglage du critère LQ équivalent (c'est-à-dire du transfert $P_{12}(s)$). ♦

La simplification pôle/zéro ainsi créée peut nuire à la robustesse du système en boucle fermée si ce pôle est sujet à des variations paramétriques. L'interprétation LQG de cette propriété est immédiate : le mode en question n'est pas pondéré dans le critère et restera donc inchangé par la commande. L'utilisation de pondération fréquentielle peut également conduire à cette situation ; cela peut rester sans conséquence si les pôles introduits sont stables, rapides et suffisamment amortis mais peut avoir de graves conséquences dans le cas contraire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Doyle J.C., Francis B.A, and. Tannenbaum A. R., *« Feedback Control Theory »,* Macmillan Publishing Co, New York, 1992.

[2] Arzelier D., *« Représentation et analyse des systèmes linéaires »*, Notes de cours, Version 5.2, ENSICA, Toulouse-France.

[3] Randriamitantsoa P.A., « *Représentation d'état des systèmes linéaires multivariables* », Cours I4 – TCO, Dép. TCO.- E.S.P.A., A.U. : 2006-2007.

[4] Randriamitantsoa P.A., « *Contribution à l'analyse robuste et à la commande optimale modale des systèmes linéaires* », Thèse de doctorat d'état ès-sciences de l'Université d'Antananarivo, N°02, A.U. : 2000-2001.

[5] Doyle J.C., « *Analysis of feedback systems with structured uncertainties* », IEEE Proceeding, Part D, volume 129, pages 242-250, 1982.

[6] Francis B.A. and Doyle J.C., « *Linear control theory with an* H_∞ *optimality criterion* », SIAM J. Cont. and Opt., vol. 25, n°4, pp. 815-844, Jul. 1987.

[7] Francis B.A., Helton J.W. and Zames G., « H_∞ *Optimal feedback controllers for linear multivariable systems* », IEEE Transc. Autom. Cont., vol. AC-29, n° 10, pp. 888-900, Oct. 1984.

[8] Freudenberg J. S. and Looze D. P., « *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems* ». Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[9] Boyd S.and Yang Q., « *Structured and simultaneous Lyapnov functions for system stability problems* », Int. Journal of Control, 49: 2215-2240, 1989.

[10] Zhou K. and Doyle J.C., « *Essentials of Robust Control* », Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1998.

[11] Oustaloup A., « *La Robustesse : Analyse et Synthèse de Commandes Robustes* », Paris : Hermès, 1994.

[12] Zhou K., Doyle and J.C. Glover K., « *Robust and Optimal Control* », Upper Saddle River, NJ : Prentice - Hall, 1995.

[13] Gille J. Ch., Decaulne P., and Péegrin M., « *Théorie et calcul des asservissements linéaires* ». Dunod, Paris, 1971.

[14] Duplaix J., « *Méthode d'élaboration d'une commande optimale modale* », Thèse de doctorat de l'Université, U.F.R. Sciences et Techniques – Université de Toulon et du Var, France, Oct. 1994.

[15] Anderson B. D and Moore J. B., « *Optimal Control: Linear Quadratic Methods* », Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[16] Athans M., « *Tutorial on the LQG-LTR method* », Massachusetts Institute of Techonolgy, March 1986.

[17] Astrom K. J., « *Introduction to stochastic control theory* », Number 70 in Mathematics in science and engineering. Academic Presse, Première édition, 1970.

[18] Stein G. and Athans M., « *The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design* », NASA Ames and Langley Research Centers, March 1984.

[19] Duc G., « *Robustesse des systèmes linéaires multivariables* », Polycopié de l'Ecole Supérieure d'Electricité, France, 1994.

[20] Kwakernaak H. and Sivain R., « *Linear optimal control systems* », Wiley interscience John Wiley and Sons, première edition, 1972.

[21] Doyle J. C. and Stein G., « *Right-of-plane poles and zeros and design trade-offs in feedback systems* », IEEE Transaction on Automatic Control, AC-26, August 1981.

[22] Larminat D. P., « *Automatique : Commande des systèmes linéaires* », Traité des nouvelles technologies-Série Automatique. Hermès, première édition, 1993.

[23] Tahk M. and Speyer J. L., « *Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis* », IEEE Transactions on Automatic control, AC-32(9) , pp. 793-801, September 1987.

[24] Tahk M. and Speyer J. L., « *Parameter robust linear-quadratic-gaussian design synthesis with flexible structure control applications* », Journal of Guidance, 12(4), July-August 1989.

[25] Alazard D., Cumer C., Apkarian P., Gauvrit M. et Ferres G., « *Robustesse et Commande Optimale* », Cépadeuès-Editions, 1999.

[26] Kalman K., « *Algebraic characterisatio of polynomial whose zeros lie in certain algebraic domain* », Actes Nat. Acad. Sci., vol. 64, pp. 818-823, May 1969.

[27] Madelaine B., « *Détermination d'un modèle dynamique pertinent pour la commande : de la réduction à la construction* », Thèse de doctorat de l'Université, U.F.R. Automatique et Dynamique – Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse - France, 1998.

[28] Kron A., « *Conception de lois de commande Fly-by-wire robustes pour avions de transport civil dont la structure est considérée flexible* », Thèse de doctorat de l'Université, U.F.R. Génie Electrique – Université de Sherbrooke Quebec, Canada, Février 2004.

[29] Petersen I. R., « *A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems* », Systems and Control Letters, pp. 351-357, 1987.

[30] Petersen I. R. and Hollot C. V., « *A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems* », Automatica, pp. 397-411, 1986.

[31] Randriamitantsoa A. A., « *μ-Synthèse des systèmes linéaires à temps continu* », Mémoire D.E.A. Télécommunication, ESPA, A.U. : 2008-2009.

PAGE DE RENSEIGNEMENTS

Nom : ANDRIANARISON

Prénoms : Maherizo Valinaina

Adresse : Lot 24 A 98 Est Tribunal
ANTSIRABE 110
Madagascar
Tél: 033 12 826 80 / 032 55 768 54 / 034 08 700 14
E-mail: andrianarison.maherizo@gmail.com

Titre du mémoire : « COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR LES APPROCHES PRLQG/PRLQR »

Nombre de pages : 129

Nombre de figures : 77

Nombre de tableaux : 04

Mots clés : analyse, automatique, commande, linéaire, robuste, synthèse, système, LQ, LQG, LTR, PRLQ, PRLQG, PRLQR

Directeur de mémoire : M. RANDRIAMITANTSOA Paul Auguste

Téléphone : +261 32 41 506 84

E-mail : rpa@freenet.mg

RESUME

De nos jours, la théorie des systèmes linéaires s'intéresse plus particulièrement à l'optimisation du comportement. En réalité, des perturbations externes affectent toujours ces systèmes. Pour fonctionner correctement, ils doivent donc être robustes aux imperfections du modèle : écarts entre le modèle et le système réel, dérives des paramètres physiques, perturbations externes…

Le but de cet ouvrage est de montrer comment appréhender le problème de la robustesse paramétrique sous la formulation de la synthèse LQG. Les méthodologies obtenues sont particulièrement simples à mettre en œuvre. Nous avons démontré la robustification des synthèses LQR et LQG vis-à-vis des incertitudes paramétriques par les nouvelles méthodologies de synthèse PRLQR et PRLQG. Ces différentes synthèses robustes sont fondées sur une modélisation en espace d'états de l'incertitude inhérente au système.

ABSTRACT

Nowadays, the linear system theory is interested more particularly in optimization of the behavior. Actually, external disturbances always affect these systems. To function correctly, they must thus be robust towards the imperfections of the model: differences between the model and the real system, drifts of the physical parameters, external disturbances …

The target of this work is to show how to apprehend the problem of the parametric robustness under the formulation of synthesis LQG. Methodologies obtained are particularly simple to implement. We showed the robustification of LQR and LQG synthesis with respect to parametric uncertainties by new methodologies of PRLQR and PRLQG synthesis. These various robust controls are founded on a modeling in state space of uncertainty parameters inherent in the system.