

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN INGÉNIERIE

PAR
OMAR NOUI

DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE DYNAMIQUE 3D POUR
LA CONCEPTION DES CITERNES TRANSPORTANT
DES LIQUIDES.

JUIN 2020

À Ali et Sophia,

RÉSUMÉ

Le renversement des camions citernes est un problème de sécurité routière très répandu. Les accidents de ce type de véhicules peuvent causer de graves dégâts humains, matériels et environnementaux, surtout lorsque la matière transportée est dangereuse (produit chimique, liquide inflammable...). Plusieurs facteurs influencent le comportement des camions citernes. La nature et la quantité du liquide transportée, la hauteur du centre de masse du véhicule ainsi que le poids et la forme de la citerne sont les principaux éléments qui agissent sur sa stabilité.

L'étude du mouvement du liquide dans des citernes mobiles partiellement remplies nécessite souvent des développements mathématiques complexes, des logiciels de simulation coûteux et des études expérimentales très délicates et dispendieuses. Ceci a motivé certains chercheurs à concevoir des méthodes relativement plus simples. L'idée consiste à remplacer les oscillations du liquide par les vibrations de systèmes mécaniques simples tels que les systèmes masses-ressorts ou les pendules. Cependant, ces modèles ne représentent pas fidèlement ce phénomène et ne sont efficaces que dans le cas de deux dimensions (2D). En effet, les forces exercées sur les citernes pour véhicules routiers peuvent survenir de n'importe quelle direction. Les déplacements du liquide et les forces de pression exercées sur les parois du réservoir sont alors sous-estimées et peuvent causer des défauts de conception. D'autre part, les modèles mécaniques en 3 dimensions (3D) sont souvent utilisés pour modéliser des phénomènes complexes. D'ailleurs, dans l'animation graphique par ordinateur, des réseaux de systèmes masses-ressorts sont employés pour leur simplicité et leur mise en œuvre rapide. De plus, leur utilisation dans la simulation des corps déformables permet d'obtenir, à la fois, un aspect géométrique approprié à la topologie de l'objet étudié et un aspect physique simulant les différentes interactions internes et externes.

Dans le cadre de ce projet, nous avons élaboré un nouveau modèle dynamique qui représente le mouvement du liquide en 3D dans une citerne pour véhicules routiers partiellement remplie. Son but consiste à évaluer les déplacements du liquide et les forces de pression engendrées par son mouvement. En premier lieu, nous avons élaboré un modèle qui permet de discrétiser le liquide dans un réservoir cylindrique de base quelconque. Le liquide est réparti en plusieurs masses suivant chaque axe. Chaque masse est représentée par son centre de masse. L'ensemble de ces points constitue les nœuds du maillage. La masse et les coordonnées de chaque nœud sont déterminées par ce modèle de discrétisation du liquide.

Les nœuds sont liés par des arêtes flexibles contenant un ressort et un amortisseur parallèles. De plus, les nœuds représentant les masses en contact avec les parois de la citerne sont liés au réservoir par le même type d'arêtes. Ceci constitue un réseau de systèmes masses ressorts en 3D modélisant le liquide dans la citerne. Une méthode calculant les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement est ensuite établie. Finalement, le système d'équations de mouvements décrivant le nouveau modèle est formulé et résolu numériquement.

Des résultats de simulation obtenus par le nouveau modèle dynamique en 3D élaboré dans ce projet en termes de déplacements du centre de masse du liquide et de forces générées par son mouvement sont comparés à des études antérieures effectuées au sein de notre équipe de recherche dans le but de valider le modèle. La comparaison se fait principalement par rapport à trois manœuvres du véhicule : le mouvement dans une courbe, le changement de voie simple et le mouvement de freinage. En outre, deux taux de remplissage critiques sont sélectionnés.

Après la validation du nouveau modèle dynamique, ce dernier est employé pour analyser l'influence de la forme de la citerne sur le comportement du liquide. Trois formes de sections latérales de réservoir sont alors choisies : circulaire, ovale modifiée et trapézoïdale. L'analyse comparative se fait en considérant deux taux de remplissage ($\tau = 50\%$ et 70%) ainsi que deux manœuvres du véhicule (mouvement dans une courbe et décélération longitudinale). D'autre part, le nouveau modèle est aussi utilisé pour étudier l'effet de la viscosité dynamique du liquide sur son mouvement dans la citerne. Ainsi, deux liquides de même densité et de viscosité différente subissant une accélération longitudinale sont comparés en termes de déplacement du centre de masse et de forces verticales et longitudinales engendrées par ce mouvement.

Par ailleurs, le modèle 3D du liquide est employé dans le but de repérer les zones critiques de la citerne où les forces de pression exercées par le liquide sont les plus élevées. De plus, les pressions maximales sur les parois sont calculées et utilisées pour déterminer l'épaisseur minimale des parois et le poids de la citerne pour différents matériaux.

Le nouveau modèle élaboré dans cette recherche permet d'étudier le liquide dans des citernes pour véhicules routiers de façon plus simple et plus rapide. Il pourrait être implanté dans un modèle complet de véhicule pour analyser sa stabilité. Il pourrait aussi être adapté pour étudier l'impact des chicanes sur le comportement du liquide dans la citerne.

ABSTRACT

The overturning of tank trucks is a real road safety problem. Accidents of these vehicles can cause human, material, and environmental damages, especially when the carried materiel is dangerous (chemical product, flammable liquid...). The behavior of the tank trucks is influenced by many factors. The nature and quantity of the carried liquid, the height of the vehicle center of mass and the weight and shape of the tank are the main elements that affects its stability.

The study of liquid motion in a partially filled portable tanks requires complex mathematical developments, expensive simulation software and delicate experimental studies. This has motivated many researchers to conceive relatively simple methods. The idea is to replace liquid oscillations by the vibrations of simple mechanical models such as mass-spring systems or pendulums. However, these models do not properly represent this phenomenon and are only effective in two dimensions. Indeed, forces applied on the tanks can arise from any direction. In this case, displacement of the liquid and pressure forces applied on the tank walls are undervalued and can cause design flaws. On the other hand, three-dimensional (3D) mechanical models are used to simulate complex phenomena. Furthermore, in computer graphic animation, mass-spring networks are used for their simplicity and fast implementation. Moreover, using them in deformable objects simulation allows to obtain both a geometrical aspect, which is suitable for the object topology, and a physical aspect simulating internal and external interactions.

In this study, a new 3D dynamical model was developed for simulating liquid motion in a partially filled tank for road vehicles. The purpose is to evaluate liquid displacements and pressure forces generated by its movement. First, an adaptative liquid discretization model is developed for a cylindrical tank with a base of any shape. The liquid is divided into many masses along the three axes. Each mass is represented by its center of mass. All these points form the nodes of the mesh. This model compute mass and coordinates of the nodes. Then, neighboring nodes are linked by flexible edges containing a parallel spring and damper. Moreover, nodes of masses in contact with the tank walls are linked to the structure by the same edges. This constitutes a network of mass-spring systems in 3D which represent the liquid in the tank. Then, a method computing springs stiffness and damping coefficient is developed. Finally, the system of equations of motion describing the new model is formulated and solved numerically.

The new 3D dynamical model developed in this study is used to compute displacements of the center of mass of the liquid and forces generated by its movement for a specific simulation. Results are then compared to a previous study of our research team in order to validate the model. Three simulations of vehicle maneuver are mainly compared: steady state turning, single lane change and braking. In addition, two critical fill rates are used for each simulation.

After validating the new dynamical model, this last one is used to study the impact of the tank shape on the liquid behavior. Three lateral tank sections are selected: circular, modified oval and trapezoidal. Moreover, the comparative analysis is considering two filling rates ($\tau = 50\%$ et 70%) as well as two vehicle maneuvers (steady state turning and braking). On the other hand, the new model is also used to study the influence of dynamical viscosity of the liquid on its motion in the moving container. Thus, two liquids having identical density and different dynamical viscosity subjected to a longitudinal deceleration are compared in terms of displacement of the center of mass and longitudinal and vertical forces generated by its motion.

Otherwise, the 3D model of the liquid is used to identify critical areas of the tank walls where the pressure forces applied by the liquid are the highest. In addition, the maximum pressures on the walls are computed and used to determine the minimum thickness and the tank weight according to several materials.

The new dynamical model allows to study the liquid in moving containers in a simpler and faster way. For example, it could be implanted in a complete vehicle model for stability analysis. It could be also adapted to study the impact of baffles on the liquid behavior in the moving tank.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT.....	v
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xvi
REMERCIEMENTS.....	xviii
CONTRIBUTIONS ORIGINALES DE LA THÈSE	xix
PUBLICATIONS.....	xx
Chapitre 1: INTRODUCTION.....	1
1.1 Problématique.....	2
1.2 Objectifs	7
1.3 Méthodologie.....	8
Chapitre 2: REVUE DE LITTÉRATURE	14
2.1 Effet du mouvement du liquide	15
2.1.1 Comportement dynamique du camion-citerne.....	15
2.1.2 Mouvement du liquide dans une citerne	18
2.2 La géométrie de la citerne	19
2.2.1 Géométrie extérieure.....	19
2.2.2 Géométrie intérieure	22
2.3 Modèles mécaniques équivalents	24

2.3.1 Modèles mécaniques équivalents 2D pour la simulation du liquide	24
2.3.2 Modèles mécaniques équivalents 3D dans différents domaines.....	30
2.4 Matériaux, normes et codes techniques.....	39
2.4.1 L'utilisation de l'aluminium	39
a) L'aluminium dans le transport.....	39
b) Les alliages d'aluminium et leurs applications	40
c) Parois en aluminium.....	43
2.4.2 Normes et codes techniques.....	46
a) Pression autorisée	47
b) Matériaux utilisés et contraintes maximales.....	48
c) Pression maximale autorisée et épaisseur minimale	51
2.5 Synthèse.....	55
Chapitre 3: MODÈLE DE DISCRÉTISATION DU LIQUIDE DANS DES CITERNES	58
3.1 Préliminaires.....	58
3.2 Présentation du nouveau modèle dynamique 3D	59
3.3 Discrétisation des formes de citernes	62
3.3.1 Présentation de la citerne paramétrée	63
3.3.2 Hauteur de la surface libre :	69
3.3.3 Répartition des particules.....	71
3.3.4 Calcul des masses et des coordonnées initiales des centres de masses	75
3.3.1 Applications du modèle de discrétisation	81
Chapitre 4: MODÈLE DYNAMIQUE 3D DU LIQUIDE	87

4.1 Raideurs et coefficients d'amortissement.....	87
4.1.1 Liaisons entre les nœuds voisins.....	88
4.1.2 Ressorts suivant l'axe des X	92
4.1.3 Ressorts suivant l'axe des Y	95
4.1.4 Ressorts suivant l'axe des Z	97
4.1.5 Coefficients d'amortissement	99
4.2 Formulation des équations du mouvement.....	101
4.3 Organisation des calculs et simulations :.....	107
Chapitre 5: SIMULATION ET VALIDATION DU MODÈLE.....	110
5.1 Décalage latéral de la charge liquide.....	112
5.1.1 Mouvement dans une courbe	113
5.1.2 Changement de voie simple.....	122
5.2 Décalage longitudinal de la charge du liquide	130
5.2.1 Taux de remplissage de 50 %	131
5.2.2 Taux de remplissage de 70 %	140
5.2.3 Comparaison des résultats	149
Chapitre 6: ÉTUDE COMPARATIVE DES CITERNES DE FORMES COMPLEXES	152
6.1 Effet de la géométrie de la citerne.....	152
6.1.1 Analyse du décalage latéral	156
6.1.2 Analyse du décalage longitudinal	164
6.2 Effet de la viscosité du liquide :	172
Chapitre 7: CONCEPTION ET OPTIMISATION DES CITERNES.....	182

7.1 Analyse des zones critiques.....	183
7.1.1 Forces d'excitation latérales	184
7.1.2 Forces d'excitation longitudinales	187
7.1.3 Forces latérales et longitudinales simultanées	190
7.2 Calcul de l'épaisseur et du poids de la coque.....	194
Chapitre 8: CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS.....	203
8.1 Conclusions	203
8.2 Recommandations	209
RÉFÉRENCES :	211

LISTE DES FIGURES

Figure 1-1: Camion-citerne d'unité [3].	2
Figure 1-2: Camion-citerne à une remorque [4].	2
Figure 1-3: Camion-citerne à deux remorques [5].	3
Figure 1-4: Camion-citerne à plusieurs remorques (train routier) [6].	3
Figure 1-5: Renversement de camions citernes [10, 11].	6
Figure 1-6 : Organigramme de la méthodologie.	13
Figure 2-1: Table d'inclinaison pour véhicules lourds [12].	15
Figure 2-2: Étude expérimentale d'une citerne [26].	19
Figure 2-3: Formes de citernes optimales pour différents taux de remplissage [29].	20
Figure 2-4: Sections latérales étudiées par Kang [30].	21
Figure 2-5: type de chicanes étudiées [33].	23
Figure 2-6: Modèle équivalent pour une citerne ellipsoïdale [38].	25
Figure 2-7 : Modèle du pendule dans une citerne cylindrique [41].	26
Figure 2-8 : Modèles équivalents à des réservoirs longs et profonds [38].	27
Figure 2-9 : modèle mécanique équivalent pour un réservoir conique [50].	28
Figure 2-10 : Répartition des masses du liquide [51].	29
Figure 2-11 : Modèle équivalent pour une citerne horizontale [51].	29
Figure 2-12 : Liaisons entre les masses pour un modèle de tissu [52].	31
Figure 2-13 : Modèle pour la simulation d'une flamme [53].	33
Figure 2-14 : Maillage pour un ballon rebondissant [54].	35

Figure 2-15: modèle élastique de la surface externe du muscle [55].....	37
Figure 2-16 : ressorts angulaires [55].	38
Figure 2-17: Dalles d'aluminium avant laminage [56].	44
Figure 2-18: Train de laminoir [56].	44
Figure 2-19: Formes conventionnelles des têtes de citerne [60].	52
Figure 2-20 : Formes de section non circulaire possibles [60].	54
Figure 3-1 : Répartition de la masse du liquide dans une citerne rectangulaire.	61
Figure 3-2 : Dimensions du modèle générique de la section latérale [29].	64
Figure 3-3 : Citerne à section circulaire.....	68
Figure 3-4: Section ovale modifiée.....	68
Figure 3-5 : Représentation 3D de la citerne paramétrée.	71
Figure 3-6 : Répartition des particules du liquide suivant la section latérale paramétrée. ..	73
Figure 3-7 : Cas où Y_1 est inférieure à au moins une largeur entre 0 et Z_1	74
Figure 3-8 : Cas où Y_1 est supérieure à toutes les largeurs entre 0 et Z_1	75
Figure 3-9: Particules en contact avec la paroi inférieure.	79
Figure 3-10: Modèle de discrétisation appliqué à une citerne à section circulaire.....	82
Figure 3-11 : Modèle de discrétisation appliqué à une citerne à section ovale modifiée. ...	83
Figure 3-12: Modèle de discrétisation appliqué à une citerne à section trapézoïdale.	85
Figure 4-1: Liaisons entre le centre de masse $G_{i,j,k}$ avec les nœuds voisins.	89
Figure 4-2: Composition d'une arête élastique entre deux nœuds suivant l'axe Y.	90
Figure 4-3 : Représentation des nœuds et des arêtes pour une section latérale de citerne rectangulaire.....	91
Figure 4-4 : Étapes de formulation du nouveau modèle sur le logiciel de calcul.	108

Figure 4-5: Étapes de résolution et obtention des résultats.	109
Figure 5-1 : Déplacement latéral du centre de masse du liquide y_g	114
Figure 5-2 : Déplacement vertical du centre de masse du liquide z_g	114
Figure 5-3 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 50 \%$	116
Figure 5-4 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 75 \%$	118
Figure 5-5 : Force latérale F_{gy} due au mouvement du centre de masse global.....	119
Figure 5-6 : Force verticale F_{gz} due au mouvement du centre de masse global.....	119
Figure 5-7 : Déplacement latéral du centre de masse du liquide y_g	123
Figure 5-8 : Déplacement vertical du centre de masse du liquide z_g	124
Figure 5-9 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 50 \%$	126
Figure 5-10 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 75 \%$	127
Figure 5-11 : Force latérale F_{gy} due au mouvement du centre de masse global.....	128
Figure 5-12 : Force verticale F_{gz} due au mouvement du centre de masse global.....	128
Figure 5-13 : Déplacement longitudinal x_g du centre de masse global ($\tau = 50 \%$).	132
Figure 5-14 : Déplacement vertical z_g du centre de masse global ($\tau = 50 \%$).	132
Figure 5-15 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 2.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 50 \%$).	135
Figure 5-16 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 4.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 50 \%$).	138
Figure 5-17 : Force longitudinale F_{gx} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau =$ 50%).	139
Figure 5-18 : Force verticale F_{gz} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 50 \%$).	139

Figure 5-19 : Force globale F_G générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 50 \%$).	140
Figure 5-20 : Déplacement longitudinal x_g du centre de masse global ($\tau = 70 \%$).	141
Figure 5-21 : Déplacement vertical z_g du centre de masse global ($\tau = 70 \%$).	141
Figure 5-22 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 2.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 70 \%$).	144
Figure 5-23 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 4.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 70 \%$).	147
Figure 5-24 : Force longitudinale F_{gx} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau =$ 70%).	148
Figure 5-25 : Force verticale F_{gz} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 70 \%$).	148
Figure 5-26 : Force globale F_G générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 70 \%$).	149
Figure 6-1 : Forme des sections de citerne étudiées.	155
Figure 6-2 : Déplacements latéral et vertical du centre de masse ($\tau = 50 \%$).	157
Figure 6-3 : Déplacements latéral et vertical du centre de masse ($\tau = 70 \%$).	158
Figure 6-4 : Forces latérale et verticale générées par le déplacement du centre de masse du liquide ($\tau = 50 \%$).	160
Figure 6-5 : Forces latérale et verticale générées par le déplacement du centre de masse du liquide ($\tau = 70 \%$).	161
Figure 6-6 : Déplacements longitudinal et vertical du centre de masse ($\tau = 50 \%$).	165
Figure 6-7 : Déplacements longitudinal et vertical du centre de masse ($\tau = 70 \%$).	166

Figure 6-8 : Forces longitudinale et verticale générées par le déplacement du centre de masse du liquide ($\tau = 50\%$).....	168
Figure 6-9 : Forces longitudinale et verticale générées par le déplacement du centre de masse du liquide ($\tau = 70\%$).....	169
Figure 6-10 : Comparaison du déplacement longitudinal du centre de masse des deux liquides.....	174
Figure 6-11 : Comparaison du déplacement vertical z_g du centre de masse des deux liquides.	175
Figure 6-12 : Comparaison de la force longitudinale F_{gx} engendrée par les deux liquides.	177
Figure 6-13 : Comparaison de la force verticale F_{gz} engendrée par les deux liquides.	178
Figure 7-1 : zones critiques des citernes (accélération latérale).	186
Figure 7-2 : zones critiques des citernes (excitation longitudinale).	189
Figure 7-3 : zones critiques des citernes (excitations simultanées).....	192

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1-1: Nombre de véhicules lourds impliqués dans des accidents mortels [7].	4
Tableau 1-2: Nombre de camions citernes impliqués dans des accidents mortels en 2007 [7].	5
Tableau 2-1: Désignation des alliages d'aluminium [57].....	41
Tableau 2-2: Critères de conception pour des citernes à faible pression [59].	48
Tableau 5-1 : Comparaison des résultats de la simulation d'un mouvement dans une courbe.	122
Tableau 5-2 : Comparaison des résultats de la simulation d'un changement de voie simple.	130
Tableau 5-3 : Résumé des résultats obtenus dans le cas d'une décélération longitudinale.	151
Tableau 6-1 : Paramètres de la section générique pour les trois formes étudiées.	154
Tableau 6-2 : Comparaison des résultats de la simulation d'un mouvement dans une courbe pour les trois formes de sections de citernes.....	163
Tableau 6-3 : Comparaison des résultats de la simulation d'une décélération longitudinale pour les trois formes de sections de citernes.....	171
Tableau 6-4 : Propriétés physiques des deux liquides.	172
Tableau 6-5 : Comparaison des déplacements et des forces par rapport aux deux liquides.	180
Tableau 7-1 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitation latérale)	187
Tableau 7-2 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitation longitudinale).....	190

Tableau 7-3 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitations simultanées).....	194
Tableau 7-4 : Matériaux sélectionnés et leurs propriétés [60].....	199
Tableau 7-5 : Épaisseurs minimales des parois et poids minimaux de la coque.	201

REMERCIEMENTS

Je souhaite adresser mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont apporté leur contribution de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse dans les meilleures conditions.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance envers mon directeur de recherche, Monsieur Mohamed Bouazara, professeur au département des sciences appliquées à l'Université du Québec à Chicoutimi, qui m'a accompagné et orienté judicieusement tout au long de la réalisation de ce projet malgré ses engagements professionnels. Son encadrement remarquable m'a été d'une grande utilité pour l'accomplissement de mon projet.

Mes remerciements à mon codirecteur, Monsieur Marc J. Richard, professeur à l'université Laval à Québec, pour ses conseils enrichissants et ses remarques perspicaces qui ont été d'une aide très précieuse.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance envers mes parents, Fatiha Zangui et Mohamed Noui, pour leurs sacrifices, leur patience, et pour toute peine qu'ils se sont donnée durant tout le long de mon parcours. C'est grâce à eux que je suis la personne que je suis devenue aujourd'hui.

Mes plus sincères sentiments à ma femme, Chaymaa Boussaoui, pour son soutien, son encouragement et sa patience envers moi durant toute la période de la réalisation de mon doctorat. Je n'imagine même pas comment j'aurais pu finir ma thèse sans sa présence à mes côtés.

Mes remerciements à mon frère, Mohamed Amine, et ma sœur, Fatima-Zahra, qui ont su me motiver et, surtout, me challenger afin que je puisse réaliser tous mes projets. Je leur souhaite tout le bonheur et la réussite dans leur vie.

Je remercie finalement mes amis(es) et collègues qui m'ont appuyé pour la réalisation de ce projet et avec lesquels j'ai partagé des moments inoubliables et une ambiance de travail exceptionnelle, en particulier, mon collègue Gabriel St-Pierre du CÉGÉP de Chicoutimi qui m'a aidé à détecter une erreur dans mon programme informatique qui m'empêchait d'avancer dans mes recherches pendant plusieurs mois.

CONTRIBUTIONS ORIGINALES DE LA THÈSE

Cette étude porte sur le développement d'un nouveau modèle dynamique équivalent en trois dimensions (3D) permettant de simuler le mouvement du liquide dans des citernes pour véhicules routiers. Les contributions originales apportées peuvent être énumérées comme suit :

- L'élaboration d'un modèle de discrétisation du liquide dans un réservoir cylindrique horizontal adapté à toutes les formes de sections latérales et tous les taux de remplissage.
- Modélisation du liquide dans le réservoir en utilisant un réseau de systèmes masses ressorts et amortisseurs lié aux parois en utilisant le modèle de discrétisation.
- Le nouveau modèle en 3D évalue les déplacements du liquide suivant toutes les directions pour des excitations externes quelconques simulant diverses manœuvres du véhicule.
- Le nouveau modèle 3D permet d'évaluer les forces engendrées par le mouvement du liquide dans toutes les régions de la citerne. Ceci permet de détecter les zones critiques où les forces sont plus importantes.
- Le temps de calcul des différentes simulations présentées ne nécessite que quelques minutes.
- Le modèle peut être adapté pour d'autres applications telles que l'implémentation à un système de véhicule complet pour l'étude du comportement général d'un camion-citerne ou l'étude de l'influence des chicanes sur le comportement du liquide.

PUBLICATIONS

Certains résultats présentés dans ce projet ont été publiés dans des journaux scientifiques et des conférences nationales et internationales.

- **O. Noui**, M. Bouazara and M. J. Richard (2018), « *3D dynamical model for liquid sloshing simulation in a partially filled elliptical tank* », CSME International Congress 2018, York University, Toronto, ON, Canada.
- **O. Noui**, M. Bouazara and M. J. Richard (2018), « *Développement d'un modèle dynamique en 3D pour l'étude et la conception des citernes transportant des liquides* », Congrès de l'ACFAS 2018, Université du Québec à Chicoutimi, Qc, Canada.
- **O. Noui**, M. Bouazara and M. J. Richard (2016), « *Study of liquid motion and pressure forces applied on the walls of partially filled tank* », 17th International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2016, Phoenix convention center, Phoenix, AZ, États-Unis.
- M. Bouazara, **O. Noui** and M. J. Richard (2014), « *3D mechanical model for liquid motion simulation in a partially filled tank* », 15th International Mechanical Engineering Congress & Exposition IMECE2014, Palais des congrès, Montréal.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

De nos jours, le transport des liquides est un besoin économique essentiel. Cependant, le risque des accidents est omniprésent et peut causer de graves pertes humaines et économiques. Les liquides transportés sont souvent dangereux comme les produits inflammables ou ceux qui contiennent des substances chimiques ou toxiques. L'exemple le plus concret reste l'accident ferroviaire survenu au Lac-Mégantic où 72 wagons-citernes remplis de pétrole brut ont déraillé et explosé en plein centre-ville causant la mort de 47 personnes et ravageant une quarantaine d'édifices sur une zone de plus de 2 km^2 . De plus, une partie de la cargaison s'est écoulée par le réseau d'égouts vers le lac et la rivière à proximité [1]. Toutefois, selon Statistique-Canada, les camions ont transporté quatre fois plus de marchandises dangereuses que les trains en 2012. En effet, 70 % de ces produits sont transportés par voie routière. De plus, 17 % des marchandises transportées par camions sont classées comme dangereuses. En 2014, il y a eu 22 fois plus d'accidents pour des camions transportant des matières dangereuses que des trains [2]. Bien que les conséquences de ces accidents soient

moins importantes, le risque reste très élevé car ce type de véhicules peut accéder à des endroits où la population est dense.

1.1 Problématique

Les camions citernes sont un moyen indispensable pour le transport terrestre des liquides. Tout au long du *XX^e* siècle, ils ont subi plusieurs modifications et améliorations. Certains besoins économiques ont conduit à des conceptions personnalisées de plus en plus complexes et imprévisibles. On retrouve des véhicules citernes d'unité (figure 1-1), d'autres articulés à une (figure 1-2) ou à plusieurs remorques (figures 1-3 et 1-4).



Figure 1-1: Camion-citerne d'unité [3].



Figure 1-2: Camion-citerne à une remorque [4].



Figure 1-3: Camion-citerne à deux remorques [5].



Figure 1-4: Camion-citerne à plusieurs remorques (train routier) [6].

Les véhicules lourds sont de plus en plus impliqués dans des accidents routiers à cause de leurs géométries complexes. En effet, les statistiques recueillies par l'administration nationale de la sécurité routière (NHTSA, 2003 - 2007) [7] indiquent que le nombre de véhicules lourds impliqués dans des accidents mortels aux États-Unis dans une période de 5 ans a atteint 26059 et que les véhicules articulés sont les plus impliqués dans les accidents comme l'indique le tableau 1-1.

Tableau 1-1: Nombre de véhicules lourds impliqués dans des accidents mortels [7].

Configuration du camion	2003	2004	2005	2006	2007
Camion d'unité	1499	1622	1647	1600	1546
Camion d'unité + remorque	218	221	215	252	247
Tracteur routier	87	111	93	102	104
Tracteur + semi-remorque	3005	3160	3159	3054	2953
Tracteur + deux remorques	157	156	185	156	162
Autres combinaisons	38	33	32	36	26
Inconnu	100	10	12	50	11
Total	5104	5313	5343	5250	5049

Au Canada, on a enregistré 11654 accidents de véhicules lourds et de tracteurs routiers en 2009 qui ont causé le décès 99 personnes et blessé 2528 autres [8]. Les véhicules articulés sont les plus exposés au renversement. D'autre part, plus de 15000 accidents de véhicules lourds dus au renversement ont été enregistrés aux États-Unis en 2006, 10000 d'entre eux étaient des véhicules articulés [9].

Le nombre de camions citernes sur les routes augmente chaque jour à cause de l'accroissement de la demande sur les marchés économiques tels que les produits pétroliers et alimentaires. Néanmoins, les réactions imprévisibles de ce type de véhicules peuvent provoquer de graves accidents. D'ailleurs, en 2007, 356 camions

citernes transportant des liquides ont été impliqués dans des accidents mortels aux États-Unis [7], 269 d'entre eux étaient des véhicules articulés à une remorque (Figure 1-2). Le tableau 1-2 indique le nombre de camions citernes impliqués dans des accidents mortels en 2007.

Tableau 1-2: Nombre de camions citernes impliqués dans des accidents mortels en 2007 [7].

Configuration du camion-citerne	Nombre d'accidents	Camions renversés comme premier évènement	Camions renversés comme évènement subséquent
Véhicule d'unité	69	6	17
Véhicule d'unité + remorque	14	1	2
Tracteur + semi-remorque	315	29	55
Tracteur + deux remorques	11	0	5

D'après ce tableau, on remarque que les camions citernes à semi-remorques sont les plus exposés aux accidents et que le taux de renversement est assez élevé pour toutes les configurations.

Les véhicules lourds transportent souvent des matières dangereuses (essence, gazole, kérosène, produits chimiques...). Au Canada, les statistiques ont montré que 43 % des accidents de camions transportant des matières dangereuses étaient causés

par le renversement. De plus, 83 % des camions renversés étaient des camions citernes, soit 36 % de tous les camions transportant des matières dangereuses.

La figure 1-5 montre des accidents typiques de camions citernes dus à un renversement.



Figure 1-5: Renversement de camions citernes [10,11].

Le renversement est alors l'un des facteurs les plus influents dans les accidents des camions citernes. Parmi les causes de ce renversement, reste la vitesse excessive du véhicule, l'état du conducteur et la conception de la route souvent inappropriés pour les véhicules lourds possédant un risque de renversement élevé. Cependant, des véhicules roulant à des vitesses égales dans la même route peuvent avoir un comportement dynamique différent selon la forme, le poids et les dimensions de la charge transportée. Les performances dynamiques de la citerne jouent un rôle important sur la stabilité du véhicule. La géométrie extérieure (elliptique, cylindrique...) et intérieure (chicanes, cloisons...), le taux de remplissage, la nature

du liquide et le poids de la citerne sont des facteurs qui influent directement sur la stabilité du véhicule. Il y a alors une nécessité d'étudier le mouvement du liquide dans la citerne et d'étudier son influence sur le comportement du véhicule. L'analyse du mouvement du liquide dans des réservoirs mobiles a été le sujet de plusieurs recherches. Ces études sont généralement effectuées de manière expérimentale ou numérique. Dans les deux cas, ce genre d'études nécessite des développements mathématiques complexes, des budgets considérables et beaucoup de temps.

Afin d'étudier le comportement du liquide dans des réservoirs mobiles, il est nécessaire d'élaborer une méthode plus facile et plus rapide de modélisation qui soit adaptée aux différentes formes de citernes utilisées, aux différents taux de remplissage et aux différents liquides transportés. Ceci nous permettrait de mieux comprendre l'influence de chaque paramètre sur le comportement du liquide et ainsi, analyser la stabilité des camions citernes de manière plus rapide et plus efficace.

1.2 Objectifs

Le travail envisagé vise essentiellement à élaborer un modèle mécanique 3D pour la simulation du mouvement du liquide dans une citerne partiellement remplie, permettant d'évaluer les déplacements et les forces de pression exercées par le liquide sur les différentes zones des parois du réservoir. Pour ce faire, nous avons comme objectifs les points suivants :

- Élaborer un modèle adaptatif qui permet de discrétiser le liquide dans des citernes cylindriques de formes quelconques.
- Déterminer les paramètres nécessaires pour l'élaboration du modèle dynamique (masses, coordonnées initiales, raideurs, coefficients d'amortissement).
- Développer les équations du nouveau modèle mécanique 3D permettant de simuler le mouvement du liquide dans une citerne partiellement remplie.
- Évaluer les déplacements et les forces engendrées par le mouvement du liquide pour différentes manœuvres.
- Analyser l'influence de la géométrie de la citerne sur le mouvement du liquide.
- Étudier l'effet de la viscosité du liquide sur son comportement dans le réservoir.
- Repérer les zones critiques de la citerne et calculer les forces de pressions maximales réelles appliquées sur les parois du réservoir.
- Calculer l'épaisseur minimale des parois et le poids minimal de la citerne en utilisant différents matériaux dont des alliages d'aluminium.

1.3 Méthodologie

Afin d'atteindre les objectifs fixés dans cette thèse, la méthodologie de travail englobera plusieurs étapes.

La première étape consiste à compléter une recherche bibliographique approfondie dans tous les domaines possédant une relation directe avec notre projet. Cette recherche est focalisée sur les points suivants :

- L'étude de la stabilité des camions citernes et de l'effet du liquide sur leur comportement.
- L'effet de la géométrie de la citerne et des chicanes sur le mouvement du liquide.
- L'étude du mouvement du liquide dans des formes variées de citernes partiellement remplies en utilisant des modèles mécaniques équivalents.
- L'usage des modèles dynamiques 2D et 3D (masse-ressort) dans différents domaines pour la simulation.
- L'utilisation de l'aluminium et ses alliages dans l'industrie du transport.
- Les normes et les codes techniques employés dans la conception des citernes pour véhicules routiers.

La deuxième étape comportera le développement d'un nouveau modèle dynamique équivalent en 3D permettant la simulation du mouvement du liquide dans une citerne mobile partiellement remplie. L'élaboration de ce modèle se fera en trois phases :

- 1) La première phase consistera à développer un modèle mathématique qui permet de discrétiser le liquide dans une citerne de forme quelconque en possédant comme paramètres la forme et les dimensions de la section latérale, la longueur de la citerne, le taux de remplissage et la densité volumique du liquide. Le liquide sera divisé suivant chaque axe pour obtenir des petites particules. Ce modèle permettra de déterminer la masse et les coordonnées du centre de masse de chaque

particule. Le nombre de masses suivant chaque axe sera aussi déterminé par trois paramètres supplémentaires.

- 2) La deuxième phase consistera à établir les hypothèses nécessaires pour concevoir le nouveau modèle en 3D qui représente le liquide et à calculer les paramètres nécessaires pour cette modélisation. En effet, les centres de masses de chaque particule représenteront les nœuds d'un maillage. Les nœuds voisins seront liés par des arêtes flexibles contenant un ressort et un amortisseur parallèles en plus des arêtes reliant les nœuds sur les extrémités du maillage avec la structure du réservoir. Nous allons élaborer une méthode spécifique qui permet de déterminer les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement. Ainsi, un réseau de systèmes masse-ressort-amortisseur sera formé pour simuler les interactions du liquide dans la citerne.
- 3) La troisième phase comprendra l'élaboration et la résolution du système d'équations différentielles décrivant le mouvement de chaque nœud du maillage suivant les trois axes du repère. Les trois phases du modèle seront programmées sur un logiciel de calcul numérique et symbolique dans le but de résoudre le système d'équations du mouvement et se servir des solutions pour générer des résultats numériques et graphiques pertinents.

La troisième étape consistera à comparer les résultats obtenus par le nouveau modèle 3D avec les travaux antérieurs réalisés au sein de notre équipe de recherche en utilisant d'autres méthodes de simulation. La comparaison se fera en termes de

déplacements du centre de masse du liquide et des forces engendrées par son mouvement lorsque le liquide subit différentes excitations extérieures simulant des manœuvres du véhicules. Cette comparaison nous permettra de valider le nouveau modèle 3D.

Une fois le modèle dynamique validé, nous pourrons l'utiliser dans le but d'étudier le mouvement du liquide dans des citernes de formes complexes. En premier lieu, nous allons effectuer une analyse comparative du décalage latéral et longitudinal du liquide dans des citernes de formes différentes. Pour ce faire, nous allons évaluer et comparer les déplacements du centre de masse du liquide et les forces engendrées par son mouvement par rapport à une force d'excitation latérale et une autre force longitudinale. Par la même occasion, nous allons étudier l'effet du taux de remplissage sur le mouvement du liquide dans ces citernes. Deuxièmement, nous allons étudier l'effet de la viscosité du liquide sur le comportement dynamique du liquide. Nous allons sélectionner deux liquides avec des viscosités dynamiques différentes et nous allons utiliser le nouveau modèle 3D pour évaluer et comparer les déplacements et les forces engendrées par les deux liquides.

Dans le but d'analyser les zones critiques des parois du réservoir et d'optimiser le poids de la coque, nous allons utiliser le modèle 3D pour des conditions extrêmes. D'abord, nous allons simuler des manœuvres du véhicule afin de générer les forces maximales réelles qui peuvent être exercées sur les parois. Pour cela, nous allons calculer les forces de pressions générées par le mouvement de chaque nœud du modèle en contact avec la citerne. Trois manœuvres seront simulées : un mouvement dans une

courbes, un freinage ainsi que ces deux mouvements simulés simultanément. Ensuite, nous allons déterminer les pressions appliquées sur les parois qui seront utilisées pour le calcul de l'épaisseur minimale nécessaire. En effet, en se basant sur le calcul des contraintes dans des réservoirs à parois minces, nous allons établir une formule permettant d'évaluer l'épaisseur minimale des parois en utilisant différents matériaux incluant des alliages d'aluminium. De plus, en se basant sur les résultats précédents, une réflexion portant sur le choix du matériau optimal pour la conception des citernes pour les véhicules routiers sera discutée.

Finalement, nous allons révéler les conclusions importantes tirées de cette recherche et proposer des suggestions et recommandations pour les travaux futurs.

L'organigramme de la figure 1-6 donne un résumé de la méthodologie utilisée dans le présent travail.

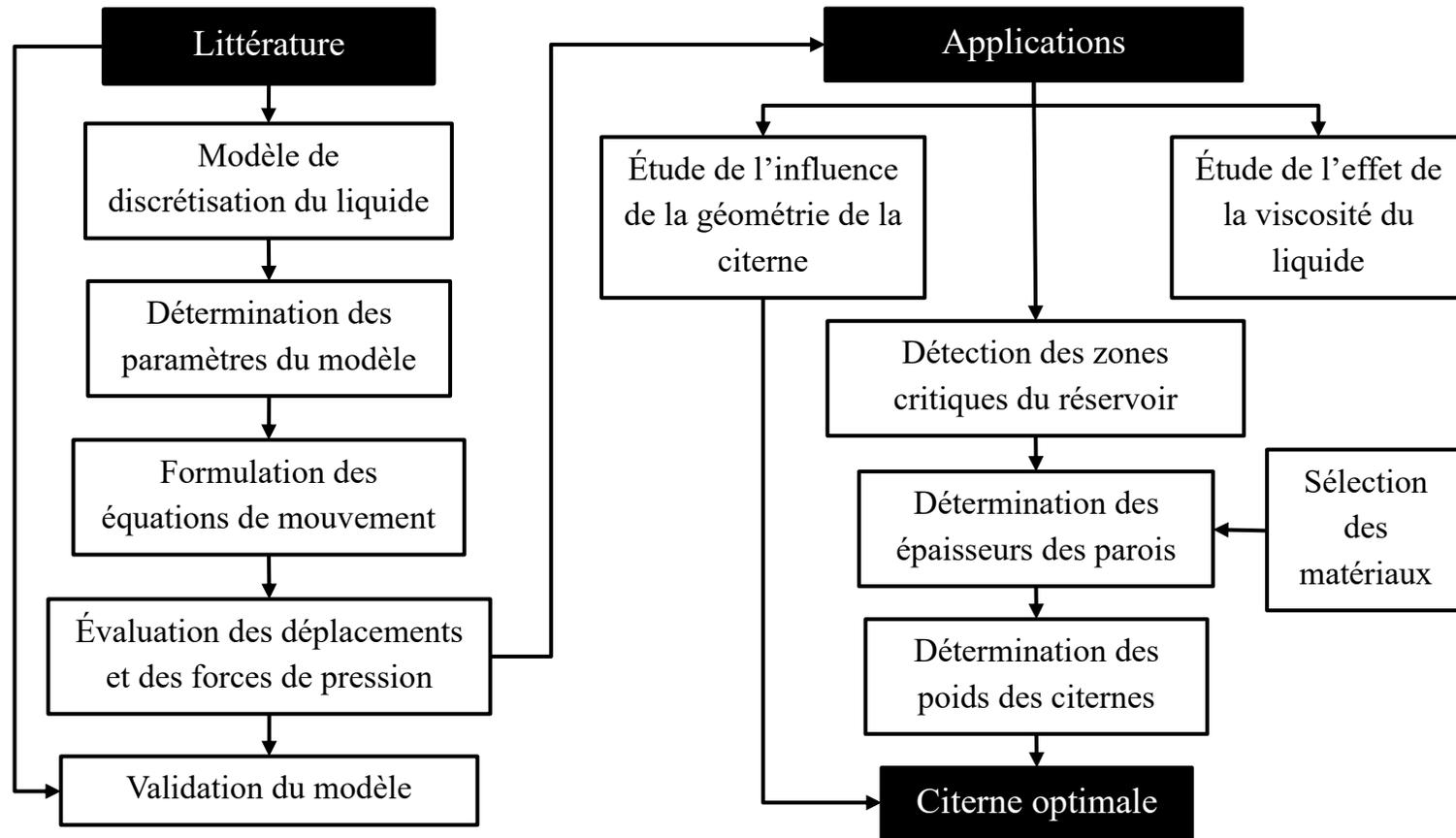


Figure 1-6 : Organigramme de la méthodologie.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Afin d'approfondir les connaissances dans les différents domaines que traite ce projet, la recherche bibliographique a été réalisée selon les points importants fixés dans la méthodologie de ce travail. Dans l'ensemble, quatre sections sont envisagées. La première partie concerne les travaux les plus récents qui ont été consacrés à l'étude de la stabilité des camions citernes et de l'effet du mouvement du liquide sur son comportement. La deuxième section discute l'influence de la géométrie du réservoir sur le comportement dynamique du liquide. Le troisième volet traite les différents modèles mécaniques équivalents conçus pour la modélisation du déplacement du liquide dans des citernes partiellement remplies ainsi que l'utilisation des modèles mécaniques dans d'autres domaines pour la simulation. La dernière section est consacrée à l'utilisation de l'aluminium dans l'industrie du transport et des normes utilisées pour la conception des citernes.

2.1 Effet du mouvement du liquide

2.1.1 Comportement dynamique du camion-citerne

Le renversement est l'un des facteurs qui provoque le plus d'accidents de camions citernes. Dans le but de calculer l'accélération latérale minimale qui mène au renversement d'un véhicule, plusieurs configurations de camions citernes de différents pays ont subi des tests expérimentaux [12]. Ces tests ont été réalisés en utilisant une table d'inclinaison assez longue et solide afin de supporter le poids des véhicules comme l'indique l'image de la figure 2-1.



Figure 2-1: Table d'inclinaison pour véhicules lourds [12].

L'accélération latérale minimale est calculée comme étant la tangente de l'angle maximale d'inclinaison de la table que peut supporter le véhicule. Les résultats ont montré que 76 % des véhicules testés ont un seuil de renversement moyen inférieur à $0.40 g$ et 46 % d'entre eux admettent un seuil de renversement en dessous de $0.35 g$.

Ceci est dû au poids élevé autorisé au Canada et aux caractéristiques de conception des camions citernes utilisés possédant un haut centre de gravité.

La stabilité des camions citernes a été le sujet de plusieurs recherches dans ces dernières années, l'impact du mouvement du liquide dans la citerne sur le véhicule reste l'un des facteurs les plus influents sur leur stabilité. Notamment, dans notre équipe de recherche, Toumi [13] a développé un modèle analytique et numérique complet sur l'interaction liquide-véhicule, il a modélisé les efforts statiques et dynamiques exercés par le liquide sur le comportement global du véhicule. Il a commencé par l'étude du décalage latéral du liquide pour une citerne à section elliptique subie à des mouvements délicats du véhicule. Ensuite, il a abordé le décalage longitudinal sur une citerne cylindrique avec et sans chicanes à orifices. Dans les deux cas, la réponse transitoire du mouvement du liquide est évaluée par le déplacement instantané des coordonnées du centre de masse, des moments d'inertie et de la pression du liquide sur les parois de la citerne. Il remarqua que l'utilisation des chicanes à orifices permet de diminuer de 10 % le déplacement longitudinal du centre de masse pour une citerne remplie à 50 % et de 30 % pour une citerne remplie à 70 %. Cependant, le déplacement vertical du centre de masse et les forces de pression sur les parois ne diminuent que de 5 % dans les deux cas. Toumi [14] a aussi utilisé les équations de Navier-Stokes pour caractériser analytiquement et numériquement l'impact du mouvement du liquide dans la citerne sur le comportement du véhicule en affectant des forces latérales externes simulant un virage ou un changement de voie simple ou double. Il compare aussi avec un véhicule transportant une masse rigide et

conclue que le mouvement du liquide dans la citerne est un facteur très influent sur le comportement d'un véhicule.

Une autre approche par Romero [15] a été développée dans le but de modéliser l'interaction du système véhicule-citerne. Celle-ci a assemblé trois modèles mathématiques pour simuler cette interaction. Le premier modèle consiste à prédire les fréquences naturelles du ballonnement du liquide à l'intérieur de la citerne partiellement remplie. Le deuxième est une formule permettant de calculer le moment d'inertie de la masse suspendue du véhicule dérivé du mouvement du liquide dans la citerne. Le troisième modèle est un système dynamique multi-corps servant à simuler la réponse de la moitié du véhicule par rapport au déplacement de la charge. Quand on simule les fréquences d'oscillation du liquide, le moment d'inertie de la masse suspendue est calculé simultanément et appliqué directement sur la moitié du camion. En appliquant cette approche sur une citerne à section elliptique, les résultats obtenus ont montré que le mouvement du liquide peut représenter une augmentation de 40 % de la tendance de renversement, l'effet maximum est obtenu quand la citerne est remplie complètement à cause de la masse importante suspendue. Nous pouvons citer d'autres études réalisées pour analyser l'effet du mouvement du liquide sur le comportement dynamique du véhicule [16, 17, 18].

2.1.2 Mouvement du liquide dans une citerne

L'étude du mouvement du liquide dans des citernes partiellement remplies nécessite des outils mathématiques avancés. De plus, le nombre de paramètres doit être réduit afin de simplifier la modélisation du phénomène. Par exemple, la méthode des différences finies indépendante du temps a été élaborée et utilisée pour étudier le mouvement non linéaire bidimensionnel d'un liquide dans une citerne rectangulaire [19]. On en a déduit que pour une fréquence d'excitation fixe, le déplacement de la surface libre et le déplacement horizontal dû à l'excitation sont linéairement proportionnels. De ce modèle, on peut aussi déduire une formule simple pour évaluer les forces de pression exercées par le liquide sur les parois de la citerne. Ces forces sont provoquées par les effets de la masse ajoutée lorsque la fréquence d'excitation est grande. La méthode peut aussi être étendue pour une analyse tridimensionnelle de la citerne à six degrés de liberté.

D'autre part, la méthode des solutions fondamentales est une méthode de simulation numérique permettant la résolution des problèmes linéaires. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'utilise pas de maillage sur un corps spécifique comme la méthode des éléments finis. Son utilisation a permis de développer un modèle analysant les vibrations libres d'un liquide dans n'importe quelle forme de citerne [20] en trouvant les fréquences vibratoires naturelles des surfaces libres du liquide. D'autres modèles numériques ont aussi été réalisés dans le but d'étudier le comportement du liquide dans des réservoirs [21, 22, 23].

Des études expérimentales ont été réalisées afin d’approfondir les connaissances sur le comportement des liquides dans des citernes de différentes formes partiellement remplies [24, 25, 26, 27, 28]. Les résultats sont comparés avec des simulations numériques en utilisant diverses méthodes pour le calcul de la réponse non linéaire du ballonnement du liquide. La figure 2-2 indique l’un des montages expérimentaux conçus quant à l’observation du comportement du liquide dans une citerne :



Figure 2-2: Étude expérimentale d’une citerne [26].

2.2 La géométrie de la citerne

2.2.1 Géométrie extérieure

Plusieurs recherches ont été consacrées à l’égard de l’optimisation de la géométrie des citernes partiellement remplies. Dans sa thèse, Kang [29] a développé un modèle permettant d’obtenir une section optimale pour chaque taux de remplissage en utilisant

des méthodes d'optimisation avancées. Le but consiste à d'acquérir une citerne ayant une hauteur minimale de centre de masse tout en réduisant le mouvement latéral du liquide afin de diminuer le moment de renversement du véhicule. Ensuite, il a analysé les performances dynamiques de ces citernes en étudiant le comportement du liquide et son influence sur la stabilité du véhicule pour différentes formes conventionnelles. La figure 2-3 représente certaines formes optimales obtenues par Kang pour différents taux de remplissage :

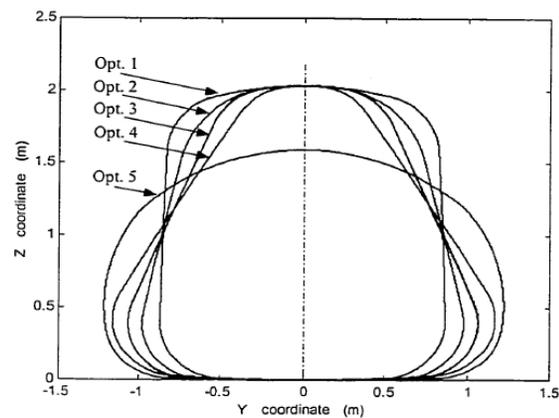


Figure 2-3: Formes de citernes optimales pour différents taux de remplissage [29].

Les formes opt.1, opt.2, opt.3, opt.4 et opt.5 (Figure 2-3) sont respectivement les citernes optimales pour les taux de remplissage de 40 %, 50 %, 60 %, 70 % et 100 %. Dans une autre étude, Kang [30] a comparé l'effet du mouvement du liquide sur le comportement du véhicule par rapport à quatre géométries différentes présentées dans la figure 2-4.

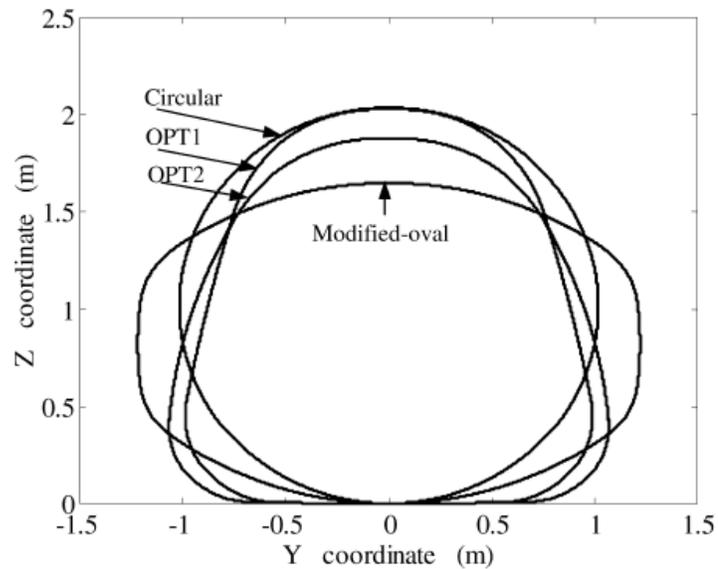


Figure 2-4: Sections latérales étudiées par Kang [30].

Notons que ces modèles optimaux sont plus performants au niveau de la réduction de la réponse latérale du liquide en mouvement tout en gardant un centre de masse assez bas. Cela mène à la réduction de son influence sur la stabilité du véhicule.

Ziarani [31] a développé une nouvelle méthode d'optimisation en exploitant un algorithme génétique connu pour sa robustesse et son utilité dans le cas des fonctions multimodales, discontinues et non différentiables. Il a été appliqué afin de minimiser le moment de renversement du véhicule dû au déplacement de la charge dans la citerne partiellement remplie et à la hauteur du centre de masse de la section. Il a aussi utilisé les courbes B-Spline dans l'intention de fournir la flexibilité nécessaire pour la section latérale de la citerne, Celui-ci a obtenu un modèle optimal pour chaque taux de remplissage. Les résultats sont comparés aux formes de citernes les plus utilisées.

Finalement, il a retrouvé les mêmes résultats obtenus par Kang [29]. En effet, une citerne ayant sa base plus large que son sommet permet de réduire le mouvement latéral du liquide tout en ayant un centre de masse plus bas.

2.2.2 Géométrie intérieure

Afin de limiter le mouvement du liquide dans les citernes partiellement remplies, certains chercheurs ont étudié la possibilité de modifier la géométrie intérieure de la citerne en utilisant des chicanes transversales ou longitudinales. L'utilisation des chicanes rigides longitudinales dans une citerne à section elliptique [32] permet de limiter les oscillations sur la surface du liquide. En variant la longueur des semi-axes et la largeur des chicanes installées directement sur la surface libre du liquide dans le cas d'un taux de remplissage de 50 %, il est possible de comparer différents résultats et d'observer l'effet de la géométrie de la citerne et de la longueur des chicanes sur la limitation des oscillations sous différents modes. L'étude de la convergence en utilisant une approche par les séries de Fourier a permis d'obtenir une convergence rapide avec un temps de calcul minimal dans le cas de citerne avec chicanes. Cependant, ce type de chicanes n'est efficace que pour des taux de remplissage précis.

Dans une autre étude, trois différents types de chicanes, présentés dans la figure 2-5, ont été ajoutés à une citerne à section circulaire [33] dans le but de limiter les oscillations latérales du liquide.

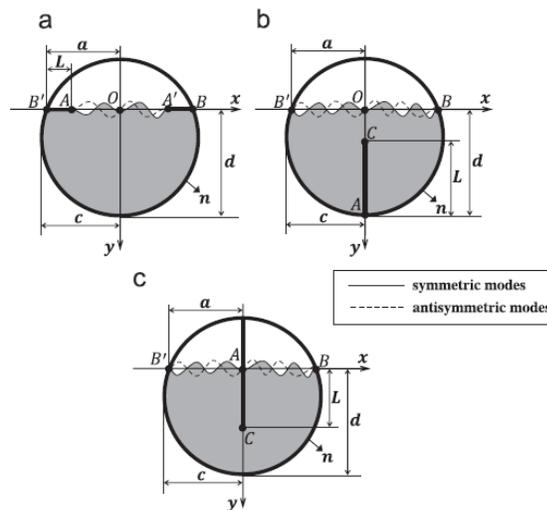


Figure 2-5: type de chicanes étudiées [33].

La méthode consiste à comparer l'impact du taux de remplissage, le positionnement et la longueur des chicanes sur la fréquence, symétrique et antisymétrique, du ballotement du liquide et de la pression hydrodynamique associée. Cette approche semi-analytique se base sur la linéarisation théorique des surfaces en utilisant une technique de mappage puissante afin de se focaliser sur la section latérale de la citerne en deux dimensions. Pour les chicanes de type **a** (figure 2-5), si on augmente leur largeur, les fréquences antisymétriques tendent vers des fréquences symétriques. D'autre part, les chicanes de type **b** (figure 2-5) n'ont pas d'effet considérable sur les fréquences du ballotement si la surface libre du liquide dépasse la hauteur de la chicane. De même, les chicanes de type **c** (figure 2-5) n'affectent pas les fréquences du ballotement si le taux de remplissage est faible. On en conclut finalement que les chicanes de type **a** sont les plus appropriées dans le cas d'une citerne remplie légèrement et qui est soumise à des excitations moyennement petites. Notons

aussi que celles de type **c** ont le plus d'influence sur les fréquences du ballotement si le taux de remplissage est plus élevé. Nous pouvons citer d'autres études numériques et expérimentales qui ont été consacrées à l'analyse de l'effet des chicanes sur le comportement du liquide [34, 35, 36, 37].

2.3 Modèles mécaniques équivalents

2.3.1 Modèles mécaniques équivalents 2D pour la simulation du liquide

Dans la littérature, il existe plusieurs modèles mécaniques équivalents permettant de simuler le mouvement du liquide dans des citernes partiellement remplies de différentes géométries. En 1966, Abramson [38] a rassemblé plusieurs travaux effectués précédemment discutant de l'utilisation de modèles mécaniques simples dans la simulation du ballotement du liquide dans différentes formes de réservoirs verticaux (cylindrique, sphérique, ellipsoïdale, rectangulaire, conique...). La simulation des modes de vibration se fait à l'aide d'un système masse-ressort ou un pendule simple. Toutefois, Abramson n'a employé que le système masse-ressort, car il a remarqué que les deux systèmes procurent le même résultat. Ensuite, il a déduit que le premier mode de vibration du liquide demeure le plus dominant à cause de la surface libre quant à n'importe quelle forme de citerne. La figure 2-6 représente les différents modes de vibration du liquide modélisées par des systèmes masse-ressort.

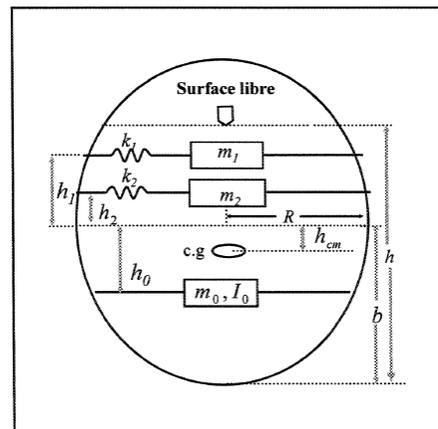


Figure 2-6: Modèle équivalent pour une citerne ellipsoïdale [38].

Dans une autre section, Abramson a simulé la résistance au mouvement d'un liquide (viscosité) en ajoutant un amortisseur au système masse-ressort dans le but d'amortir les oscillations de la masse. Finalement, il a conclu que le système élaboré peut représenter plusieurs formes de citernes avec des taux de remplissage variés, en introduisant les paramètres adéquats tels que la masse, le coefficient d'amortissement, la hauteur et la raideur du ressort. Les modèles proposés par Abramson ont inspiré plusieurs autres études utilisant le même type de modèles équivalents [39-40].

D'autre part, Ranganathan [41] a simulé le mouvement du centre de masse du liquide dans une citerne cylindrique par le mouvement d'un pendule simple où la masse du pendule est soumise à une accélération externe et oscille sans frottement. La figure 2-7 présente le système mécanique considéré.

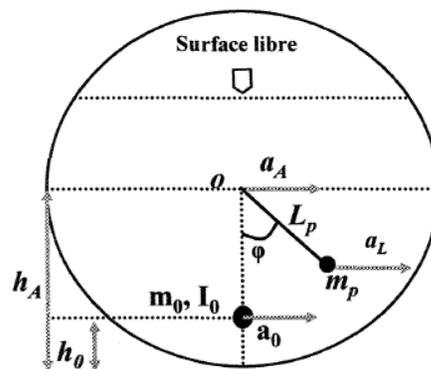


Figure 2-7 : Modèle du pendule dans une citerne cylindrique [41].

La masse oscillante désigne le centre de masse du liquide, l'angle φ représente le déplacement du pendule tandis que la masse fixe simule l'inertie et le poids de la partie restante du liquide qui n'est pas en mouvement. Cette masse est négligeable dans le cas de réservoirs horizontaux. Le pendule oscille autour de l'axe central de la citerne. Les deux masses sont calculées à l'aide d'une relation entre les équations obtenues par le modèle mécanique et les équations décrivant le mouvement dynamique du liquide. La longueur du pendule est calculée en se basant sur les fréquences du ballonnement et les résultats numériques. Néanmoins, ce modèle de pendule ne tient pas compte du mouvement du liquide sur la surface libre. Le modèle du pendule a été repris dans d'autres recherches pour simuler le mouvement du liquide dans différents réservoirs [42, 43, 44].

D'autres systèmes mécaniques ont été élaborés afin d'obtenir des résultats plus précis pour certaines formes et conditions spécifiques de réservoirs [45, 46, 47, 48,

49]. Par exemple, pour un réservoir rectangulaire long et profond [38], on a utilisé un système à deux degrés de liberté constitué d'un pendule inversé en forme de T et d'un système masse-ressort attaché sur la partie horizontale du pendule comme le montre la figure 2-8 à droite.

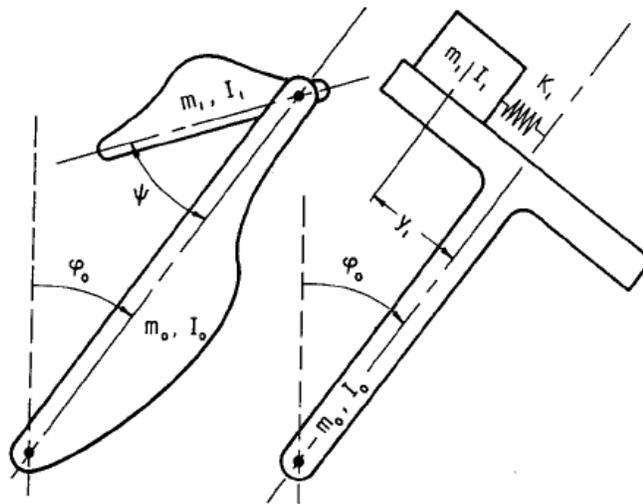


Figure 2-8 : Modèles équivalents à des réservoirs longs et profonds [38].

Selon ce modèle, l'axe de rotation du pendule représente la partie du liquide qui se trouve au fond du réservoir. On remarque que le mouvement du liquide est de plus en plus faible quand on s'approche du fond de la citerne. En outre, le système masse-ressort simule le mouvement important du liquide sur la surface libre. Un autre modèle simplifié représente le mouvement du liquide dans le même type de réservoir. Ce système est constitué d'un pendule combiné ayant deux axes de rotation (figure 2-8 à gauche). La barre la plus longue est en forme de pendule inversé possédant un axe en

exemple, en ce qui concerne des citernes sphériques, le mouvement du liquide sur la surface libre est plus complexe que dans des citernes avec des parois parallèles telles que les citernes rectangulaires, cylindriques ou elliptiques. Dans ce cas, un pendule simple à deux dimensions ne suffit pas pour donner de bons résultats. Un nouveau modèle a été élaboré afin de simuler le mouvement latéral du liquide dans une citerne horizontale excitée par une accélération latérale [51]. Ce modèle permet de calculer les déplacements et les forces de pression de la surface libre et du reste du liquide dans la citerne. Le liquide est alors séparé en deux sections. La première masse m_1 représente la partie qui oscille sur la surface libre tandis que la deuxième masse m_2 représente le ballonnement latéral du reste du liquide au fond du réservoir comme le montre les figures 2-10 et 2-11.

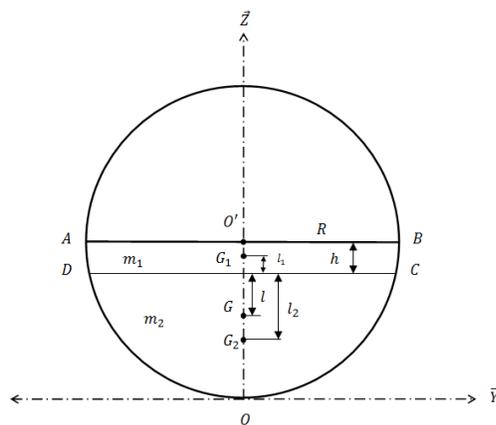


Figure 2-10 : Répartition des masses du liquide [51].

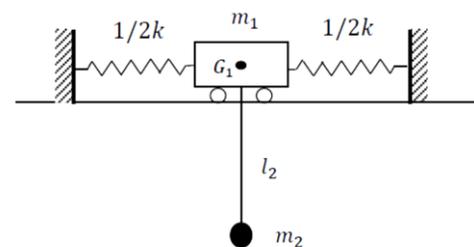


Figure 2-11 : Modèle équivalent pour une citerne horizontale [51].

La masse du liquide oscillant sur la surface libre est représentée par un système masse-ressort, le reste du liquide est représenté par un pendule attaché à la première

masse qui modélise le déplacement de son centre de masse. Les paramètres du système sont calculés en fonction de la géométrie de la citerne (circulaire, elliptique ovale, trapézoïdale) dans le but d'obtenir une meilleure comparaison. Les résultats obtenus à partir de ce modèle se comparent bien avec les résultats acquis par des méthodes plus complexes. Cependant, le système ne tiens pas compte des excitations verticales et longitudinales.

2.3.2 Modèles mécaniques équivalents 3D dans différents domaines

Les systèmes mécaniques sont utilisés dans différents domaines afin de simuler des phénomènes complexes. La facilité de l'étude des systèmes mécaniques tels que les masses-ressorts a conduit les chercheurs dans plusieurs domaines à les utiliser pour la modélisation de mouvements complexes, notamment, dans l'animation graphique par ordinateur. Les systèmes masses-ressorts sont souvent utilisés pour leur simplicité d'implantation et leur mise en œuvre rapide. De plus, l'utilisation de ces systèmes dans la simulation des corps déformables permet d'obtenir, à la fois un aspect géométrique approprié à la topologie de l'objet étudié et un aspect physique simulant les différentes interactions internes et externes.

Plusieurs modèles ont été élaborés afin de modéliser des corps déformables dans l'animation graphique par ordinateur. En effet, les modèles géométriques continus se sont surtout intéressés à reproduire le comportement en surface des objets. Notons que ceux-ci ne garantissent pas le comportement à l'intérieur de l'objet. D'autre part, les

méthodes de résolution numérique telles que la méthode des éléments finis nécessitent un temps de calcul long et un grand espace mémoire, d'où leur incapacité à effectuer des simulations en temps réel. Les systèmes masses-ressorts ont la particularité de s'adapter en fonction des propriétés physiques et de la géométrie du corps étudié. Par exemple, un modèle physique d'animation de tissus a été élaboré en utilisant un réseau de systèmes masses-ressorts [52]. Ici, le tissu n'est pas considéré comme une surface continue qui devra être discrétisée (comme dans le cas de la méthode des éléments finis) mais plutôt comme une structure discrète d'éléments où chaque point de masse et chaque ressort peut être traité individuellement. Le modèle élastique est ainsi un réseau de masses virtuelles, chaque masse est attachée à ses voisines par un ressort ayant une masse négligeable. Afin de permettre une meilleure simulation des tissus, la liaison entre les masses voisines est réalisée de trois différentes façons comme le montre la figure 2-12.

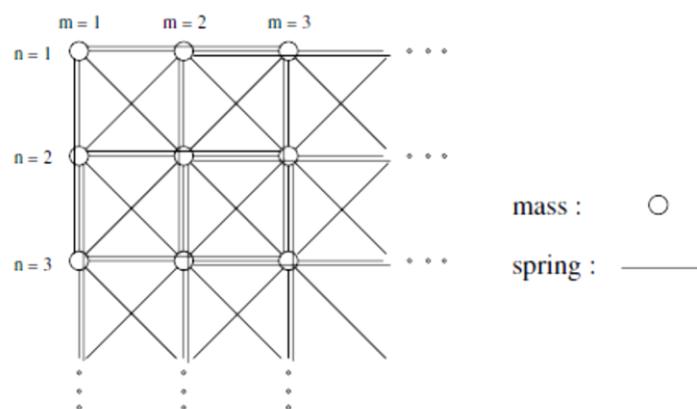


Figure 2-12 : Liaisons entre les masses pour un modèle de tissu [52].

Les ressorts reliant les masses sont alors séparés en trois catégories : les ressorts structurels, les ressorts de cisaillement et les ressorts de flexion. Les équations de mouvement sont ainsi obtenues en utilisant la loi fondamentale de la dynamique. Les tensions des ressorts représentent les forces internes du système. Les forces externes sont de nature diverse selon le type de la charge à laquelle le modèle est exposé. Il est possible d'ajouter un amortissement visqueux au système dans le but de modéliser la dissipation de l'énergie mécanique. Les équations de mouvement sont ainsi solutionnées par une intégration numérique en utilisant la méthode d'Euler explicite. Pour éviter le problème de contact entre les masses, Provot a introduit une méthode heuristique appelée les procédures de la dynamique inverse dans l'algorithme. Les résultats obtenus par le modèle ont donné une bonne simulation du tissu, et ce, avec un temps de calcul faible par rapport à d'autres méthodes.

Un autre modèle qui emploie les systèmes masses-ressorts a été élaboré afin de simuler en 3D un feu à temps réel [53]. Le modèle est composé d'un ensemble de nœuds (points de masse) qui sont connectés à leurs nœuds adjacents par des ressorts comme le montre la figure 2-13.

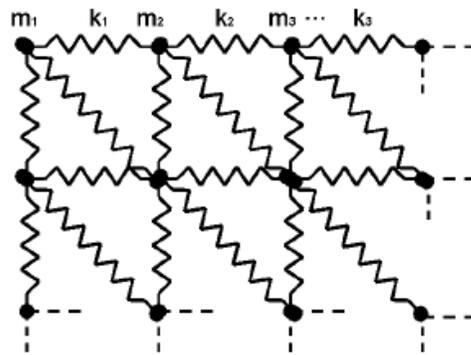


Figure 2-13 : Modèle pour la simulation d'une flamme [53].

Les déplacements et déformations que subissent les nœuds et les ressorts sont basés sur les forces appliquées telles que la gravité, l'effet du vent et l'interaction avec un objet externe. Le but du modèle n'est pas de simuler les vraies interactions physiques d'une flamme, mais son mouvement et sa cinématique. Cependant, l'énergie de chaleur que subissent les particules de la flamme est simulée par l'énergie mécanique interne entre les nœuds. Le gradient de l'énergie définit les forces internes appliquées aux nœuds qui sont l'amortissement, la force de cisaillement et la force de flexion associés aux ressorts voisins. La somme des forces externes et internes exercées sur chaque nœud, pour un temps t donné, définissent son accélération et par la suite sa vitesse et son déplacement instantanés. Le modèle élaboré est ensuite jumelé avec un modèle graphique d'effets visuels afin d'obtenir une simulation de la flamme. Le modèle des masses-ressorts a ainsi permis d'incorporer la physique du feu. La vitesse d'exécution du modèle s'est avérée supérieure à toute autre méthode élaborée antérieurement.

Les modèles de corps mous simulent des objets réels qui se déforment par son interaction avec son entourage. Un objet mou est généralement modélisé par un ensemble de points dont chacun a ses propres propriétés physiques telles que la position, la vitesse et la force. Durant chaque pas de temps leurs propriétés changent à cause des interactions externes et des caractéristiques internes du modèle. Des recherches approfondies ont été menées afin de modéliser les corps mous. Des modèles physiques complexes ont été développés pour simuler d'une manière réaliste et précise les déformations de corps mous, notamment, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. Ceci implique un grand nombre d'opérations de calcul. Il existe des modèles basés sur le système masse-ressort qui représentent approximativement la déformation d'un corps mou. Ces modèles sont intuitivement simples et s'exécutent plus rapidement que les autres modèles. Il est possible de modéliser un corps mou en utilisant deux méthodes différentes. La première méthode consiste à modéliser un corps en 3D par une structure de grille 2D de nœuds et de ressorts tels que le tissu [52]. L'autre méthode permet de modéliser un objet 3D par une structure 3D de masses-ressorts telle qu'un ballon bondissant [54]. Dans ces modèles, il est possible d'utiliser un maillage triangulaire, rectangulaire ou sous forme de tétraèdres de telle sorte que chaque point possède ses propres propriétés. Le modèle développé pour simuler le ballon rebondissant utilise un maillage triangulaire comme le montre la figure 2-14.

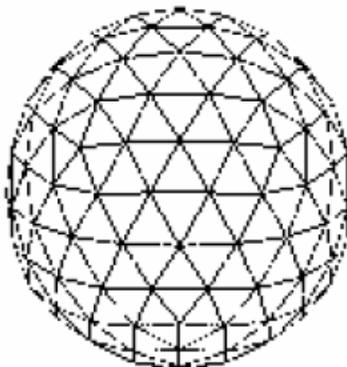


Figure 2-14 : Maillage pour un ballon rebondissant [54].

Chaque point i possède six points voisins tels que chaque pair de points voisins forme un triangle avec le point i . En plus de la force gravitationnelle, des forces exercées par les ressorts et les forces d'amortissement, le modèle prend en considération les forces de pression interne du ballon. En effet, pour un point donné, la force gravitationnelle n'est que son poids. Les points sont connectés par des ressorts afin de simuler l'élasticité du corps mou, la tension exercée sur un point est la somme des tensions de tous les ressorts voisins. D'autre part, les amortisseurs connectés entre deux points modélisent la résistance visqueuse du corps, ils permettent de diminuer la vitesse relative des points pour que le corps revienne à son état initial. La pression interne est ensuite calculée en utilisant la loi des gaz parfaits en assumant que le ballon est rempli de molécules de gaz parfait. La force de pression est ajoutée aux équations de mouvement de chaque masse en utilisant la seconde loi de Newton. L'intégration numérique pour l'animation du modèle de corps mou est effectuée en utilisant une nouvelle méthode implicite simplifiée. L'idée est d'utiliser une approximation pour

chaque force appliquée sur un point. Le corps mou est ainsi animé d'une manière plus réaliste qu'en utilisant les méthodes d'Euler Implicite et Euler Explicite.

En biomécanique, l'utilisation de l'animation graphique est nécessaire pour la simulation de plusieurs phénomènes. De nombreux modèles utilisent les systèmes masses-ressorts pour la simulation en temps réel de chirurgies. D'autres modèles traitent les mouvements des muscles et des articulations. Ceci est en raison de leur facilité d'implémentation et leur bon comportement en temps réel. Afin de représenter la déformation d'un muscle en temps réel, une méthode utilisant les masses-ressorts a été élaborée [55]. L'approche utilisée consiste à prendre en compte les lignes d'action et la forme du muscle. Les lignes d'action représentent les forces appliquées par le muscle sur l'os dont il est attaché. Le nombre de lignes dépend de la forme et la complexité du mouvement du muscle. La forme du muscle est simulée en utilisant des points de masses connectés par des ressorts. Ces points de masses sont organisés de telle façon à assurer la correspondance entre la ligne d'action et la forme du muscle. Pour cela, chaque point est placé entre deux points voisins horizontalement et deux autres verticalement en considérant la ligne d'action comme référence. Le mouvement de chaque particule est défini par sa nature et par la position des particules voisines. Afin de réduire les calculs, le muscle est représenté par sa surface externe seulement en considérant que la déformation du muscle peut être représentée sans prendre en considération ses caractéristiques volumiques. Le modèle physique est basé sur l'application de forces sur tous les points de masse qui compose le maillage. Les forces appliquées sur chaque particule sont :

- **L'élasticité** : Pour simuler l'élasticité du muscle, chaque particule est connectée avec ses voisines par des ressorts linéaires comme l'illustre la figure 2-15. La force d'élasticité est alors la somme des forces produites par les ressorts connectés à une seule particule.

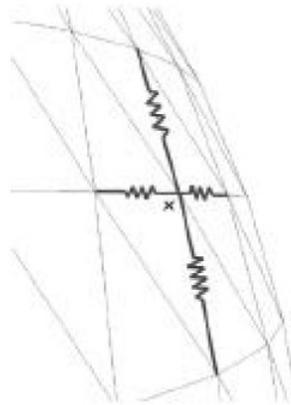


Figure 2-15: modèle élastique de la surface externe du muscle [55].

- **Courbure et torsion** : C'est la force qui détermine le degré de flexion et de torsion d'une surface musculaire. Cette force est également calculée pour chaque point de masse en fonction des points voisins. Des ressorts angulaires ont été utilisés afin de simuler ces effets. Chaque particule comporte deux ressorts angulaires comme le montre la figure 2-16.

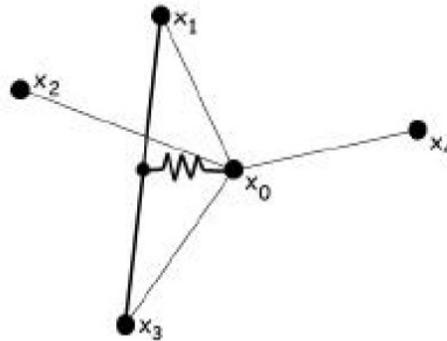


Figure 2-16 : ressorts angulaires [55].

L'implémentation de ces ressorts se fait de telle sorte que le ressort soit attaché entre la particule principale et le milieu du segment formé par ses points voisins opposés. Les courbures verticales et horizontales sont ainsi simulées.

- **Les contraintes géométriques** : ces forces permettent d'améliorer la réponse à différents comportements du modèle par rapport aux forces internes appliquées. Les forces de contraintes peuvent être élaborées en utilisant la dynamique inverse. Cela veut dire qu'on spécifie les contraintes de manœuvre sur un point et on calcule la force nécessaire pour limiter le mouvement de ce point. Cette méthodologie permet d'ajouter plusieurs contraintes géométriques sans modifier le modèle physique.

La simulation du mouvement du muscle se fait en premier lieu à partir des lignes d'action. La compression ou l'extension des muscles dépend directement de la ligne d'action. Cependant, la déformation musculaire finale dépend d'autres paramètres. La simulation du mouvement est effectuée en appliquant les équations de mouvement sur chaque particule du modèle en utilisant la méthode des équations de Lagrange. La

solution du système d'équations se fait par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les paramètres d'entrée à spécifier sont l'élasticité, les courbatures des constantes, les longueurs de compression et d'extension de la ligne d'action, le pas de temps utilisé, la masse totale du muscle et le facteur d'amortissement. Les résultats de simulation obtenus ont montré que la déformation du muscle paraît naturelle et que le mouvement est continu. Pour la vitesse de la simulation, elle est acceptable pour des applications à temps réel dans le cas d'un seul muscle. Toutefois, cela dépend de la résolution désirée.

2.4 Matériaux, normes et codes techniques

2.4.1 L'utilisation de l'aluminium

a) L'aluminium dans le transport

Les premières applications de l'aluminium dans l'industrie de transport furent recensées au début du 20^e siècle. En 1899, une petite voiture de sport montée sur châssis en aluminium est présentée à l'exposition automobile internationale de Berlin. En, 1903, les frères Wright écrivent une page de l'histoire de l'aviation en réalisant le premier vol mondial propulsé par un moteur allégé à l'aide d'éléments en aluminium. Utilisé pour la première fois en 1910 dans les autobus, l'aluminium entre dans la construction des véhicules industriels dans les années 1930. Les premières citernes, fourgons et bennes en aluminium sont mises en service dans la décennie 1950. En

1948, la société automobile Land Rover commence à utiliser des tôles en aluminium pour ses carrosseries. Dans les années 1980, l'aluminium devient le métal de prédilection pour réduire les coûts d'utilisation et augmenter l'accélération des trains. En 1996, un train à grande vitesse a été mis en service en France avec une structure en aluminium. Non seulement il permet de transporter 40 % de passagers supplémentaires, mais il pèse 12 % de moins que la version en acier [56].

Aujourd'hui, l'utilisation de l'aluminium s'est répandue de manière exponentielle. En effet, l'aluminium joue un rôle essentiel dans l'industrie aéronautique. Il représente plus de 60 % du poids structurel de l'*Airbus* A380 et jusqu'à 80 % pour certains appareils destinés aux moyens courriers. Les superstructures de la plupart des navires à grande vitesse et des paquebots de croisières sont en aluminium. Plus de la moitié des yachts de luxe ont leurs coques en aluminium. En Europe, des métros et des tramways en aluminium sont en service dans la plupart des grandes villes. À côté des voitures de haut de gamme (où il y a beaucoup d'aluminium), la quantité moyenne d'aluminium utilisée dans les voitures particulières s'élevait à 130 kg en 2005. Une voiture sur quatre en Europe est dotée d'un capot en aluminium et près d'un tiers des voitures européennes sont équipées de pare-chocs en aluminium [56].

b) Les alliages d'aluminium et leurs applications

L'aluminium pur est connu pour sa faible résistance mécanique. Afin de l'améliorer, des éléments d'alliage sont ajoutés. Ces éléments permettent un

changement positif des caractéristiques mécaniques [57]. Il existe deux familles d'alliages d'aluminium. Les alliages de corroyage et les alliages de fonderie. Les alliages de corroyage sont destinés à être transformés par des techniques de laminage, extrusion, tréfilage ou forgeage. Les alliages de fonderie sont obtenus en fondant les lingots et en les coulant dans des moules ayant directement les formes du produit final. Chaque type d'alliage possède ses propres caractéristiques. Le choix de ces alliages dépend de l'utilisation de la pièce qu'on veut usiner. Le tableau 2-1 représente les désignations des alliages suivant l'élément principal ajouté :

Tableau 2-1: Désignation des alliages d'aluminium [57].

Élément d'alliage principal	Alliage de corroyage	Alliage de fonderie
Aucun (aluminium pur)	1xxx	
Cuivre	2xxx	2xxxx
Manganèse	3xxx	
Silicium	4xxx	4xxxx
Magnésium	5xxx	5xxxx
Magnésium silicium	6xxx	
Zinc	7xxx	7xxxx
Autres éléments (fer, etc.)	8xxx	

L'aluminium pur est rarement utilisé dans les pièces automobiles à cause de sa faible résistance mécanique. L'aluminium-cuivre est souvent utilisé dans des applications militaires et aéronautiques à cause de sa forte résistance à la traction. Par exemple, l'alliage 2024 est utilisé dans la fabrication des avions en aluminium. L'alliage 2618 a été utilisé pour construire la structure du Concorde. L'alliage de fonderie 21100 est utilisé pour la fabrication des suspensions de véhicules industriels. L'aluminium-manganèse possède des propriétés mécaniques élevées avec une bonne résistance à la corrosion. L'alliage 3003 est le plus connu de cette série. Il est utilisé dans la fabrication des parois latérales et les toits pour autobus ainsi que les fourgons de camions. L'aluminium-silicium est moins utilisé que les autres séries. Ils sont souvent employés dans la fonderie ou comme matériaux d'apport (4043, 4047 et 4195). L'alliage 4032 sert à fabriquer des moteurs de bateau, des moteurs de voitures, des pistons et des roues d'auto. L'alliage de fonderie 43000 permet de fabriquer des pièces de véhicules aux formes complexes subissant des contraintes moyennes. La série d'aluminium-magnésium offre la meilleure combinaison de haute résistance à la traction et de la résistance à la corrosion en plus de la bonne soudabilité. D'ailleurs, les alliages 5086 et 5083 sont souvent utilisés dans les applications marines telles que les plates-formes de forage. Ils sont aussi utilisés pour fabriquer des citernes pour le transport des liquides et des pulvérulents ainsi que les bennes basculantes pour camions. Il est aussi possible de fabriquer des citernes en utilisant les alliages 5383, 5182, 5186, 5059 et 5088. Les alliages 5005 et 5052 sont utilisés dans la fabrication des parois de fourgons pour camions. Les alliages 5052 et 5754 permettent de

fabriquer des réservoirs d'essence. La série 6xxx est surtout utilisée pour les profilés. On peut citer l'alliage 6061 qui est utilisé dans la fabrication des camping-cars et des containers de camions. Les alliages 6061 et 6082 sont utilisés dans la fabrication des roues. Les alliages d'aluminium-Zinc sont utilisés dans des applications spéciales nécessitant une très haute résistance mécanique. Par exemple, l'alliage 7075 sert à la fabrication des plaques de blindage et des avions. Les alliages 7003 et 7108 sont utilisés dans la fabrication des pare-chocs, des boîtiers anticollisions et des protections anti-retournement [56, 57].

c) Parois en aluminium

Les parois de citernes sont généralement fabriquées par des feuilles d'aluminium d'épaisseurs variées. Pour cela, on utilise la technique du laminage. En effet, après l'ajout des éléments d'alliage à l'aluminium en fusion, ce dernier est coulé dans des formes variées de moules. Les produits destinés au laminage sont en formes de dalles (figure 2-17). La première étape du laminage consiste à se débarrasser de la couche d'oxyde de la dalle d'aluminium ensuite de la chauffer jusqu'à une température allant de $350^{\circ}C$ à $550^{\circ}C$ dépendamment de l'alliage utilisé. La dalle est ensuite placée entre des rouleaux compresseurs. Elle est alors amincie par la pression des rouleaux (figure 2-18). La distance entre ces derniers diminue progressivement jusqu'à l'atteinte de l'épaisseur désirée. Les feuilles qui n'ont pas atteint l'épaisseur requise sont enroulées à cette étape et sont refroidies avant d'être laminées à froid pour réduire davantage l'épaisseur [56, 57].



Figure 2-17: Dalles d'aluminium avant laminage [56].



Figure 2-18: Train de laminage [56].

Lorsque l'alliage est transformé par laminage, il subit des changements dans sa microstructure. Ce traitement métallurgique s'appelle l'écrouissage. Ce traitement ne peut s'appliquer que sur les alliages des séries 1xxx, 3xxx, 4xxx et 5xxx. On les nomme : alliages à durcissement par écrouissage. En effet, l'écrouissage durcit le métal et réduit sa ductilité. Afin de corriger cet inconvénient, l'alliage peut subir des traitements après l'écrouissage. L'état métallurgique écroui est symbolisé par la lettre *H*, suivie par 2 ou 3 chiffres. Le premier chiffre indique le traitement subit après l'écrouissage :

- ***H1* : Écrouissage seulement.** Il s'applique aux produits qui sont durcis seulement par écrouissage, sans traitement thermique additionnel.

- **H2 : Écrouissage puis restauration.** Il s'applique sur les matériaux qui sont écrouis plus qu'ils n'en ont besoin. Le matériau est partiellement recuit afin d'être corrigé.
- **H3 : Écrouissage et stabilisation.** Il s'applique aux matériaux qui sont écrouis et qui ont beaucoup perdu de leurs propriétés mécaniques. Le matériau est alors stabilisé par un traitement thermique à basse température ou par induction de chaleur pendant la fabrication. La stabilisation augmente la ductilité, mais réduit partiellement la résistance à la traction. Cet état s'applique surtout aux alliages de la série 5xxx.

Le deuxième chiffre désigne l'état de dureté ou le degré d'écrouissage de l'alliage :

- *HX2* : $\frac{1}{4}$ dur.
- *HX4* : $\frac{1}{2}$ dur.
- *HX6* : $\frac{3}{4}$ dur.
- *HX8* : dur (État de référence).

D'autre part, l'assemblage des parois du réservoir se fait le plus souvent en utilisant la technique de soudage. Lors de ce procédé, il y a fusion locale des éléments à assembler avec ou sans l'ajout d'un produit d'apport. La soudabilité de l'aluminium et ses alliages est fortement liée à leurs différentes caractéristiques [58]. En général, les alliages d'aluminium de corroyage sont soudés à l'arc avec un métal d'apport différent du métal de base. D'autre part, lors du soudage, les propriétés mécaniques dans les zones affectées thermiquement (ZAT) diminuent sensiblement par rapport au métal de base. Les alliages à durcissement par écrouissage (1xxx, 3xxx, 5xxx) sont

soudables par fusion, sans risque de fissuration à chaud et avec ou sans métal d'apport. Leur particularité est qu'ils sont soudables par tous les procédés de soudage connus en utilisant des métaux d'apports identiques aux métaux de base. Néanmoins, si les alliages sont soudés à l'état écroui, les assemblages auront des caractéristiques mécaniques inférieures à celles du métal de base. En effet, le chauffage du métal lors du procédé va produire des modifications structurales dans les ZAT, dépendamment des températures atteintes et du taux d'écrouissage du métal de base. Ces modifications diminuent le durcissement par écrouissage initial. Cependant, les alliages dont l'écrouissage est faible donneront des soudures aux propriétés pratiquement identiques à celles des métaux de base. En pratique industrielle, les alliages fortement écrouis sont considérés comme non-soudables. Plusieurs procédés de soudages sont adéquats aux alliages à durcissement par écrouissage de faibles épaisseurs. On peut citer le soudage à l'arc *TIG* ou *MIG*, le soudage laser, le soudage au chalumeau oxyacétylénique, le soudage électrique par résistance, le soudage par friction...

2.4.2 Normes et codes techniques

Il existe différents codes et normes associés à la conception des citernes pour les véhicules routiers. Plusieurs organisations ont posé des normes de conception de différents types de réservoirs. On peut citer parmi elles :

- L'organisation internationale de normalisation *ISO*.
- Comité européenne de normalisation *CEN*.

- American society for testing and materials *ASTM*.
- American society of mechanical engineers *ASME*.

Dans le cadre de notre étude nous allons nous intéresser surtout aux normes imposées par l'*ASME*. Cette organisation s'est beaucoup intéressée aux règles concernant les réservoirs. D'ailleurs un code comportant 12 sections, intitulé « *ASME Boiler Pressure Vessel Code (BPVC)* », est spécialement consacré aux normes sur les chaudières et les réservoirs à haute et basse pression. La section *XII* [59] du même code discute les règles pour la construction et la maintenance des citernes pour le transport routier.

a) Pression autorisée

Les citernes transportant des liquides tels que l'huile, l'essence, l'eau et le lait sont classé comme des réservoirs à basse pression. La pression maximale autorisée ne doit pas dépasser 34.5 *bar* pour ce type de citerne. Il existe cinq catégories de ce type de citernes. Le tableau 2-2 résume leurs critères de conception en fonction de la pression interne.

Tableau 2-2: Critères de conception pour des citernes à faible pression [59].

Catégorie	406	407	412	331	338
Pression maximale autorisée en <i>bar</i>	0.276	6.90	6.90	34.5	34.5
Pression minimale de conception en <i>bar</i>	0.183	1.72	0.345	6.90	1.75

Ces catégories de citernes possèdent généralement une forme de section latérale circulaire. Cependant, dans certains cas, il est possible d'utiliser d'autres formes de sections.

b) Matériaux utilisés et contraintes maximales

Les matériaux utilisés dans la construction des citernes pour le transport routier sont énumérés dans la section *XII* de *BPVC* (Section *TM*). Nous allons citer seulement les alliages d'aluminium autorisés. En effet, les plaques, les bandes et les feuilles en aluminium peuvent être conçues par les alliages suivants :

- Série 1xxx : 1060 et 1100.
- Série 3xxx : 3003 et 3004.
- Série 5xxx : 5052, 5154, 5254, 5454, 5083, 5086, 5456 et 5652.
- Série 6xxx : 6061.

Les contraintes de traction maximales permises, la résistance à la traction et les limites d'élasticité pour ces alliages sont données dans la section II, partie D (Subpart-1, tableau 1-B) du même ouvrage [60], pour différentes épaisseurs et différentes températures d'utilisation.

La contrainte de compression longitudinale maximale admissible pour la conception des réservoirs sans joints soudés soumis à des charges qui produisent une compression longitudinale à l'intérieur doit être la plus petite des valeurs suivantes :

- (a) La contrainte de traction maximale permise du même matériau.
- (b) La valeur du facteur B calculé comme suit :

$$B = \frac{0.125 \times t \times E}{2 \times R_0} \quad (2.1)$$

Avec E qui représente le module d'élasticité du matériau désigné, R_0 le rayon extérieur de la citerne cylindrique et t l'épaisseur minimale requise des parois cylindriques. Lorsque la contrainte de cisaillement et la contrainte normale existent ensemble, les contraintes maximales principales ne doivent pas dépasser la contrainte autorisée et sont calculées comme suit :

$$S_{smax} = \left[0.25(S_x - S_y)^2 + S_s^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

$$S_{max} = 0.5(S_x + S_y) \pm S_{smax} \quad (2.3)$$

Avec S_{smax} la contrainte de cisaillement principale, S_{max} la contrainte principale normale, S_x la contrainte normale suivant x , S_y la contrainte normale suivant y et S_s la contrainte de cisaillement suivant les plans x et y .

D'autre part, pour les soudures longitudinales, les contraintes admissibles sur les soudures sont les mêmes que pour le matériau de base à l'état O en cas d'aluminium. Pour les autres matériaux, on prend 70 % de la contrainte admissible du métal de base. Dans le cas des soudures circonférentielles, la contrainte admissible est la plus petite valeur entre 70 % de la contrainte du matériau de base et la contrainte du matériau à l'état O . Pour des citernes non-cylindriques, la contrainte circonférentielle peut se calculer en utilisant les formules suivantes :

- Suivant la plus petite direction :

$$S_a = P / [t_h (\frac{1}{L_a + L_a/L_b})] \quad (2.4)$$

- Suivant la plus grande direction :

$$S_b = S_a L_a / L_b \quad (2.5)$$

Avec t_h est l'épaisseur du déflecteur moins la surépaisseur de corrosion, L_a est le rayon de courbure minimal suivant la plus petite direction et L_b est le rayon de courbure maximal suivant la plus grande direction.

c) Pression maximale autorisée et épaisseur minimale

Pour les citernes à section cylindriques, l'article TD-3 de la section XII de BPVC donne les formules permettant de calculer la pression maximale autorisée, notée P , et l'épaisseur minimale requise, notée t . Ces formules sont données comme suit :

- Dans le cas des contraintes circonférentielles, on suppose que les soudures sont longitudinales. Lorsque l'épaisseur ne dépasse pas la moitié du rayon interne, on utilise les formules suivantes :

$$t = \frac{PR}{SE - 0.6P} \quad \text{ou} \quad P = \frac{SEt}{R + 0.6t} \quad (2.6)$$

Tels que E est le coefficient d'efficacité, R est le rayon interne de la citerne, S est la contrainte maximale autorisée.

- Dans le cas de contraintes longitudinales, les soudures sont circonférentielles. Lorsque l'épaisseur ne dépasse pas la moitié du rayon interne on utilise les formules suivantes :

$$t = \frac{PR}{2SE + 0.4P} \quad \text{ou} \quad P = \frac{2SEt}{R - 0.4t} \quad (2.7)$$

Ici l'épaisseur minimale requise est la plus grande des deux valeurs obtenues dans les deux cas. De même, la pression maximale autorisée est la plus grande des deux valeurs obtenues par les deux formules. Il est aussi possible d'utiliser le rayon externe R_0 de la citerne cylindrique dans le cas de contraintes circonférentielles en utilisant les formules suivantes :

$$t = \frac{PR_0}{SE + 0.4P} \quad \text{ou} \quad P = \frac{SEt}{R_0 - 0.8t} \quad (2.8)$$

Les têtes de la citerne sont souvent de forme ellipsoïdale, torisphérique ou hémisphérique comme le montre la figure 2-19.

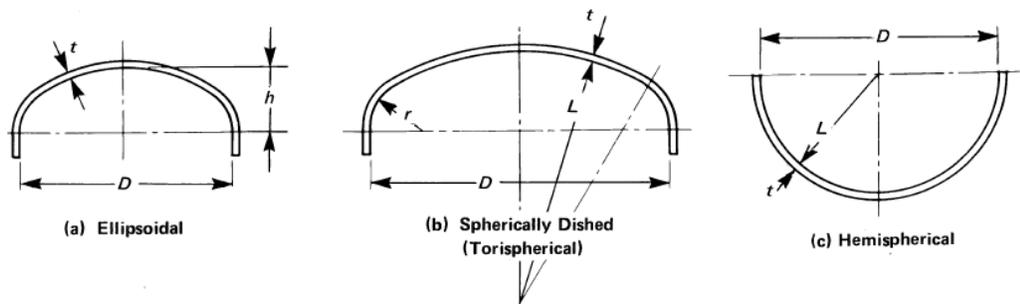


Figure 2-19: Formes conventionnelles des têtes de citerne [60].

Pour les têtes torisphériques, l'épaisseur minimale requise est la plus petite valeur de t obtenus par les deux formules suivantes :

$$t = \frac{PLM}{2SE - 0.2P} \quad \text{ou} \quad t = \frac{PLKE_{RT}}{4S_a E_T} \quad (2.9)$$

Tel que L est le rayon sphérique interne de la tête, E_{RT} est le module d'élasticité du matériau de conception à $20^\circ C$, E_T est le module d'élasticité pour température maximale de conception pour le même matériau, M et K sont obtenu par les tableaux TD-310.2-1 et TD-310.2-2 respectivement dans le même article [60]. Ces valeurs sont obtenues par interpolation des rapports t/L et r/D avec r le rayon interne de l'articulation et D le diamètre interne de la tête. Finalement, dans le cas des alliages d'aluminium, S_a se calcule en utilisant la formule suivante :

$$S_a = \frac{115000E_{RT}}{E_{ST}} \quad (2.10)$$

Avec E_{ST} est le module d'élasticité de l'acier à 20° C. La condition d'utilisation de ces formules est que $0.002 \leq t/L \leq 0.06$.

Pour des têtes ellipsoïdales, il est possible d'utiliser les mêmes formules que pour une tête torisphérique. Le ratio $D/2h$ doit être inférieur à 2 avec h étant la profondeur à l'intérieur de l'ellipsoïde mesurée à partir de la ligne tangente. On utilise une approximation des deux formes de tête. Par exemple, une tête ellipsoïdale, avec le grand semi-axe égale au double du petit semi-axe, peut être représentée comme une tête torisphérique de telle sorte que $r = 0.17D$ et $L = 0.9D$.

Dans le cas d'une tête hémisphérique, l'épaisseur ne doit pas excéder $0.356L$. L'épaisseur minimale requise se calcule en utilisant la formule suivante :

$$t = \frac{PL}{2SE - 0.2P} \quad (2.11)$$

Dans le cas des citernes possédant d'autres formes de section que la section circulaire, la pression de conception de la citerne doit être la pression maximale autorisée en plus de la pression statique en bas du réservoir. Le test de pression hydrostatique doit être 1.5 fois la pression de conception. La figure 2-20 montre les différentes formes de citernes possibles non circulaires.

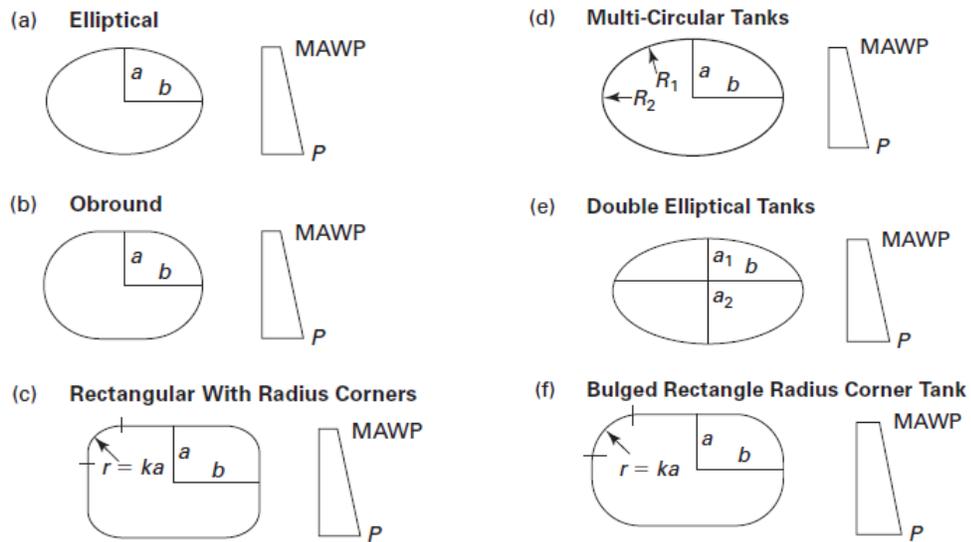


Figure 2-20 : Formes de section non circulaire possibles [60].

Pour les têtes de réservoir à basse pression, le rayon de la jointure doit être le plus élevé entre 12.7 mm et trois fois l'épaisseur requise de la paroi où la tête est attachée. Le tableau 1-1.4M de l'annexe modal *I* de la section *XII* de *BPVC* indique les épaisseurs minimales pour les catégories 406, 407 et 412 de citernes mobiles en fonction de leur capacité et du matériau choisi. Il existe d'autres règles pour les conditions de chargement des citernes mobiles concernant les accessoires qui sont liés à la citerne, la remorque, la sellette et l'évacuation dans l'annexe modal *I* de la section *XII* de *BPVC*.

2.5 Synthèse

Dans les dernières décennies, la stabilité des camions citernes a été le sujet de plusieurs études. En effet, l'impact du mouvement du liquide dans la citerne reste l'un des facteurs les plus influents sur leur comportement dynamique. Différents modèles analytiques et numériques ont été réalisés dans le but d'évaluer les efforts statiques et dynamiques du liquide et leur impact sur le comportement du véhicule. Cependant, l'élaboration d'un modèle avancé permettant d'obtenir des résultats convaincants nécessite des outils mathématiques et informatiques complexes, ainsi que des logiciels de simulation coûteux. D'autre part, les études expérimentales qui ont été dédiées à ce sujet sont avérées coûteuses et délicates. Ceci a motivé certains chercheurs à concevoir de nouvelles méthodes relativement simples permettant d'étudier le mouvement du liquide dans une citerne partiellement remplie. L'idée consiste à remplacer les oscillations du liquide par les vibrations de systèmes mécaniques tels que les systèmes masse-ressort ou les pendules. Plusieurs modèles mécaniques à 2-dimensions (2D) ont été développés afin de simuler le ballonnement du liquide dans des réservoirs de différentes géométries. Néanmoins, ces modèles ne prennent pas en considération plusieurs paramètres importants, surtout dans le cas des citernes pour véhicules routiers. Les forces exercées sur les citernes mobiles peuvent subvenir de n'importe quelle direction. Les déplacements du liquide et les forces de pressions exercées sur les parois de la citerne sont alors sous-estimées et peuvent causer des défauts de

conception. Ceci rend les modèles mécaniques 2D inefficaces pour la modélisation du mouvement du liquide.

Les modèles mécaniques sont utilisés dans différents domaines afin de simuler des phénomènes complexes. La facilité de l'étude des systèmes mécaniques tels que les masses-ressorts encourage les chercheurs dans plusieurs domaines à les employer dans la modélisation des phénomènes complexes. Notamment, dans l'animation graphique par ordinateur, les systèmes masses-ressorts sont souvent utilisés pour leur simplicité d'implémentation et leur mise en œuvre rapide. De plus, l'utilisation de ces systèmes dans la simulation des corps déformables permet d'obtenir, à la fois un aspect géométrique approprié à la topologie de l'objet étudié, et un aspect physique simulant les différentes interactions internes et externes. Plusieurs modèles ont été élaborés afin de modéliser des corps déformables dans l'animation graphique par ordinateur. En effet, les modèles géométriques continus se sont surtout intéressés à reproduire le comportement en surface des objets, mais ils ne garantissent pas le comportement à l'intérieur de l'objet. D'autre part, les méthodes de résolutions numériques telles que la méthode des éléments finis nécessitent un long temps de calcul et un grand espace mémoire, ce qui les rend incapables d'effectuer des simulations en temps réel.

L'utilisation de certains alliages d'aluminium dans la conception des citernes destinées au transport routier peut s'avérer très utile vu les propriétés physiques et mécaniques diversifiées qu'ils possèdent. La légèreté, la résistance à la corrosion, la soudabilité, la facilité d'usinage et la haute résistance mécanique des alliages 5xxx

(Aluminium-Magnésium) leur permet d'être les alliages les plus adaptés à la conception de citernes. D'autre part, il existe des normes associées à la fabrication et à l'entretien des citernes destinées au transport routier. La section *XII* du code de l'*ASME* intitulé « *ASME Boiler Pressure Vessel Code (BPVC)* » est consacrée entièrement aux règles de construction et de maintenance de ce type de réservoirs. L'application de ces normes est primordiale pour l'étude et l'optimisation des citernes réelles.

CHAPITRE 3

MODÈLE DE DISCRÉTISATION DU LIQUIDE DANS DES CITERNES

3.1 Préliminaires

D'après la revue de littérature, la modélisation des corps déformables par des systèmes masses-ressorts s'avère très utile et efficace. Parmi les principaux avantages de leur utilisation restent la facilité d'adaptation à des formes géométriques complexes et la rapidité d'exécution et de résolution des équations. D'autre part, l'utilisation de systèmes mécaniques 2D dans la simulation des liquides dans différentes formes de réservoirs permet d'obtenir des résultats convaincants en ce qui concerne le ballonnement latéral. Cependant, ces modèles ne représentent pas le mouvement global du liquide. Par exemple, dans le cas des citernes mobiles, le liquide peut subir une force longitudinale lors d'une décélération du véhicule. Ceci provoque un mouvement longitudinal important qui n'est pas présenté par les systèmes mécaniques 2D. Dans le

cadre de cette étude, nous allons développer un nouveau modèle mécanique équivalent 3D permettant de simuler le mouvement global du liquide dans une citerne horizontale. Le modèle élaboré sera en mesure de modéliser les déplacements latéral, vertical et longitudinal ainsi que les forces engendrées par ce mouvement.

Il existe plusieurs facteurs qui influent sur le comportement dynamique du liquide dans une citerne en mouvement. Ces facteurs sont la géométrie du réservoir, le taux de remplissage et la nature du liquide. Il est alors important que le modèle élaboré dans cette étude prenne en considération tous ces facteurs en les incluant de façon à représenter le liquide d'une manière appropriée. Il est ainsi possible de concrétiser la forme de la citerne par des répartitions différentes du liquide (maillage). D'autre part, la densité du liquide peut être modélisée en spécifiant les masses de chaque particule du liquide (nœud). Finalement, puisque la viscosité dynamique du fluide influence sa fréquence de ballonnement, sa modélisation peut se faire directement en fonction des raideurs des ressorts et des coefficients d'amortissement. Ainsi il sera très utile de prendre en considération les différents facteurs influent sur le comportement du liquide dans une citerne en mouvement afin d'élaborer un modèle efficace qui représente les différents déplacements du liquide d'une manière appropriée.

3.2 Présentation du nouveau modèle dynamique 3D

L'idée globale du modèle est de répartir le liquide dans la citerne en plusieurs masses suivant chaque axe. Le nombre de masses dépend de la précision que l'on

souhaite. Le mouvement de chaque masse sera simulé par le déplacement de son centre de masse. Ainsi, l'ensemble des centres de masses constituera les nœuds du maillage. La masse de chaque particule représente la masse de la portion de liquide associée. Les nœuds sont ensuite liés par des arêtes flexibles comportant un ressort et un amortisseur. Afin de mieux comprendre le modèle, nous allons, en premier lieu, choisir une forme de citerne rectangulaire. Les dimensions de la citerne sont : une longueur X , une largeur Y et une hauteur Z . Le liquide à l'intérieur de la citerne possède les dimensions suivantes : La longueur X_L qui est divisée en M parties, la largeur Y_L qui est répartie en N sections et la hauteur Z_L qui est divisée en P parties. Ainsi chaque particule $p_{i,j,k}$ aura une longueur $X_i = X_L/M$, une largeur $Y_j = Y_L/N$ et une hauteur $Z_k = Z_L/P$ avec $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ et $1 \leq k \leq P$. Dans le cas d'une citerne à section rectangulaire, toutes les particules auront les mêmes dimensions. La masse $m_{i,j,k}$ de chaque particule $p_{i,j,k}$ est calculée de la manière suivante :

$$m_{i,j,k} = X_i Y_j Z_k \rho_L \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N \text{ et } 1 \leq k \leq P \quad (3.1)$$

Tel que ρ_L est la densité volumique du liquide. La figure 3-1 explique la répartition du liquide dans une citerne rectangulaire en un ensemble de particules $p_{i,j,k}$.

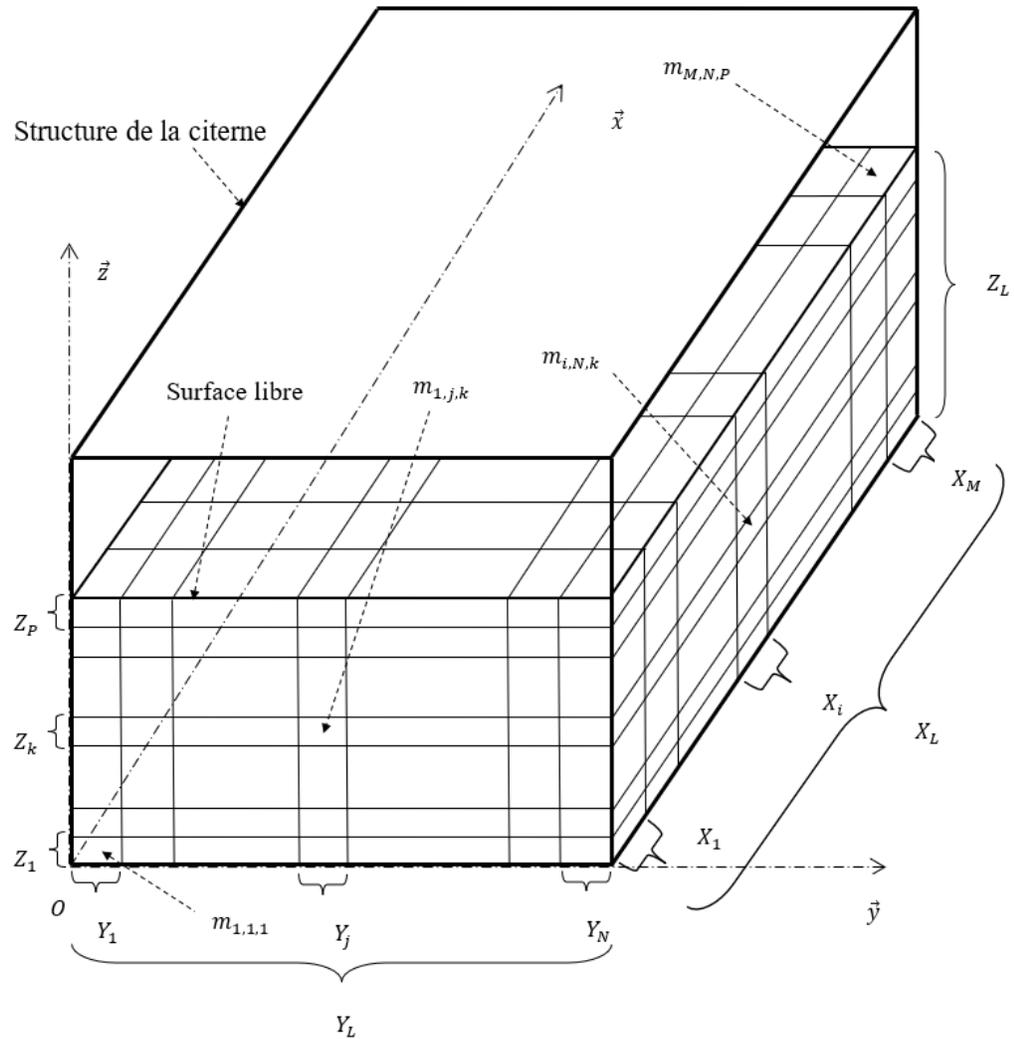


Figure 3-1 : Répartition de la masse du liquide dans une citerne rectangulaire.

Ensuite, le mouvement de chaque particule $p_{i,j,k}$ sera présenté par le déplacement de son centre de masse $G_{i,j,k}$. Les positions initiales $\vec{p}_{i,j,k}$ des centres de masse $G_{i,j,k}$ suivant le repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ seront calculées de la manière suivante :

$$\vec{p}_{i,j,k} = \left[\frac{(2i-1)}{2M} X_L, \frac{(2j-1)}{2N} Y_L, \frac{(2k-1)}{2P} Z_L \right] \quad (3.2)$$

avec $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq k \leq P$

Les coordonnées des centres de masse de chaque particule seront les coordonnées initiales des nœuds du modèle. Afin de simuler le liquide d'une manière appropriée, les arêtes reliant les nœuds du liquide sont flexibles et sont composées d'un ressort et d'un amortisseur parallèles. En 3D, chaque nœud est lié à six arêtes, deux arêtes suivant chaque axe. Les nœuds situés sur l'extrémité avant ($G_{1,j,k}$), arrière ($G_{M,j,k}$), gauche ($G_{i,1,k}$), droite ($G_{i,N,k}$) et inférieure ($G_{i,j,1}$) sont attachés à la structure de la citerne à l'aide du même type d'arêtes. Toutefois, les nœuds, représentant la surface libre du liquide, situés dans l'extrémité supérieure ($G_{i,j,P}$) ne seront reliés qu'à cinq arêtes.

Après avoir présenté l'idée du nouveau modèle dans une citerne rectangulaire, nous allons élaborer un modèle plus général qui permet de représenter le liquide dans des citernes de géométrie quelconque. Pour ce faire, nous allons concevoir un modèle mathématique qui permet de discrétiser le liquide dans une citerne de forme quelconque. Ce modèle va permettre de déterminer les masses et les coordonnées initiales de chaque nœud du maillage.

3.3 Discrétisation des formes de citernes

Dans cette partie, nous allons élaborer un modèle mathématique permettant la répartition du liquide dans une citerne partiellement remplie possédant plusieurs paramètres qui aident à obtenir des formes de citernes conventionnelles telles que les sections circulaire, elliptique et ovale modifiée, ainsi que des formes plus complexes.

3.3.1 Présentation de la citerne paramétrée

Dans sa thèse, Kang [29] a établi un modèle de section latérale de citerne qui permet d'obtenir une citerne optimale au niveau de la minimisation de la hauteur et du déplacement latéral du centre de masse de la charge liquide en fonction du taux de remplissage tout en gardant un volume identique aux sections les plus utilisées (circulaire, ovale, elliptique). En effet, la hauteur du centre de masse et l'amplitude du ballonnement du liquide dans une citerne partiellement remplie jouent un rôle considérable dans la détermination du moment de renversement du véhicule. Ces valeurs peuvent changer d'une forme de citerne à une autre. Les citernes larges telles que les formes elliptique, ovale ou rectangulaire ont une hauteur de centre de masse relativement basse, mais l'amplitude du mouvement latéral du liquide est plus grande parce que la surface libre est plus large. Cependant, la citerne cylindrique diminue le ballonnement du liquide, mais son centre de masse est plus haut. Kang a constaté qu'une forme de citerne admettant sa base plus large que son sommet permet d'avoir un centre de masse plus bas et de diminuer l'amplitude du ballonnement du liquide telle qu'une forme triangulaire ou trapézoïdale.

En se basant sur cette hypothèse, Kang a élaboré un modèle de section de citerne dépendant de plusieurs paramètres. Ce modèle permet de générer des sections optimales pour différents taux de remplissage à l'aide d'un algorithme d'optimisation. Ce dernier génère les valeurs des dimensions du modèle appropriées au taux de remplissage sélectionné. Les formes générées par rapport aux différents taux de

remplissage possèdent toutes une base plus large que le sommet. Ceci confirme effectivement l'hypothèse de Kang. Dans le cadre de cette étude, nous employons la section paramétrée dans notre modèle de discrétisation pour qu'elle soit adaptée à toutes les formes de réservoirs. La figure 3-2 présente les paramètres de la section.

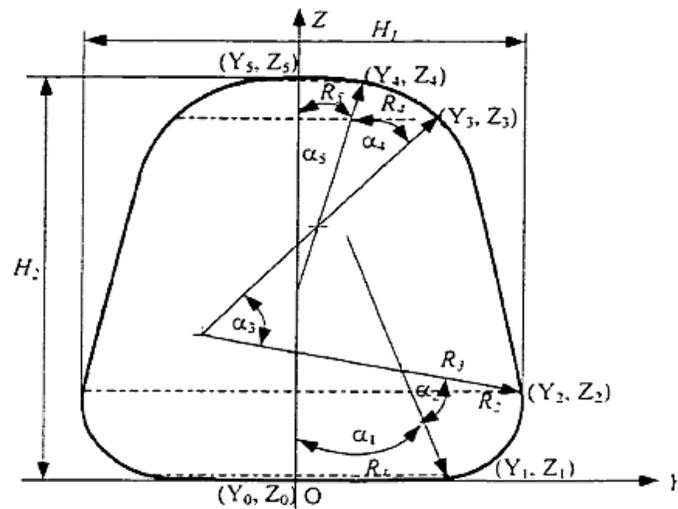


Figure 3-2 : Dimensions du modèle générique de la section latérale [29].

En effet, cette section est composée de 8 arcs de cercles. Étant symétrique par rapport à l'axe \vec{OZ} , le modèle générique est défini par 12 paramètres qui sont les angles α_a et les rayons R_a ($a = 1,2,3,4,5$) définissant les 5 arcs de la demi-section en plus de la largeur maximale H_1 et la hauteur maximale H_2 de la section.

Les coordonnées (Y_a, Z_a) des extrémités de chaque arc, formant la demi-section ($a = 0,1,2,3,4,5$) sont obtenues à partir des formules suivantes :

$$Y_0 = 0 ; Z_0 = 0$$

$$Y_1 = R_1 \sin \alpha_1 ; Z_1 = R_1 (1 - \cos \alpha_1)$$

$$Y_2 = Y_1 + L_{12} \cos(\alpha_1 + \alpha_2/2) ; Z_2 = Z_1 + L_{12} \sin(\alpha_1 + \alpha_2/2) \quad (3.3)$$

$$Y_4 = R_5 \sin \alpha_5 ; Z_4 = H_2 - R_5 (1 - \cos \alpha_5)$$

$$Y_3 = Y_4 + L_{34} \cos(\alpha_5 + \alpha_4/2) ; Z_3 = Z_4 - L_{34} \sin(\alpha_5 + \alpha_4/2)$$

$$Y_5 = 0 ; Z_5 = H_2$$

Avec $L_{12} = 2R_2 \sin(\alpha_2/2)$ et $L_{34} = 2R_4 \sin(\alpha_4/2)$.

Les coordonnées (Y_{O_a}, Z_{O_a}) des centres O_a de chaque arc ($a = 1,2,3,4,5$) sont présentées comme suit :

$$Y_{O_1} = 0 ; Z_{O_1} = R_1$$

$$Y_{O_2} = Y_2 - R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) ; Z_{O_2} = Z_2 + R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_{O_3} = Y_2 - R_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) ; Z_{O_3} = Z_2 + R_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (3.4)$$

$$Y_{O_4} = Y_3 - R_4 \sin(\alpha_4 + \alpha_5) ; Z_{O_4} = Z_3 - R_4 \cos(\alpha_4 + \alpha_5)$$

$$Y_{O_5} = 0 ; Z_{O_5} = H_2 - R_5$$

Le périmètre L_p , l'aire totale A_c et la hauteur Z_{cg} du centre de masse de la section sont calculés respectivement :

$$L_p = 2 \sum_{a=1}^5 R_a \alpha_a \quad (3.5)$$

$$A_c = 2 \sum_{a=1}^5 \int_{Z_{a-1}}^{Z_a} f_a(z) dz \quad (3.6)$$

$$Z_{cg} = \frac{2}{A_c} \sum_{a=1}^5 \int_{Z_{a-1}}^{Z_a} f_a(z) z dz \quad (3.7)$$

Avec (Y_a, Z_a) et (Y_{a-1}, Z_{a-1}) sont respectivement les coordonnées des extrémités de l'arc a , la fonction $f_a(z)$ qui correspond à chaque arc a s'écrit :

$$f_a(z) = Y_{0a} + \sqrt{R_a^2 - (z - Z_{0a})^2} \text{ avec } a = 1,2,3,4,5. \quad (3.8)$$

Notons que les formules de (3.3) à (3.8) sont tirées des travaux de Kang [29]. Par ailleurs, Kang n'a pas mentionné les valeurs des angles α_a qu'il a obtenues par rapport à chaque section dans ses résultats. Cependant, à l'aide des autres paramètres disponibles, nous sommes capables de formuler un système d'équations permettant de rechercher les valeurs de chaque angle α_a . La première équation est telle que la somme des angles α_a est égale à π . Ensuite, connaissant la valeur numérique du périmètre de la section L_p et des rayons R_a nous sommes en mesure d'utiliser la formule (3.5) comme deuxième équation. D'autre part, il est possible d'obtenir les coordonnées (Y_{c3}, Z_{c3}) du centre de l'arc 3 à l'aide d'une tierce formule :

$$Y_{O_3} = Y_3 - R_3 \sin(\alpha_4 + \alpha_5) ; \quad Z_{O_3} = Z_3 - R_3 \cos(\alpha_4 + \alpha_5) \quad (3.9)$$

Ceci fournit une troisième et quatrième équation. Finalement, connaissant les valeurs numériques de la largeur maximale H_1 , la hauteur maximale H_2 et la hauteur du centre de masse Z_{cg} pour chaque forme générée, et que toutes les formules des coordonnées des extrémités (3.3) et des centres d'arcs (3.4) formant la section sont en fonction des angles α_a et des rayons R_a , l'expression (3.7) de Z_{cg} peut être considérée comme cinquième équation. Par la suite, le système d'équations devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \pi \\ L_p = 2 \sum_{a=1}^5 R_a \alpha_a \\ Y_2 - R_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = Y_3 - R_3 \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\ Z_2 + R_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = Z_3 - R_3 \cos(\alpha_4 + \alpha_5) \\ Z_{cg} = \frac{2}{A_c} \sum_{a=1}^5 \int_{Z_{a-1}}^{Z_a} f_a(z) z dz \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Ainsi, la section paramétrée est définie par les rayons R_a , la largeur maximale H_1 , la hauteur maximale H_2 , le périmètre L_p et la hauteur de son centre de masse Z_{cg} .

Il est possible de retrouver la section circulaire (figure 3-3) de rayon R en posant $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R = Z_{cg}$ et $H_1 = H_2 = 2R$.

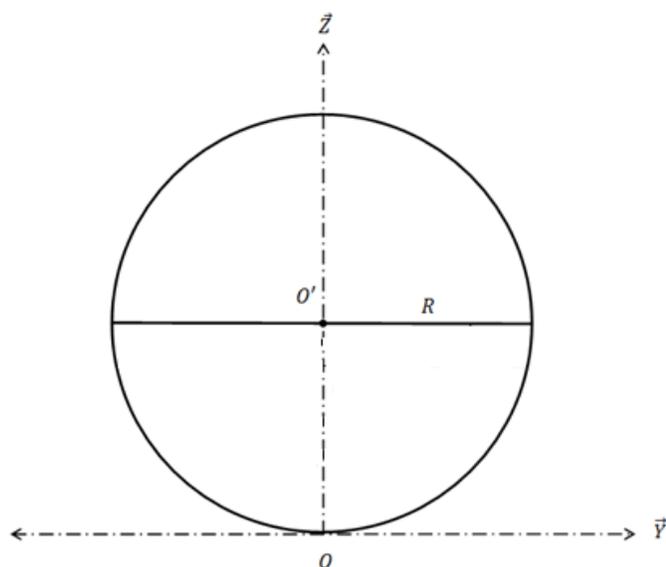


Figure 3-3 : Citerne à section circulaire

D'autre part, il est aussi possible de retrouver la section ovale modifiée (figure 3-4) en posant $R_1 = R_5$, $R_2 = R_4$ et $Z_{cg} = H_2/2$.

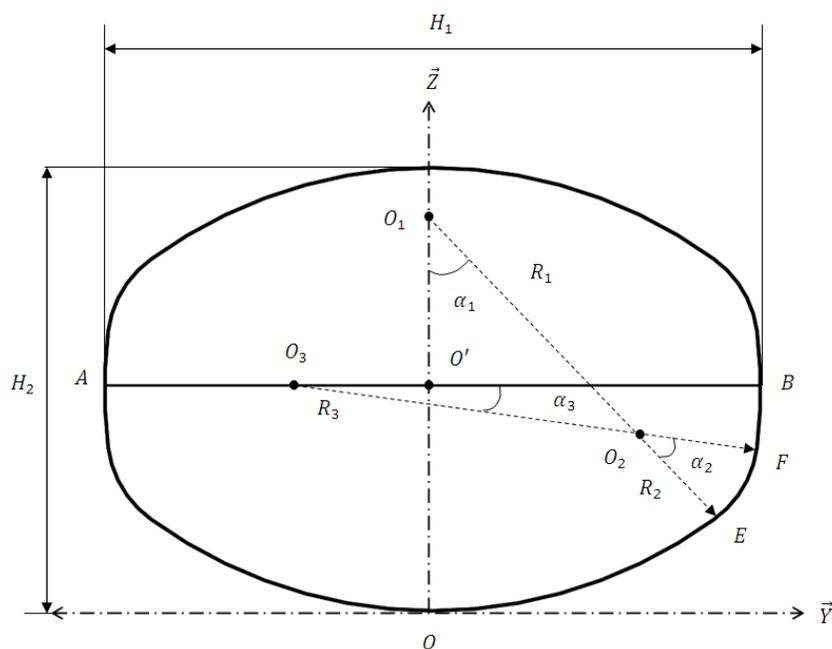


Figure 3-4: Section ovale modifiée.

3.3.2 Hauteur de la surface libre :

Possédant tous les paramètres et les coordonnées des arcs formant la citerne, nous allons calculer la hauteur Z_h de la surface libre du liquide pour un taux de remplissage donné en utilisant la formule de calcul de la surface A_c .

Soit ε le taux de remplissage du réservoir tel que $0 < \varepsilon < 1$. Par exemple si le taux de remplissage est de 70 %, alors $\varepsilon = 0,7$. Puisqu'il n'est pas possible de déterminer entre quelles hauteurs Z_{a-1} et Z_a d'arc se situe la hauteur Z_h , nous allons solutionner les équations intégrales suivantes de telle sorte que chaque équation donne l'hypothèse que la hauteur Z_h est située entre les extrémités d'un arc spécifique.

- Z_h est située entre les extrémités de l'arc 1 :

$$\int_{Z_0}^{Z_h} f_1(z) dz = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left[\int_{Z_h}^{Z_1} f_1(z) dz + \int_{Z_1}^{Z_2} f_2(z) dz + \int_{Z_2}^{Z_3} f_3(z) dz + \int_{Z_3}^{Z_4} f_4(z) dz + \int_{Z_4}^{Z_5} f_5(z) dz \right] \quad (3.11)$$

- Z_h est située entre les extrémités de l'arc 2 :

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f_1(z) dz + \int_{Z_1}^{Z_h} f_2(z) dz = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left[\int_{Z_h}^{Z_2} f_2(z) dz + \int_{Z_2}^{Z_3} f_3(z) dz + \int_{Z_3}^{Z_4} f_4(z) dz + \int_{Z_4}^{Z_5} f_5(z) dz \right] \quad (3.12)$$

- Z_h est située entre les extrémités de l'arc 3 :

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f_1(z)dz + \int_{Z_1}^{Z_2} f_2(z)dz + \int_{Z_2}^{Z_h} f_3(z)dz = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left[\int_{Z_h}^{Z_3} f_3(z)dz + \int_{Z_3}^{Z_4} f_4(z)dz + \int_{Z_4}^{Z_5} f_5(z)dz \right] \quad (3.13)$$

- Z_h est située entre les extrémités de l'arc 4 :

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f_1(z)dz + \int_{Z_1}^{Z_2} f_2(z)dz + \int_{Z_2}^{Z_3} f_3(z)dz + \int_{Z_3}^{Z_h} f_4(z)dz = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left[\int_{Z_h}^{Z_4} f_4(z)dz + \int_{Z_4}^{Z_5} f_5(z)dz \right] \quad (3.14)$$

- Z_h est située entre les extrémités de l'arc 5 :

$$\int_{Z_0}^{Z_1} f_1(z)dz + \int_{Z_1}^{Z_2} f_2(z)dz + \int_{Z_2}^{Z_3} f_3(z)dz + \int_{Z_3}^{Z_4} f_4(z)dz + \int_{Z_4}^{Z_h} f_5(z)dz = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left[\int_{Z_h}^{Z_5} f_5(z)dz \right] \quad (3.15)$$

Ces équations permettent de retrouver la hauteur Z_h qui divise l'aire de la section latérale en deux parties. La région inférieure constitue $\varepsilon \times 100\%$ de la surface de section et la région supérieure constitue $(1 - \varepsilon) \times 100\%$ de sa surface. Il est clair que seulement une de ces équations aura une solution puisque la hauteur Z_h est unique. Alors, on obtiendra une seule solution à partir des 5 équations.

3.3.3 Répartition des particules

La répartition des particules du liquide dans la citerne paramétrée peut s'avérer relativement complexe car la section latérale se compose de 8 arcs et dépend de plusieurs paramètres. Afin de limiter le nombre de paramètres et d'éviter des calculs inutiles, nous allons choisir le centre des axes du repère de la même manière que pour la figure 3-2 en ajoutant un axe des \vec{X} comme le montre la figure 3-5.

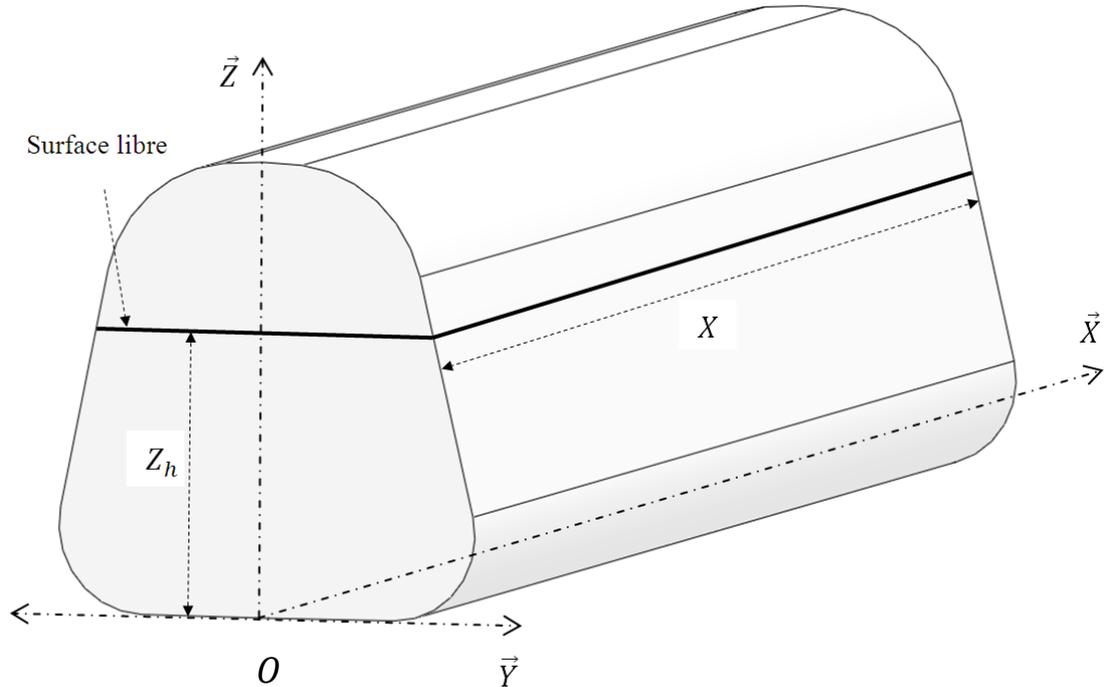


Figure 3-5 : Représentation 3D de la citerne paramétrée.

Il est possible de répartir la longueur X du liquide par M composantes et sa hauteur Z_h par P composantes. Pour la largeur Y suivant l'axe \vec{Y} , nous allons répartir chaque portion du liquide située entre deux hauteurs $k.Z_h/P$ et $(k-1).Z_h/P$ en N

composantes suivant chaque direction de l'axe \vec{Y} (gauche et droite), avec $1 \leq k \leq P$. Ce choix est dû à cause de la largeur de la citerne qui n'est pas constante. En effet, pour chaque hauteur $Z_k = k \cdot Z_h/P$, on a une largeur spécifique que nous allons noter Y_k . Ainsi, nous obtiendrons $2N$ composantes suivant tout l'axe \vec{Y} . Et puisque la citerne est symétrique par rapport au plan (O, \vec{X}, \vec{Z}) , les particules $p_{i,N-(j-1),k}$ et $p_{i,(N+1)+(j-1),k}$ auront des masses identiques, avec $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i \leq M$. De plus, la division des largeurs des particules se fera par la division de la largeur la plus petite entre les valeurs de $Y_k = f_a(Z_k)$ et $Y_{k-1} = f_a(Z_{k-1})$. Le choix de f_a dépend de la position de chaque arc a avec $a = 1,2,3,4,5$. Par exemple, si Z_k est situé entre Z_2 et Z_3 , alors la largeur de la citerne pour cette hauteur est égale à $2 \times f_3(Z_k)$. Ainsi, chaque portion du liquide située entre Z_{k-1} et Z_k sera divisée en $2N$ composantes suivant l'axe \vec{Y} . Lorsqu'on divise la portion du liquide située entre les hauteurs Z_{k-1} et Z_k à partir de la largeur la plus petite Y_k , tel que montré sur le schéma de la figure 3-6, une partie du liquide reste entre la dernière particule $p_{i,2N,k}$ et la paroi transversale droite de la citerne. Cette partie sera ajoutée à cette même particule pour former une seule particule possédant un seul centre de masse.

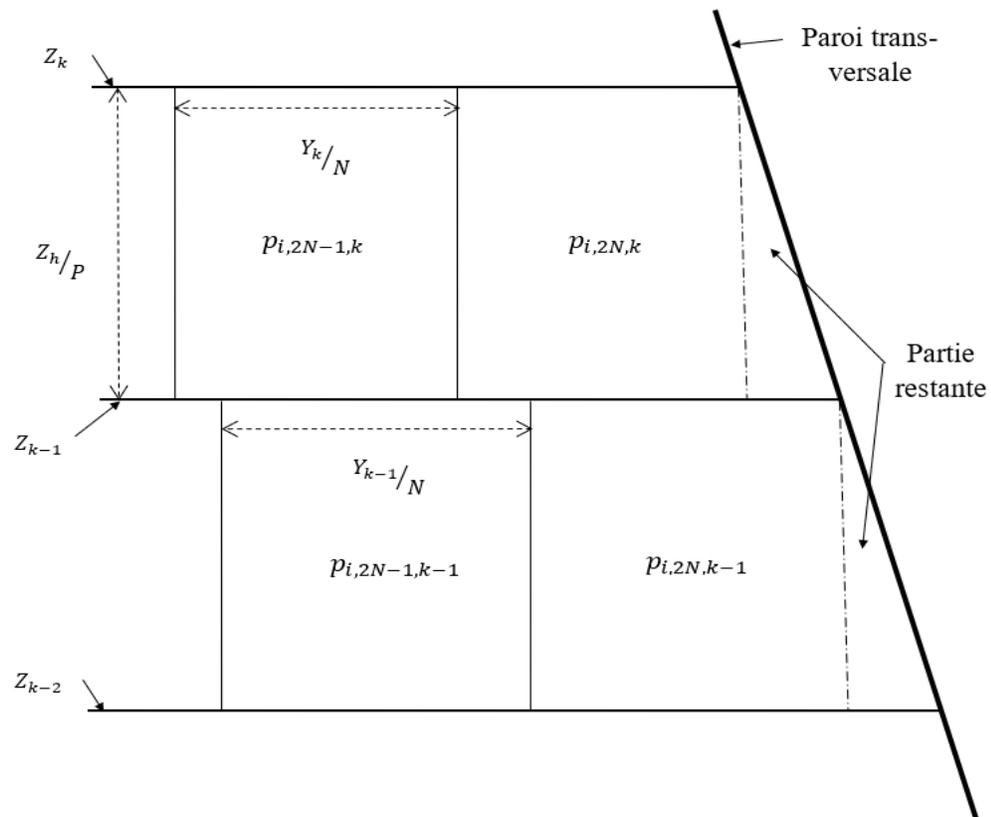


Figure 3-6 : Répartition des particules du liquide suivant la section latérale paramétrée.

En raison de la symétrie par rapport au plan (O, \vec{X}, \vec{Z}) , une même partie du liquide située entre la paroi transversale gauche de la citerne et la première particule $p_{i,1,k}$ sera ajoutée à cette dernière.

D'autre part, la portion du liquide qui se situe au fond de la citerne entre la première hauteur Z_1 et la paroi inférieure sera partitionnée en divisant la largeur de la citerne Y_1 qui correspond à la hauteur Z_1 . En effet, si la largeur Y_1 est inférieure à au moins une largeur qui correspond à une hauteur entre 0 et Z_1 (figure 3-7), alors la largeur Y_1 est

divisée par N . Ainsi, on aura une partie du liquide restante entre la dernière particule $p_{i,2N,1}$ et la paroi droite de la citerne. De la même manière, cette partie sera ajoutée à la particule $p_{i,2N,1}$. La particule $p_{i,1,1}$ subira les mêmes modifications que sa symétrique $p_{i,2N,1}$.

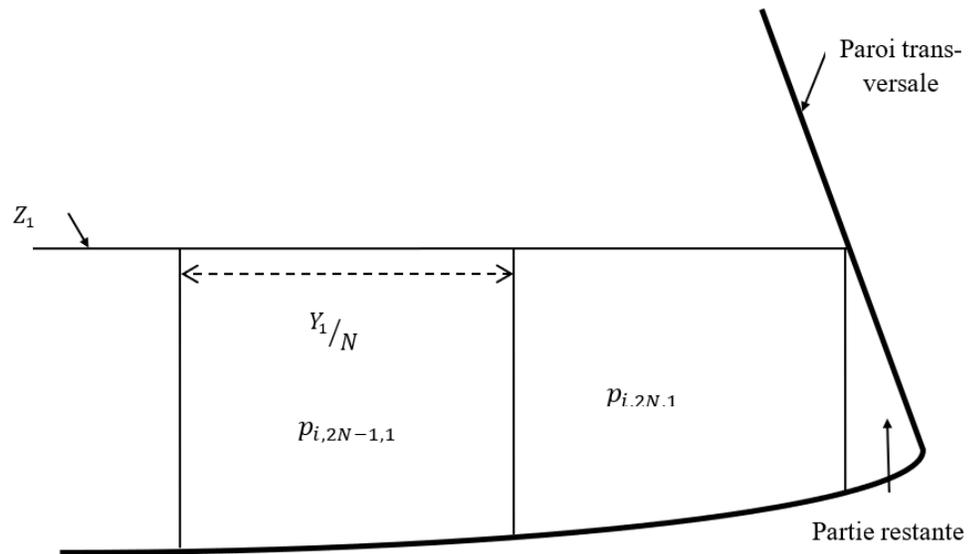


Figure 3-7 : Cas où Y_1 est inférieure à au moins une largeur entre 0 et Z_1 .

Dans le cas où la largeur Y_1 est supérieure ou égale à toutes les largeurs restantes de la citerne qui correspondent aux hauteurs entre 0 et Z_1 (figure 3-8), alors la largeur Y_1 est divisée par N et il n'y aura pas de liquide restant entre la dernière particule $p_{i,2N,1}$ et la paroi de la citerne. La particule $p_{i,1,1}$ subira les mêmes changements que sa symétrique $p_{i,2N,1}$.

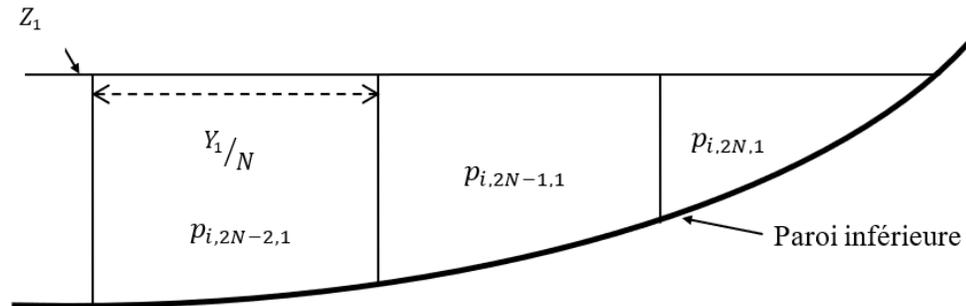


Figure 3-8 : Cas où Y_1 est supérieure à toutes les largeurs entre 0 et Z_1 .

3.3.4 Calcul des masses et des coordonnées initiales des centres de masses

Après avoir sélectionné un maillage adéquat pour le liquide à l'intérieur de la citerne, nous allons calculer la masse et les coordonnées du centre de masse de chaque particule. Pour ceci, nous allons étudier les différents cas qui se sont présentés lors de la répartition des masses.

Le premier cas survient lorsque la particule n'a aucun coté en contact direct avec les parois transversales de la citerne. Il s'agit des particules $p_{i,j,k}$ tel que $1 \leq i \leq M$, $2 \leq j \leq 2N - 1$ et $2 \leq k \leq P$. Ces dernières auront une forme de parallélépipède. Il est clair que les particules se situant entre les mêmes hauteurs possèdent la même masse. Ainsi, on calcule la masse $m_{i,j,k}$ d'une particule $p_{i,j,k}$ et la position $\vec{p}_{i,j,k}$ de son centre de masse $G_{i,j,k}$ selon le repère orthonormé $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ en utilisant les formules suivantes :

- Lorsque $Y_{k-1} \leq Y_k$ avec $Y_k = f_w(Z_k)$ et $Y_{k-1} = f_w(Z_{k-1})$ et $w = 1, 2, 3, 4$ ou 5 :

$$m_{i,j,k} = \rho \left(\frac{X}{M} \right) \left(\frac{Y_{k-1}}{N} \right) \left(\frac{Z_h}{P} \right) \quad (3.16)$$

$$\vec{p}_{i,j,k} = \left[\frac{(2i-1)}{2M} X, \frac{\left(j - N - \frac{1}{2}\right)}{N} Y_{k-1}, \frac{(2k-1)}{2P} Z_h \right] \quad (3.17)$$

Avec ρ la densité du liquide.

- Lorsque $Y_{k-1} > Y_k$:

$$m_{i,j,k} = \rho \left(\frac{X}{M} \right) \left(\frac{Y_k}{N} \right) \left(\frac{Z_h}{P} \right) \quad (3.18)$$

$$\vec{p}_{i,j,k} = \left[\frac{(2i-1)}{2M} X, \frac{\left(j - N - \frac{1}{2}\right)}{N} Y_k, \frac{(2k-1)}{2P} Z_h \right] \quad (3.19)$$

Le deuxième cas est celui où les particules sont en contact direct avec les parois transversales gauches et droites du réservoir (figure 3-6). Précisément, le cas où $j = 1$ ou $j = 2N$, $1 \leq i \leq M$, et $2 \leq k \leq P$. En effet, connaissant la masse des autres particules se situant entre les mêmes hauteurs Z_{k-1} et Z_k , il est possible de calculer la masse $m_{i,2N,k}$ en soustrayant les masses des autres particules de la masse totale du liquide se situant entre les deux hauteurs. Alors, en supposant que Z_{k-1} et Z_k sont comprises entre les hauteurs des extrémités du même arc a , nous pouvons calculer la masse $m_{i,2N,k}$ en utilisant la formule suivante :

$$m_{i,2N,k} = \rho \frac{X}{M} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} f_a(z) dz - (N-1)m_{i,j,k} \quad (3.20)$$

D'autre part, si Z_{k-1} est comprise entre les hauteurs des extrémités d'un arc a et que Z_k est comprise entre les hauteurs des extrémités d'un arc $a+1$, la masse $m_{i,2N,k}$ est calculée comme suit :

$$m_{i,2N,k} = \rho \frac{X}{M} \left[\int_{Z_{a-1}}^{Z_a} f_a(z) dz + \int_{Z_a}^{Z_{a+1}} f_{a+1}(z) dz \right] - (N-1)m_{i,j,k} \quad (3.21)$$

Les autres éléments de masse $m_{i,j,k}$ sont calculés de la même façon. Enfin, en raison de symétrie par rapport au plan (O, \vec{X}, \vec{Z}) les masses des particules $p_{i,1,k}$ et $p_{i,2N,k}$. On aura alors $m_{i,1,k} = m_{i,2N,k}$.

Par ailleurs, les coordonnées du centre de masse $G_{i,2N,k}$ seront calculées en utilisant les formules suivantes :

- Lorsque $Y_{k-1} > Y_k$:

$$\begin{aligned} X_{i,2N,k} &= \frac{(2i-1)}{2M} X \\ Y_{i,2N,k} &= \frac{1}{2A_{i,2N,k}} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \left(f_a(z) - Y_k \frac{N-1}{N} \right)^2 dz \\ Z_{i,2N,k} &= \frac{1}{A_{i,2N,k}} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} z \cdot \left(f_a(z) - Y_k \frac{N-1}{N} \right) dz \\ \text{avec } A_{i,2N,k} &= \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \left(f_a(z) - Y_k \frac{N-1}{N} \right) dz \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Lorsque $Y_{k-1} \leq Y_k$:

$$\begin{aligned}
 X_{i,2N,k} &= \frac{(2i-1)}{2M} X \\
 Y_{i,2N,k} &= \frac{1}{2A_{i,2N,k}} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \left(f_a(z) - Y_{k-1} \frac{N-1}{N} \right)^2 dz \\
 Z_{i,2N,k} &= \frac{1}{A_{i,2N,k}} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} z \cdot \left(f_a(z) - Y_{k-1} \frac{N-1}{N} \right) dz \\
 \text{avec } A_{i,2N,k} &= \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \left(f_a(z) - Y_{k-1} \frac{N-1}{N} \right) dz
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

En effet, $A_{i,2N,k}$ est la surface de la particule $p_{i,2N,k}$ suivant la section latérale. Il est aussi possible d'adapter les formules (3.22) et (3.23) lorsque Z_{k-1} et Z_k sont comprises entre les extrémités d'arcs différents. En raison de la symétrie par rapport au plan (O, \vec{X}, \vec{Z}) les coordonnées du centre de masse $G_{i,1,k}$ sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}
 X_{i,2N,k} &= X_{i,1,k} \\
 Y_{i,2N,k} &= -Y_{i,1,k} \\
 Z_{i,2N,k} &= Z_{i,1,k}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le troisième cas est celui des particules qui ont un contact direct avec la paroi inférieure de la citerne (figures 3-7 et 3-8). Plus précisément le cas des particules $p_{i,j,1}$ tel que $1 \leq i \leq M$ et $2 \leq j \leq 2N-1$. Afin de faciliter la compréhension de cette partie, nous allons supposer que Z_1 est inférieure à la hauteur de l'extrémité supérieure de l'arc 1. Notons par $Z_{1,j} = f_1^{-1} \left(\frac{(j-N)}{N} Y_1 \right)$ la hauteur qui correspond à la largeur de

la citerne de $\frac{(j-N)}{N}Y_k$ avec f_1^{-1} est la fonction réciproque de f_1 . Nous allons d'abord calculer les masses et les coordonnées du centre de masse des particules $p_{i,j,1}$ avec $N + 1 \leq j \leq 2N - 1$. Et par symétrie, nous allons les déduire pour les particules $p_{i,j,1}$ avec $2 \leq j \leq N$. En utilisant la figure 3-9, il est possible de calculer la masse de chaque particule ainsi que les coordonnées de son centre de masse.

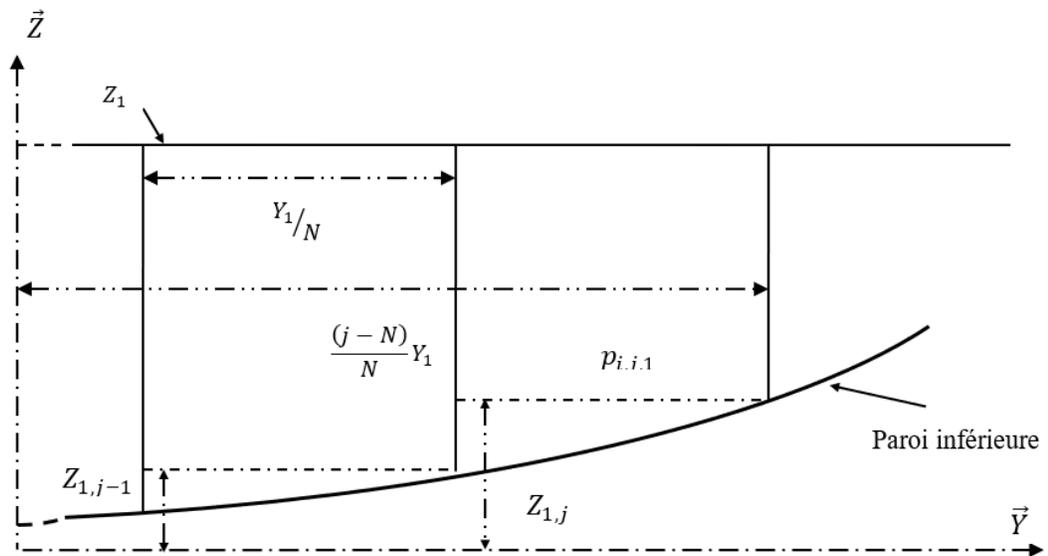


Figure 3-9: Particules en contact avec la paroi inférieure.

La masse de chaque particule se calculera en utilisant la formule suivante :

$$m_{i,j,1} = \rho \frac{X}{M} \left[\int_{Z_{1,j-1}}^{Z_{1,j}} \left[f_1(z) - Y_1 \frac{j-N-1}{N} \right] dz + \frac{Y_1}{N} (Z_1 - Z_{1,j}) \right] \quad (3.25)$$

Les coordonnées du centre de masse $G_{i,j,1}$ seront calculées en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
X_{i,j,1} &= \frac{(2i-1)}{2M} X \\
Y_{i,j,1} &= \frac{1}{2A_{i,j,1}} \left[\int_{Z_{1,j-1}}^{Z_{1,j}} \left(f_1(z) - Y_1 \frac{j-N-1}{N} \right)^2 dz + \int_{Z_{1,j}}^{Z_1} \left(\frac{Y_1}{N} \right)^2 dz \right] \\
Z_{i,j,1} &= \frac{1}{A_{i,j,1}} \left[\int_{Z_{1,j-1}}^{Z_{1,j}} z \cdot \left(f_1(z) - Y_1 \frac{j-N-1}{N} \right) dz + \int_{Z_{1,j}}^{Z_1} z \cdot \left(\frac{Y_1}{N} \right) dz \right] \\
\text{avec } A_{i,j,1} &= \int_{Z_{1,j-1}}^{Z_{1,j}} \left[f_1(z) - Y_1 \frac{j-N-1}{N} \right] dz + \frac{Y_1}{N} (Z_1 - Z_{1,j})
\end{aligned} \tag{3.26}$$

En raison de symétrie par rapport au plan (O, \vec{X}, \vec{Z}) , les coordonnées du centre de masse $G_{i,j,1}$ avec $2 \leq j \leq N$ sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned}
X_{i,N-(j-1),1} &= X_{i,(N+1)+(j-1),1} \\
Y_{i,N-(j-1),1} &= -Y_{i,(N+1)+(j-1),1} \\
Z_{i,N-(j-1),1} &= Z_{i,(N+1)+(j-1),1}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Le dernier cas est celui des particules qui se retrouvent dans les coins inférieurs de la citerne. Ce sont les particules $p_{i,1,1}$ et $p_{i,2N,1}$ avec $1 \leq i \leq M$. La masse de ces particules est déterminée comme suit :

$$m_{i,1,1} = m_{i,2N,1} = \rho \left(\frac{X}{M} \right) \left[\int_{Z_{1,2N}}^{Z_1} \left(f_1(z) - Y_1 \frac{N-1}{N} \right) dz \right] \tag{3.28}$$

Les coordonnées des centres de masse $G_{i,2N,1}$ sont obtenues par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
X_{i,2N,1} &= \frac{(2i-1)}{2M} X \\
Y_{i,2N,1} &= \frac{1}{2A_{i,2N,1}} \left[\int_{Z_{1,2N}}^{Z_1} \left(f_1(z) - Y_1 \frac{N-1}{N} \right)^2 dz \right] \\
Z_{i,2N,1} &= \frac{1}{A_{i,2N,1}} \left[\int_{Z_{1,2N}}^{Z_1} z \cdot \left(f_1(z) - Y_1 \frac{N-1}{N} \right) dz \right] \\
\text{avec } A_{i,2N,1} &= \int_{Z_{1,2N}}^{Z_1} \left[f_1(z) - Y_1 \frac{N-1}{N} \right] dz
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Et par symétrie, les coordonnées de $G_{i,1,1}$ se déduisent comme suit :

$$\begin{aligned}
X_{i,2N,1} &= X_{i,1,1} \\
Y_{i,2N,1} &= -Y_{i,1,1} \\
Z_{i,2N,1} &= Z_{i,1,1}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La détermination des masses et des coordonnées des centres de masse de chaque particule permet d'obtenir les masses et les coordonnées initiales de chaque nœud qui la représente, comme expliqué dans la section précédente.

3.3.1 Applications du modèle de discrétisation

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples de discrétisations en sélectionnant des formes, des taux de remplissage et des maillages différents afin d'observer les nombreuses possibilités que procure ce modèle. La figure 3-10 représente un exemple de modèle de discrétisation du liquide dans une citerne à section circulaire pour un taux de remplissage de 70 % avec $M = 15$, $N = 4$ et $P = 7$.

Ce modèle contient au total 840 nœuds. Un autre exemple, illustré dans la figure 3-11, représente un modèle de discrétisation du liquide dans une citerne à section ovale modifiée avec un taux de remplissage de 40 % avec $M = 20$, $N = 5$ et $P = 5$.

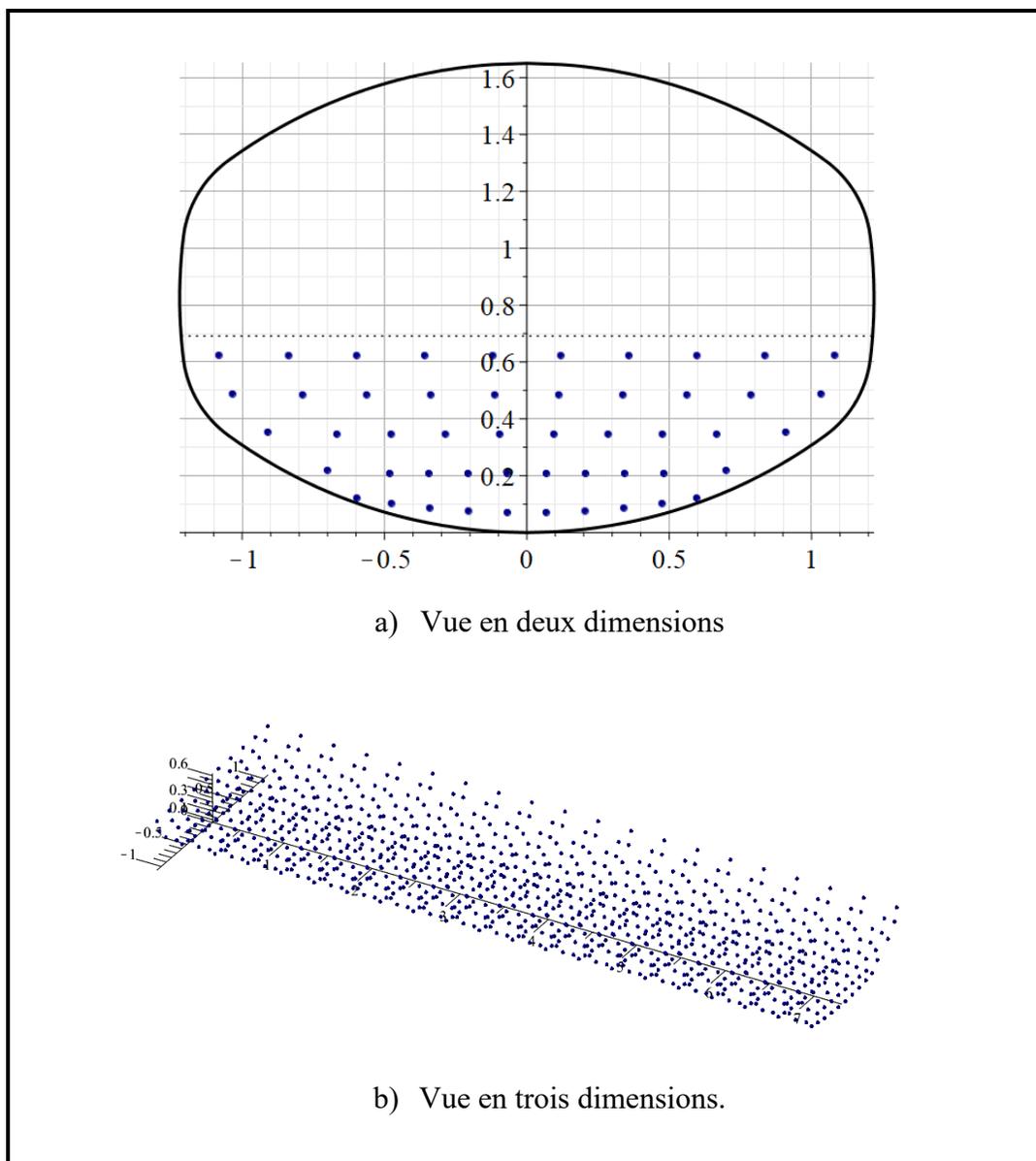


Figure 3-11 : Modèle de discrétisation appliqué à une citerne à section ovale modifiée.

Ce modèle contient au total 1000 nœuds. Un dernier exemple représente une citerne trapézoïdale. C'est une forme de citerne conceptuelle élaborée par Kang [29] qui permet de limiter le ballonnement latéral du liquide tout en possédant un centre de masse assez bas. La figure 3-12 décrit le modèle en prenant un taux de remplissage de 50 % avec comme valeurs des paramètres du modèle de discrétisation $M = 40$, $N = 7$ et $P = 12$.

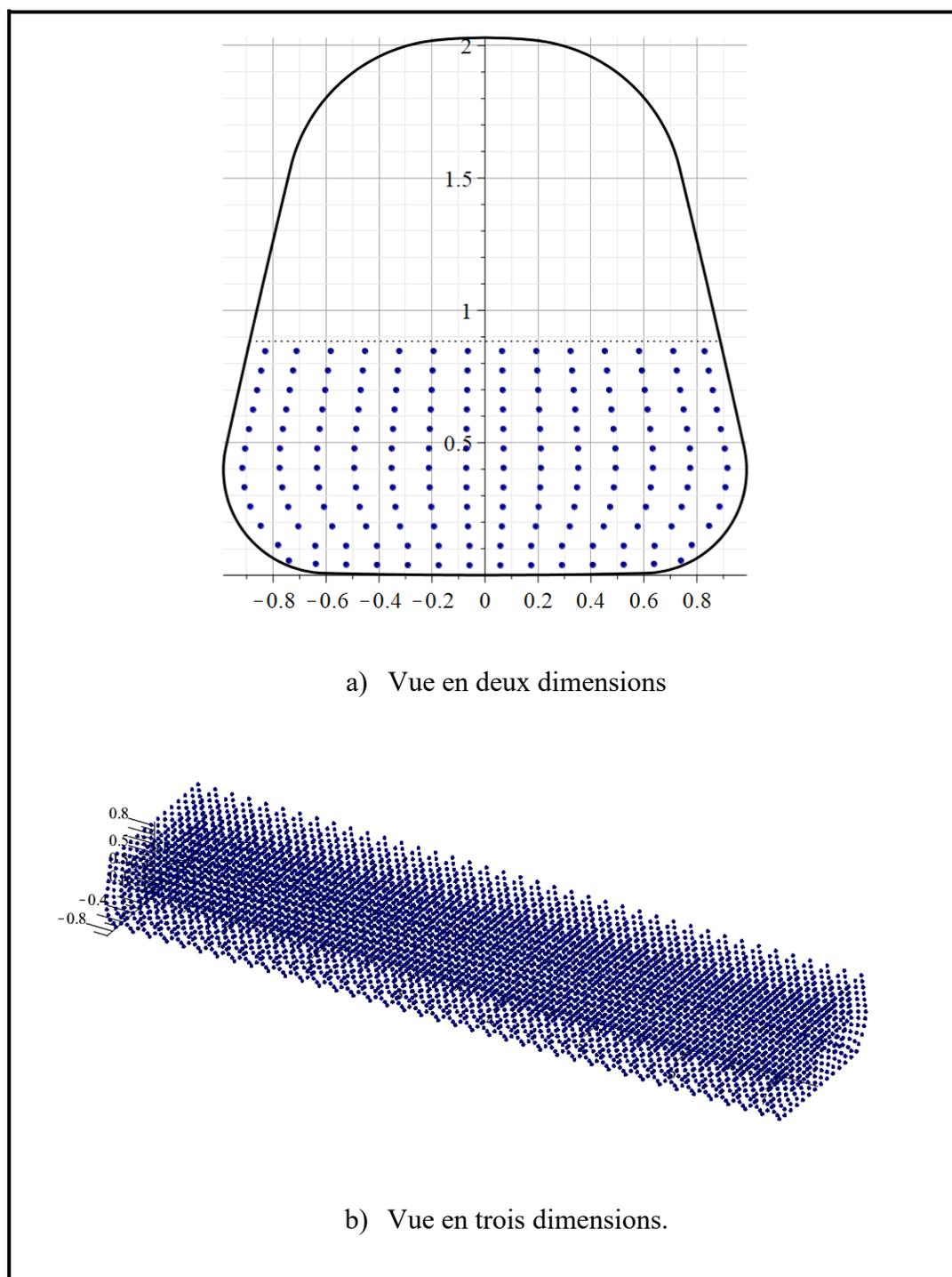


Figure 3-12: Modèle de discrétisation appliqué à une citerne à section trapézoïdale.

Cet exemple contient 6720 nœuds. Dans la prochaine section, nous allons utiliser ce modèle de discrétisation afin d'élaborer un modèle dynamique qui permet de représenter le liquide dans une citerne partiellement remplie. Le but est de développer les équations nécessaires qui permettront de modéliser le ballonnement du liquide dans la citerne par le mouvement des nœuds (points de masse) du modèle de discrétisation élaboré dans ce chapitre.

CHAPITRE 4

MODÈLE DYNAMIQUE 3D DU LIQUIDE

Ce chapitre présente les différentes étapes du développement du nouveau modèle dynamique en trois dimensions représentant le mouvement du liquide dans des citernes mobiles de formes quelconques. Nous allons commencer par poser des hypothèses et élaborer une méthode qui permet d'obtenir les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement. Ensuite, nous allons étaler toutes les étapes de l'élaboration du système d'équations du mouvement du modèle.

4.1 Raideurs et coefficients d'amortissement

Dans cette section, nous allons montrer les différentes étapes permettant de calculer les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement des amortisseurs constituant le modèle 3D. Mais avant ceci, nous allons expliquer la liaison entre les nœuds voisins.

4.1.1 Liaisons entre les nœuds voisins

Nous avons vu que le liquide est discrétisé en plusieurs masses et chaque masse est représentée par son centre de masse. Ces centres de masses constituent les nœuds du maillage. La masse de chaque nœud est la masse de la partie du liquide représentée par ce même nœud. Ces nœuds sont ensuite reliés par des arêtes. Afin de modéliser adéquatement le mouvement du liquide, ces arêtes reliant les nœuds du liquide sont flexibles et sont composées d'un ressort et d'un amortisseur parallèles. En 3D, chaque nœud est lié à six arêtes, deux arêtes suivant chaque axe. Les nœuds voisins aux parois de la citerne sont liés à la structure en utilisant le même type d'arêtes. Ainsi, il existe $M + 1$ arêtes sur une ligne suivant l'axe X , $2N + 1$ arêtes sur une ligne suivant l'axe Y et P arêtes sur une ligne suivant l'axe Z . Ainsi, chaque nœud noté $G_{i,j,k}$ sera lié par les arêtes $A_{1,i,j,k}$ et $A_{1,i+1,j,k}$ suivant l'axe X , les arêtes $A_{2,i,j,k}$ et $A_{2,i,j+1,k}$ suivant l'axe Y et les arêtes $A_{3,i,j,k}$ et $A_{3,i,j,k+1}$ suivant l'axe Z .

La figure 4-1 montre les liaisons entre le centre de masse de chaque particule avec ces nœuds voisins ainsi que les différentes notations utilisées.

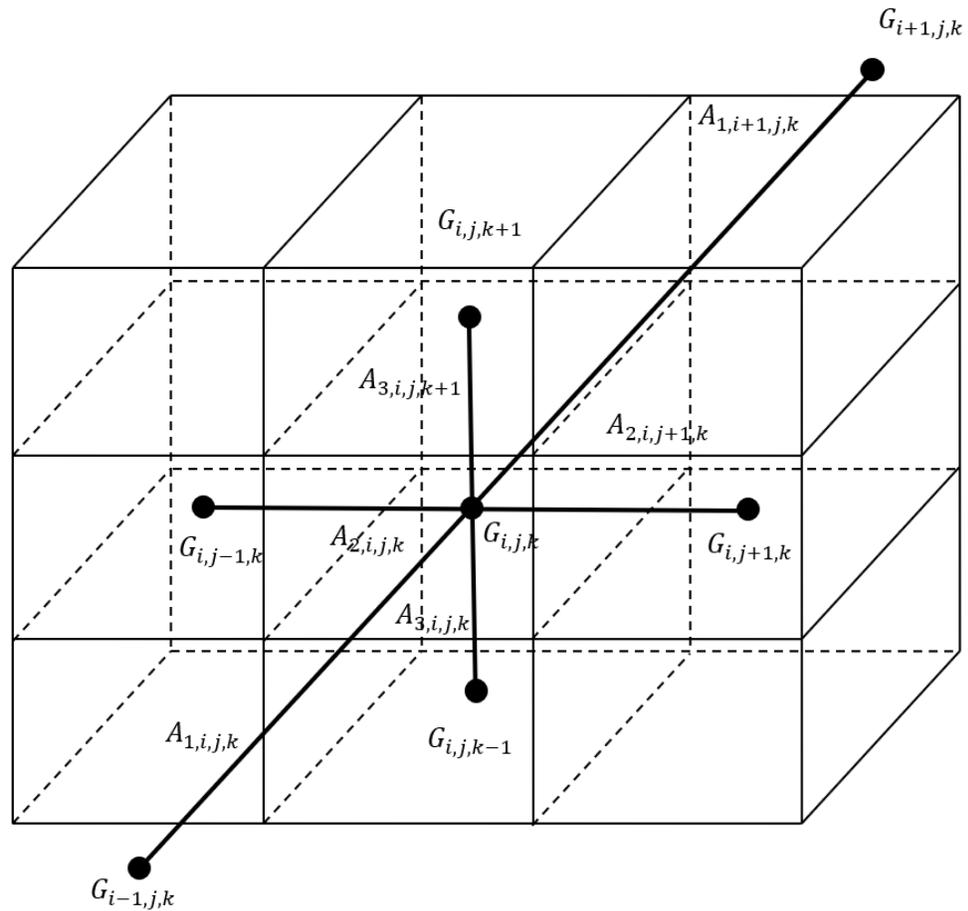


Figure 4-1: Liaisons entre le centre de masse $G_{i,j,k}$ avec les nœuds voisins.

Nous avons représenté les arêtes par des segments afin d'alléger le schéma. En effet, chaque arête $A_{q,i,j,k}$, avec $q = 1, 2, 3$, contient un ressort linéaire de raideur $K_{q,i,j,k}$ et un amortisseur ayant un coefficient d'amortissement $c_{q,i,j,k}$, possédant tous les deux une masse négligeable, comme le montre la figure 4-2.

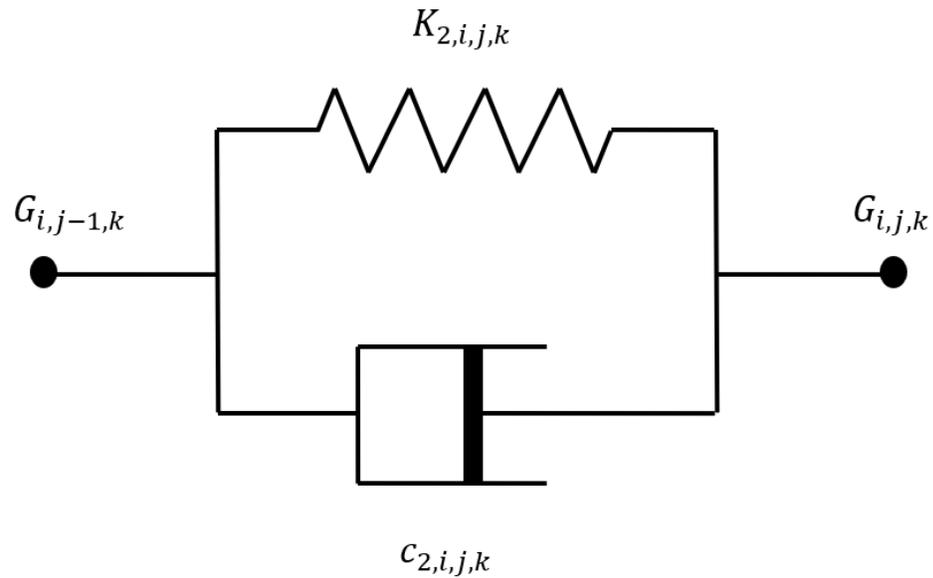


Figure 4-2: Composition d'une arête élastique entre deux nœuds suivant l'axe Y.

Le modèle est alors composé de $M \cdot 2N \cdot P$ nœuds et $(M + 1)(2N + 1)P$ arêtes, soit le même nombre de ressorts et d'amortisseurs. D'ailleurs, les nœuds voisins aux parois avant ($G_{1,j,k}$), arrière ($G_{M,j,k}$), gauche ($G_{i,1,k}$), droite ($G_{i,N,k}$) et inférieure ($G_{i,j,1}$) sont attachés à la structure de la citerne à l'aide du même type d'arêtes. Cependant, les nœuds situés dans l'extrémité supérieure ($G_{i,j,P}$) du modèle ne seront attachés qu'à cinq arêtes car ils n'ont pas de contact avec la structure du réservoir, ils représentent la surface libre du liquide. La figure 4-3 représente une section latérale du modèle pour une citerne rectangulaire suivant le plan (O, Y, Z) .

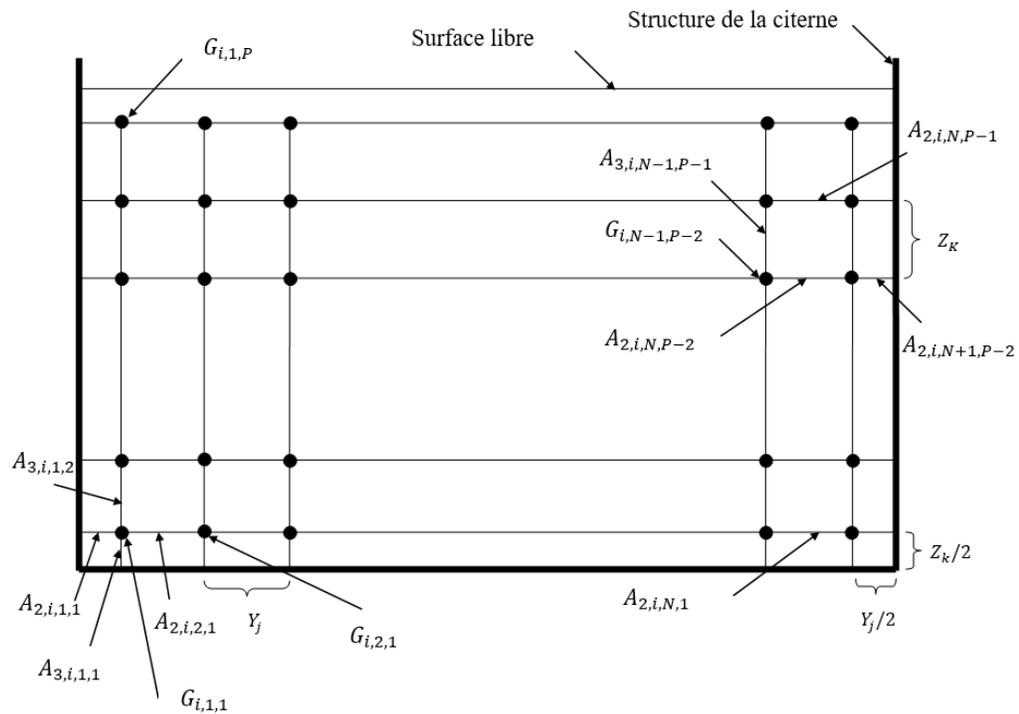


Figure 4-3 : Représentation des nœuds et des arêtes pour une section latérale de citerne rectangulaire.

La longueur initiale de chaque arête est la distance entre les nœuds attachés à ses extrémités. Par exemple, la longueur initiale de l'arête $A_{1,i,j,k}$ peut être calculée par $\|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i-1,j,k}\|$ avec $\|\vec{x}\|$ la norme euclidienne du vecteur \vec{x} . Cette longueur représente aussi la longueur initiale du ressort contenu dans l'arête.

Dans les sections qui suivent, nous allons montrer les méthodes utilisées pour calculer les raideurs des ressorts. Nous allons diviser les ressorts en trois types. Les ressorts suivant l'axe X , ceux suivant l'axe Y et ceux suivant l'axe Z . Les méthodes

varient d'un type à l'autre en dépit des informations que nous possédons et des hypothèses posées.

4.1.2 Ressorts suivant l'axe des X

Les ressorts suivant l'axe des X modélisent le mouvement longitudinal du liquide. Nous supposons au début que le liquide est réparti seulement suivant l'axe des Z , chaque portion du liquide entre deux hauteurs représente un mode de vibration. La formule suivante permet de déterminer la fréquence naturelle ω_n de chaque mode n du liquide pour une citerne rectangulaire [61] :

$$\omega_n^2 = \pi(2n - 1) \frac{g}{a} \tanh \left[\pi(2n - 1) \left(\frac{h}{a} \right) \right] \quad (4.1)$$

Avec g l'accélération de la gravité, a la longueur du réservoir suivant le mouvement du liquide et h la hauteur du liquide. Il est clair que dans notre cas, il est impossible d'utiliser la formule (4.1). Nous devons donc poser des hypothèses afin de l'adapter à notre modèle. Lorsque la citerne est horizontale, nous pouvons utiliser la formule (4.1) quel que soit sa forme [61]. D'abord, nous calculons la raideur du ressort qui correspond à chaque mode de vibration. En adaptant la formule (4.1) avec les notations utilisées, la fréquence naturelle, notée ω_{xk} , correspondant à chaque masse m_{xk} entre les deux hauteurs Z_{k-1} et Z_k est calculée par la formule suivante :

$$\omega_{xk}^2 = \pi(2(P - k + 1) - 1) \frac{g}{L} \tanh \left[\pi(2(P - k + 1) - 1) \left(\frac{Z_h}{L} \right) \right] \quad (4.2)$$

Dans ce cas, si nous supposons un ressort de raideur K_{xk} qui représente le mouvement de la masse m_{xk} , la raideur K_{xk} est alors calculée par :

$$K_{xk} = m_{xk} \cdot \omega_k^2 \quad (4.3)$$

Avec

$$m_{xk} = \rho X \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} f_a(z) dz \quad (4.4)$$

Cette raideur globale est ensuite divisée en plusieurs raideurs afin de trouver les constantes de tous les ressorts suivant l'axe X . Nous commençons par diviser la raideur K_{xk} suivant l'axe X en considérant que le ressort K_{xk} est en effet un ensemble de $M + 1$ ressorts montés en série. En posant l'hypothèse que plus on s'éloigne des parois de la citerne, plus le mouvement du liquide augmente, la raideur K_{xk} sera divisée de telle sorte que la raideur des ressorts en série diminue en s'éloignant des parois latérales. D'autre part, en raison de la symétrie par rapport au plan d'équation $x = L/2$, nous étudions seulement la région avant de ce plan et nous déduirons par la suite les raideurs des ressorts de l'autre côté du plan de symétrie.

Notons par $K_{xk,i}$ les $M + 1$ ressorts en série entre deux hauteurs Z_{k-1} et Z_k . On a alors :

$$\frac{1}{K_{xk}} = \sum_{i=0}^M \frac{1}{K_{xk,i}} \quad (4.5)$$

En considérant l'hypothèse de la symétrie, on a $K_{xk,i} = K_{xk,M-i}$. De plus, afin d'obtenir les raideurs qui diminuent en s'éloignant des parois, nous supposons que chaque raideur $K_{xk,i}$ est égale à une constante K_x multipliée par un facteur de pondération en fonction de la masse totale de la partition entre les deux hauteurs m_{xk} et la masse de la partie entre la paroi latérale avant et l'emplacement du ressort, notée $m_{xk,i}$. Nous posons alors que :

$$K_{xk,i} = \frac{m_{xk} + 2m_{xk,i}}{2m_{xk}} K_x \quad (4.6)$$

Avec

$$m_{xk,i} = \rho \frac{X}{M} \left(\frac{M}{2} - i \right) \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} f_a(z) dz \quad (4.7)$$

En effet, lorsque nous nous éloignons de la paroi avant, la masse $m_{xk,i}$ diminue, ce qui entraîne la diminution du facteur de pondération, et par la même occasion, la diminution de la raideur $K_{xk,i}$. La formule (4.5) devient alors l'équation suivante avec un inconnu K_x :

$$\frac{1}{K_{xk}} = \sum_{i=0}^M \frac{2m_{xk}}{(m_{xk} + 2m_{xk,i})K_x} \quad (4.8)$$

Nous résolvons ensuite l'équation pour trouver la valeur de K_x et nous employons la formule (4.6) afin de retrouver les valeurs des raideurs $K_{xk,i}$, puis les valeurs de $K_{xk,M-i}$, avec $0 \leq i \leq M/2$ si M est pair ou $0 \leq i \leq (M-1)/2$ sinon.

Ensuite, nous allons diviser chaque raideur $K_{xk,i}$ par $2N$ en supposant que les $2N$ ressorts sont montés en parallèle et possédant des raideurs égales. Ainsi, chaque raideur $K_{1,i,j,k}$ suivant X se calculera par :

$$K_{1,i,j,k} = \frac{K_{xk,i}}{2N} \quad \text{tel que } 1 \leq j \leq 2N \quad (4.9)$$

Finalement nous répétons la même procédure P fois pour obtenir les raideurs de tous les ressorts suivant X .

4.1.3 Ressorts suivant l'axe des Y

Les ressorts suivant l'axe des Y modélisent le mouvement latéral du liquide, leurs raideurs respectives sont notées $K_{2,i,j,k}$. Nous allons utiliser la même logique utilisée dans la section précédente pour déterminer ces raideurs. Nous supposons au début que le liquide est divisé suivant l'axe des Z seulement. La formule (4.1) qui calcule les fréquences naturelles de la portion du liquide entre les hauteurs Z_{k-1} et Z_k est modifiée légèrement sous la forme suivante :

$$\omega_{xk}^2 = \pi(2(P - k) - 1) \frac{g}{Y_{k-1} + Y_k} \tanh \left[\pi(2(P - k + 1) - 1) \left(\frac{Z_h}{Y_{k-1} + Y_k} \right) \right] \quad (4.10)$$

Avec Y_k la demi-largeur de la citerne suivant l'axe des Y qui correspond à la hauteur Z_k . En effet, la largeur de la citerne suivant l'axe des Y est variable et dépend de la hauteur du liquide. Alors, nous avons remplacé la valeur de a dans l'équation (4.1) par la moyenne des deux largeurs du réservoir qui correspondent aux hauteurs Z_{k-1} et Z_k pour chaque

portion du liquide entre ces deux hauteurs. La raideur K_{yk} qui correspond à la portion k est calculée par la formule ci-dessous :

$$K_{yk} = m_{yk} \cdot \omega_{yk}^2 \quad (4.11)$$

Avec m_{yk} la masse de la k^e portion du liquide. Supposons maintenant que le ressort K_{yk} est composé d'un ensemble de M ressorts montés en parallèle de rigidités $K_{yk,i} = K_{yk}/M$ avec $1 \leq i \leq M$. Supposons ensuite que chaque ressort $K_{yk,i}$ est composé de $2N + 1$ ressorts montés en série tel que leurs raideurs respectives $K_{2,i,j,k}$ diminuent en s'éloignant des parois transversales de la citerne. Ceci nous mène encore à l'usage d'un facteur de pondération. Chaque raideur $K_{2,i,j,k}$ est calculée par :

$$K_{2,i,j,k} = \frac{m_{yk}/M + 2m_{yk,j}}{2m_{yk}/M} K_y \quad (4.12)$$

Tel que $m_{yk,j}$ est la masse du liquide situé entre la position du ressort $K_{2,i,j,k}$ et le milieu de la citerne suivant l'axe des Y . Pour les ressorts situés à gauche de l'axe des Y , cette masse sera calculée en utilisant les masses $m_{i,j,k}$ déjà déterminées précédemment :

$$m_{yk,j} = \sum_{l=1}^{N-j} m_{i,l,k} \quad (4.13)$$

Le terme K_y est une constante que nous calculons en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{1}{K_{yk,i}} = \sum_{j=0}^{2N} \frac{2m_{yk}/M}{(m_{yk}/M + 2m_{yk,j})K_y} \quad (4.14)$$

De cette façon nous calculons toutes les rigidités $K_{2,i,j,k}$ des ressorts suivant l'axe des Y .

4.1.4 Ressorts suivant l'axe des Z

Dans cette section, nous allons établir une méthode qui permet de déterminer les raideurs $K_{3,i,j,k}$ des ressorts suivant l'axe des Z . Ces ressorts simulent le mouvement vertical du liquide. Il est clair que certaines hypothèses devront être posées pour arriver à un résultat. En effet, dans ce cas, il n'existe aucune formule dans la littérature qui permet de calculer ou d'approcher les valeurs des fréquences naturelles des différents modes de vibration du liquide. Nous allons alors utiliser une autre approche tout en gardant un sens logique dans l'élaboration de la méthode.

La première hypothèse est que le déplacement vertical du centre de masse du liquide est très limité comparé à son mouvement latéral ou longitudinal. Pour les citernes conventionnelles, le déplacement vertical maximal, noté Δz , pour chaque forme de citerne sera déterminé à partir de la recherche de Kang [29]. La deuxième hypothèse est de considérer l'effet de la pression du liquide sur le mouvement vertical. En effet, plus on s'approche du fond de la citerne, plus le mouvement vertical est limité à cause de l'effet de la pression exercée par le liquide. En prenant en considération ces deux hypothèses, nous supposons que le centre de masse du liquide est lié verticalement aux parois de la citerne par un ressort de raideur K_z . Ainsi, en

considérant que la masse du centre de masse du liquide est la masse totale du liquide, notée m_t , et en utilisant l'équation d'équilibre du système masse-ressort, la raideur K_z est calculée par la formule suivante :

$$K_z = \frac{m_t \cdot g}{\Delta z} \quad (4.15)$$

Ensuite, nous supposons que le ressort K_z est un ensemble de ressorts, de rigidités K_{zk} , montés en série tels que chaque ressort a une plus grande raideur que celui situé au-dessus de lui. En utilisant un facteur de pondération, nous calculons chaque raideur K_{zk} comme suit :

$$K_{zk} = \frac{m_t + m_{k,t}}{2m_t} K_{zz} \quad (4.16)$$

Tel que $m_{k,t}$ est la masse du liquide entre la position du ressort K_{zk} et la surface libre. De ce fait, plus la position du ressort s'approche du fond de la citerne, plus sa raideur augmente. La masse $m_{k,t}$ est calculée par :

$$m_{k,t} = \rho X \int_{z_{k-1}}^{z_h} f_a(z) dz \quad (4.17)$$

K_{zz} est une constante que nous retrouvons en solutionnant l'équation suivante :

$$\frac{1}{K_z} = \sum_{k=1}^P \frac{2m_t}{(m_t + m_{k,t})K_{zz}} \quad (4.18)$$

Cette équation est retrouvée en utilisant la formule permettant de sommer des raideurs de ressorts montés en série. Par la suite, chaque ressort K_{zk} est considéré comme étant un ensemble de $2MN$ ressorts parallèles de raideurs $K_{3,i,j,k}$ toutes égales. On a alors :

$$K_{3,i,j,k} = K_{zk}/2MN \quad (4.19)$$

Ainsi, nous retrouvons les raideurs de tous les ressorts verticaux de rigidités $K_{3,i,j,k}$ et tous les autres ressorts.

4.1.5 Coefficients d'amortissement

Afin de mieux simuler le mouvement du liquide dans la citerne, il est important d'intégrer des amortisseurs au modèle élaboré. Une caractéristique très importante des liquides est la viscosité dynamique. En effet, plus la viscosité dynamique du liquide est petite, plus le temps nécessaire pour que le liquide retrouve son équilibre sera long. Nous pouvons alors considérer que la viscosité a un lien direct avec l'amortissement. Plus le coefficient d'amortissement est petit, plus le temps nécessaire pour que le modèle reprend sa position d'équilibre sera long. Alors, nous pouvons considérer que le coefficient d'amortissement est en effet le coefficient de viscosité dynamique du liquide multiplié par une longueur. Il est à noter qu'en observant les unités du coefficient de viscosité dynamique et du coefficient d'amortissement, il fallait diviser le premier par une longueur en m . Comme convention, nous avons choisi la longueur de l'arête correspondante. Les coefficients d'amortissement du modèle, notés $c_{q,i,j,k}$

avec $q = 1, 2, 3$ sont calculés en divisant le coefficient de viscosité dynamique du liquide, noté η , par la longueur de l'arête $A_{q,i,j,k}$ et en multipliant le résultat par 100. Par exemple, le coefficient d'amortissement $c_{1,i,j,k}$ de l'arête $A_{1,i,j,k}$ située entre les nœuds $G_{i,j,k}$ et $G_{i+1,j,k}$ est calculé par la formule ci-dessous :

$$c_{1,i,j,k} = \frac{100 \eta}{\|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i-1,j,k}\|} \quad (4.20)$$

Avec $\vec{p}_{i,j,k}$ le vecteur des coordonnées du nœud $G_{i,j,k}$ et $\|\vec{x}\|$ la norme euclidienne d'ordre 3 d'un vecteur quelconque \vec{x} . Notons que cette formule a été obtenue de manière empirique.

Finalement, afin d'obtenir des résultats adéquats, un facteur de calibration est ajouté au modèle de telle sorte que chaque raideur et chaque coefficient d'amortissement soient multipliés par ce facteur. Nous pouvons expliquer ce facteur comme étant une conséquence de l'imprécision générée lorsque le maillage n'est pas assez raffiné. D'ailleurs, le choix de la valeur du facteur de calibration dépend du nombre de nœuds choisi dans le modèle. Plus le nombre de nœuds est petit, plus le facteur est grand permettant ainsi de compenser cette imprécision et de limiter le mouvement des nœuds. De plus, la formule (4.1) utilisée comme base de calcul des raideurs suivant X et Y reste une approximation de la solution d'une équation bien plus complexe en tenant compte de plusieurs simplifications. Ce facteur de calibration permet de corriger toutes les imperfections causées par ces hypothèses et offrir une

modélisation de qualité. Notons que de manière empirique, nous avons pu obtenir des résultats satisfaisants en posant le coefficient de calibration égal au taux de remplissage dans chacune des simulations ultérieures.

4.2 Formulation des équations du mouvement

Afin de développer les équations du mouvement du modèle complet, il suffit d'élaborer les équations du mouvement de chaque nœud. D'abord, nous allons noter

que le déplacement de chaque nœud dans l'espace est noté par $\vec{r}_{i,j,k}(t) = \begin{bmatrix} x_{i,j,k}(t) \\ y_{i,j,k}(t) \\ z_{i,j,k}(t) \end{bmatrix}$, sa

vitesse est $\vec{v}_{i,j,k}(t) = \dot{\vec{r}}_{i,j,k}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{i,j,k}(t) \\ \dot{y}_{i,j,k}(t) \\ \dot{z}_{i,j,k}(t) \end{bmatrix}$ et son accélération $\vec{a}_{i,j,k}(t) = \ddot{\vec{r}}_{i,j,k}(t) =$

$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{i,j,k}(t) \\ \ddot{y}_{i,j,k}(t) \\ \ddot{z}_{i,j,k}(t) \end{bmatrix}$. Les forces appliquées sur le nœud $G_{i,j,k}$ sont :

- Les forces de tension $\vec{T}_{i,j,k}$ appliquées par les ressorts attachés au même nœud $G_{i,j,k}$.

La longueur initiale du ressort est la distance initiale entre les deux nœuds dont il est attaché. Sa longueur dans un temps t est la distance entre les deux nœuds au même moment. Ainsi, d'après la loi de *Hooke*, les forces de tensions appliquées sur le nœud $G_{i,j,k}$ sont :

$$\begin{aligned}
\vec{T}_{1,i,j,k} &= -K_{1,i,j,k} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i-1,j,k}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i-1,j,k}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i-1,j,k}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i-1,j,k}\|} \\
\vec{T}_{1,i+1,j,k} &= -K_{1,i+1,j,k} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i+1,j,k}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i+1,j,k}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i+1,j,k}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i+1,j,k}\|} \\
\vec{T}_{2,i,j,k} &= -K_{2,i,j,k} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j-1,k}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i,j-1,k}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j-1,k}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j-1,k}\|} \\
\vec{T}_{2,i,j+1,k} &= -K_{2,i,j+1,k} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j+1,k}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i,j+1,k}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j+1,k}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j+1,k}\|} \\
\vec{T}_{3,i,j,k} &= -K_{3,i,j,k} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k-1}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i,j,k-1}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k-1}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k-1}\|} \\
\vec{T}_{3,i,j,k+1} &= -K_{3,i,j,k+1} (\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k+1}\| - \|\vec{p}_{i,j,k} - \vec{p}_{i,j,k+1}\|) \cdot \frac{\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k+1}}{\|\vec{r}_{i,j,k} - \vec{r}_{i,j,k+1}\|}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Avec $\|\vec{x}\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur \vec{x} . La force $\vec{T}_{i,j,k}$ est alors la somme de toutes les forces de tension appliquées sur le nœud $G_{i,j,k}$:

$$\vec{T}_{i,j,k} = \vec{T}_{1,i,j,k} + \vec{T}_{1,i+1,j,k} + \vec{T}_{2,i,j,k} + \vec{T}_{2,i,j+1,k} + \vec{T}_{3,i,j,k} + \vec{T}_{3,i,j,k+1} \tag{4.22}$$

Et suivant les directions du repère, on a :

$$\vec{T}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} T_{x,i,j,k} \\ T_{y,i,j,k} \\ T_{z,i,j,k} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

- Les forces d'amortissement $\vec{A}_{i,j,k}$ des amortisseurs liés au nœud $G_{i,j,k}$. Ces forces sont calculées en utilisant la variation des vitesses entre deux points. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{1,i,j,k} &= -c_{1,i,j,k} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i-1,j,k}) \\
\vec{A}_{1,i+1,j,k} &= -c_{1,i+1,j,k} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i+1,j,k}) \\
\vec{A}_{2,i,j,k} &= -c_{2,i,j,k} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i,j-1,k}) \\
\vec{A}_{2,i,j+1,k} &= -c_{2,i,j+1,k} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i,j+1,k}) \\
\vec{A}_{3,i,j,k} &= -c_{3,i,j,k} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i,j,k-1}) \\
\vec{A}_{3,i,j,k+1} &= -c_{3,i,j,k+1} \cdot (\vec{v}_{i,j,k} - \vec{v}_{i,j,k+1})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Alors la force d'amortissement $\vec{A}_{i,j,k}$ est la somme de toutes les autres forces :

$$\vec{A}_{i,j,k} = \vec{A}_{1,i,j,k} + \vec{A}_{1,i+1,j,k} + \vec{A}_{2,i,j,k} + \vec{A}_{2,i,j+1,k} + \vec{A}_{3,i,j,k} + \vec{A}_{3,i,j,k+1} \tag{4.25}$$

Et suivant les directions du repère, on a :

$$\vec{A}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} A_{x,i,j,k} \\ A_{y,i,j,k} \\ A_{z,i,j,k} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

- Les forces d'excitation du système $\vec{F}_{i,j,k}$. Ces forces sont celles exercées sur la citerne par des éléments extérieurs dus à une manipulation du véhicule. Par exemple, une accélération latérale due à un changement de voie ou un virage, ou

bien une décélération longitudinale due au freinage du véhicule. Ainsi, pour chaque nœud $G_{i,j,k}$, la force d'excitation appliquée est décrite par la formule suivante :

$$\vec{F}_{i,j,k} = m_{i,j,k} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Tel que a_x , a_y et a_z sont, respectivement, les accélérations longitudinale, latérale et verticale exercées sur la citerne.

Finalement, d'après la deuxième loi de Newton qui nous dit que la somme des forces exercées sur un point est égale à sa masse multipliée par son accélération, on applique sur un point $G_{i,j,k}$ et on obtient :

$$\vec{T}_{i,j,k} + \vec{A}_{i,j,k} + \vec{F}_{i,j,k} = m_{i,j,k} \cdot \vec{a}_{i,j,k} \quad (4.28)$$

Puisque le modèle est en 3 dimensions, on aura alors 3 équations de mouvement pour chaque nœud, ce qui fait $6.M.N.P$ équations pour tout le modèle.

Soient \vec{r} le vecteur déplacement, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ le vecteur vitesse et $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ le vecteur accélération de tout le système mécanique. Ces vecteurs sont de dimension $6MNP$ et s'écrivent comme suit :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x_{1,1,1} \\ y_{1,1,1} \\ z_{1,1,1} \\ \vdots \\ x_{i,j,k} \\ y_{i,j,k} \\ z_{i,j,k} \\ \vdots \\ x_{M,2N,P} \\ y_{M,2N,P} \\ z_{M,2N,P} \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,1,1} \\ \dot{y}_{1,1,1} \\ \dot{z}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{i,j,k} \\ \dot{y}_{i,j,k} \\ \dot{z}_{i,j,k} \\ \vdots \\ \dot{x}_{M,2N,P} \\ \dot{y}_{M,2N,P} \\ \dot{z}_{M,2N,P} \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1,1,1} \\ \ddot{y}_{1,1,1} \\ \ddot{z}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \ddot{x}_{i,j,k} \\ \ddot{y}_{i,j,k} \\ \ddot{z}_{i,j,k} \\ \vdots \\ \ddot{x}_{M,2N,P} \\ \ddot{y}_{M,2N,P} \\ \ddot{z}_{M,2N,P} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

D'autre part, la matrice des masses $[\mathcal{M}]$ de dimension $6MNP \times 6MNP$ est une matrice diagonale telle que les masses des particules $G_{i,j,k}$ sont sur la diagonale suivant un ordre précis et que chaque valeur $m_{i,j,k}$ se répète trois fois de suite (3-dimensions).

La matrice $[\mathcal{M}]$ s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 & 0_{3,3} & \cdots & 0_{3,3} & \cdots & 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{M}_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{3,3} & \cdots & 0_{3,3} & \mathcal{M}_l & 0_{3,3} & \ddots & 0_{3,3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_{3,3} & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{3,3} & \mathcal{M}_{2MNP-1} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & 0_{3,3} & \cdots & \cdots & 0_{3,3} & 0_{3,3} & \mathcal{M}_{2MNP} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Avec l'indice $l = j + 2N(k - 1) + 2NP(i - 1)$ donnant la relation entre la position de chaque nœud et son emplacement dans la matrice, \mathcal{M}_l est une matrice de dimension

3×3 tel que $\mathcal{M}_l = \begin{bmatrix} m_{i,j,k} & 0 & 0 \\ 0 & m_{i,j,k} & 0 \\ 0 & 0 & m_{i,j,k} \end{bmatrix}$ et $0_{3,3}$ est la matrice nulle de dimensions

3×3 . Le vecteur global des forces d'excitation \vec{F} est de dimension $6MNP$ et s'écrit comme suit :

$$\vec{F} = [\mathcal{M}] \cdot \overrightarrow{a_{ext}} \quad (4.31)$$

Avec $\overrightarrow{a_{ext}} = [a_x \ a_y \ a_z \ \dots \ a_x \ a_y \ a_z]^t$. Le vecteur des tensions \vec{T} de dimension $6MNP$ du système mécanique global s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{T} = [T_{x,1,1,1} \ T_{y,1,1,1} \ T_{z,1,1,1} \ \dots \ T_{x,M,2N,P} \ T_{y,M,2N,P} \ T_{z,M,2N,P}]^t \quad (4.32)$$

Le vecteur d'amortissement global \vec{A} de dimension $6MNP$ est donnée par :

$$\vec{A} = [A_{x,1,1,1} \ A_{y,1,1,1} \ A_{z,1,1,1} \ \dots \ A_{x,M,2N,P} \ A_{y,M,2N,P} \ A_{z,M,2N,P}]^t \quad (4.33)$$

Ainsi, en utilisant le premier principe fondamental de la dynamique, le système d'équations du mouvement du modèle mécanique global s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$[\mathcal{M}]\vec{\ddot{r}} = [\mathcal{M}]\overrightarrow{a_{ext}} - \vec{A} + \vec{T} \quad (4.34)$$

Ou encore

$$[\mathcal{M}](\vec{\ddot{r}} - \overrightarrow{a_{ext}}) + \vec{A} - \vec{T} = 0 \quad (4.35)$$

4.3 Organisation des calculs et simulations :

Toutes les étapes du développement du nouveau modèle et de la résolution de son système d'équations ont été réalisées sur le logiciel de calcul numérique et symbolique *Maple* [62]. D'ailleurs, le choix de ce logiciel réside dans le fait qu'il répond à tous les besoins nécessaires tant dans le développement symbolique des formules et équations que dans les outils internes de calcul et résolution numériques. D'abord, les différents paramètres nécessaires à une simulation spécifique sont entrés. Ensuite, la forme de la section latérale de la citerne est obtenue. Le liquide est alors discrétisé suivant les paramètres du liquide, le maillage spécifié, le taux de remplissage et la forme du réservoir, ce qui nous permet d'obtenir les coordonnées initiales et la masse des nœuds et la longueur initiale des arêtes. Les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement sont ensuite déterminés. Enfin, le système d'équations du modèle est formulé sous forme vectorielle. Le schéma de la figure 4-4 montre les principales étapes de la formulation mathématique du nouveau modèle et du système d'équations de mouvement.

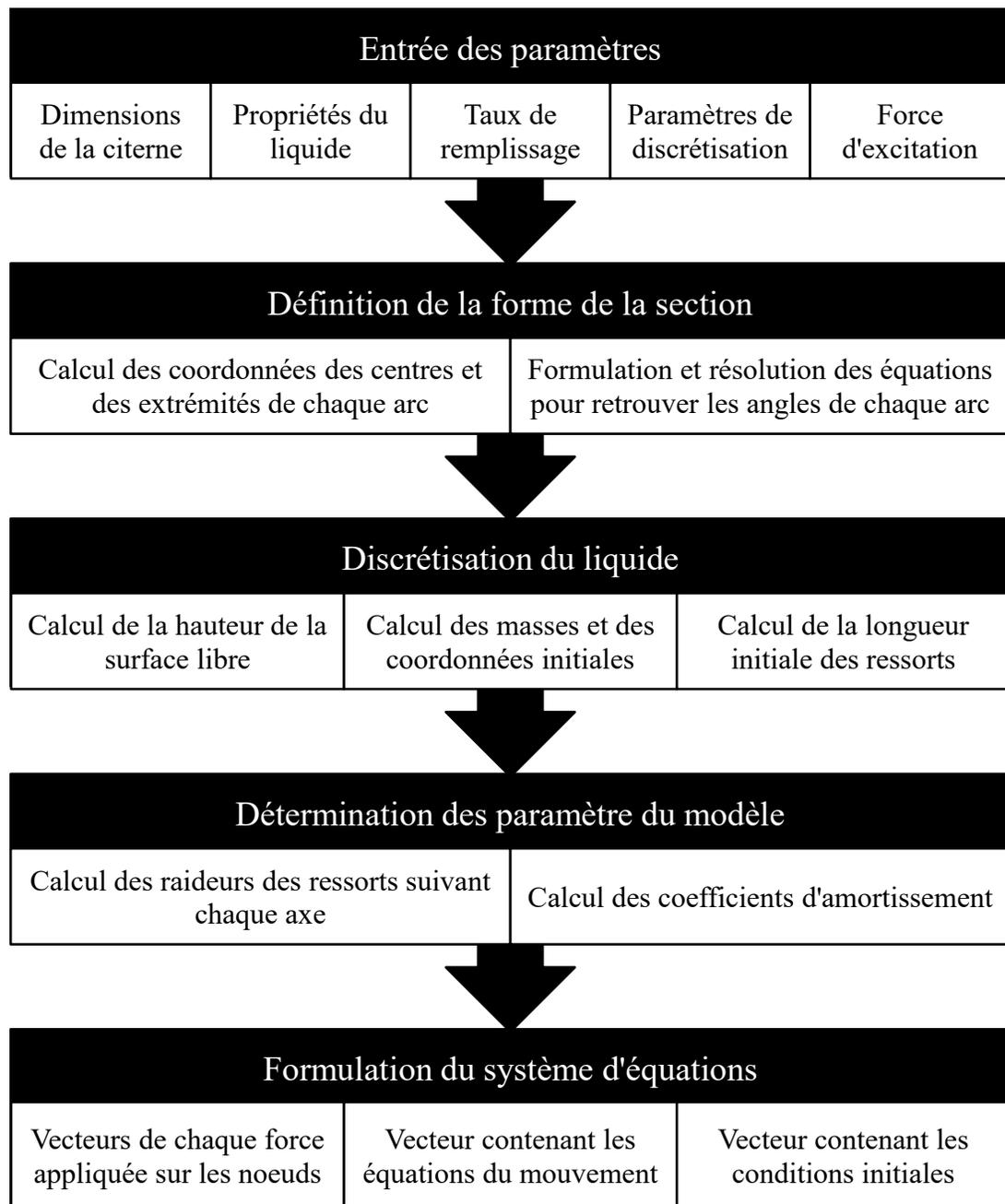


Figure 4-4 : Étapes de formulation du nouveau modèle sur le logiciel de calcul.

La résolution du système d'équations différentielles se fera en utilisant la méthode de *Runge-Kutta-Fehlberg* d'ordre 4 (*RKF45*) [63]. Cette méthode est très précise et n'emploie pas de pas de temps fixe. D'ailleurs, le pas de temps est contrôlé à chaque itération par une formule supplémentaire d'ordre supérieur afin de ne pas dépasser une certaine erreur fixée. Le schéma de la figure 4-5 montre les différentes étapes nécessaires à l'obtention des résultats que leurs utilisations respectives.

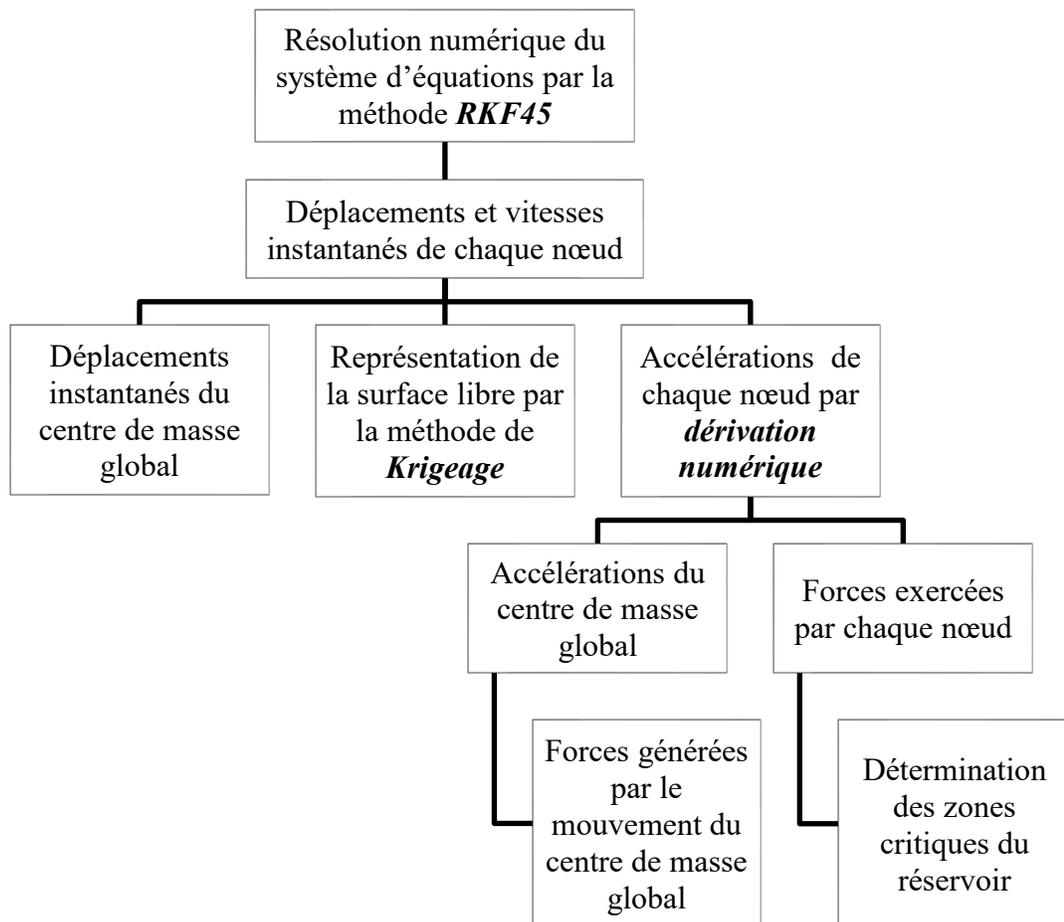


Figure 4-5: Étapes de résolution et obtention des résultats.

CHAPITRE 5

SIMULATION ET VALIDATION DU MODÈLE

Ce chapitre présente quelques résultats obtenus en utilisant le nouveau modèle 3D du liquide développé dans cette recherche afin de le comparer avec la littérature. Nous allons commencer par étudier la réponse du liquide en termes de déplacement et de forces de pression engendrées à la suite de trois excitations (mouvement dans une courbe, changement de voie simple et freinage) et par rapport à deux taux de remplissage. Finalement, ces résultats sont ensuite comparés à des résultats obtenus précédemment au sein de notre équipe de recherche en utilisant d'autres approches dans le but de le valider.

Pour une meilleure comparaison, nous avons utilisé le nouveau modèle dynamique pour évaluer les déplacements longitudinal $x_g(t)$, latéral $y_g(t)$ et vertical $z_g(t)$ du

centre de masse global du liquide à partir du déplacement de chaque nœud du maillage en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_g(t) &= \frac{1}{m_g} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^P m_{i,j,k} x_{i,j,k}(t) \\
 y_g(t) &= \frac{1}{m_g} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^P m_{i,j,k} y_{i,j,k}(t) \\
 z_g(t) &= \frac{1}{m_g} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2N} \sum_{k=1}^P m_{i,j,k} z_{i,j,k}(t)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où m_g est la masse globale du liquide dans la citerne. L'obtention des déplacements des nœuds du maillage sont calculés par résolution numérique du système d'équations différentielles (4.35). Les forces générées par le déplacement du centre de masse sont évaluées en calculant les accélérations longitudinale $a_{gx}(t)$, latérale $a_{gy}(t)$ et verticale $a_{gz}(t)$ par dérivation numérique des déplacements du centre de masse obtenus par les formules (5.1). Les forces $F_{gx}(t)$, latérale $F_{gy}(t)$ et verticale $F_{gz}(t)$ sont calculées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{gx}(t) &= m_g a_{gx}(t) \\
 F_{gy}(t) &= m_g a_{gy}(t) \\
 F_{gz}(t) &= m_g a_{gz}(t)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pour chaque simulation, les résultats sont comparés avec l'étude antérieure effectuée au sein de notre équipe de recherche [13] où deux autres modèles ont été élaborés. Le premier modèle est un modèle analytique simplifié pour simuler le mouvement du liquide dans une citerne. Ce modèle représente la surface libre par un plan en mouvement à l'intérieur de la citerne. Le deuxième modèle est un modèle numérique complexe développé à l'aide d'un logiciel de simulation de fluide en se basant sur la résolution numérique des équations de *Navier-Stokes*.

5.1 Décalage latéral de la charge liquide

Dans cette section, nous allons étudier le décalage latéral du liquide en utilisant le nouveau modèle élaboré. Deux types d'excitations seront considérés : un mouvement dans une courbe et un changement de voie simple. Afin de comparer avec des résultats obtenus précédemment au sein de notre équipe de recherche, les dimensions de la citerne, la nature du liquide et les forces d'entrée sont tirées de la recherche de Toumi [13]. Nous étudions un exemple de citerne à section elliptique de longueur $L = 7.5 \text{ m}$ et de demi-axes $a = 1.2 \text{ m}$ et $b = 1 \text{ m}$. Le liquide sélectionné est l'huile domestique de densité volumique $\rho = 960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de coefficient de viscosité dynamique $\eta = 0.048 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. De plus, les paramètres du modèle de discrétisation sont $M = 14$, $N = 3$ et $P = 5$. Le modèle dynamique contient alors 420 nœuds et 525 arêtes. Les

taux de remplissage τ de 50 % et 75 % sont aussi sélectionnés pour la comparaison des résultats.

5.1.1 Mouvement dans une courbe

La première simulation effectuée est le mouvement dans une courbe. Dans ce cas, on suppose que le véhicule est engagé dans une courbe possédant un rayon de courbure constant. L'accélération latérale qui définit cette manœuvre est donnée par la formule suivante :

$$\begin{cases} a_y = 0 & t \leq t_1 \\ a_y = -A \cos(\pi(t + t_2 - 2t_1)) & t_1 < t \leq t_2 \\ a_y = A & t > t_2 \\ A = 3 \text{ m/s}^2, t_1 = 1 \text{ s}, t_2 = 1.5 \text{ s} \end{cases} \quad (5.3)$$

Les figures 5-1 et 5-2 montrent les déplacements latéral y_g et vertical z_g du centre de masse du liquide dus à l'accélération a_y . Les résultats montrent que le déplacement latéral est plus important que le déplacement vertical. De plus, la variation de l'amplitude, dans les deux cas, diminue lorsque le taux de remplissage est plus grand. On observe aussi des oscillations dues au mouvement de la surface libre.

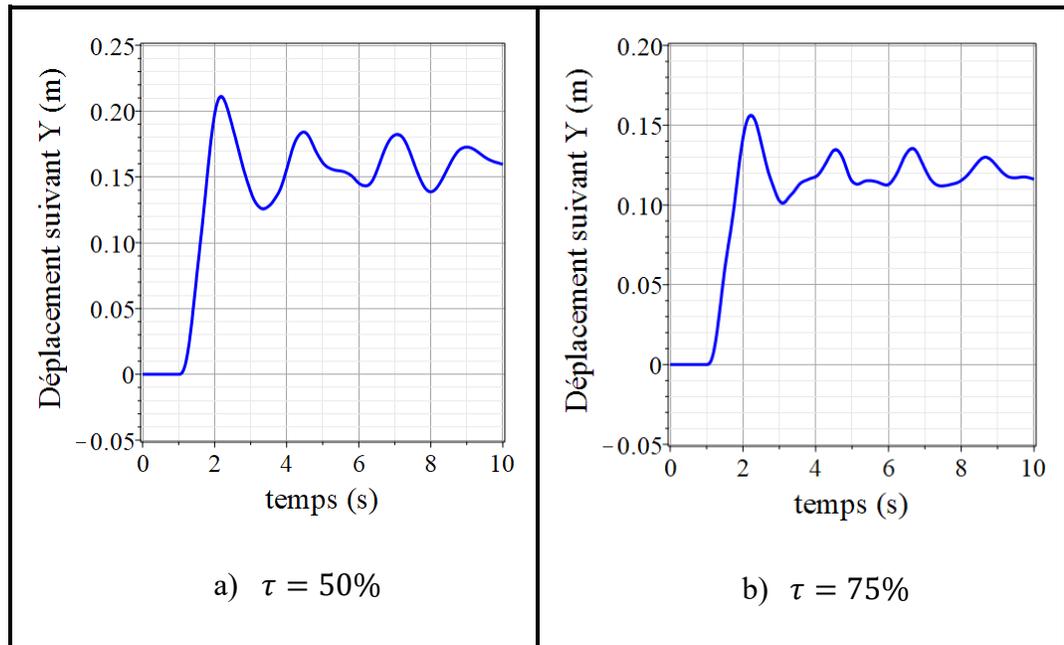


Figure 5-1 : Déplacement latéral du centre de masse du liquide y_g .

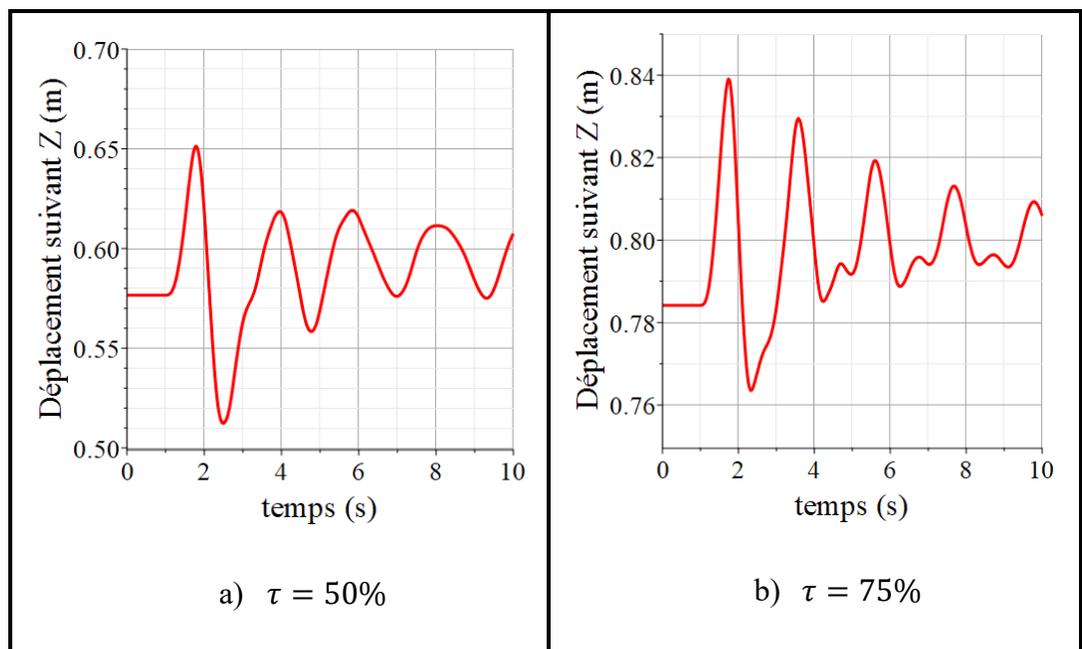
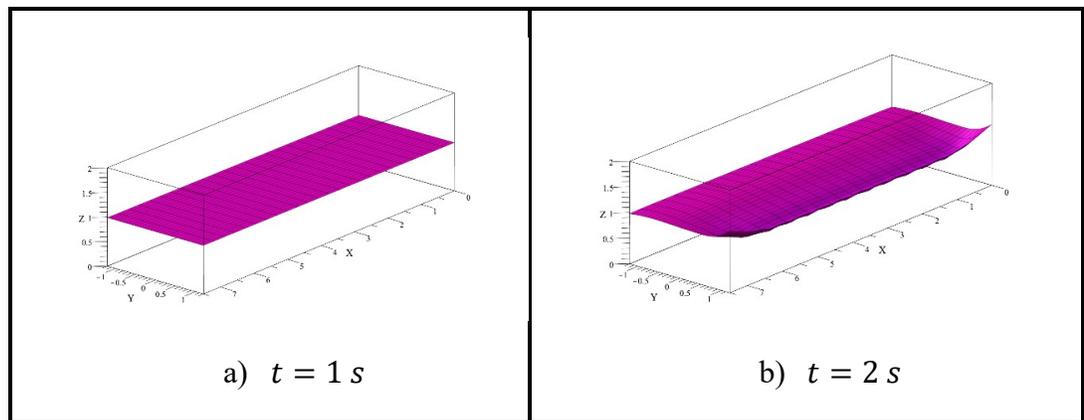


Figure 5-2 : Déplacement vertical du centre de masse du liquide z_g .

Les figures 5-3 et 5-4 représentent la forme de la surface libre du liquide entre $t = 1\text{ s}$ et $t = 8\text{ s}$ avec des intervalles de temps d'une seconde pour les taux de remplissage de 50 % et 75 % respectivement. La surface libre est obtenue par interpolation bidimensionnelles des nœuds supérieurs du modèle en utilisant la méthode de krigeage multidimensionnelle [64]. Cette méthode très puissante permet d'obtenir plus facilement des splines cubiques représentant une surface à partir de points d'interpolation. Ainsi, le nouveau modèle développé permet d'obtenir un aperçu de la forme de la surface libre du liquide en 3D. On remarque que la déformation de la surface libre est visible dans le sens où la force d'excitation est appliquée. On remarque aussi que la déformation est plus importante lorsque le taux de remplissage est de 50 %.



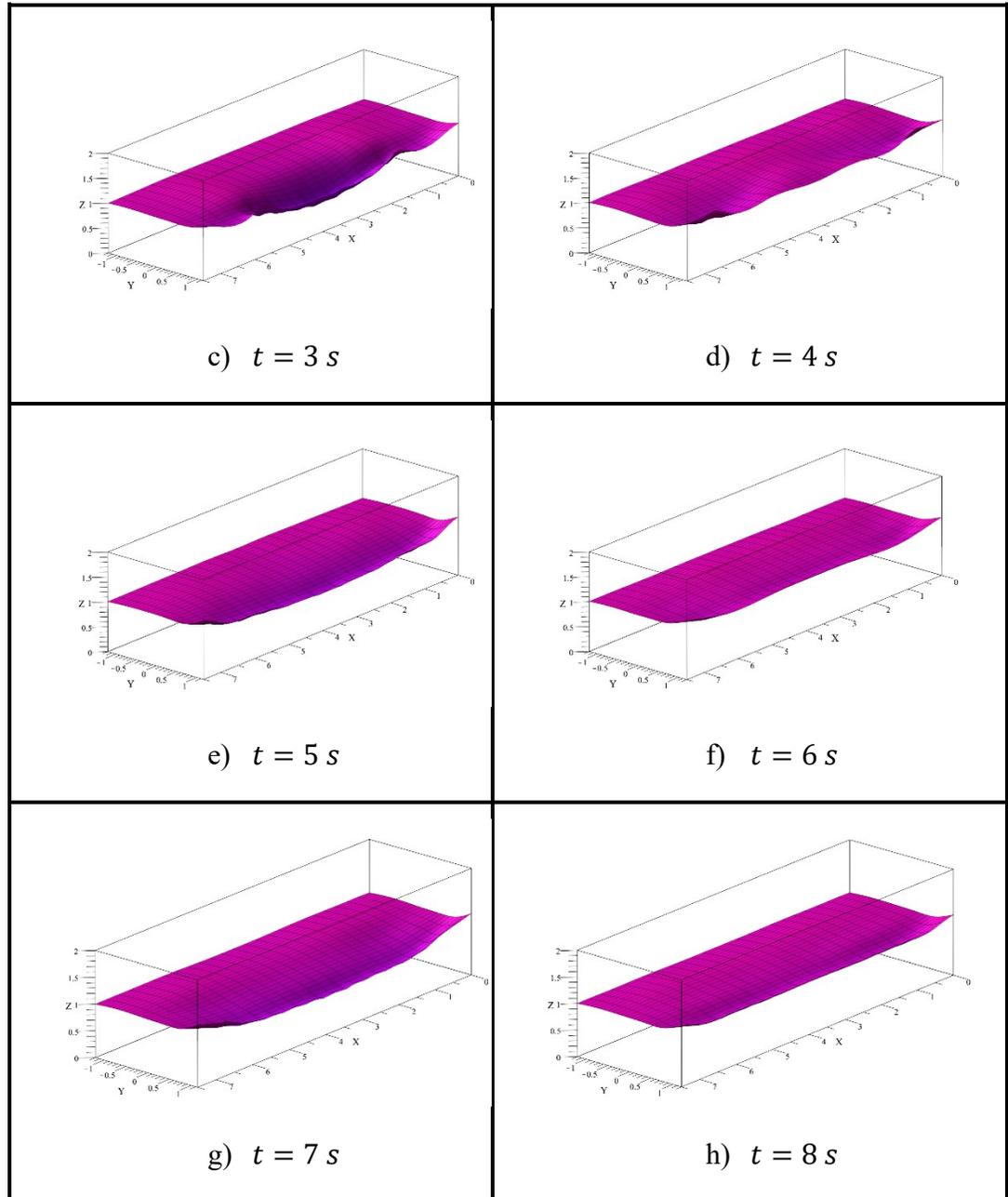
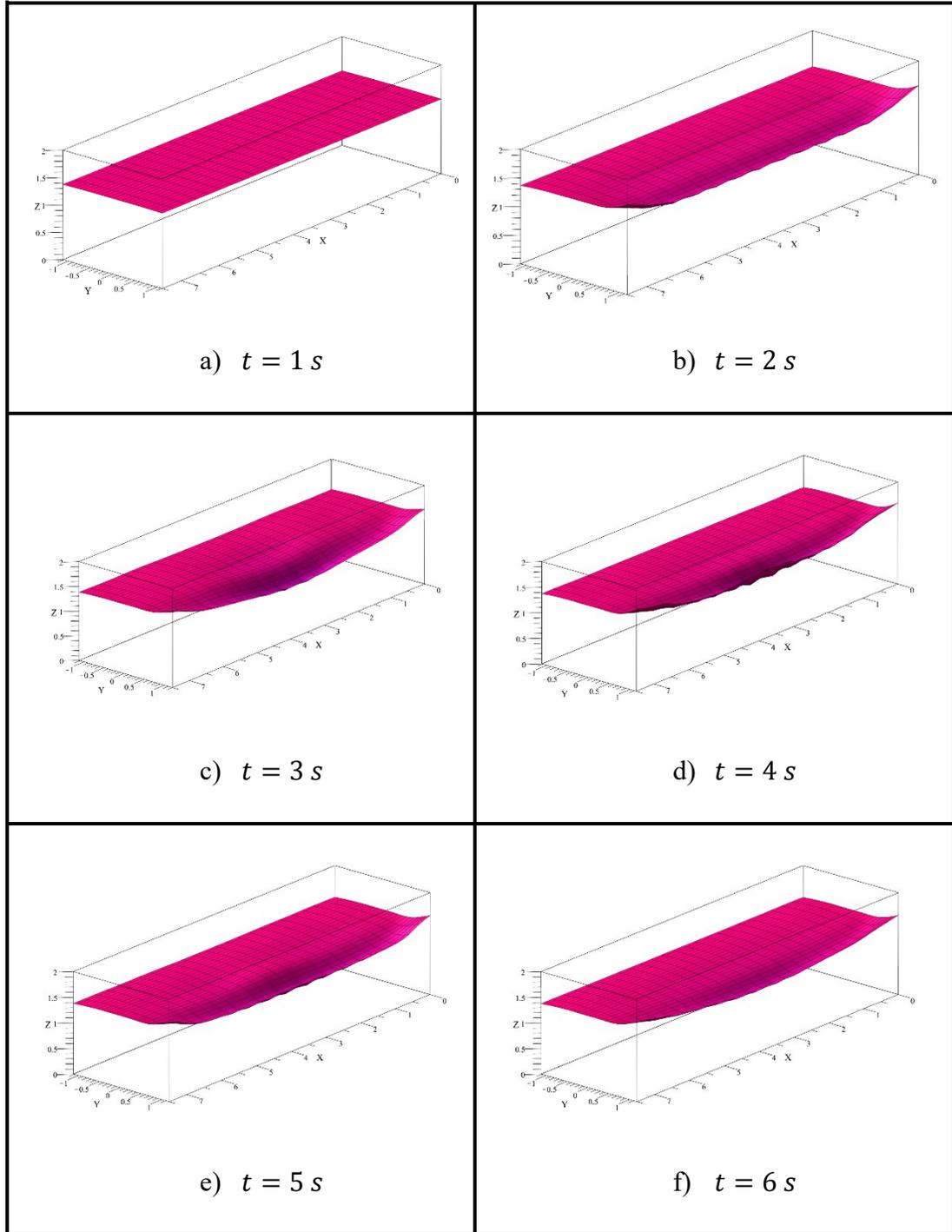


Figure 5-3 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 50\%$



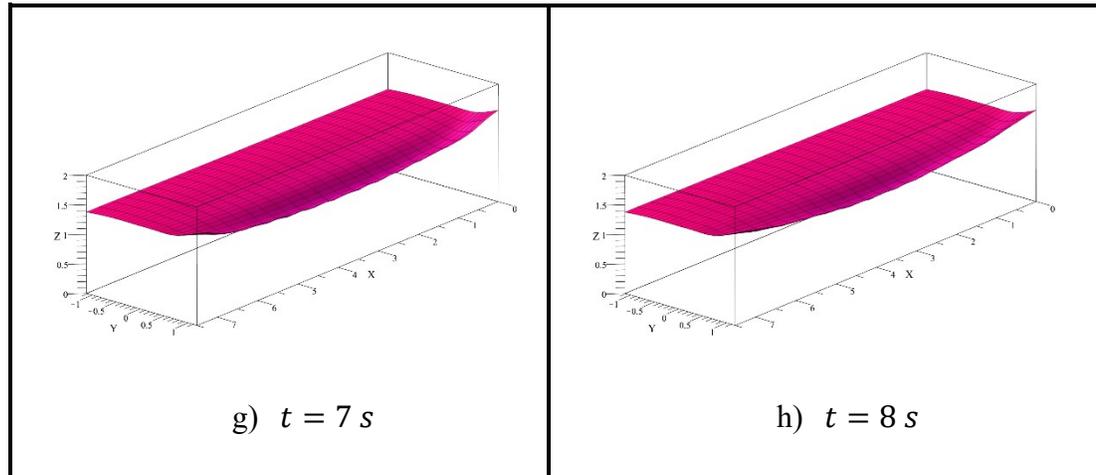


Figure 5-4 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 75 \%$

Les figures 5-5 et 5-6 représentent la variation des forces latérale F_{gy} et verticale F_{gz} due au déplacement du centre de masse global du liquide. On remarque que les forces générées par le mouvement du liquide sont plus importantes lorsque le taux de remplissage est de 75 % puisque le volume du liquide est plus élevé.

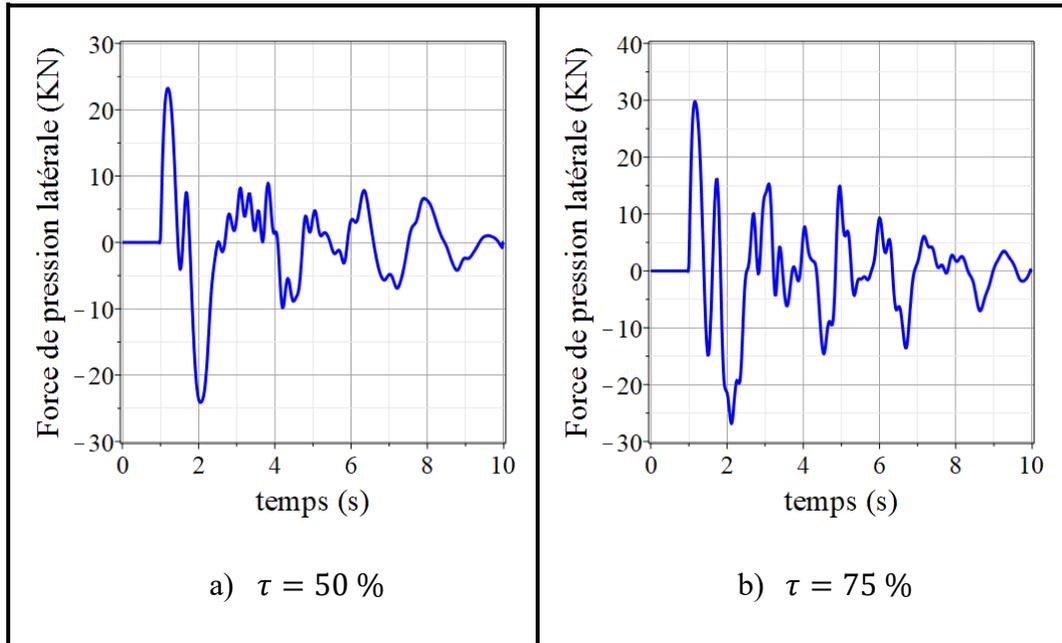


Figure 5-5 : Force latérale F_{gy} due au mouvement du centre de masse global.

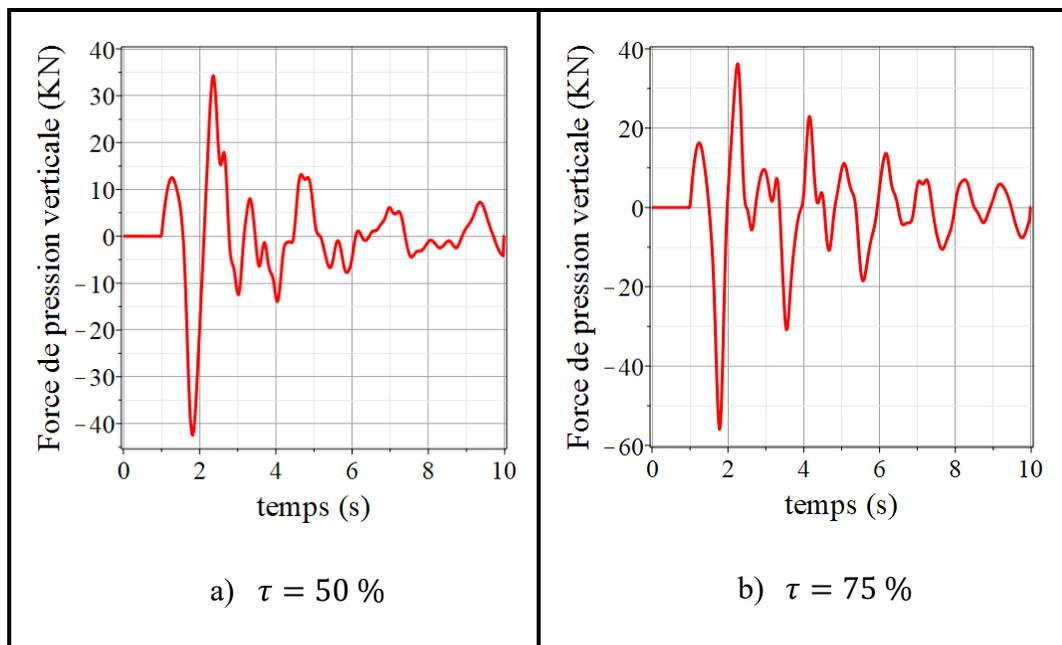


Figure 5-6 : Force verticale F_{gz} due au mouvement du centre de masse global.

Pour cette simulation, la comparaison du nouveau modèle 3D par rapport aux modèles analytique et numérique développés antérieurement au sein de notre équipe de recherche [13] se fera en termes des déplacements maximaux latéral ΔY_{max} et vertical ΔZ_{max} du centre de masse global du liquide, de ses déplacements moyens latéral ΔY_{moy} et vertical ΔZ_{moy} , des fréquences des oscillations latérales Fr_Y et verticales Fr_Z , et de l'amplitude maximale de la force de pression latérale Fy_{max} générée par le mouvement du liquide. Le tableau 5-1 montre que les résultats obtenus par le nouveau modèle s'alignent avec les résultats des deux autres modèles par rapport à tous les aspects comparés. De plus, les résultats du nouveau modèle 3D sont généralement plus proches du modèle numérique que ceux du modèle analytique. Par ailleurs, le modèle analytique ne permet pas d'évaluer la fréquence des oscillations latérales et verticales. En effet, ce modèle considère le liquide comme étant un corps rigide. Le nouveau modèle développé dans ce projet est plus réaliste et permet d'évaluer ces oscillations. D'ailleurs, en les comparant avec celles obtenues par le modèle numérique, on peut remarquer que leurs valeurs respectives sont très proches. Dans le cas où $\tau = 50 \%$, la seule différence significative entre le nouveau modèle 3D et le modèle numérique est par rapport à ΔZ_{moy} où sa valeur est légèrement sous-estimée par le nouveau modèle. Ceci peut être expliqué par le fait que le liquide est considéré incompressible dans le modèle numérique et que la hauteur de son centre de masse z_g ne peut pas être plus basse que sa hauteur au repos. D'autre part, dans le cas où $\tau = 75 \%$, on remarque qu'il y a une différence entre le nouveau modèle 3D et le

modèle numérique par rapport au déplacement maximal ΔZ_{max} et l'amplitude de la force de pression latérale Fy_{max} . En effet, on peut penser que la différence entre les deux modèles en ce qui concerne la hauteur ΔZ_{max} est due aussi au fait que le liquide est considéré incompressible dans le modèle numérique. Par ailleurs, la différence entre les valeurs de la force latérale maximale Fy_{max} peut être expliquée par deux raisons. La première est que la force n'est pas calculée de la même manière dans les deux modèles. En effet, dans le nouveau modèle 3D, les forces sont calculées en évaluant l'accélération du centre de masse par dérivation numérique du déplacement et en la multipliant par la masse du liquide. Dans le modèle numérique, la force est évaluée en déterminant la pression sur les parois latérales de la citerne. La deuxième raison est que dans le cas du nouveau modèle 3D, la composante verticale de la force générée par le mouvement du liquide est plus importante que la composante latérale comme l'illustre la figure 5-6. D'ailleurs, l'amplitude de la force verticale maximale Fz_{max} générée par le mouvement du liquide est de 92 kN.

Tableau 5-1 : Comparaison des résultats de la simulation d'un mouvement dans une courbe.

τ	50 %			75 %		
Modèle	Analytique	Numérique	Nouveau modèle	Analytique	Numérique	Nouveau modèle
$\Delta Y_{max} (m)$	0.17	0.27	0.21	0.08	0.14	0.155
$\Delta Y_{moy} (m)$	0.17	0.16	0.16	0.08	0.09	0.12
$\Delta Z_{max} (m)$	0.023	0.073	0.073	0.012	0.036	0.055
$\Delta Z_{moy} (m)$	0.023	0.033	0.015	0.012	0.021	0.021
$fr_Y (Hz)$	<i>S.O.</i>	0.476	0.455	<i>S.O.</i>	0.588	0.488
$fr_Z (Hz)$	<i>S.O.</i>	0.500	0.476	<i>S.O.</i>	0.520	0.526
$Fy_{max} (kN)$	41	52	47	62	72	57

5.1.2 Changement de voie simple

La deuxième manœuvre simulée dans ce chapitre est celle d'un mouvement de changement de voie simple. L'accélération que subit la citerne pendant cette manœuvre est définie par la fonction suivante :

$$\begin{cases} a_y = 0 & t \leq t_1 \\ a_y = A \sin\left(\frac{2\pi(t - t_1)}{t_2 - t_1}\right) & t_1 < t \leq t_2 \\ a_y = 0 & t > t_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$A = 3 \text{ m/s}^2, t_1 = 1 \text{ s}, t_2 = 5.2 \text{ s}$$

En effet, cette manœuvre simule un dépassement d'un autre véhicule sur la route. Les figures 5-7 et 5-8 représentent les déplacements latéral et vertical du centre de masse global lors de cette manœuvre.

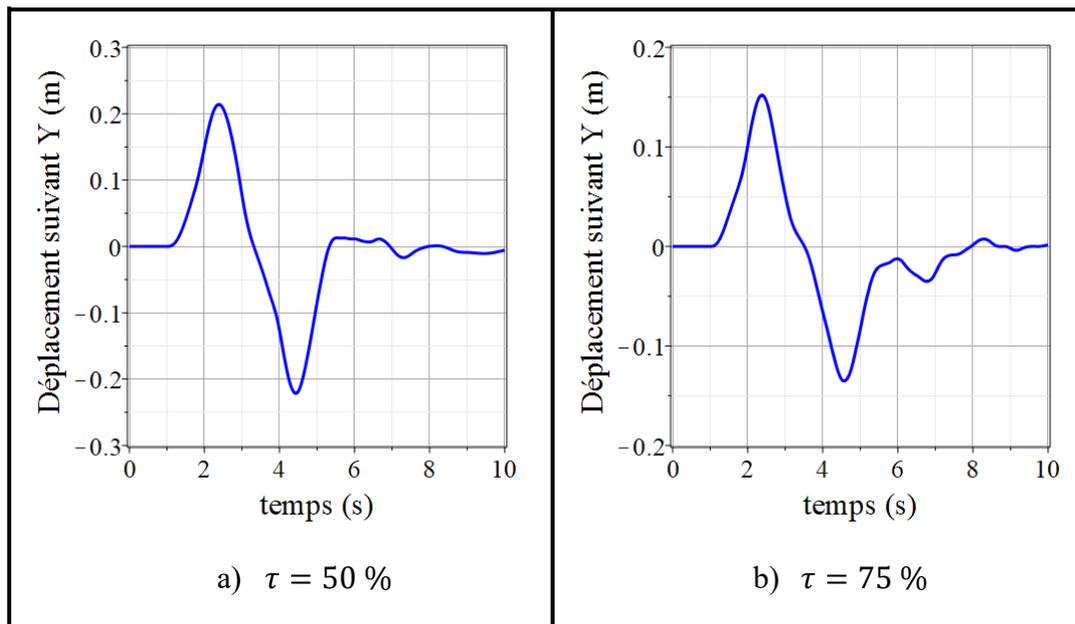


Figure 5-7 : Déplacement latéral du centre de masse du liquide y_g .

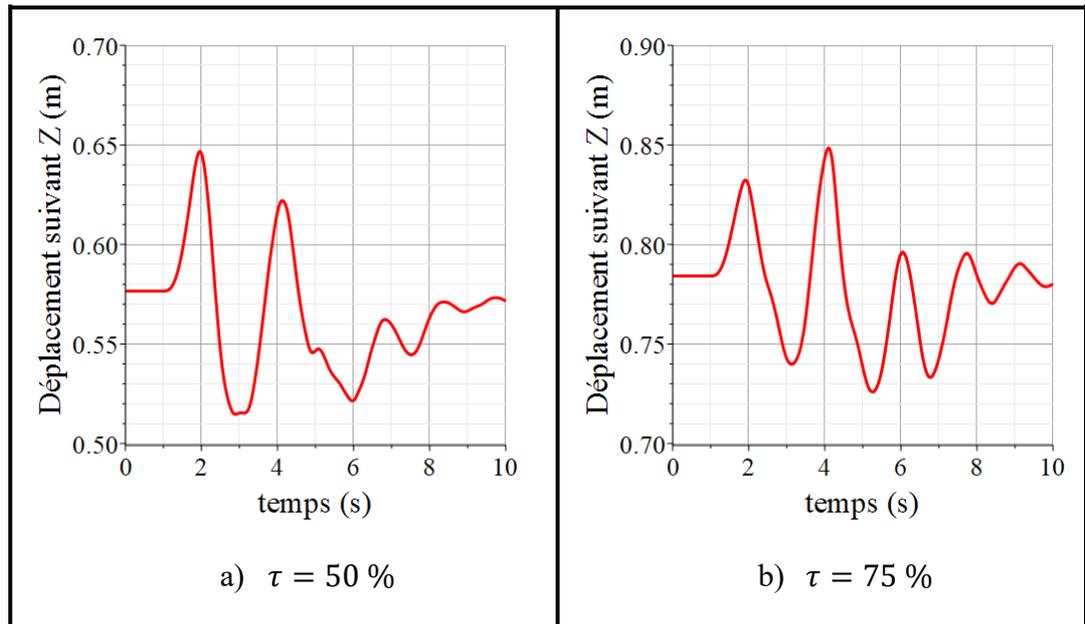
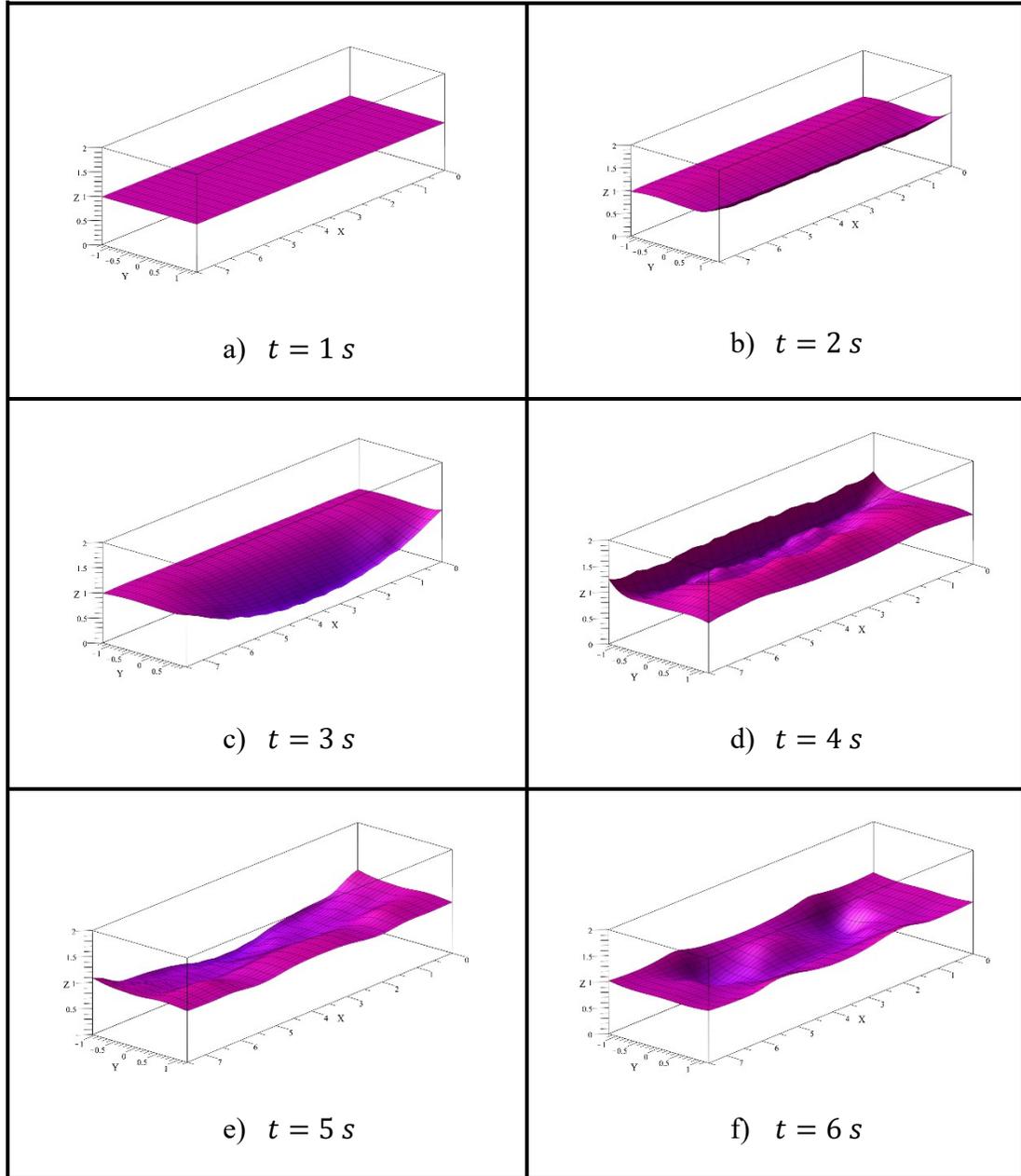


Figure 5-8 : Déplacement vertical du centre de masse du liquide z_g

Les figures 5-9 et 5-10 représentent la forme de la surface libre du liquide entre $t = 1$ s et $t = 8$ s avec des intervalles de temps d'une seconde pour les taux de remplissage de 50 % et 75 % respectivement. On remarque que la déformation de la surface libre est plus importante lorsque le taux de remplissage est plus bas. En général, lorsque le taux de remplissage est bas, le déplacement du liquide est plus important. Ces figures montrent une fois de plus que le nouveau modèle développé dans cette étude donne un aperçu visuel de la surface libre du liquide.



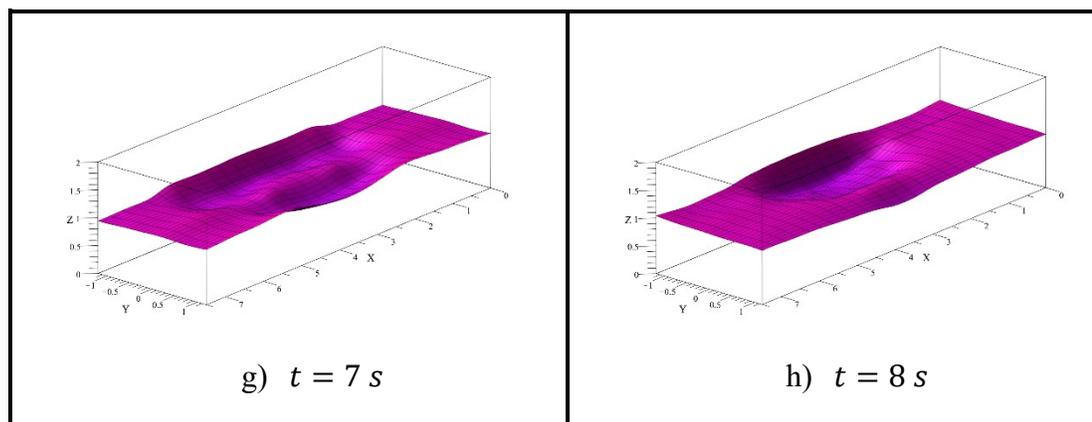
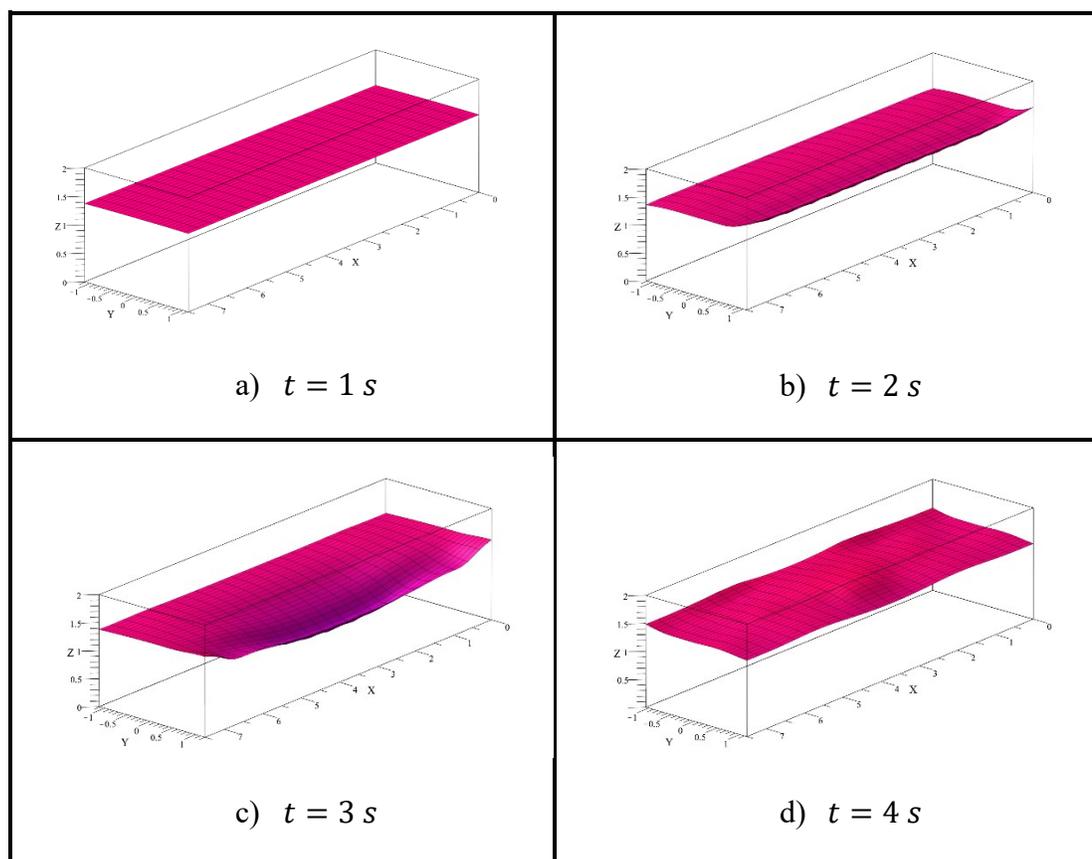


Figure 5-9 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 50 \%$.



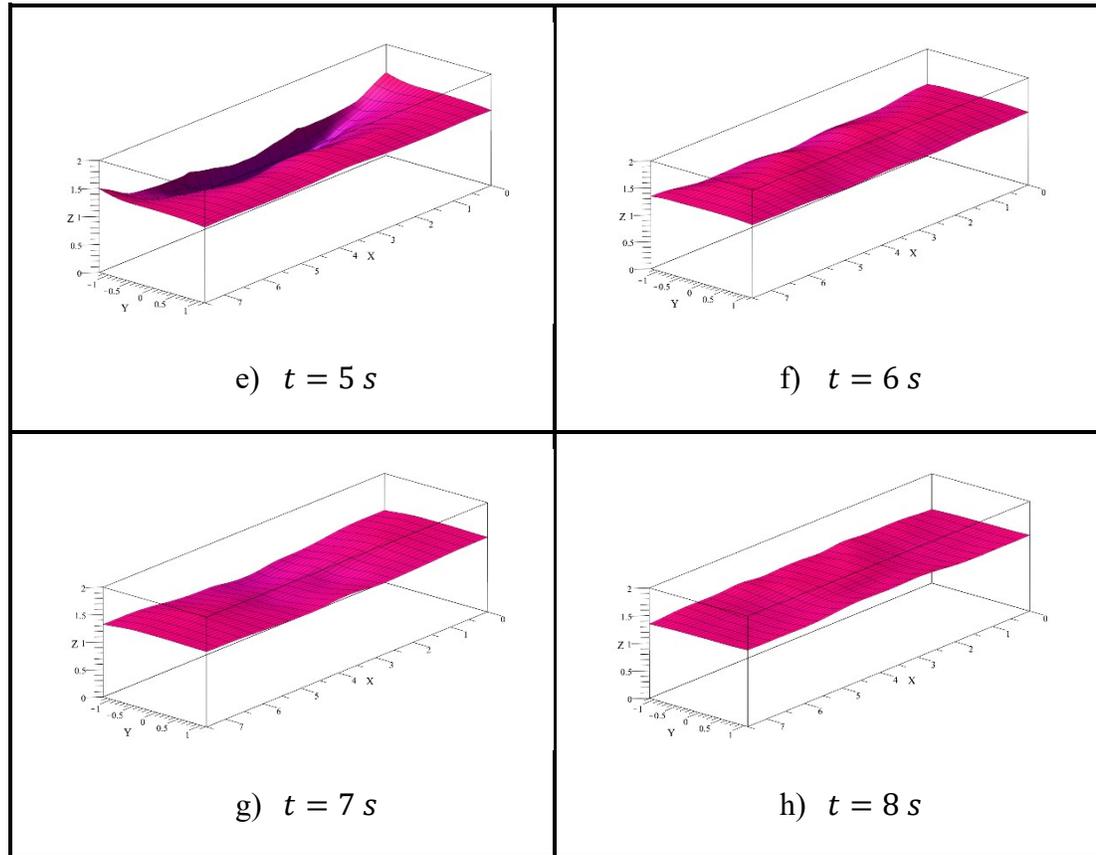


Figure 5-10 : Variation de la forme de la surface libre du liquide lorsque $\tau = 75 \%$.

Les figures 5-11 et 5-12 montrent respectivement les forces latérale F_{gy} et verticale F_{gz} générées par le mouvement du centre de masse du liquide. On remarque encore que les forces sont plus importantes dans le cas du taux de remplissage de 75 % puisque la masse en mouvement est plus élevée.

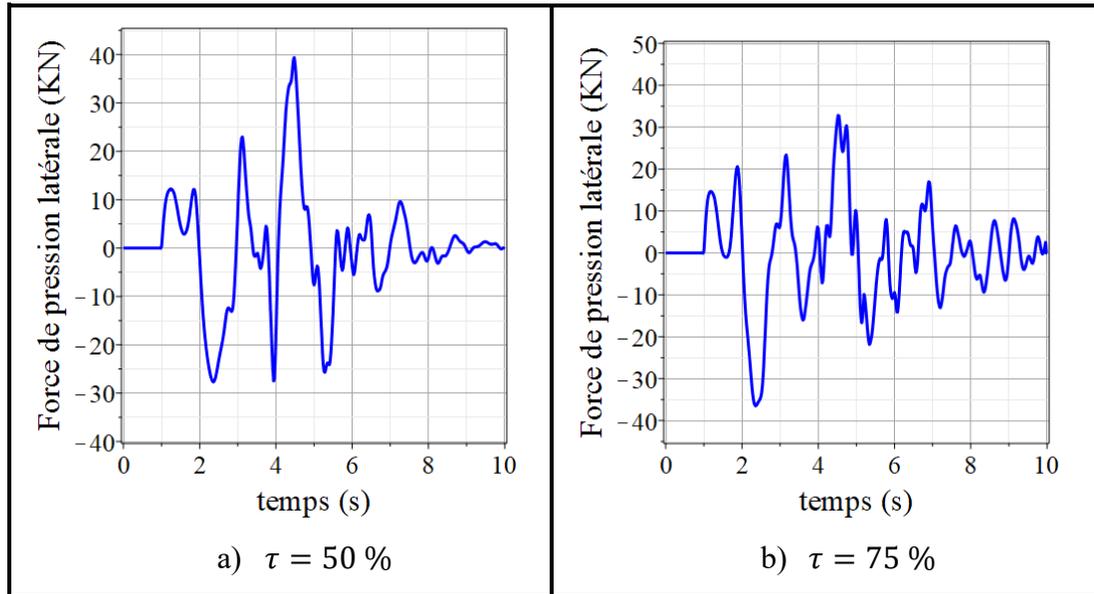


Figure 5-11 : Force latérale F_{gy} due au mouvement du centre de masse global.

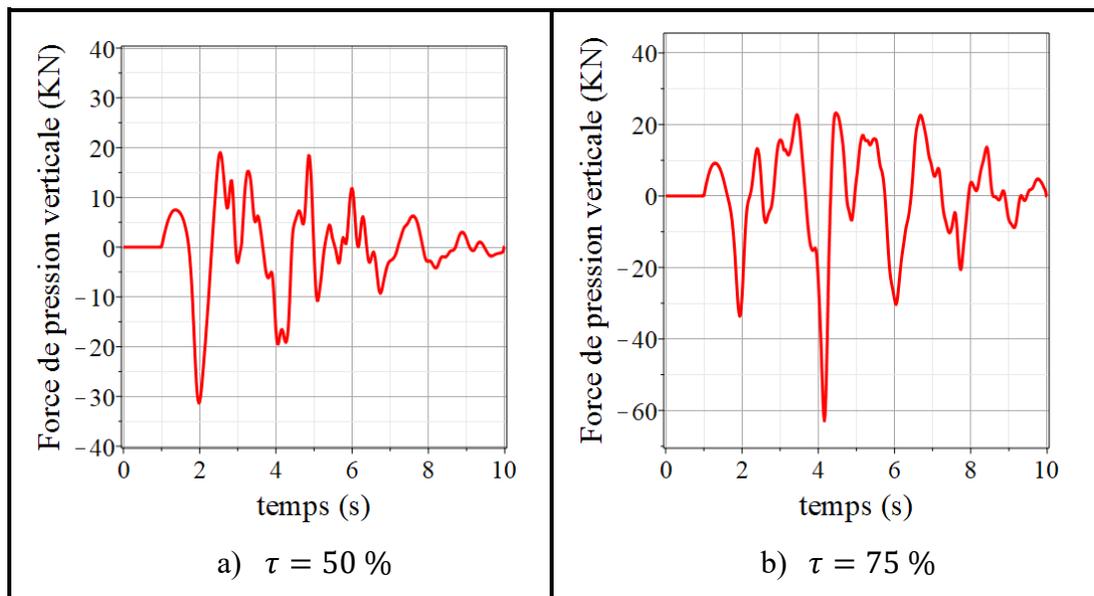


Figure 5-12 : Force verticale F_{gz} due au mouvement du centre de masse global.

Pour cette simulation, la comparaison du nouveau modèle 3D par rapport aux modèles analytique et numérique [13] se fera en termes des déplacements maximaux latéraux positif ΔY_{max+} et négatif ΔY_{max-} , des déplacements maximaux verticaux successifs ΔZ_{max1} et ΔZ_{max2} , et de l'amplitude maximale de la force de pression latérale Fy_{max} . Le tableau 5-2 montre que les résultats obtenus par le nouveau modèle 3D sont comparables à ceux obtenus par les deux autres modèles par rapport à tous les aspects comparés. De plus, les valeurs obtenues par le nouveau modèle sont plus proches du modèle numérique que celles obtenues par le modèle analytique. Par ailleurs, comme pour la première simulation, le déplacement vertical est surestimé dans le cas où $\tau = 75\%$. Les valeurs de ΔZ_{max1} et ΔZ_{max2} sont plus élevées par rapport au modèle numérique. Ceci est dû au fait que le modèle numérique développé antérieurement dans notre équipe de recherche considère le liquide comme étant incompressible. Dans le modèle 3D de cette étude, nous n'avons pas pris en considération ce paramètre du liquide. Dans ce cas, l'effet double de la variation de l'accélération latérale cause un mouvement vertical plus important dans le cas du nouveau modèle 3D puisque les ressorts du modèle exercent une force verticale supplémentaire.

Tableau 5-2 : Comparaison des résultats de la simulation d'un changement de voie simple.

τ	50 %			75 %		
Modèle	Analytique	Numérique	Nouveau modèle	Analytique	Numérique	Nouveau modèle
$\Delta Y_{max+} (m)$	0.17	0.28	0.22	0.09	0.14	0.15
$\Delta Y_{max-} (m)$	-0.15	-0.22	-0.21	-0.08	-0.10	-0.13
$\Delta Z_{max1} (m)$	0.026	0.078	0.073	0.009	0.030	0.043
$\Delta Z_{max2} (m)$	0.026	0.056	0.048	0.009	0.018	0.060
$Fy_{max} (kN)$	40	52	50	60	69	60

5.2 Décalage longitudinal de la charge du liquide

Dans cette simulation, nous allons évaluer les déplacements longitudinal x_g et vertical z_g du centre de masse global du liquide ainsi que les forces générées par ce déplacement lorsque la citerne subit une décélération dans la direction de l'axe des X . Pour une meilleure comparaison, nous utilisons les mêmes paramètres sélectionnés dans l'étude antérieure effectuée par notre équipe de recherche [13]. La citerne en forme de cylindre circulaire de longueur $L = 4.5 m$ et de rayon $1.05 m$. La citerne est

remplie à l'huile domestique de densité $\rho = 960 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité dynamique $\eta = 0.048 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$. De plus, les paramètres du modèle de discrétisation sont $M = 16$, $N = 2$ et $P = 3$. Le modèle dynamique contient alors 192 nœuds et 255 arêtes. Les taux de remplissage critiques τ de 50 % et 70 % sont aussi sélectionnés pour la comparaison des résultats. La fonction a_x qui définit la décélération longitudinale que subit le liquide lors d'un freinage est donnée par la formule suivante:

$$\begin{cases} a_x = 0 & t \leq t_1 \\ a_x = -A \cos(\pi(t + t_2 - 2t_1)) & t_1 < t \leq t_2 \\ a_x = A & t > t_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

$A = 2.5 \text{ m/s}^2 \text{ ou } 4.5 \text{ m/s}^2, t_1 = 1 \text{ s}, t_2 = 1.5 \text{ s}$

Nous choisissons deux amplitudes de décélération 2.5 m/s^2 et 4.5 m/s^2 afin d'étudier l'effet de la force de freinage sur le mouvement du liquide dans la citerne.

5.2.1 Taux de remplissage de 50 %

Les figures 5-13 et 5-14 montrent les déplacements longitudinal x_g et vertical z_g du centre de masse du liquide pour les deux amplitudes de décélération. On remarque que les déplacements du centre de masse sont plus importants lorsque la décélération est plus grande.

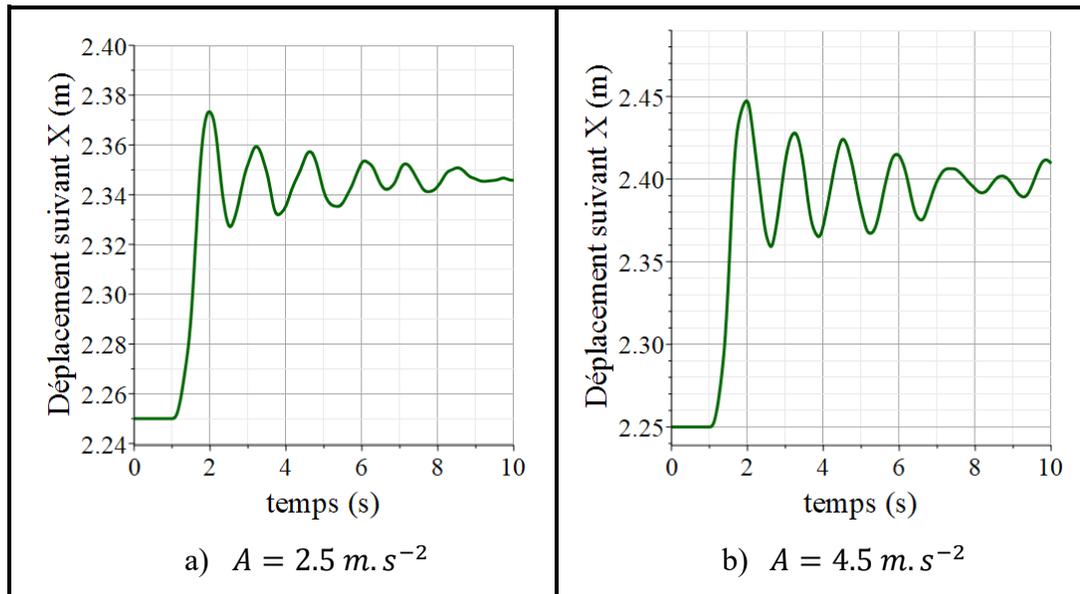


Figure 5-13 : Déplacement longitudinal x_g du centre de masse global ($\tau = 50 \%$).

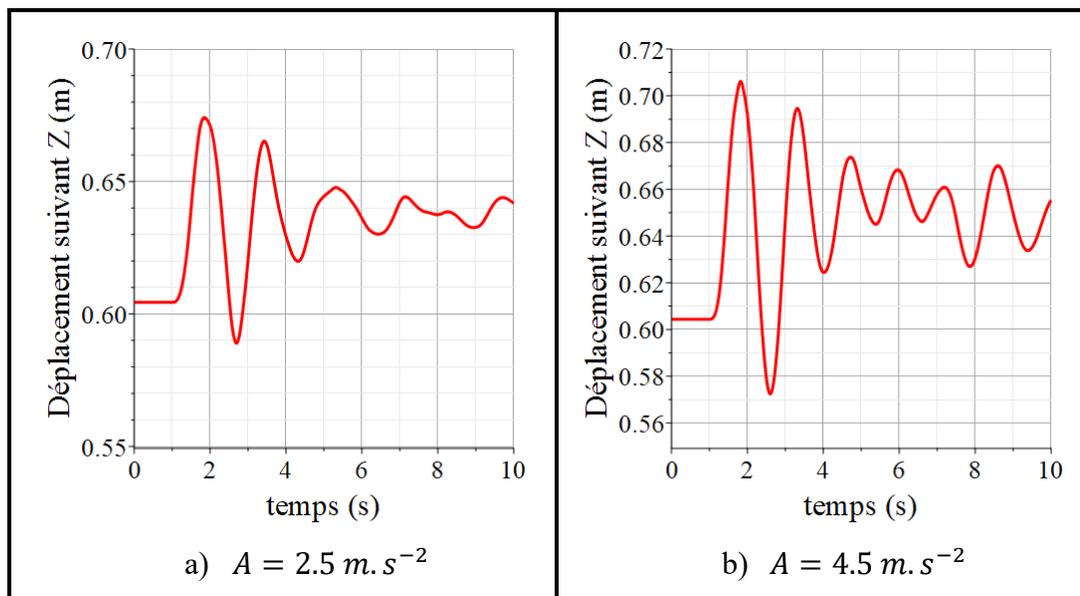
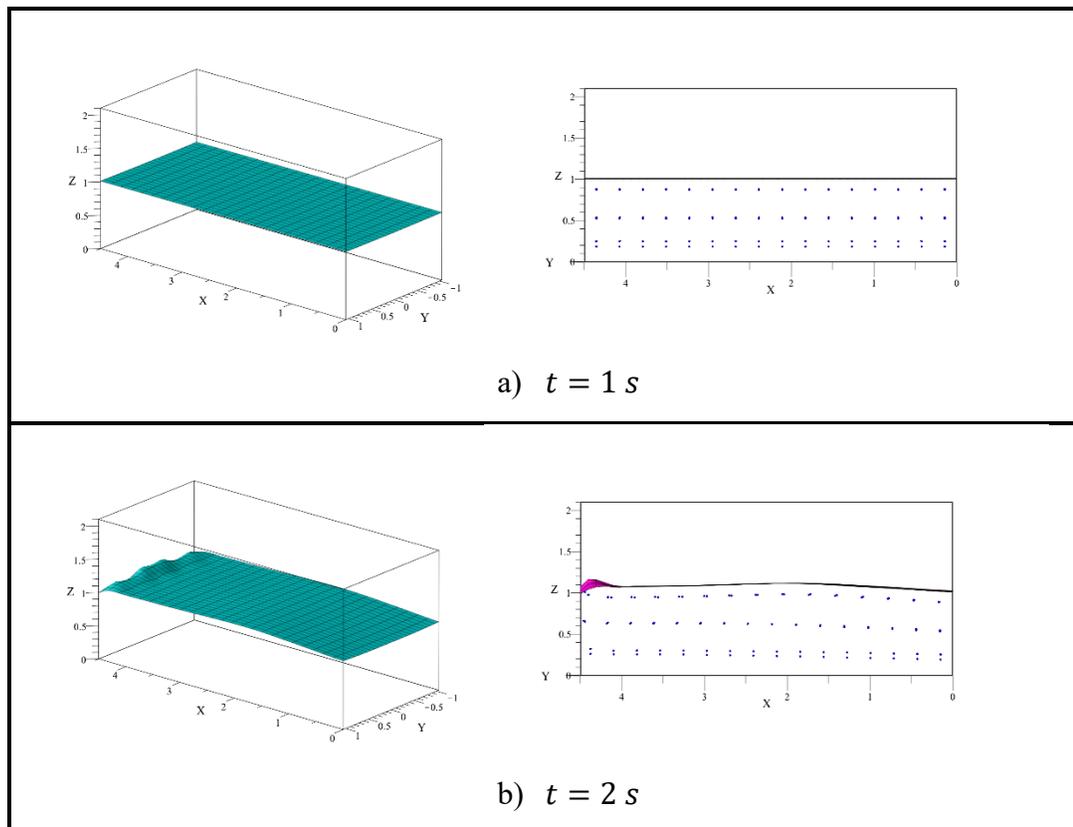
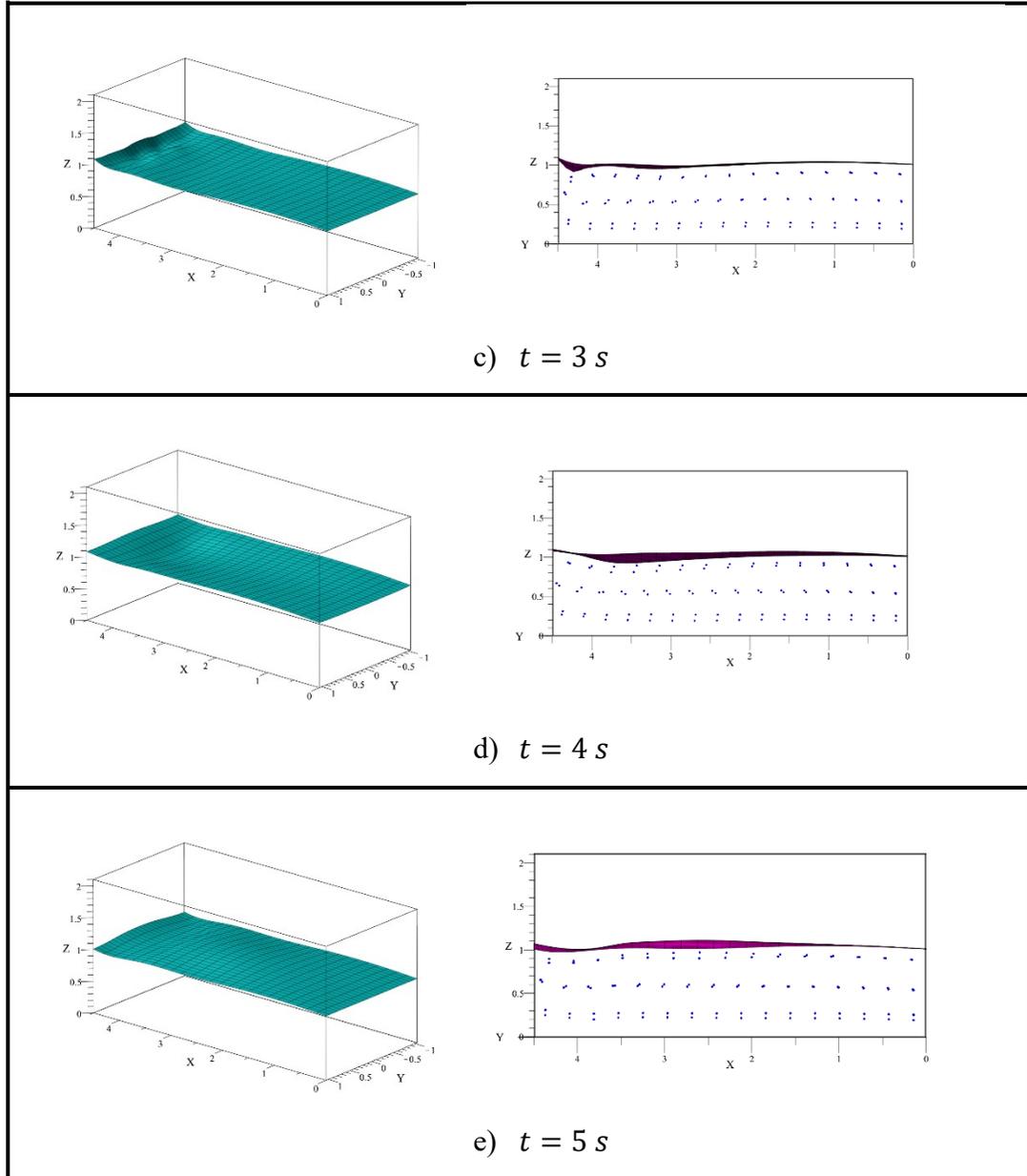


Figure 5-14 : Déplacement vertical z_g du centre de masse global ($\tau = 50 \%$).

Les figures 5-15 et 5-16 donnent un aperçu sur la forme de la surface libre en 3D ainsi qu'une vue de gauche de la citerne incluant la position des nœuds et de la surface libre obtenue par interpolation en splines cubiques des nœuds supérieurs du nouveau modèle. Les images représentent la forme de la surface libre entre $t = 1$ s et $t = 8$ s avec des intervalles de temps d'une seconde. On voit clairement que la surface libre se déforme en avant de la citerne puisque les nœuds en avant subissent une force de pression longitudinale générée par le déplacement des autres nœuds. Tout comme les déplacements longitudinal et vertical du centre de masse, la déformation de la surface libre est plus importante lorsque l'amplitude de décélération est plus grande.





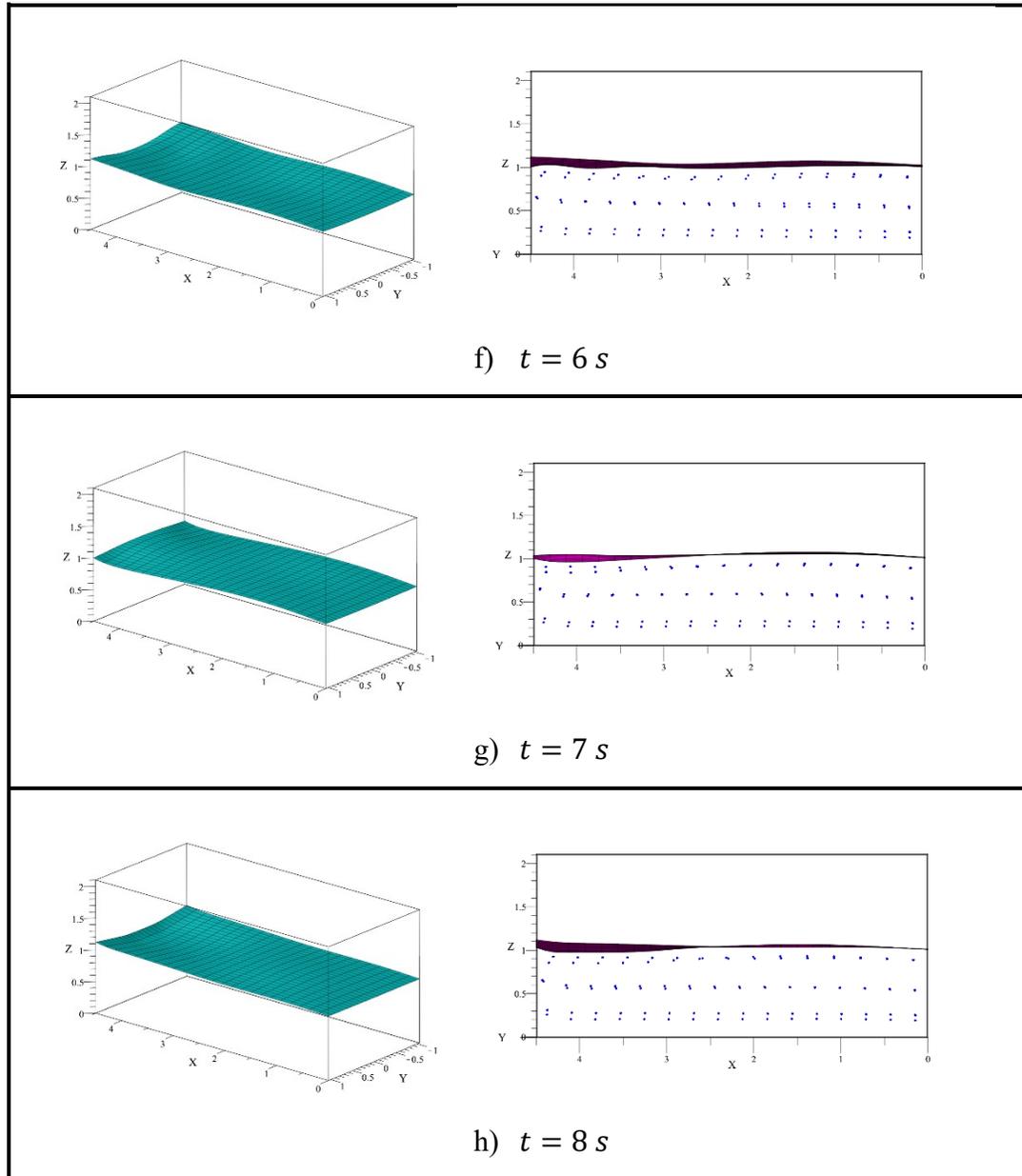
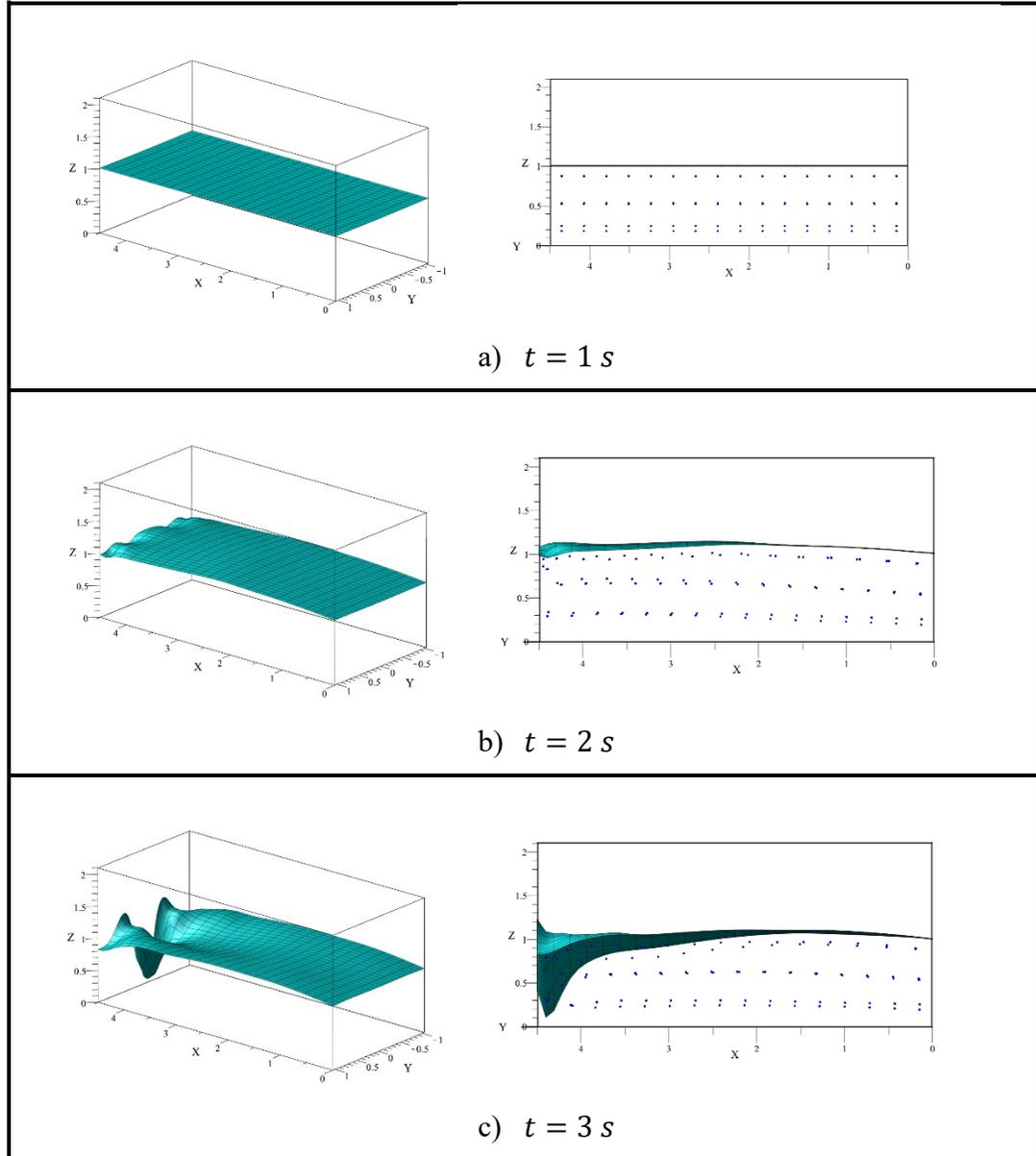
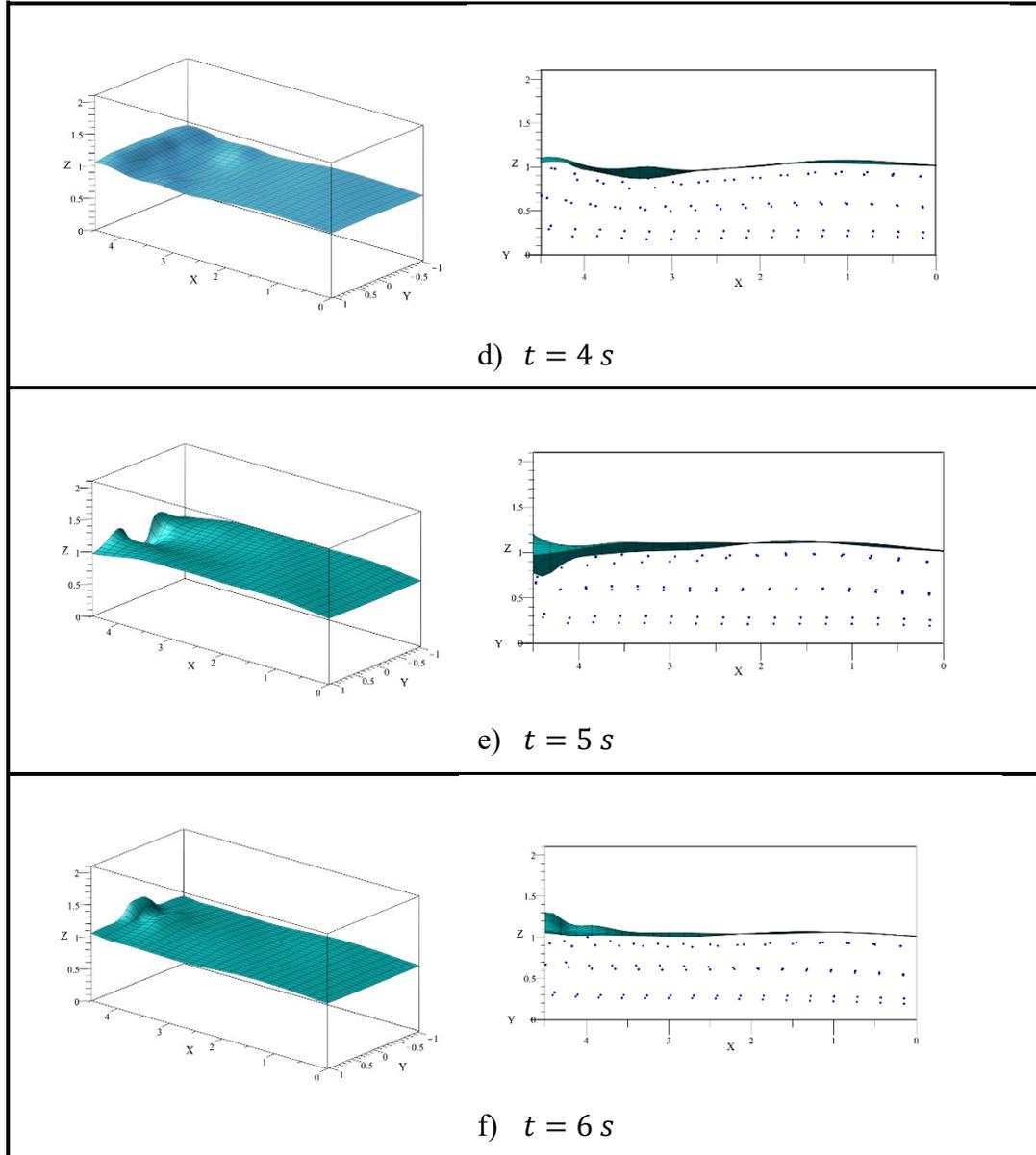


Figure 5-15 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 2.5\text{ m/s}^2$ ($\tau = 50\%$).





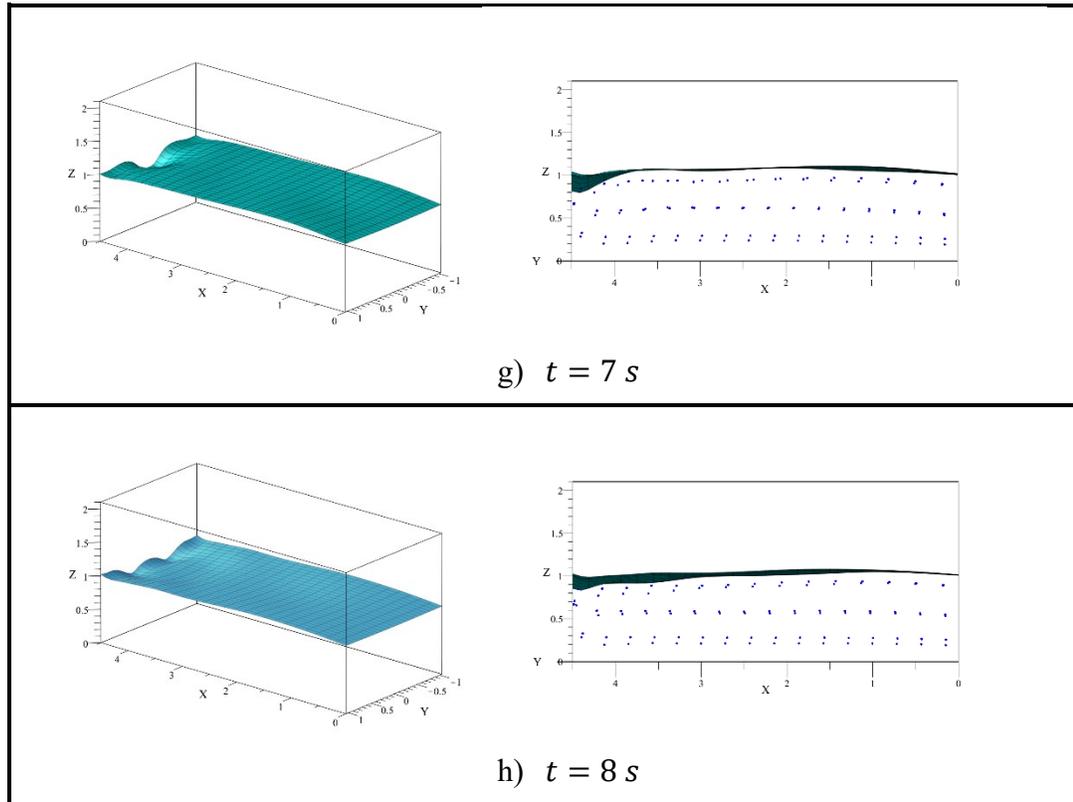


Figure 5-16 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche lorsque $A = 4.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 50 \%$).

Les figures 5-17 et 5-18 montrent les forces longitudinale F_{gx} et verticale F_{gz} générées par le mouvement du centre de masse. La variation des forces est plus grande lorsque l'amplitude de la décélération est de 4.5 m/s^2 .

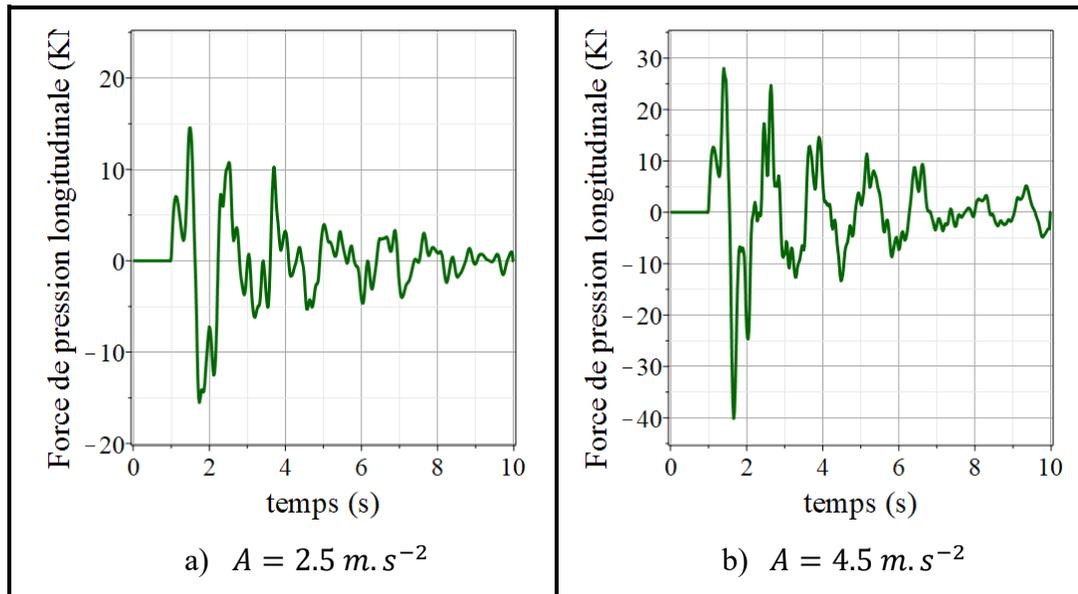


Figure 5-17 : Force longitudinale F_{gx} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 50 \%$).

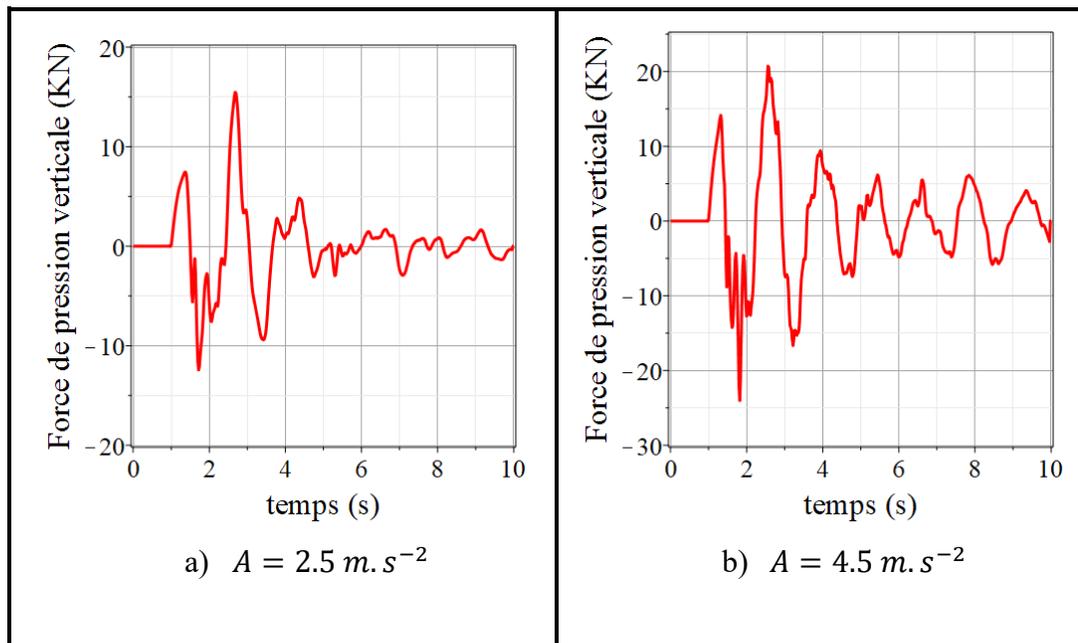


Figure 5-18 : Force verticale F_{gz} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 50 \%$).

De plus, nous pouvons évaluer la force globale F_G générée par le mouvement du centre de masse du liquide en calculant la moyenne quadratique des forces longitudinales et verticales. La figure 5-19 montre la variation de la force globale pour les deux accélérations. Nous pouvons remarquer également que la force est beaucoup plus importante lorsque $A = 4.5 \text{ m.s}^{-2}$. L'amplitude maximale est deux fois plus grande que dans le cas où $A = 2.5 \text{ m.s}^{-2}$.

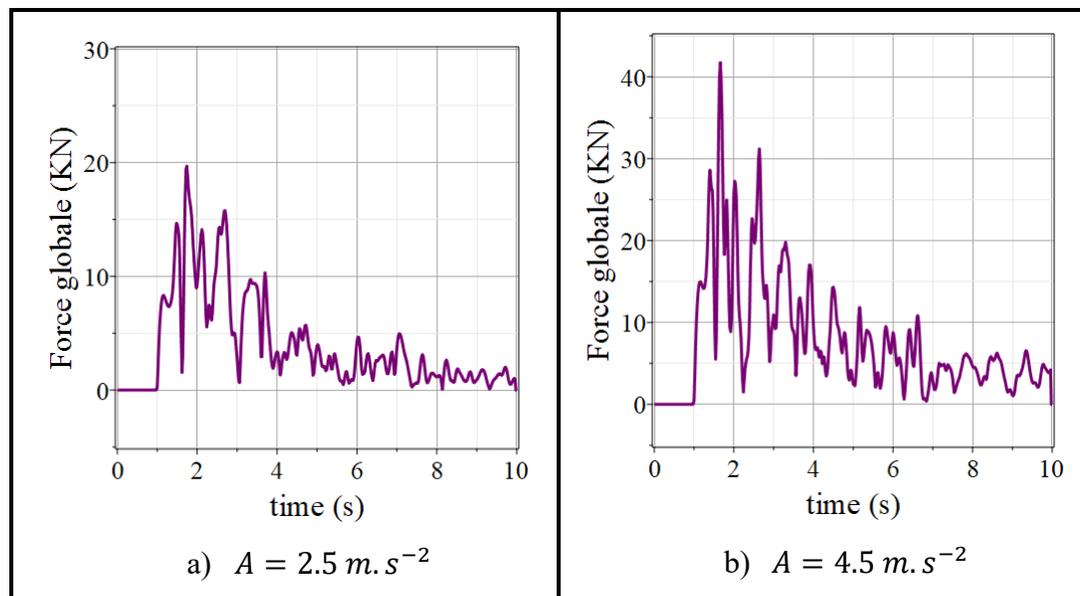


Figure 5-19 : Force globale F_G générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 50 \%$).

5.2.2 Taux de remplissage de 70 %

Les figures 5-20 et 5-21 illustrent la variation des coordonnées longitudinale x_g et verticale z_g du centre de masse global du liquide dans la citerne pour les deux

amplitudes de décélération. On remarque que la variation des coordonnées du centre de masse est plus importante lorsque l'amplitude de décélération est plus grande.

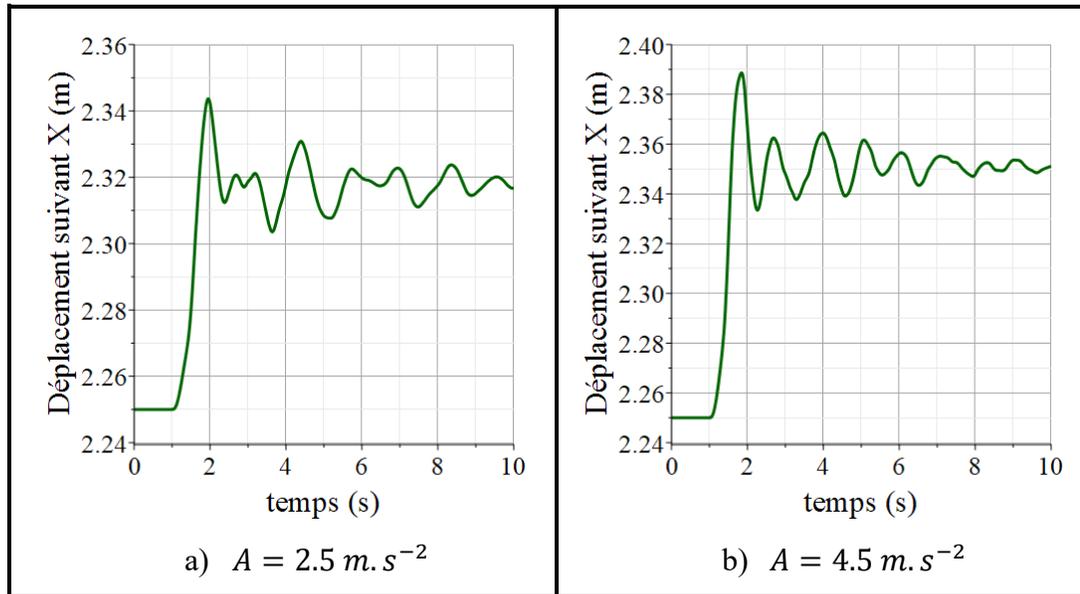


Figure 5-20 : Déplacement longitudinal x_g du centre de masse global ($\tau = 70 \%$).

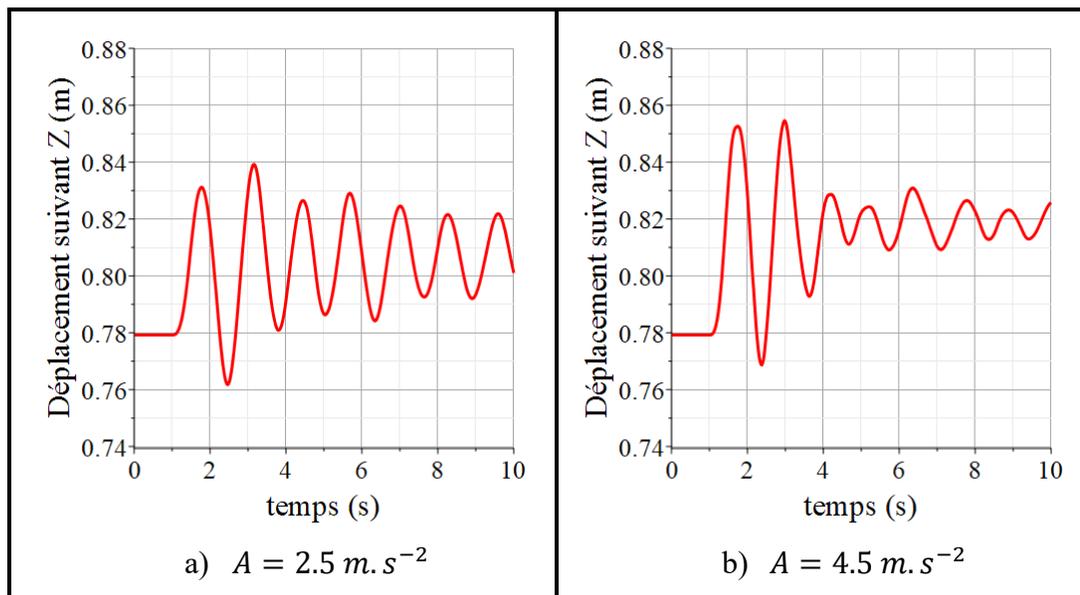
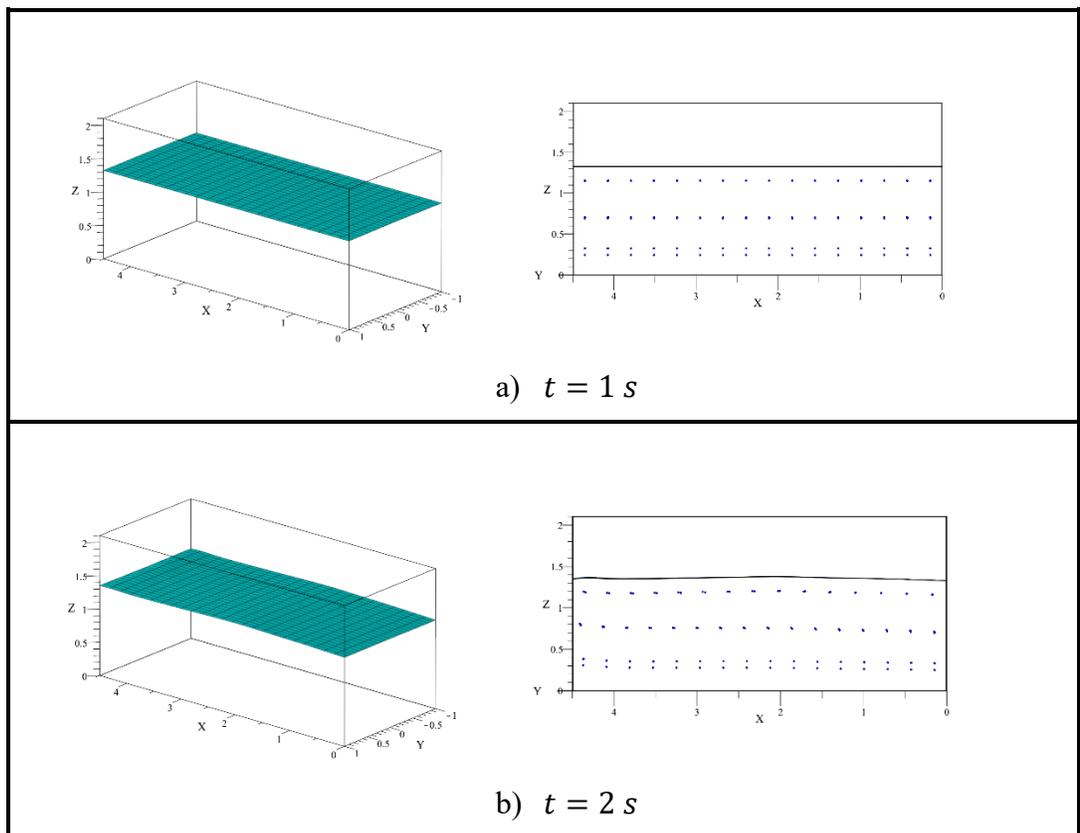
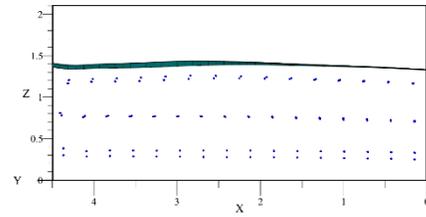
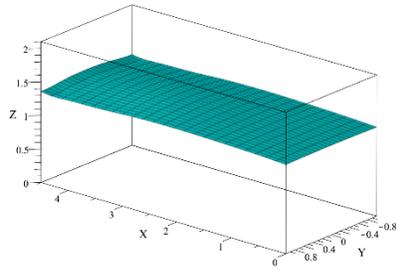


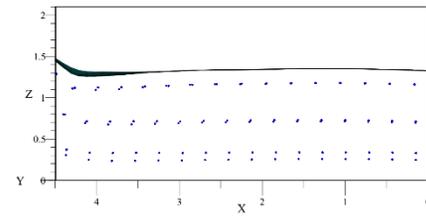
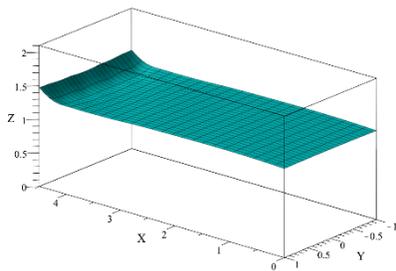
Figure 5-21 : Déplacement vertical z_g du centre de masse global ($\tau = 70 \%$).

Les figures 5-22 et 5-23 donnent un aperçu sur la forme de la surface libre en 3D ainsi qu'une vue de gauche de la citerne incluant la position des nœuds et la surface libre obtenue par interpolation en splines cubiques des nœuds supérieurs du nouveau modèle. Les images représentent la forme de la surface libre entre $t = 1$ s et $t = 8$ s avec des intervalles de temps d'une seconde. On remarque que la surface libre se déforme en avant de la citerne puisque les nœuds en avant subissent une pression de la part des autres nœuds. On remarque aussi que cette déformation est plus importante lorsque $A = 4.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

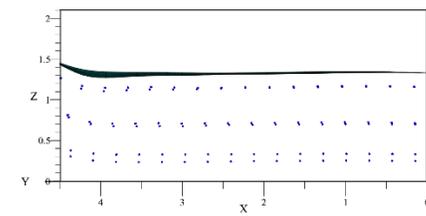
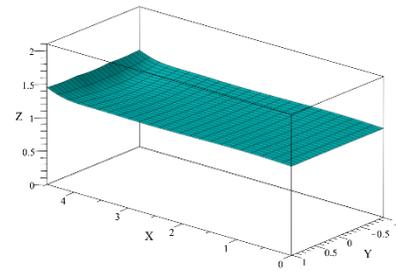




c) $t = 3$ s



d) $t = 4$ s



e) $t = 5$ s

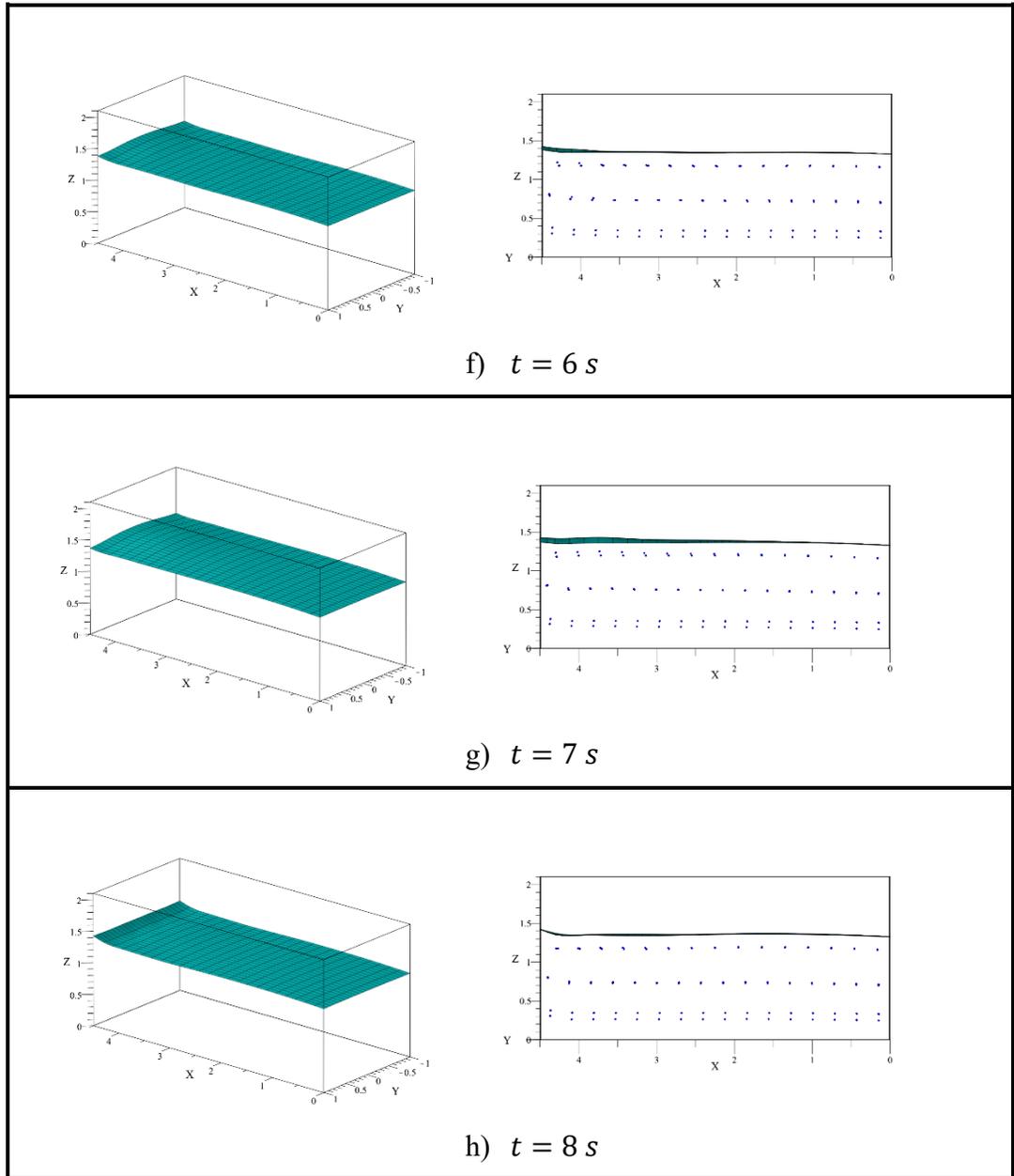
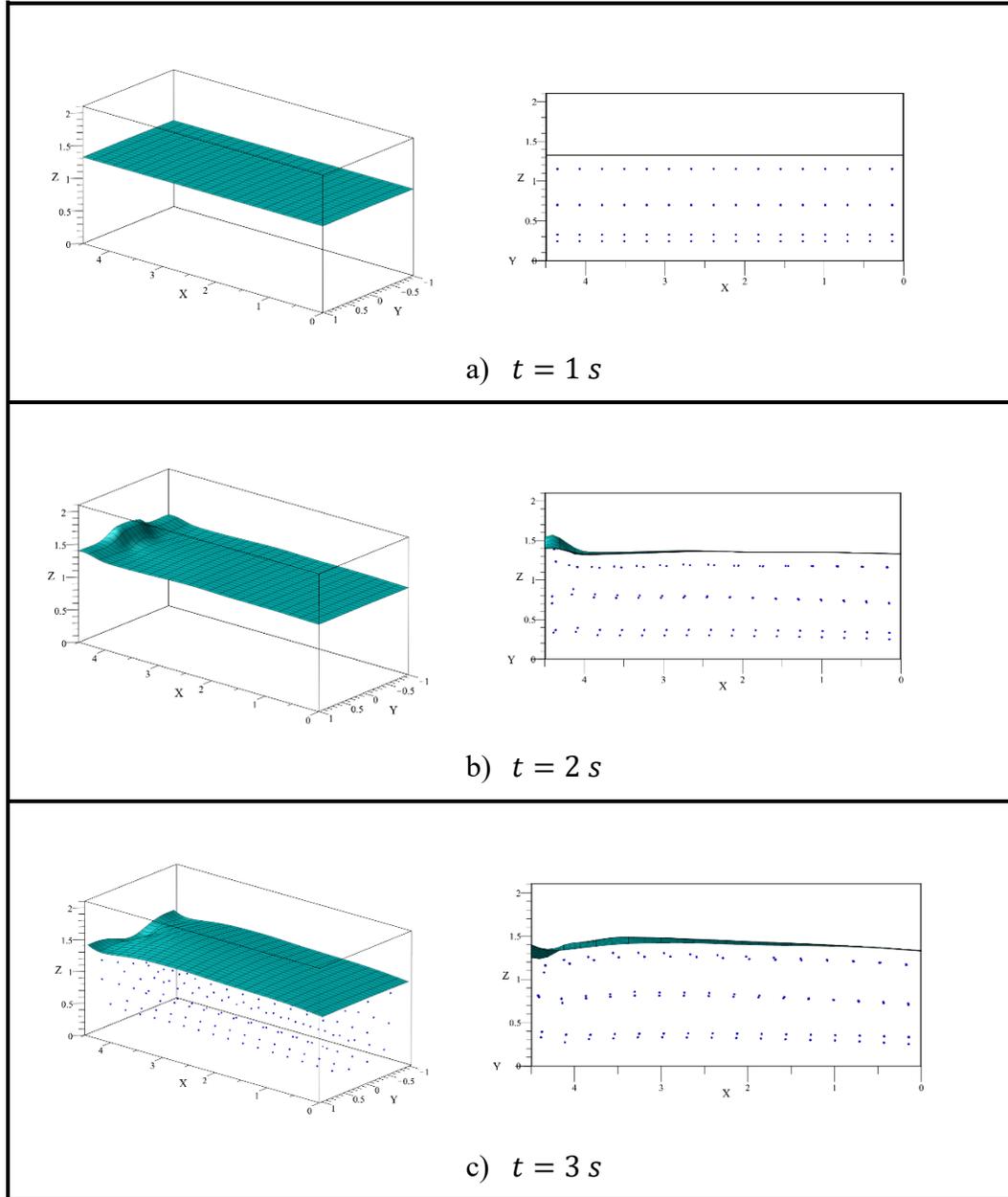
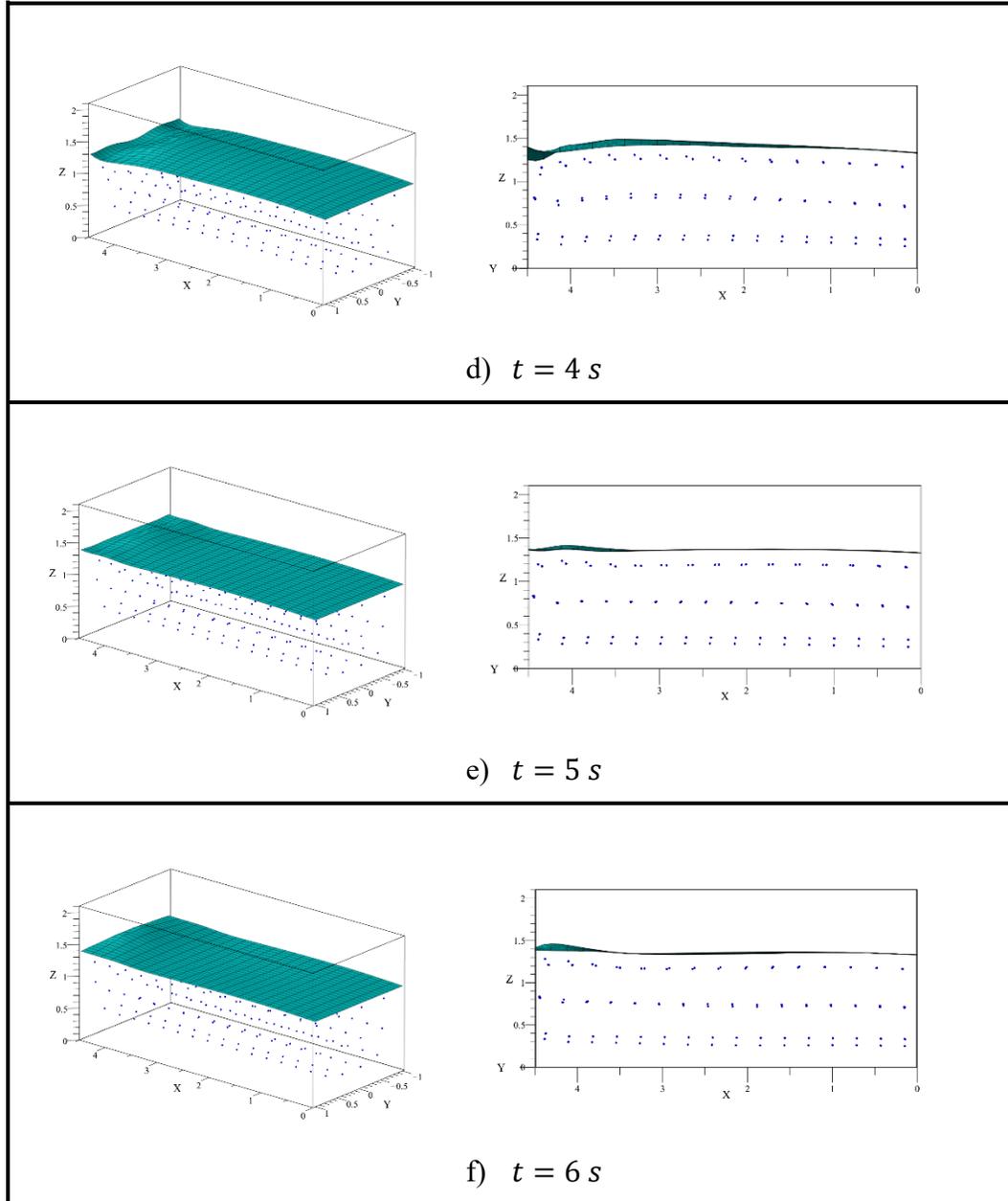


Figure 5-22 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche

lorsque $A = 2.5\text{ m/s}^2$ ($\tau = 70\%$).





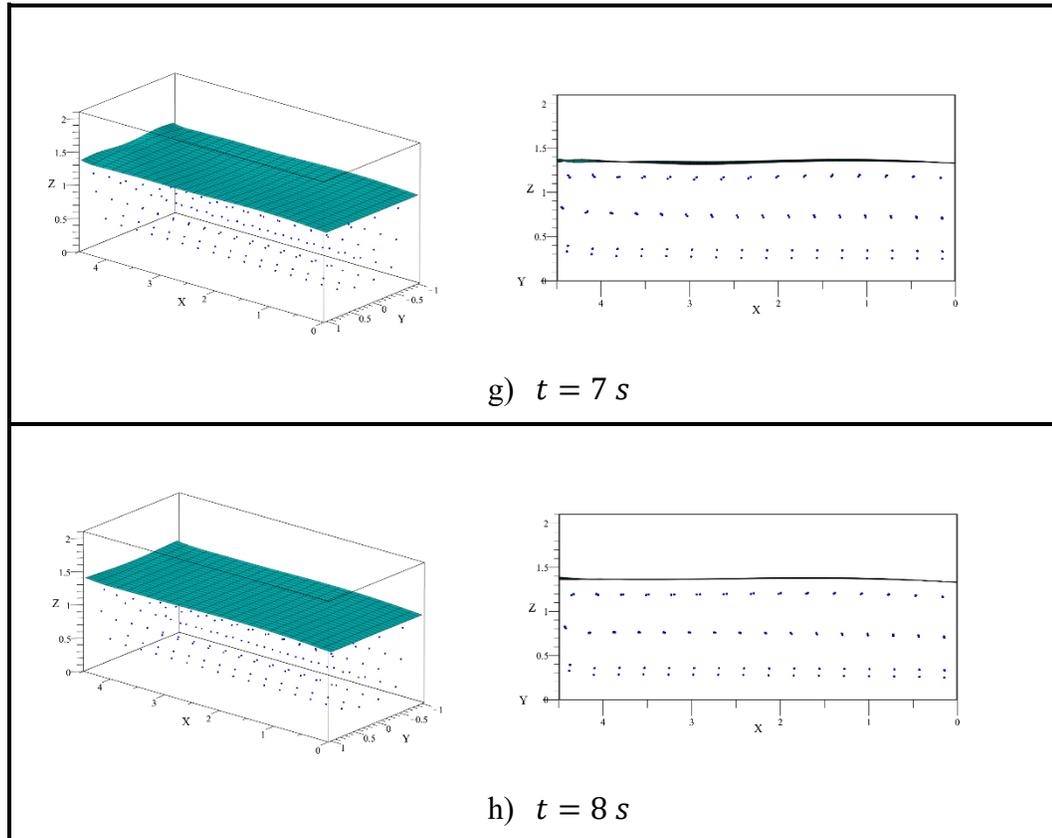


Figure 5-23 : Forme de la surface libre en 3D et en vue de gauche

lorsque $A = 4.5 \text{ m/s}^2$ ($\tau = 70 \%$).

Les figures 5-24 et 5-25 montrent la variation des forces longitudinale F_{gx} et verticale F_{gz} générées par le déplacement du centre de masse global. La variation des forces est plus importante lorsque l'amplitude de la décélération est de 4.5 m/s^2 .

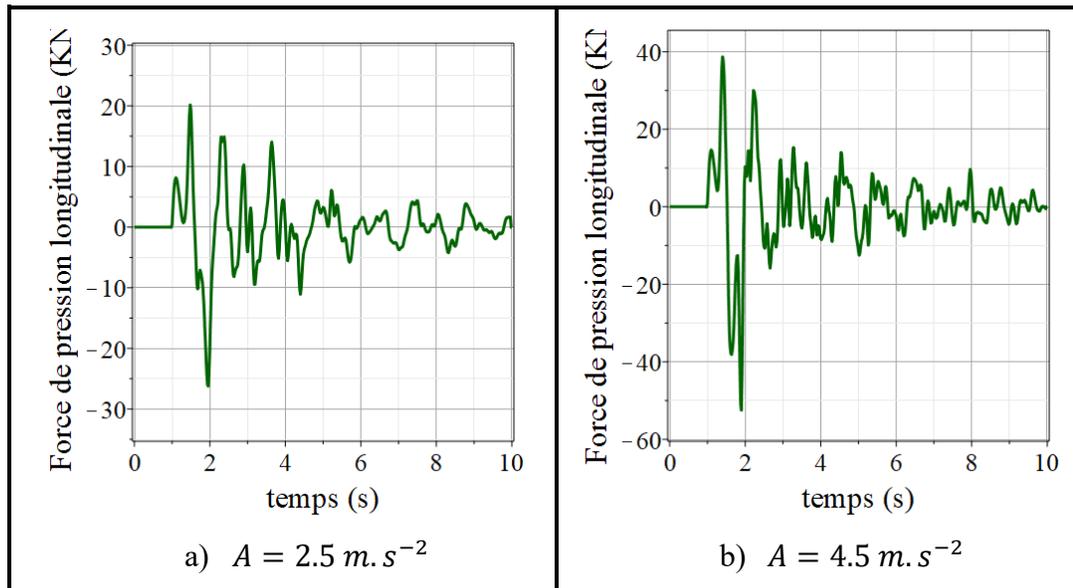


Figure 5-24 : Force longitudinale F_{gx} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 70 \%$).

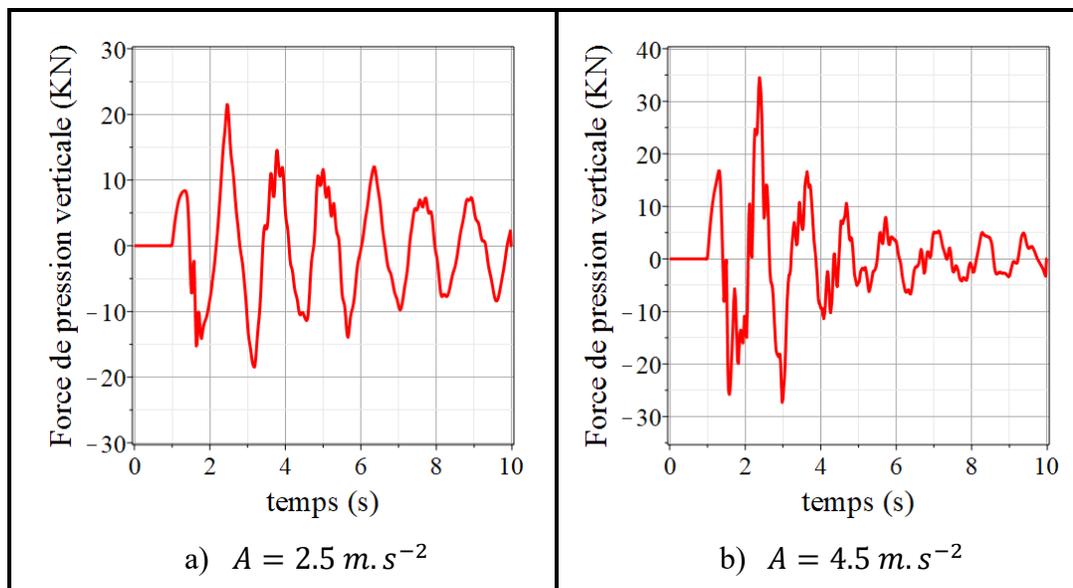


Figure 5-25 : Force verticale F_{gz} générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 70 \%$).

De plus, la figure 5-26 représente la force globale F_G générée par le mouvement du liquide calculée en combinant les forces longitudinales et verticales. Nous remarquons clairement que lorsque l'amplitude de décélération est de 4.5 m. s^{-2} , la force générée par le mouvement du liquide est presque deux fois plus importante que dans le cas où elle est égale à 2.5 m. s^{-2} :

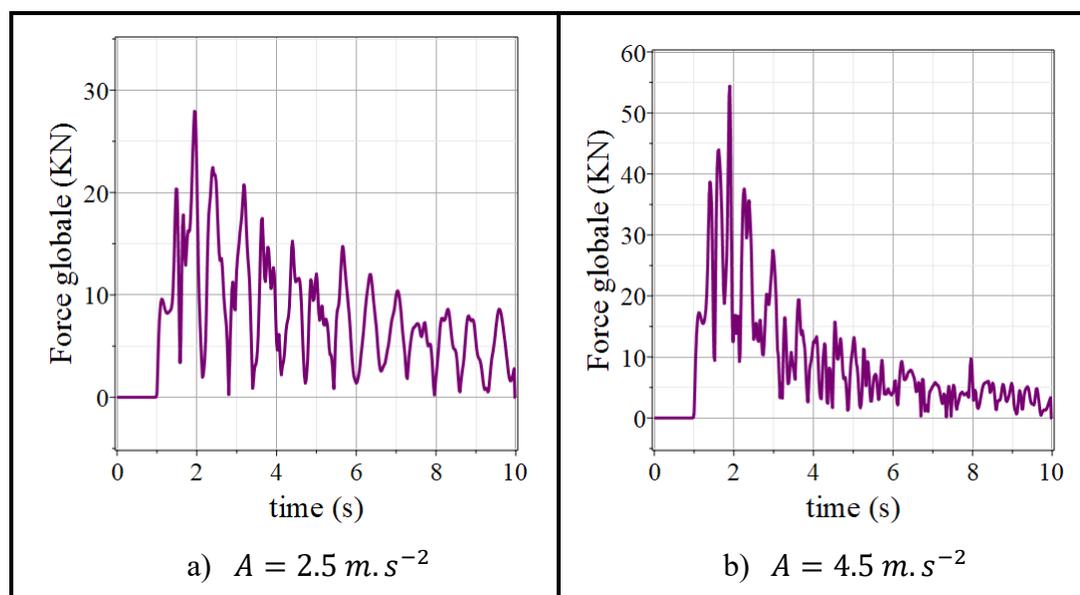


Figure 5-26 : Force globale F_G générée par le déplacement du centre de masse ($\tau = 70 \%$).

5.2.3 Comparaison des résultats

Dans cette section, nous allons discuter des résultats obtenus dans le cas d'une simulation du mouvement liquide dans une citerne subissant une décélération longitudinale. Ceci a pour but de vérifier leur cohérence par rapport à l'étude effectuée

antérieurement dans notre équipe de recherche [13]. Pour une meilleure comparaison, nous avons examiné les déplacements longitudinaux maximal ΔX_{max} et moyen ΔX_{moy} du centre de masse global du liquide, ses déplacements verticaux maximal ΔZ_{max} et moyen ΔZ_{moy} , l'amplitude maximale des forces longitudinale F_{x-max} et verticale F_{z-max} générées par le mouvement du centre de masse et la force globale maximale F_{G-max} engendrée. Le tableau 5-3 résume les différentes valeurs obtenues des paramètres pour deux taux de remplissages ($\tau = 50\%$ et $\tau = 70\%$) ainsi que pour deux amplitudes de décélération (2.5 m/s^2 et 4.5 m/s^2). En comparant les valeurs relatives aux deux taux de remplissages, nous constatons que les déplacements longitudinal et vertical sont plus grands lorsque $\tau = 50\%$. En effet, un taux de remplissage moins élevé signifie que le poids du liquide est moins important. Ce qui mène à un plus grand déplacement. Cependant, les forces engendrées par le mouvement du liquide sont plus importantes lorsque le taux de remplissage est de $\tau = 70\%$. Ceci est dû à la quantité du liquide en mouvement qui est plus grande pour ce taux de remplissage. De plus, cette augmentation est moins importante lorsque la décélération est de $A_{max} = 4.5\text{ m/s}^2$. En effet, l'augmentation des forces engendrées par le liquide est en moyenne de 45 % dans le cas où $A_{max} = 2.5\text{ m/s}^2$, alors que dans le cas où $A_{max} = 4.5\text{ m/s}^2$, cette augmentation est en moyenne de 30 % seulement.

Tableau 5-3 : Résumé des résultats obtenus dans le cas d'une décélération longitudinale.

τ	50 %		70 %	
$A_{max} (m/s^2)$	2.5	4.5	2.5	4.5
$\Delta X_{max} (m)$	0.124	0.199	0.094	0.138
$\Delta X_{moy} (m)$	0.098	0.145	0.067	0.101
$\Delta Z_{max} (m)$	0.070	0.103	0.059	0.074
$\Delta Z_{moy} (m)$	0.034	0.051	0.026	0.038
$F_{x-max} (kN)$	31	66	47	84
$F_{z-max} (kN)$	28	45	39	60
$F_{G-max} (kN)$	19	42	28	54

CHAPITRE 6

ÉTUDE COMPARATIVE DES CITERNES DE FORMES COMPLEXES

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le nouveau modèle dynamique 3D élaboré dans cette étude afin d'analyser deux aspects importants qui influencent le mouvement du liquide dans les citernes. Dans un premier lieu, nous allons étudier l'effet de la forme de la citerne sur le mouvement latéral, longitudinal et vertical du liquide et sur la force engendrée par ce mouvement. Pour ce faire, nous allons simuler, analyser et comparer le mouvement du liquide dans trois formes différentes de citernes. Ensuite, nous allons étudier l'effet de la viscosité du liquide sur son comportement en termes de déplacements et de forces.

6.1 Effet de la géométrie de la citerne

La forme de la citerne est l'un des facteurs principaux qui influent sur le mouvement du liquide dans le réservoir. En particulier, l'effet de la géométrie de la

section latérale joue un rôle important dans le comportement du liquide [29, 31]. Les sections latérales de citernes conventionnelles sont de formes circulaires, elliptiques ou ovales modifiées. Chaque forme a des avantages et des inconvénients. En effet, la citerne à section circulaire est la moins large des trois formes. Cela signifie que le ballonnement du liquide est le moins important. Cependant, son centre de masse est plus haut, ce qui élève la hauteur du centre de masse global du véhicule et son risque de renversement. D'autre part, le centre de masse de la citerne à section trapézoïdale est le plus bas. Cependant, la citerne est plus large et le ballonnement du liquide est plus important. Ce qui influence le comportement global du véhicule et nuit à sa stabilité. Finalement, la hauteur du centre de masse et la largeur de la section elliptique se situent entre les hauteurs des centres de masse et les largeurs des deux autres sections discutées. Ce qui constitue un compromis entre les deux autres cas.

L'étude effectuée par Kang [29] avait pour but de déterminer une section latérale de citerne optimale possédant, au même temps, un centre de masse bas et qui permet de limiter le ballonnement latéral du liquide. Cette étude a permis de retrouver une forme de citerne optimale pour chaque taux de remplissage. La plupart de ces citernes sont sous une forme presque trapézoïdale (figure 2-3). Dans le cadre de notre étude, nous allons sélectionner la citerne à section optimale pour un taux de remplissage de 50 % que nous allons appeler: section trapézoïdale modifiée. Le choix de cette section est dû au fait que le taux de remplissage de 50 % est le cas le plus dangereux par rapport au

mouvement latéral du liquide puisque le rapport entre la masse du liquide et la largeur de la surface libre est le plus grand. De plus, Kang a démontré que même si le taux varie légèrement par rapport à 50 %, cette section permet de réduire le ballonnement latéral tout en ayant un centre de masse plus bas.

Dans cette section, nous allons comparer trois formes de sections de citernes. La section circulaire, ovale modifiée et trapézoïdale modifiée. Pour que la comparaison soit plus appropriée, les paramètres des citernes, la nature du liquide et le nombre de nœuds du nouveau modèle sont identiques pour chacune des simulations. En effet, les paramètres des citernes seront choisis de telle sorte que l'aire de la section A_s soit identique pour les trois formes. Cela garantit l'égalité du volume des citernes en considérant que les parois de ces dernières ont la même épaisseur. Le tableau 6-1 donne les paramètres (en m) de la section générique (figure 2-3) de chacune des trois sections.

Tableau 6-1 : Paramètres de la section générique pour les trois formes étudiées.

Section circulaire	Section ovale modifiée	Section trapézoïdale
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$ $= Z_{cg} = \frac{H_1}{2} = \frac{H_2}{2}$ $= 1.019$ $L_p = 6.40$	$R_1 = R_3 = R_5 = 1.78$ $R_2 = R_4 = 0.39$ $H_1 = 2.44$ $Z_{cg} = H_2/2 = 0.83$ $L_p = 6.63$	$R_1 = 25 \quad R_2 = 0.39$ $R_3 = 50 \quad R_4 = 0.63$ $R_5 = 1.78 \quad H_1 = 1.96$ $H_2 = 2.03 \quad Z_{cg} = 0.92$ $L_p = 6.69$

Les trois sections ont des aires $A_c = 3.26 \text{ m}^2$. De plus, la longueur des trois citernes est $L = 7.5 \text{ m}$. La figure 6-1 montre les formes étudiées dans cette section avec la position de leurs centres de masse respectifs.

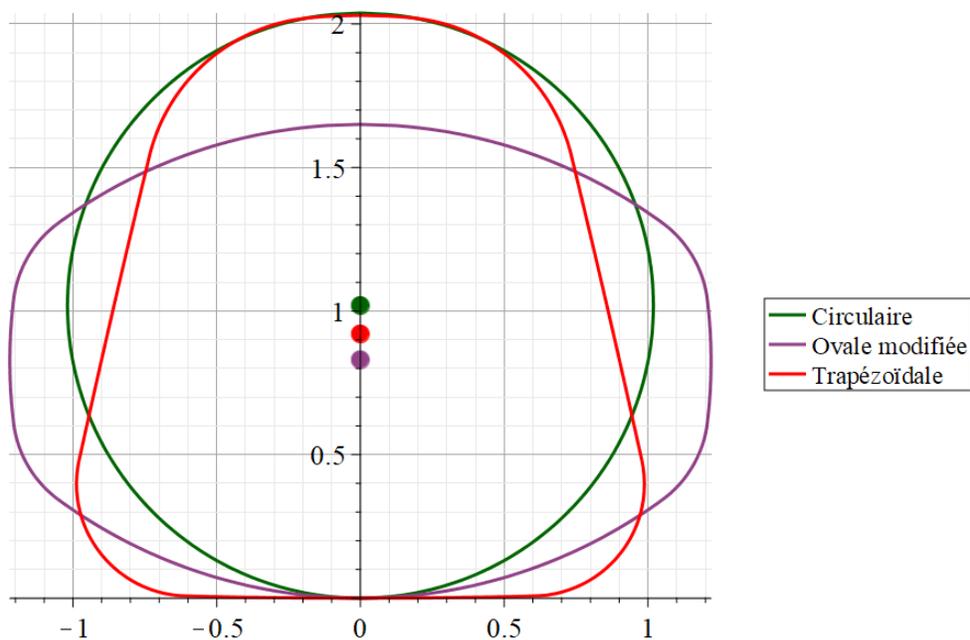


Figure 6-1 : Forme des sections de citerne étudiées.

L'analyse de l'effet de la géométrie de la citerne sur le comportement du liquide se fera en comparant le décalage latéral et longitudinal du liquide dans les trois formes de réservoirs sélectionnés. Pour cela, nous allons comparer les déplacements du centre de masses global du liquide à partir des déplacements de chaque nœud du nouveau modèle 3D élaboré dans cette étude en utilisant les formules (5.1). Nous allons aussi comparer les forces engendrées par ce mouvement en utilisant les formules (5.2). Le liquide

utilisé pour toutes les simulations de cette section est l'huile domestique de densité volumique $\rho = 960 \text{ kg.m}^{-3}$ et de coefficient de viscosité dynamique $\eta = 0.048 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Les taux de remplissage τ de 50 % et 70 % sont aussi sélectionnés pour la comparaison des résultats.

6.1.1 Analyse du décalage latéral

Dans cette section, nous allons comparer le comportement du liquide dans les trois formes de citernes lorsque ce dernier subit une force latérale externe. Les paramètres du modèle de discrétisation sont $M = 16$, $N = 3$ et $P = 6$. Le modèle dynamique contient alors 576 nœuds et 714 arêtes. L'accélération latérale exercée sur le liquide est donnée par l'équation (5.3) qui représente le mouvement dans une courbe avec une amplitude maximale de $A = 3 \text{ m/s}^2$. Les figures 6-2 et 6-3 montrent les déplacements latéral et vertical du centre de masse du liquide dans les 3 réservoirs pour les taux de remplissage de 50 % et 70 % respectivement. On constate clairement que, dans les deux cas, le déplacement du liquide est plus important dans le cas d'une citerne à section ovale modifiée. On peut aussi remarquer que les oscillations du liquide sont plus importantes pour cette forme. Ceci peut être expliqué par le fait que la section ovale modifiée est la plus large. On peut aussi confirmer que la citerne à section trapézoïdale permet de limiter le déplacement du liquide en comparant avec les citernes

conventionnelles. En effet, ses parois latérales sont inclinées vers l'intérieur et restreignent le mouvement latéral du liquide.

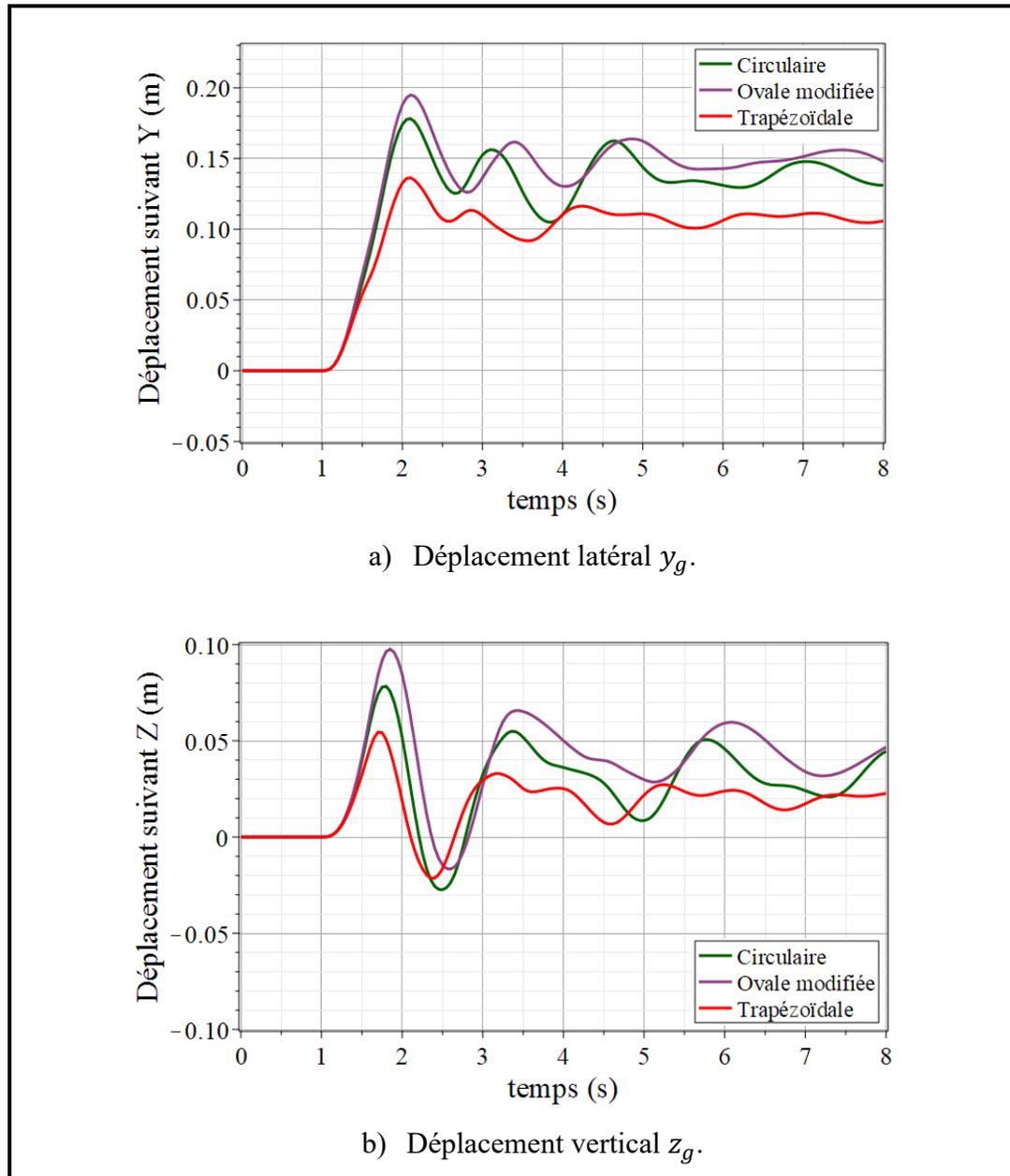


Figure 6-2 : Déplacements latéral et vertical du centre de masse ($\tau = 50\%$).

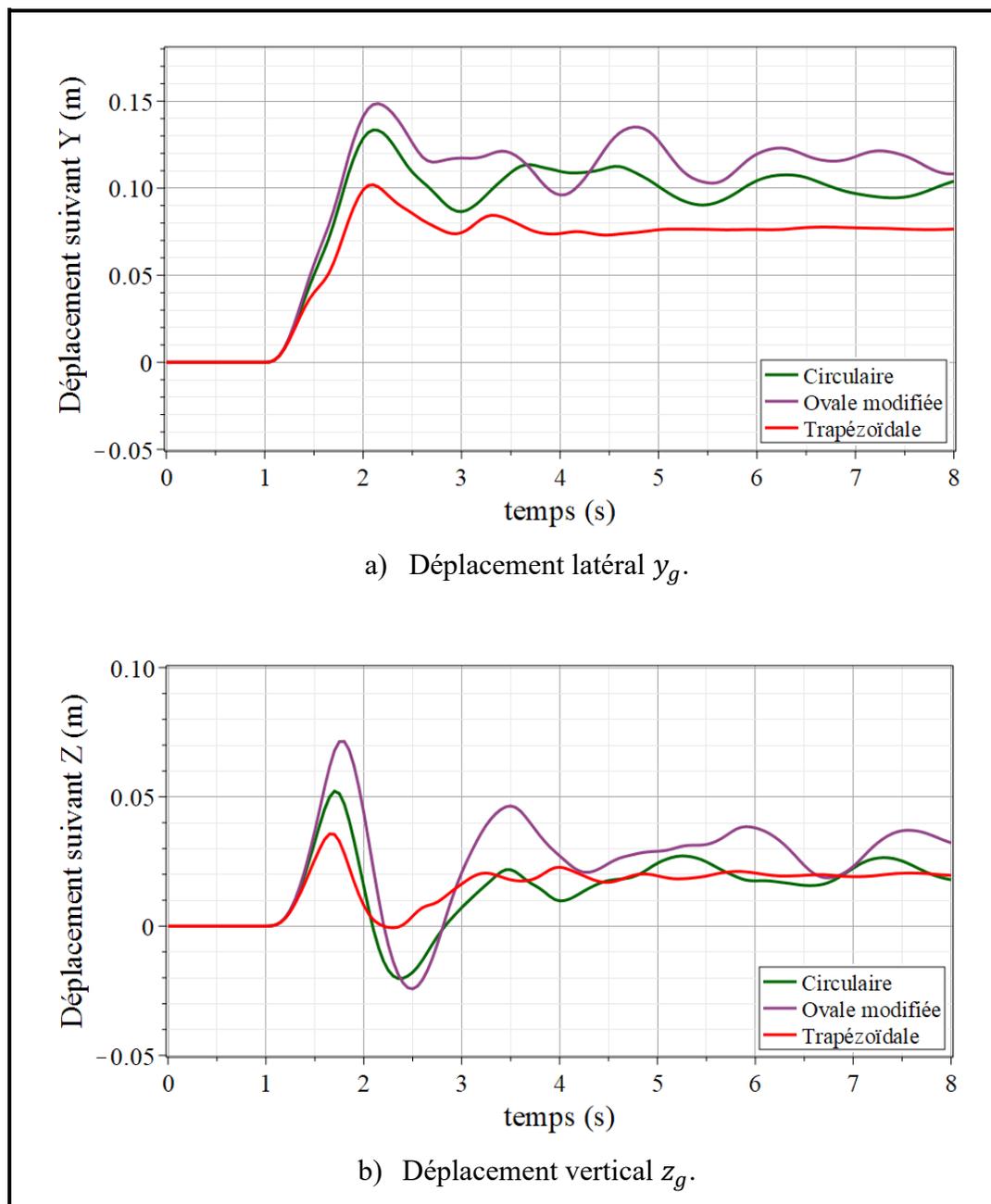


Figure 6-3 : Déplacements latéral et vertical du centre de masse ($\tau = 70\%$).

Les figures 6-4 et 6-5 comparent les forces latérale et verticale engendrées par le mouvement du centre de masse global du liquide pour les deux taux de remplissage. On remarque que la force maximale latérale dans les trois géométries sont presque identiques pour les deux taux de remplissage. Cependant, on remarque que la force maximale verticale dans la citerne trapézoïdale est la plus élevée lorsque $\tau = 50 \%$ et est la moins élevée lorsque $\tau = 70 \%$. De plus, si on compare les fréquences des oscillations, on constate qu'elles sont plus grandes pour la section trapézoïdale, suivies de la section circulaire puis la section ovale modifiée où les fréquences sont les plus petites. D'autre part, on peut observer que l'amplitude des oscillations de la force latérale sont plus élevées pour la section circulaire quand $\tau = 50 \%$. Tandis que lorsque $\tau = 70 \%$, ces amplitudes sont plus élevées pour la section ovale modifiée.

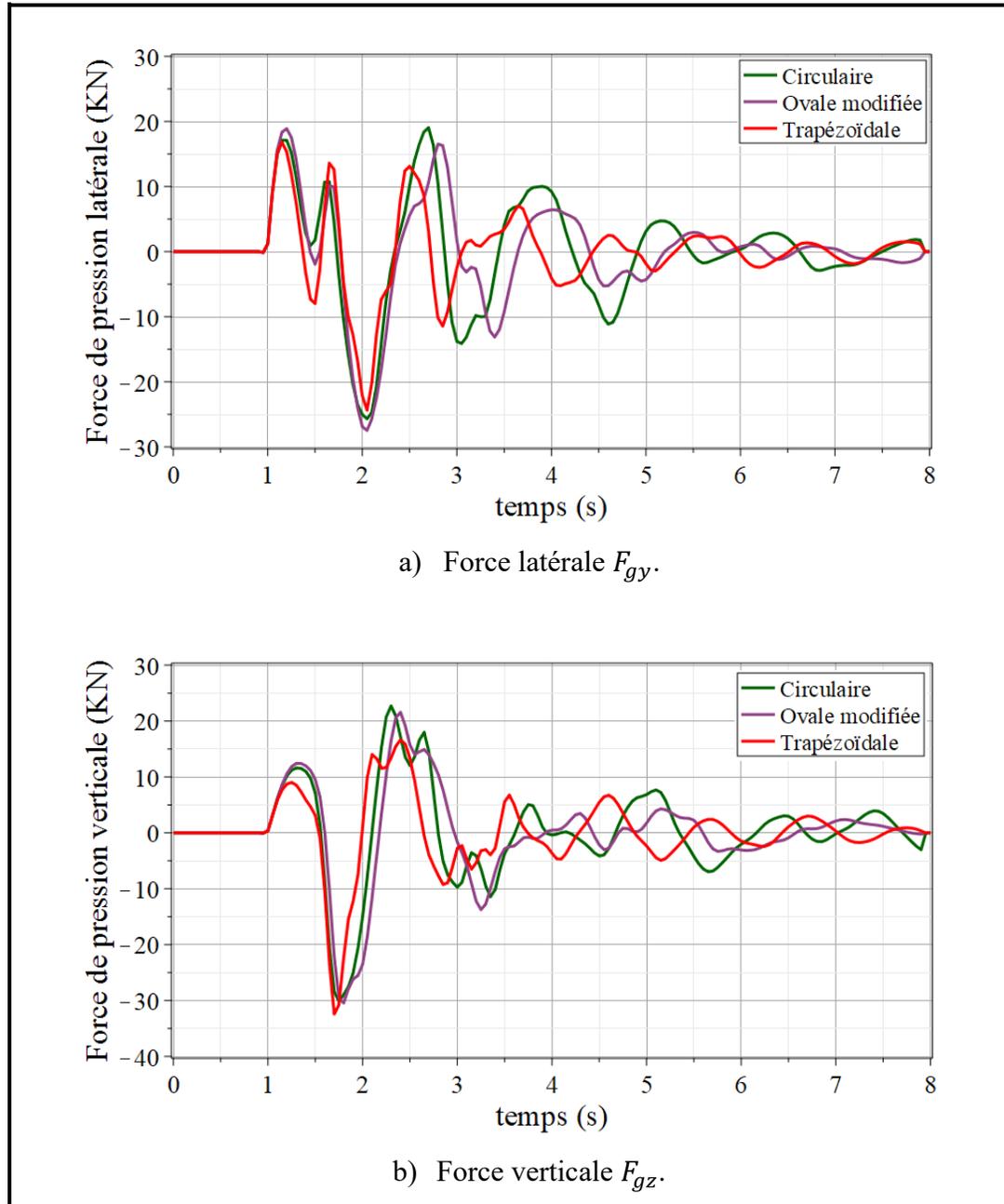


Figure 6-4 : Forces latérale et verticale générées par le déplacement
du centre de masse du liquide ($\tau = 50\%$).

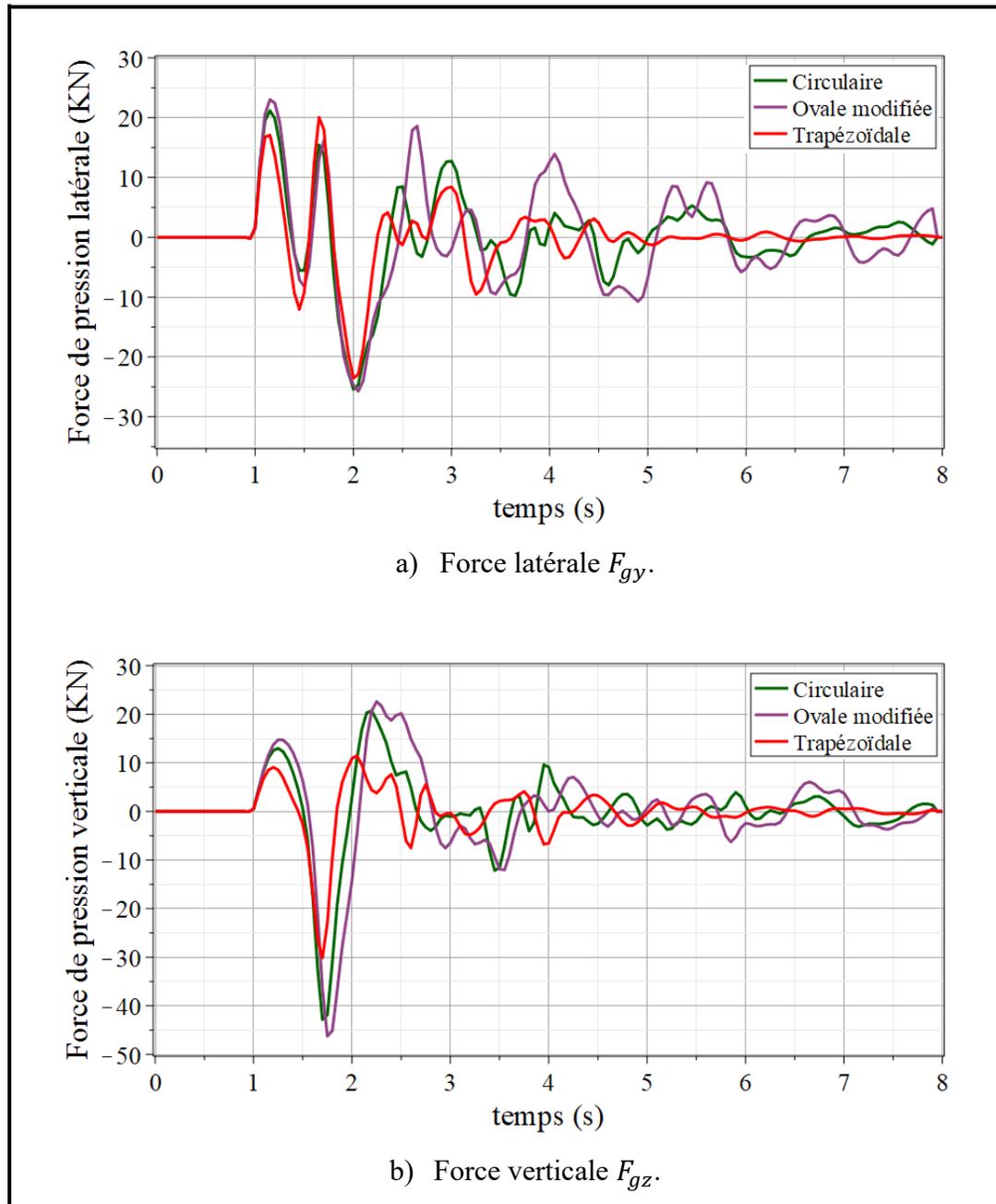


Figure 6-5 : Forces latérale et verticale générées par le déplacement
du centre de masse du liquide ($\tau = 70\%$).

Le tableau 6-2 résume les résultats obtenus en termes de déplacements et de forces par rapport aux trois sections de citernes analysées. L'analyse comparative se fera au niveau des déplacements maximaux latéral ΔY_{max} et vertical ΔZ_{max} du centre de masse global du liquide, de ses déplacements moyens latéral ΔY_{moy} et vertical ΔZ_{moy} et de l'amplitude maximale des forces latérale Fy_{max} et verticale Fz_{max} générées par le mouvement du liquide. D'une part, on remarque que les déplacements du centre de masse du liquide sont plus importants lorsque $\tau = 50\%$ pour les trois géométries de citerne. Ceci s'explique par le fait que la masse du liquide en mouvement est moins élevée par rapport $\tau = 70\%$. D'autre part, on constate que les forces latérales engendrées par le mouvement du liquide restent inchangées pour les deux taux de remplissage. Cependant, les forces verticales ont tendance à s'amplifier avec l'augmentation du taux de remplissage dans le cas des sections circulaire et ovale modifiée. Cette augmentation est plus significative pour la section ovale modifiée. Toutefois, les forces restent inchangées par rapport à la section trapézoïdale.

Tableau 6-2 : Comparaison des résultats de la simulation d'un mouvement dans une courbe pour les trois formes de sections de citernes.

Forme de la section	Circulaire		Ovale modifiée		Trapézoïdale	
	50 %	70 %	50 %	70 %	50 %	70 %
τ	50 %	70 %	50 %	70 %	50 %	70 %
$\Delta Y_{max} (m)$	0.179	0.133	0.195	0.149	0.138	0.102
$\Delta Y_{moy} (m)$	0.138	0.105	0.148	0.116	0.106	0.078
$\Delta Z_{max} (m)$	0.078	0.052	0.097	0.072	0.054	0.036
$\Delta Z_{moy} (m)$	0.035	0.020	0.045	0.031	0.021	0.019
$Fy_{max} (kN)$	25	25	27	26	24	23
$Fz_{max} (kN)$	29	42	30	46	32	30

6.1.2 Analyse du décalage longitudinal

Dans cette partie, nous allons étudier le mouvement du liquide lorsque la citerne subit une décélération longitudinale simulant un freinage du véhicule. Les paramètres du modèle de discrétisation sont $M = 18$, $N = 2$ et $P = 3$. Le nouveau modèle dynamique contient 216 nœuds et 285 arêtes. L'accélération externe appliquée sur le liquide est donnée par l'équation (5.5) qui représente une décélération longitudinale avec une amplitude maximale de $A = 4 \text{ m/s}^2$. Les figures 6-6 et 6-7 décrivent les déplacements longitudinal et vertical du centre de masse du liquide dans les trois citernes pour les taux de remplissage de 50 % et 70 % respectivement. On remarque que les déplacements du centre de masse, ainsi que les amplitudes des oscillations sont plus grands dans la citerne à section ovale modifiée. Cependant, les fréquences de ces oscillations sont plus petites. D'autre part, les déplacements du centre de masse sont réduits par la forme de la citerne à section trapézoïdale. En effet, les parois latérales inclinées vers l'avant rétrécissent la surface libre du liquide. Ce qui permet de limiter le mouvement longitudinal du liquide par rapport aux citernes conventionnelles. Toutefois, les fréquences des oscillations longitudinales du centre de masse sont plus grandes.

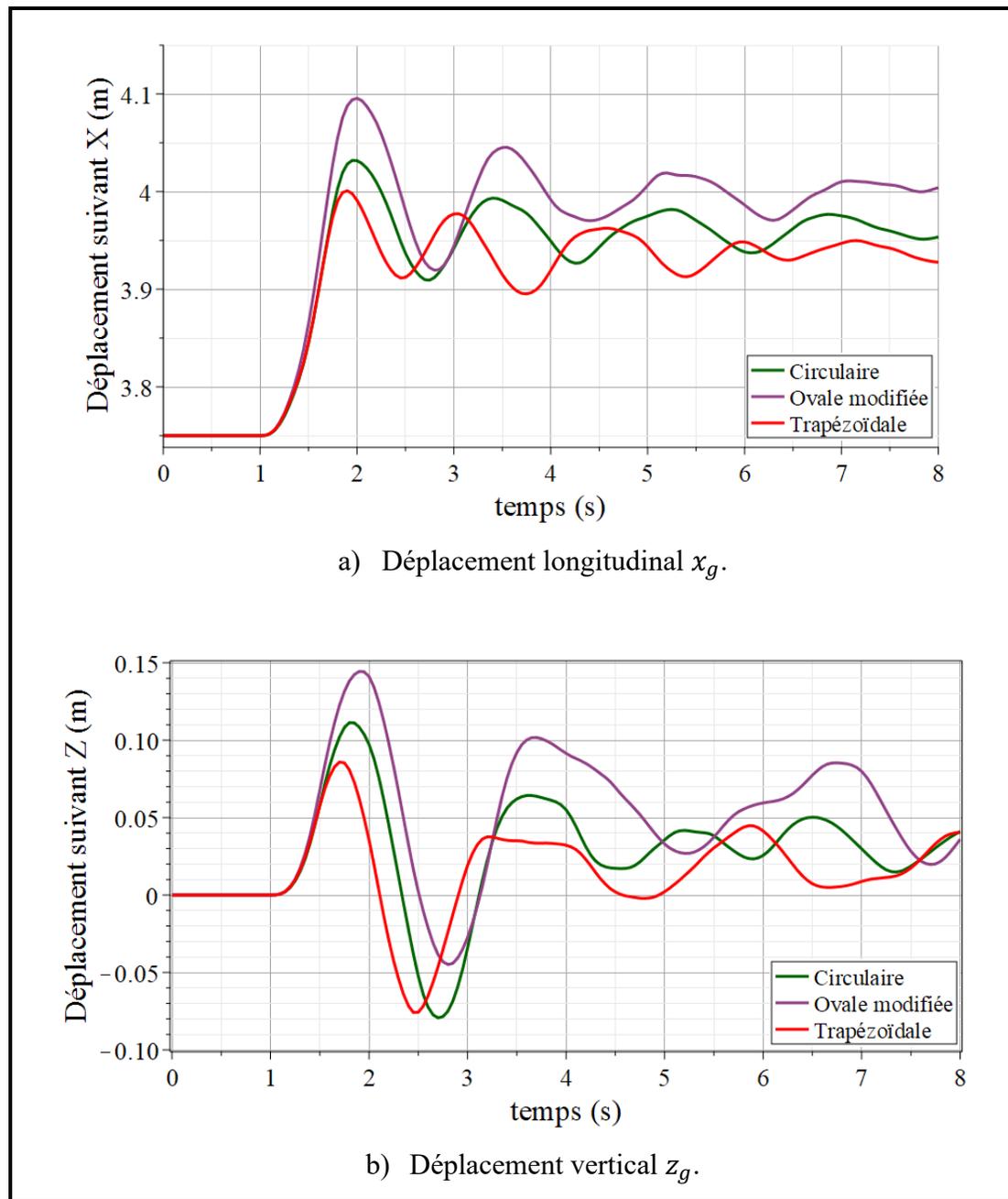


Figure 6-6 : Déplacements longitudinal et vertical du centre de masse ($\tau = 50\%$).

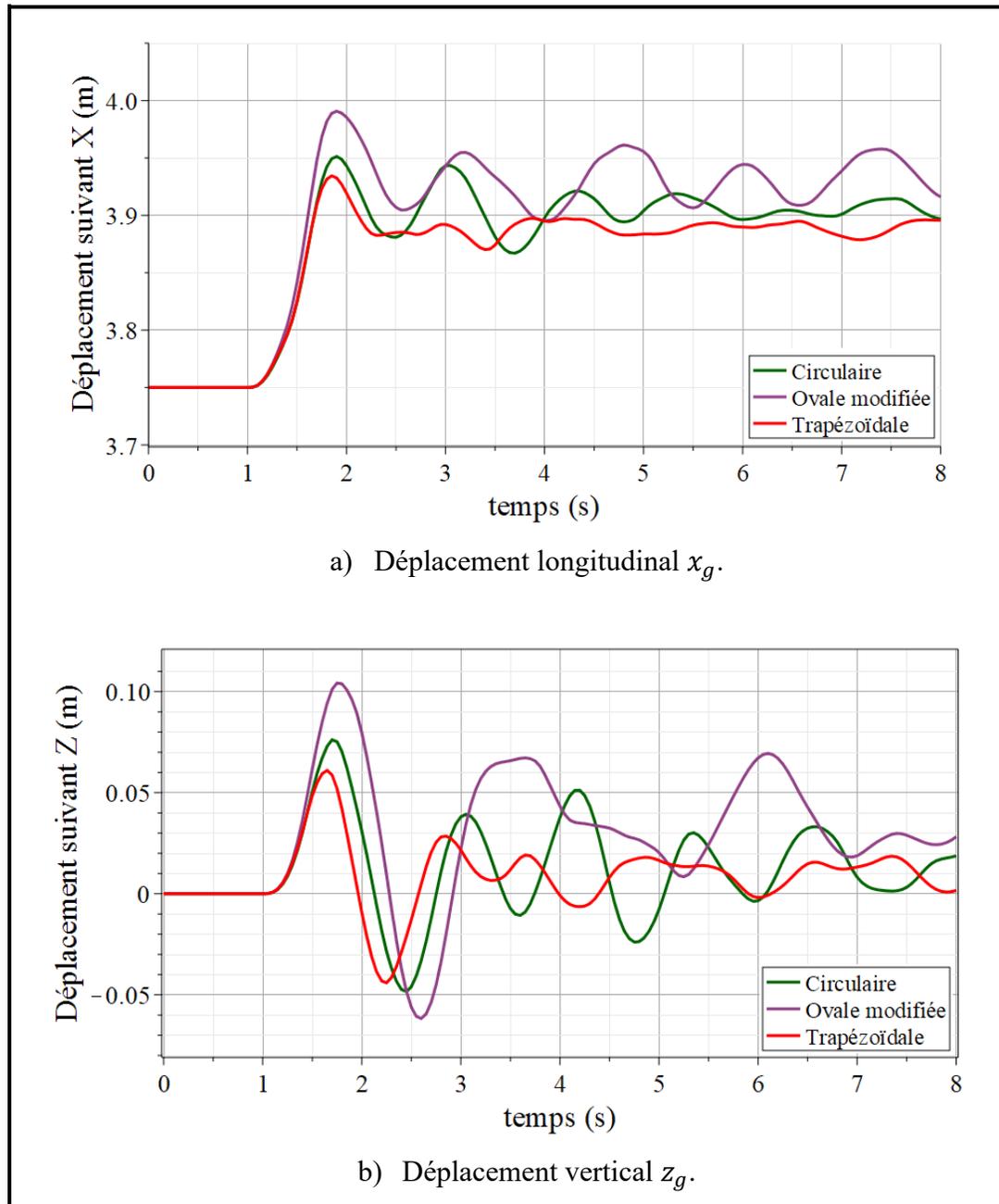


Figure 6-7 : Déplacements longitudinal et vertical du centre de masse ($\tau = 70\%$).

Les figures 6-8 et 6-9 comparent les forces longitudinale et verticale générées par le mouvement du liquide dans les trois formes de citernes pour les taux de remplissage de 50 % et 70 %. En premier lieu, on constate que lorsque $\tau = 50 \%$, l'amplitude des forces est légèrement plus grande pour la citerne à section trapézoïdale. Dans le cas où $\tau = 70 \%$, l'amplitude des forces la plus élevée est observée dans la citerne à section ovale modifiée. Cependant, les amplitudes diminuent moins rapidement dans la citerne cylindrique. D'autre part, les fréquences des oscillations les plus grandes sont observées dans la citerne à section trapézoïdale. En effet, puisque le mouvement du liquide est plus restreint dans cette citerne, les oscillations se font plus rapidement.

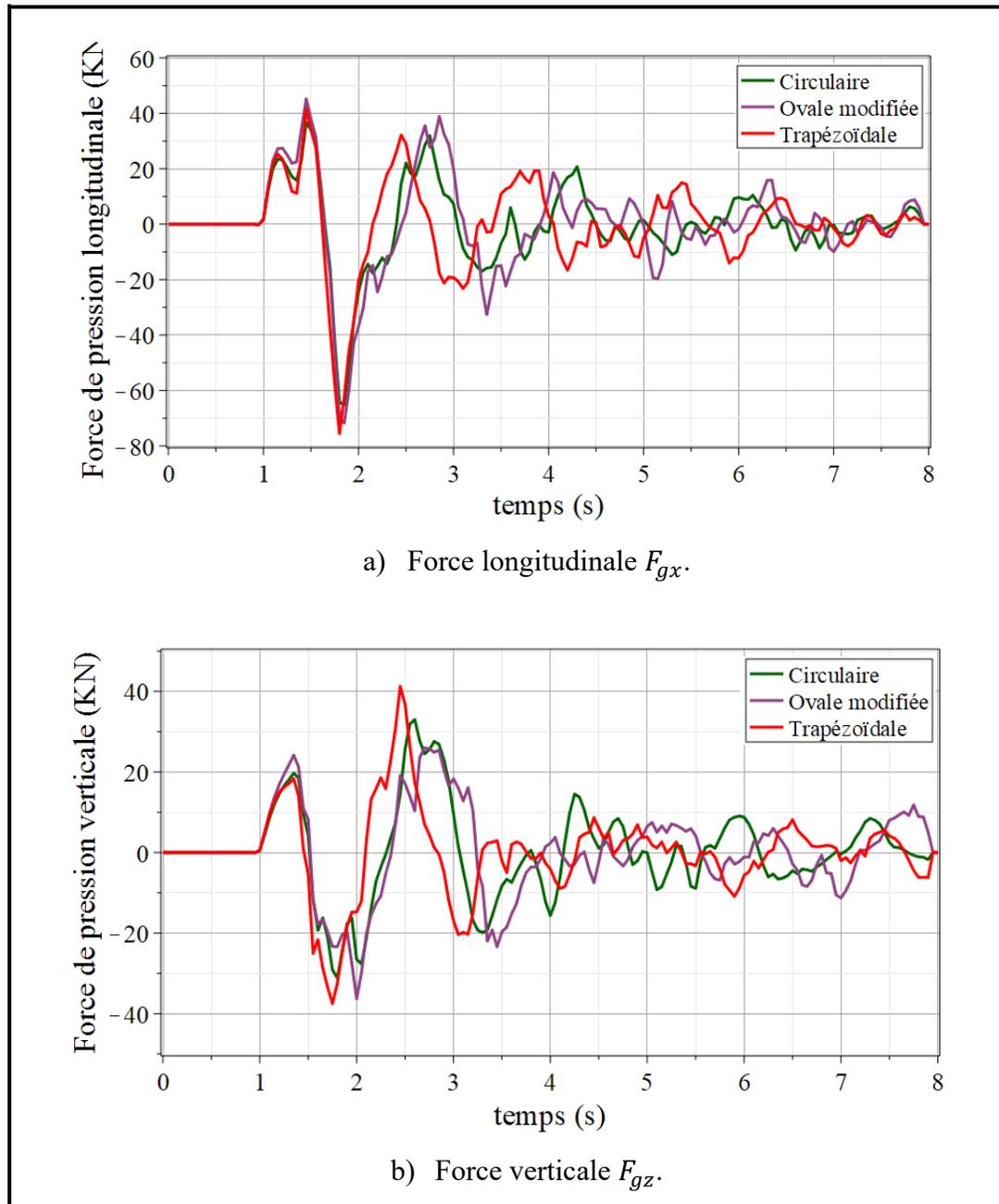


Figure 6-8 : Forces longitudinale et verticale générées par le déplacement du centre de masse du liquide ($\tau = 50\%$).

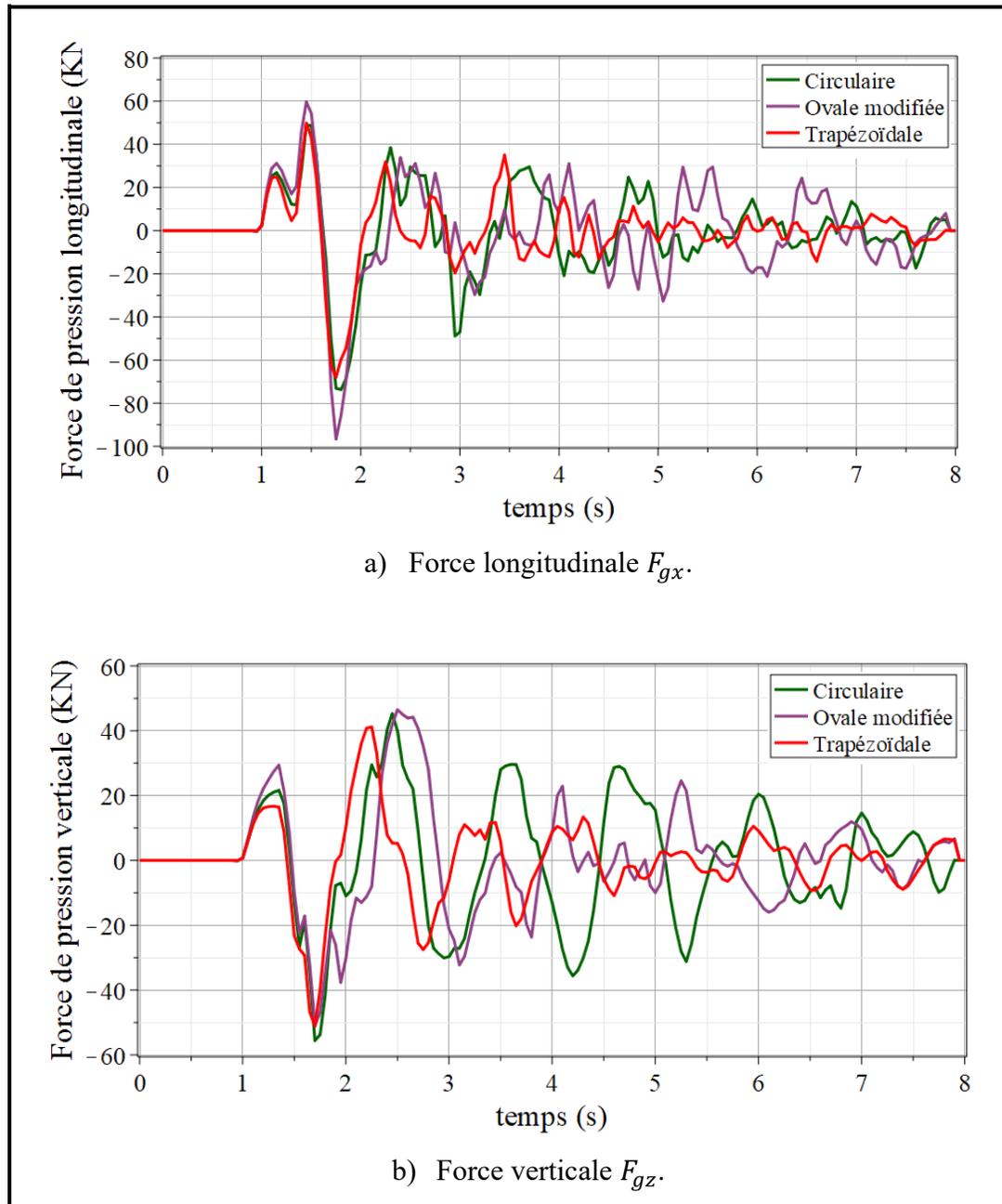


Figure 6-9 : Forces longitudinale et verticale générées par le déplacement
du centre de masse du liquide ($\tau = 70\%$).

Le tableau 6-3 résume les résultats importants obtenus lors de cette simulation en termes de déplacements et de forces. La comparaison se fera au niveau des déplacements maximaux longitudinal ΔX_{max} et vertical ΔZ_{max} du centre de masse global du liquide, de ses déplacements moyens longitudinal ΔX_{moy} et vertical ΔZ_{moy} et de l'amplitude maximale des forces longitudinale $F_{Z_{max}}$ et verticale $F_{Z_{max}}$ générées par le mouvement du liquide. En premier lieu, on observe que les déplacements du centre de masse du liquide sont plus importants lorsque $\tau = 50\%$. Ensuite, on remarque que les forces longitudinale et verticale ont tendance à s'amplifier avec l'augmentation du taux de remplissage. Pour les forces longitudinales, la plus grande augmentation est observée dans la citerne à section ovale modifiée. Pour les forces verticales, la plus forte augmentation est observée dans la citerne cylindrique. Dans ce même contexte, on remarque que le mouvement du liquide génère plus de force dans la citerne ovale modifiée dans le cas où $\tau = 70\%$. Alors que lorsque $\tau = 50\%$, le mouvement du liquide génère plus de force dans la citerne à section trapézoïdale.

Tableau 6-3 : Comparaison des résultats de la simulation d'une décélération longitudinale pour les trois formes de sections de citernes.

Forme de la section	Circulaire		Ovale modifiée		Trapézoïdale	
	50 %	70 %	50 %	70 %	50 %	70 %
τ	50 %	70 %	50 %	70 %	50 %	70 %
$\Delta X_{max} (m)$	0.281	0.201	0.345	0.236	0.252	0.184
$\Delta X_{moy} (m)$	0.212	0.155	0.230	0.178	0.187	0.138
$\Delta Z_{max} (m)$	0.102	0.067	0.144	0.104	0.086	0.061
$\Delta Z_{moy} (m)$	0.035	0.015	0.056	0.035	0.021	0.009
$Fx_{max} (kN)$	64	73	72	97	76	68
$Fz_{max} (kN)$	33	56	36	51	41	51

6.2 Effet de la viscosité du liquide :

Cette partie concerne l'analyse de l'effet de la viscosité dynamique du liquide sur son comportement dans une citerne partiellement remplie. Pour ce faire, nous allons comparer le mouvement de deux liquides de mêmes densités volumiques et de viscosités dynamiques différentes. Il s'agit de l'huile domestique (HD) et l'huile de ricin (HR). Les propriétés des deux liquides sont données dans le tableau 6-4.

Tableau 6-4 : Propriétés physiques des deux liquides.

Liquide	Huile domestique	Huile de ricin
Densité volumique ρ (kg/m^3)	960	960
Viscosité dynamique η ($kg/m.s$)	0.048	0.985

L'analyse portera aussi sur la comparaison de l'effet de la viscosité dans les trois formes de citernes étudiées dans la section précédente (6.1). Soit, la section circulaire, ovale modifiée et trapézoïdale. Les paramètres et dimensions de ces sections sont énumérés dans le tableau 6-1. Le taux de remplissage utilisé pour la simulation est de $\tau = 50 \%$. Les paramètres du modèle de discrétisation sont $M = 18$, $N = 2$ et $P = 4$. De plus, l'accélération externe subie par le liquide est donnée par l'équation (5.5) qui simule une décélération longitudinale avec une amplitude maximale $A = 4.5 m/s^2$.

Les figures 6-10 et 6-11 illustrent le déplacement longitudinal et vertical du centre de masse des liquides dans les trois formes de citernes respectivement. En premier lieu, on observe que le déplacement longitudinal maximal l'huile de ricin est légèrement plus bas que celui de l'huile domestique avec une différence d'environ 1 *cm*. Ensuite, on remarque que dans toutes les citernes étudiées, l'amplitude des oscillations longitudinales diminuent plus rapidement pour le liquide à forte viscosité dynamique. En effet, après seulement trois oscillations, le liquide ne se déplace presque plus. D'autre part, les déplacements verticaux maximaux sont presque identiques pour les deux liquides quelle que soit la forme du réservoir. Toutefois, l'amplitude des oscillations verticales du liquide à forte viscosité dynamique diminue plus rapidement. En effet, après seulement deux oscillations verticales, l'amplitude des oscillations devient presque nulle.

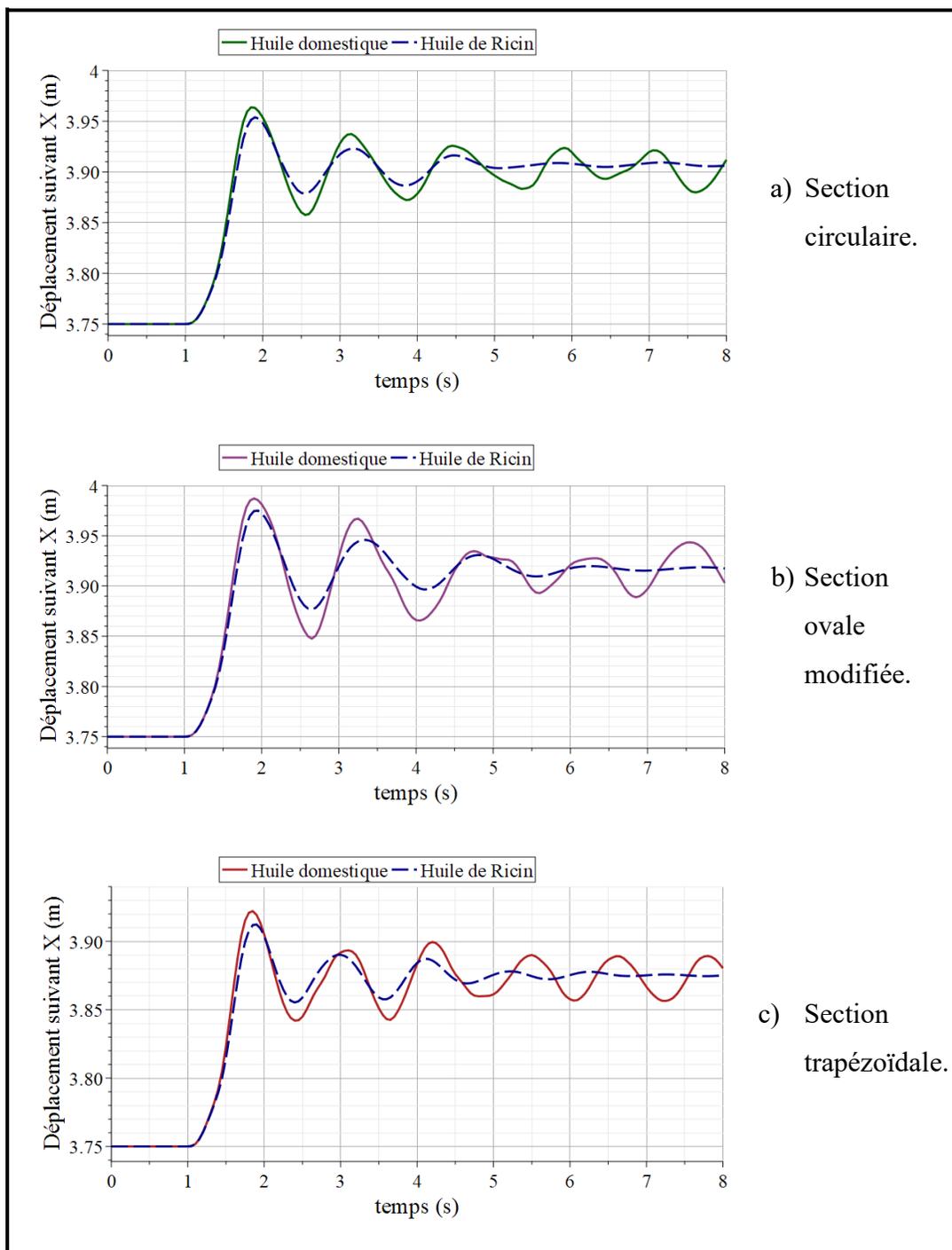


Figure 6-10 : Comparaison du déplacement longitudinal du centre de masse des deux liquides.

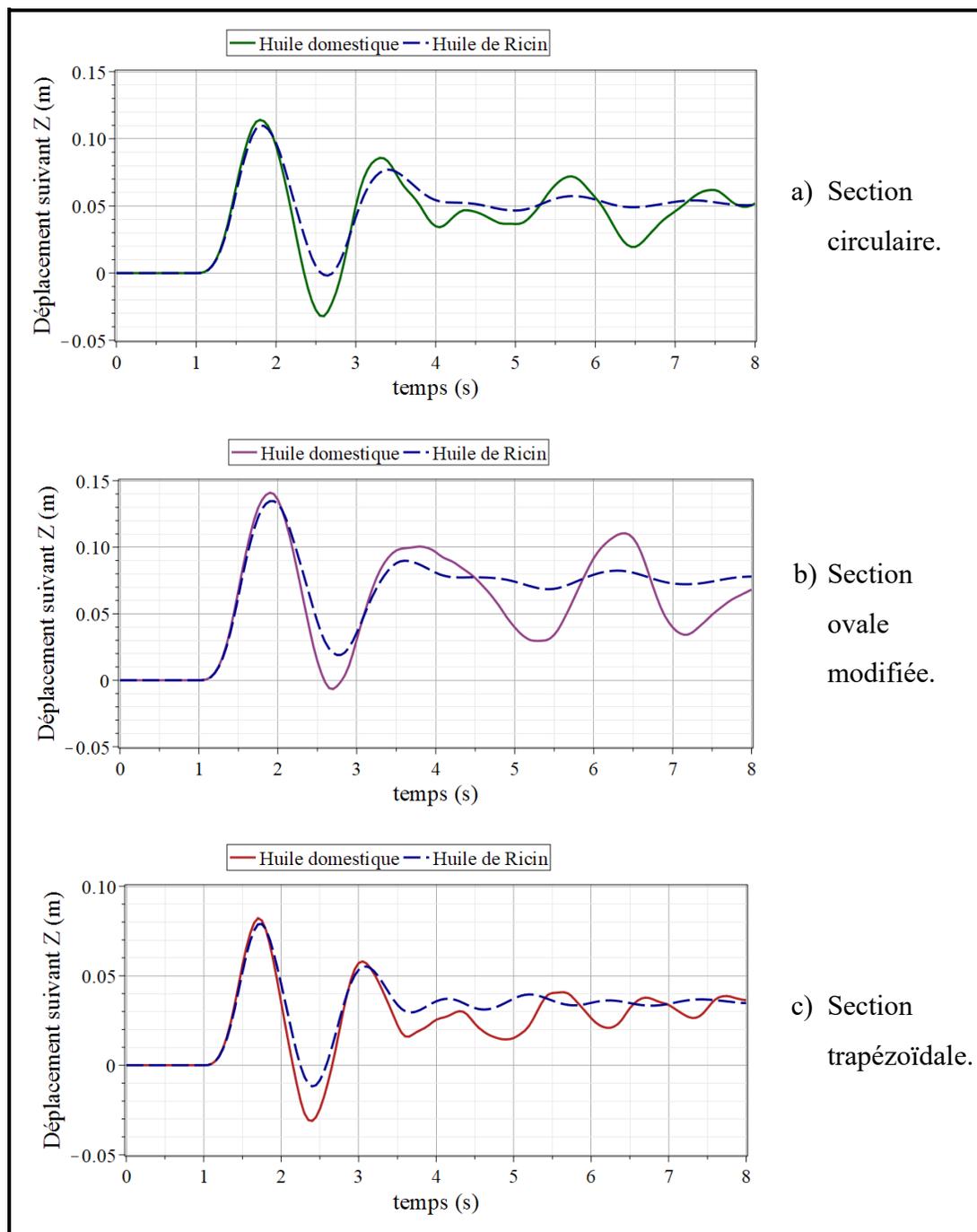


Figure 6-11 : Comparaison du déplacement vertical z_g du centre de masse des deux liquides.

Les figures 6-12 et 6-13 décrivent, respectivement, les forces longitudinale et verticale générées par le mouvement des deux liquides dans les citernes. On observe que, pour toutes les formes de citernes, les forces engendrées par l'huile de ricin sont moins importantes. De plus, l'amplitude des oscillations diminue plus rapidement dans ce cas. On peut aussi remarquer que la fréquence des oscillations est plus grande pour la citerne à section trapézoïdale.

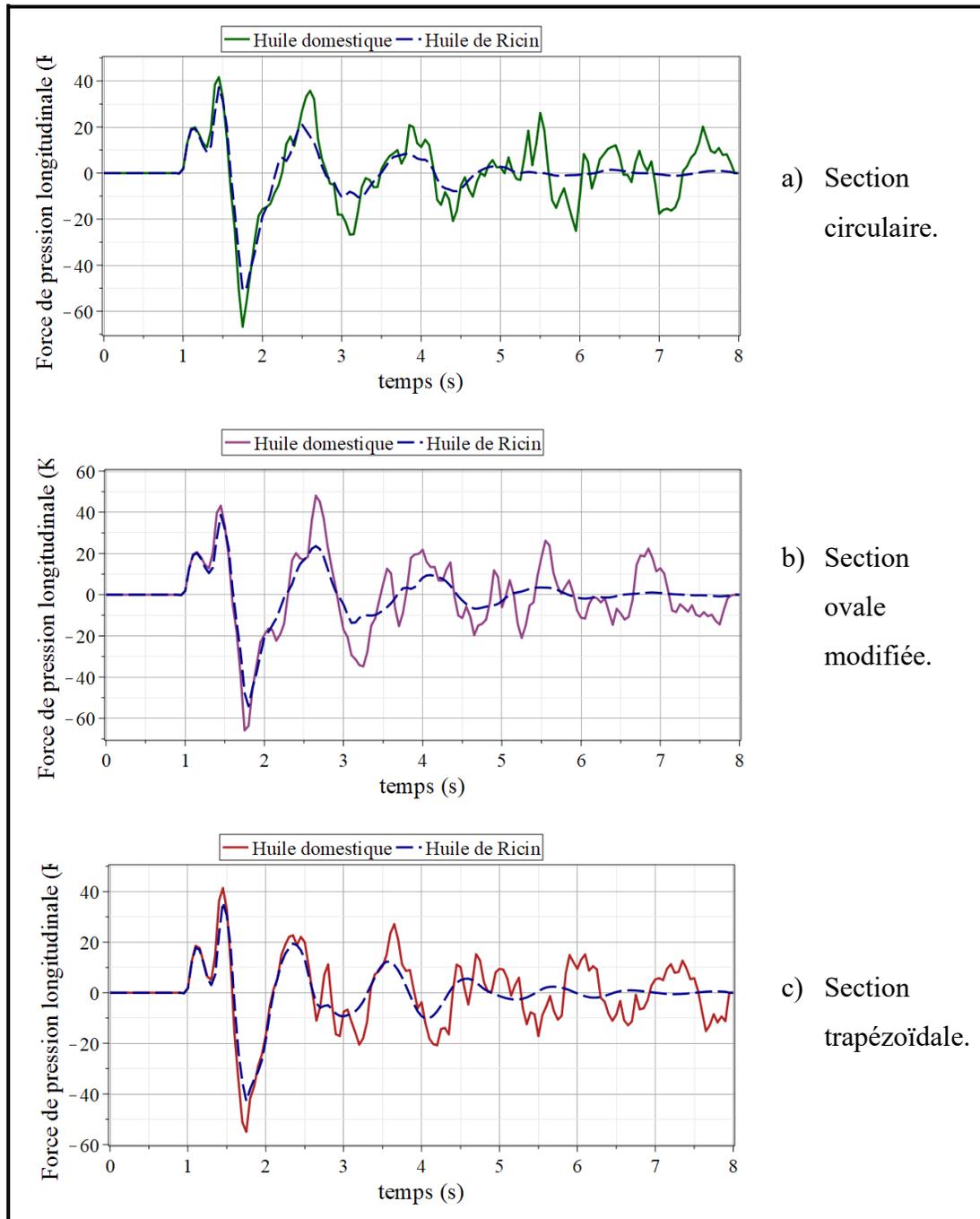


Figure 6-12 : Comparaison de la force longitudinale F_{gx} engendrée par les deux liquides.

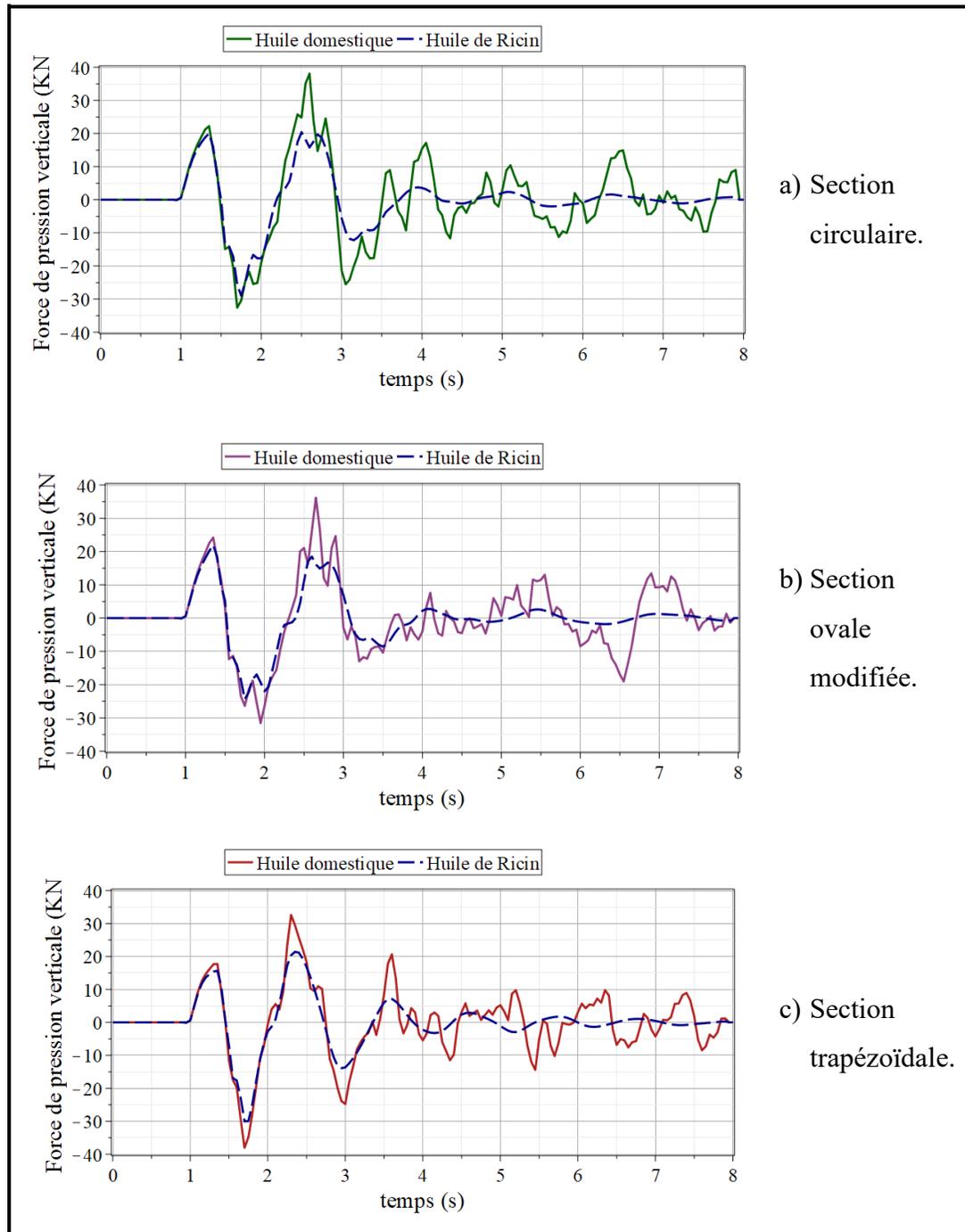


Figure 6-13 : Comparaison de la force verticale F_{gz} engendrée par les deux liquides.

Le tableau 6-5 compare les résultats importants obtenus par les deux liquides dans cette simulation. L'analyse comparative se fera en termes des amplitudes des deux premières oscillations longitudinales ΔX_{max1} et ΔX_{max2} , des amplitudes des deux premières oscillations verticales ΔZ_{max1} et ΔZ_{max2} , ainsi que des forces maximales longitudinales Fx_{max} et verticales Fz_{max} . D'une part, on peut observer que pour l'huile de ricin, les déplacements du liquide et les forces engendrées par son mouvement sont moins importants par rapport à l'huile domestique. On peut conclure que plus la viscosité dynamique du liquide est élevée, moins son mouvement est important. D'autre part, en comparant les deux premières oscillations longitudinales des deux liquides, on remarque que l'amplitude des oscillations diminue plus rapidement pour les citernes à section circulaire (−12 % pour HD et −15 % pour HR) et ovale modifiée (−8 % pour HD et −13 % pour HR). Cependant, il n'y a pas de différence significative entre la différence des amplitudes des deux liquides dans la citerne à section trapézoïdale (−15 % pour HD et −14 % pour HR). En effet, cette forme de citerne est conçue dans le but de réduire le mouvement du liquide quelle que soit sa nature. De ce fait, puisque le déplacement du liquide est déjà réduit dans cette citerne, l'influence de la viscosité dynamique n'est pas importante. On peut aussi observer le même phénomène en comparant l'amplitude des oscillations successives du déplacement vertical. En effet, l'amplitude des oscillations pour la citerne à section circulaire est réduite de −25 % pour HD et −29 % pour HR, et pour la citerne à section ovale modifiée, elle est réduite de −29 % pour HD et −34 % pour HR. Alors que pour la

forme trapézoïdale, la réduction de l'amplitude est de -31% pour HD et -32% pour HR. En ce qui concerne les forces générées par le mouvement de l'huile de ricin dans la citerne circulaire, les forces longitudinale et verticale sont réduites de -25% et -24% respectivement par rapport à l'huile domestique. Pour la section ovale modifiée, leur réduction est de -21% et -35% respectivement. Et pour la section trapézoïdale, la diminution des forces par rapport aux deux liquides est de -24% et -21% respectivement. On observe que la différence entre les forces générées par les deux liquides est légèrement moins importante pour cette dernière forme.

Tableau 6-5 : Comparaison des déplacements et des forces par rapport aux deux liquides.

Forme de la section	Circulaire		Ovale modifiée		Trapézoïdale	
	Huile domestique	Huile de ricin	Huile domestique	Huile de ricin	Huile domestique	Huile de ricin
$\Delta X_{max1} (m)$	0.213	0.203	0.238	0.225	0.172	0.162
$\Delta X_{max2} (m)$	0.188	0.173	0.218	0.196	0.144	0.139
$\Delta Z_{max1} (m)$	0.114	0.110	0.141	0.134	0.083	0.079
$\Delta Z_{max2} (m)$	0.086	0.078	0.100	0.089	0.057	0.054
$F_{x_{max}} (kN)$	67	50	66	53	55	42
$F_{z_{max}} (kN)$	38	29	37	24	38	30

Finalement, on peut conclure que la viscosité dynamique du liquide joue un rôle important dans le comportement du liquide dans le réservoir. Le mouvement du liquide est fortement influencé par sa viscosité, surtout dans les citernes conventionnelles comme les citernes à section circulaire et ovale modifiée. Cependant dans les citernes de forme trapézoïdale, le mouvement du liquide est déjà restreint et, de ce fait, la viscosité du liquide n'a pas beaucoup d'influence sur son comportement.

CHAPITRE 7

CONCEPTION ET OPTIMISATION DES CITERNES

Dans le présent chapitre, nous allons utiliser le nouveau modèle dynamique 3D élaboré dans cette étude dans le but d'analyser des citernes de différentes formes. En premier lieu, nous allons repérer les zones critiques du réservoir où les forces exercées par le liquide sont les plus fortes. Plusieurs forces d'excitations seront utilisées. Ensuite, nous allons évaluer la pression appliquée sur ces zones pour chaque forme sélectionnée. En se basant sur ces contraintes, nous allons calculer les épaisseurs minimales des parois, puis les poids minimaux des citernes en utilisant différents matériaux dont des alliages d'aluminium. Finalement, nous allons comparer les valeurs obtenues et proposer une citerne optimale en termes de poids et de résistance.

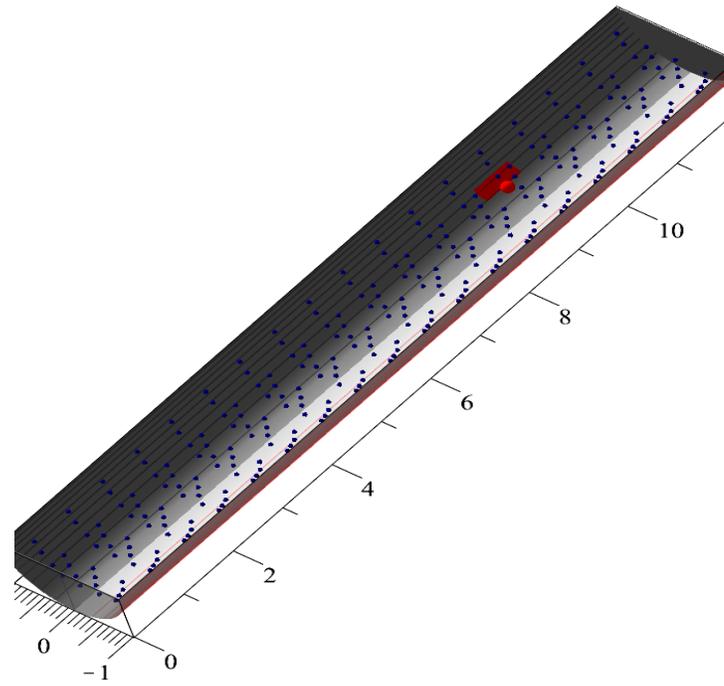
7.1 Analyse des zones critiques

Dans cette section, nous allons exploiter le nouveau modèle 3D développé dans cette thèse afin de localiser les zones critiques dans trois formes de réservoirs. Pour ce faire, nous allons simuler trois mouvements extrêmes du véhicule et évaluer les forces engendrées par chaque nœud voisin aux parois de la citerne. La zone des parois voisines au nœud générant la plus grande force sera alors considérée comme zone critique. Nous évaluerons, ensuite, la pression appliquée sur chacune des zones localisées. Les formes de citernes sélectionnées sont de sections circulaire, ovale et trapézoïdale. Les paramètres des sections sont sélectionnés de telle sorte que les sections aient des aires identiques pour garantir le même volume du liquide et sont donnés par le tableau 6-1. Cependant, dans le but d'évaluer les forces maximales dans des camions de grandes dimensions, la longueur des réservoirs sera $L = 12.5 \text{ m}$. Le liquide utilisé est l'huile domestique. Le taux de remplissage choisi est $\tau = 50 \%$. En effet, nous avons effectué les simulations avec deux taux remplissages (50 % et 70 %). Toutefois, nous avons remarqué que les pressions exercées sur les zones critiques sont relativement semblables. Ainsi, nous ne voyons pas la pertinence d'utiliser deux taux de remplissage dans ce cas. Les paramètres du modèle dynamique 3D sont $M = 18$, $N = 2$ et $P = 4$. Cela signifie que le liquide est représenté par un réseau de masses-ressorts-amortisseurs de 288 masses et 380 arêtes flexibles. Trois forces d'excitations sont appliquées au liquide afin d'évaluer les forces de pressions de chaque nœud. La

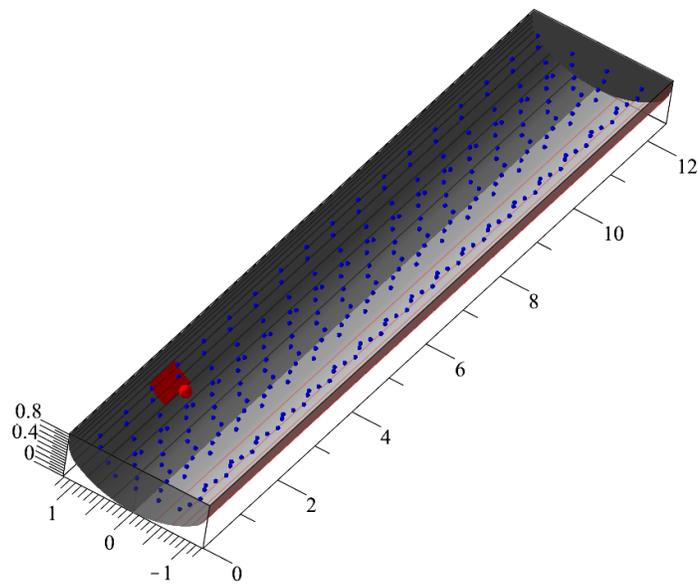
première force est une force latérale simulant un mouvement dans une courbe. La deuxième force est une force longitudinale simulant un freinage brusque du véhicule. La troisième force est une simulation des deux précédentes manœuvres simultanément.

7.1.1 Forces d'excitation latérales

L'accélération latérale subie par le liquide est donnée par la formule (5.3). Cependant, afin de générer les forces extrêmes, l'amplitude maximale utilisée est $A_y = 5 \text{ m/s}^2$. Nous supposons qu'une accélération latérale supérieure à cette valeur entraînera le renversement du camion. La figure 7-1 montre la zone critique pour les trois formes de citernes dans le cas de cette simulation. Le nœud qui exerce le plus de force sur les parois est représenté en rouge ainsi que la portion de sa paroi voisine. Nous remarquons que pour la citerne à section circulaire, l'emplacement du nœud est plus bas par rapport aux autres formes. D'ailleurs, la largeur du réservoir est plus petite comparé aux autres géométries. Dans ce cas, les nœuds situés au fond de la citerne ont un mouvement très restreint (les raideurs des ressorts sont plus élevées) et subissent les forces et le poids des nœuds adjacents, en plus de la force latérale appliquée sur l'ensemble du liquide. Ceci conduit à des forces de pression plus importantes sur les parois dans cette zone.



a) Section circulaire.



b) Section ovale modifiée.

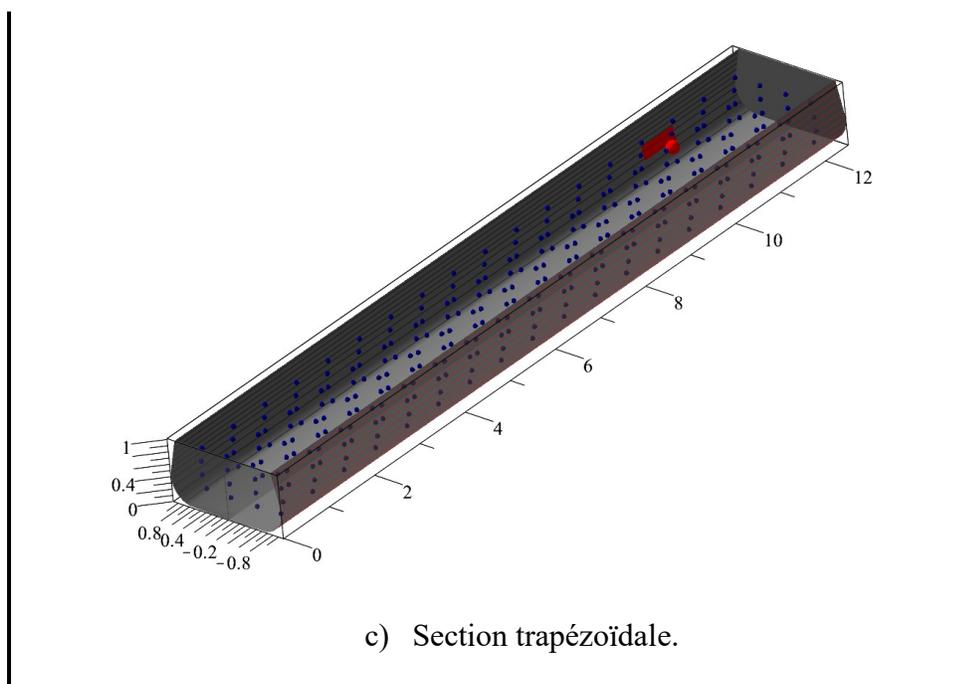


Figure 7-1 : zones critiques des citernes (accélération latérale).

Le tableau 7-1 révèle les valeurs des forces maximales générées dans les zones critiques, l'aire de la surface de la paroi adjacente au nœud et la pression appliquée sur cette surface. On remarque que la force maximale est plus grande pour la citerne à section circulaire. De plus, étant donné que l'aire de la surface adjacente au nœud est plus petite, la pression dans cette zone est beaucoup plus grande par rapport aux autres formes. La force maximale est plus petite dans le cas de la citerne trapézoïdale puisque cette forme réduit le déplacement latéral du liquide ainsi que les forces engendrées par son mouvement.

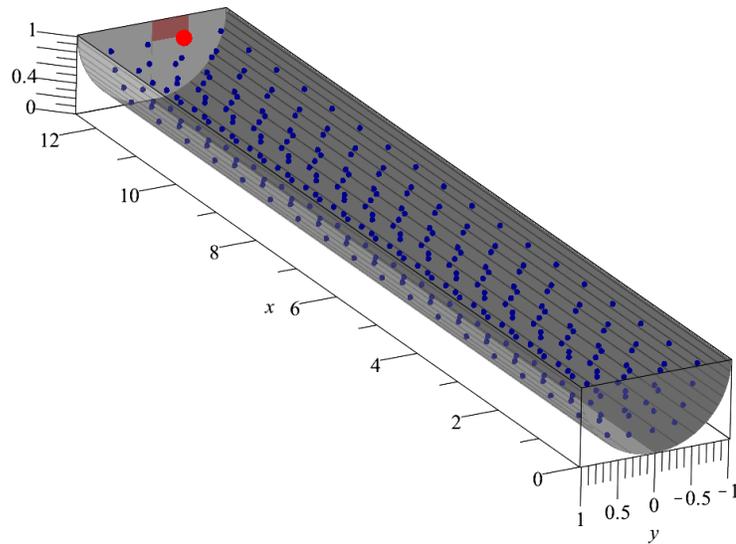
Tableau 7-1 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitation latérale)

Section	Circulaire	Ovale modifiée	Trapézoïdale
Force maximale (N)	2869	2350	1933
Aire de la surface adjacente (m^2)	0.0862	0.1443	0.1497
Pression (Pa)	33285	16288	12909

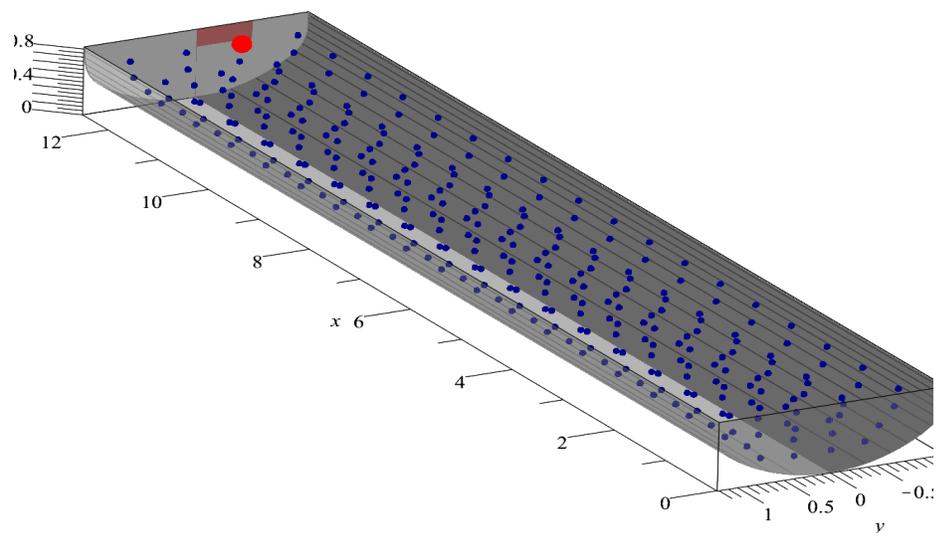
7.1.2 Forces d'excitation longitudinales

Dans cette partie, nous allons étudier les zones critiques du réservoir lorsque le liquide subit une décélération longitudinale qui simule un freinage brusque du véhicule. L'accélération longitudinale subite par le liquide est donnée par la formule (5.5). Cependant, afin de générer des forces extrêmes, l'accélération maximale atteinte sera $A_x = 5 m/s^2$. La figure 7-2 montre, en rouge, le nœud du modèle dynamique du liquide qui génère le plus de force ainsi que la zone de la paroi qui le représente. On constate que la zone critique des trois formes de citernes est située au même emplacement sur la paroi transversale avant. En effet, lorsque le véhicule freine, une grande quantité du liquide s'abat sur cette paroi. Ceci est traduit par l'augmentation des forces de pression générées par les nœuds adjacents à cette paroi. De plus, le mouvement des nœuds représentant la surface libre du liquide est plus important, en

particulier, ceux qui n'ont pas de contact avec les parois latérales. Cela explique pourquoi la zone critique se situe à ce niveau de la paroi transversale.



a) Section circulaire.



b) Section ovale modifiée.

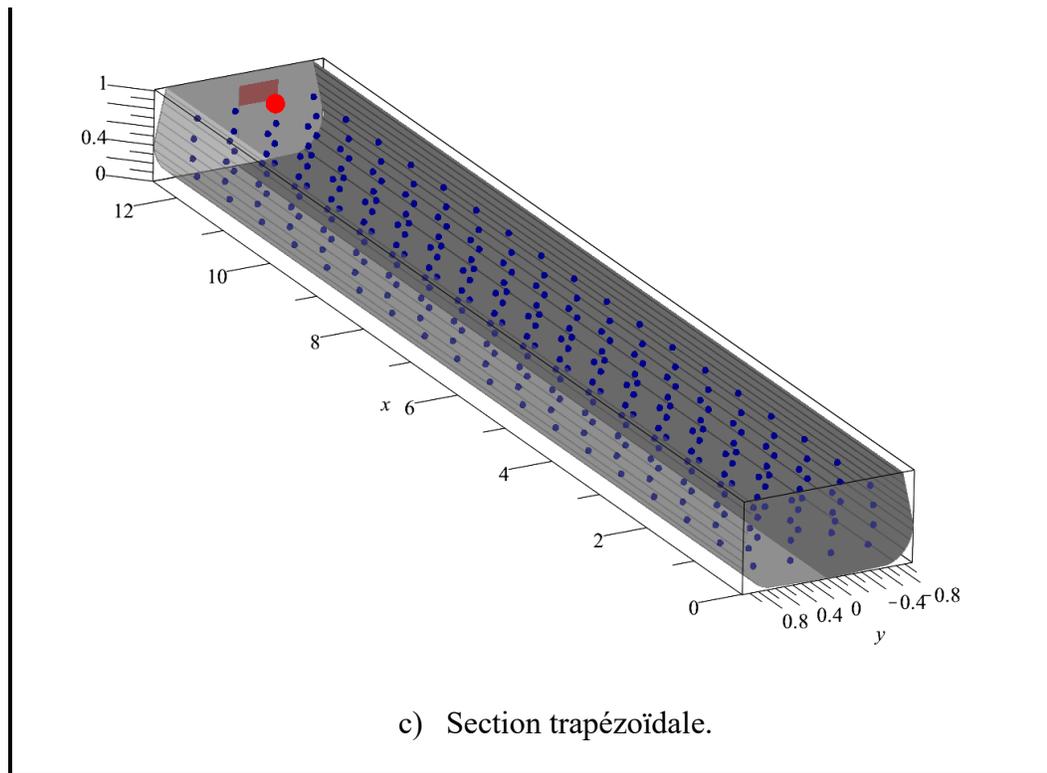


Figure 7-2 : zones critiques des citernes (excitation longitudinale).

Le tableau 7-2 donne les valeurs des forces maximales générées dans la zone critique de chaque forme, l'aire de la surface de la paroi adjacente au nœud et la pression appliquée sur cette surface. On constate que la force maximale est plus importante pour la citerne à section ovale. En effet, la largeur de la citerne est plus grande, ce qui permet au liquide d'effectuer des déplacements longitudinaux importants. Ce déplacement génère des forces plus élevées. Pour la citerne trapézoïdale, la force maximale générée dans la zone critique est réduite par rapport aux autres formes. Ceci s'explique par le fait que sa géométrie permet de limiter le déplacement du liquide ainsi que les forces générées par son mouvement. D'autre part,

la pression maximale appliquée sur la zone critique est plus élevée pour la citerne à section ovale puisqu'il n'y a pas de différence significative entre l'aire des zones critiques. Cette valeur est suivie par la section circulaire, puis la section trapézoïdale.

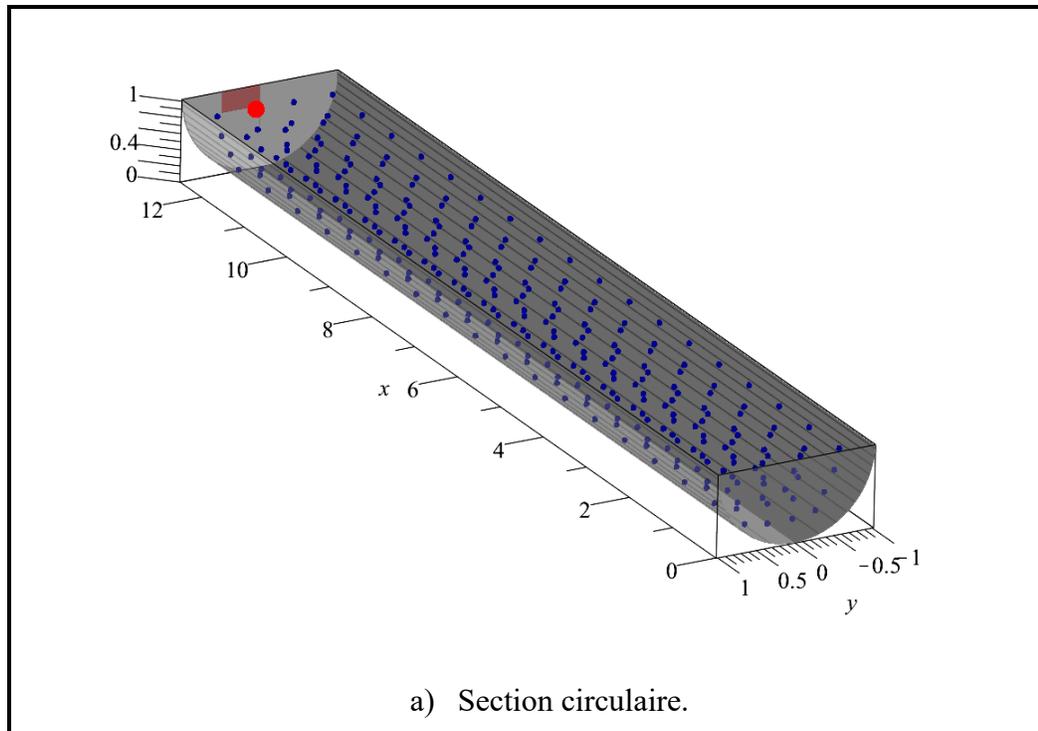
Tableau 7-2 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitation longitudinale)

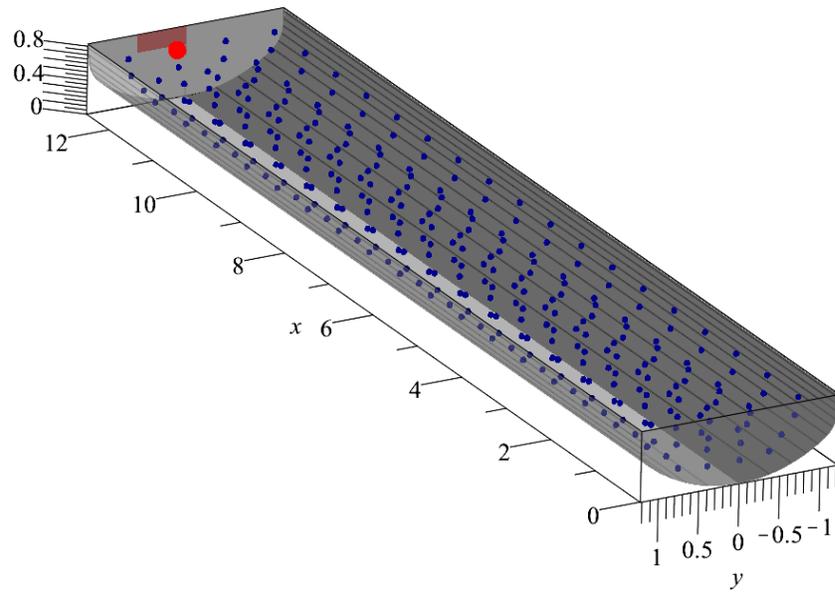
Section	Circulaire	Ovale modifiée	Trapézoïdale
Force maximale (N)	3423	3901	2417
Aire de la surface adjacente (m^2)	0.1277	0.1256	0.1010
Pression (Pa)	26796	31062	23932

7.1.3 Forces latérales et longitudinales simultanées

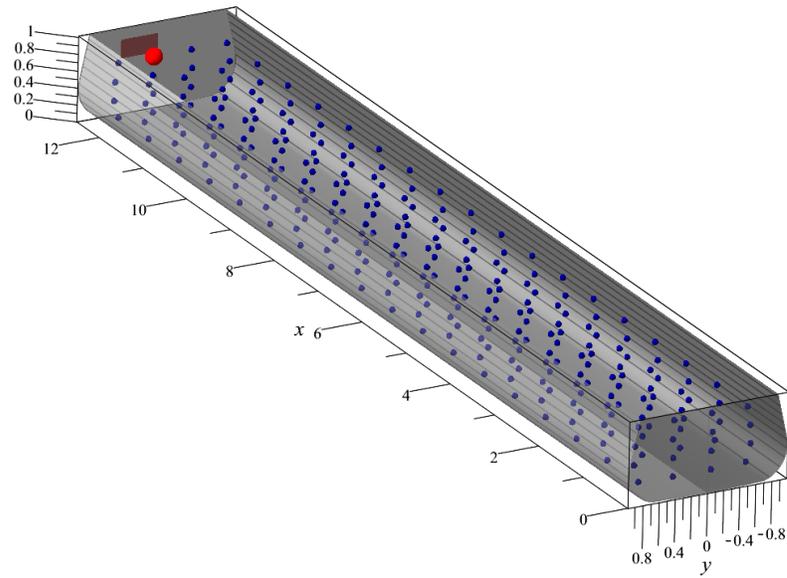
Dans la présente section, nous allons exercer les deux forces précédentes de manière simultanée. Ce qui veut dire que le liquide va subir conjointement une force latérale et une force longitudinale. On a ajouté un décalage de temps de 0.5 s entre les deux accélérations. L'accélération contiendra alors une composante suivant X , donnée par la formule (5.5), et une composante suivant Y , donnée par la formule (5.3). Dans le but de générer des forces extrêmes pour cette manœuvre, l'amplitude de la force maximale des deux composantes d'accélération est de $A = 5 m/s^2$. La figure 7-3

montre les régions critiques dans les trois formes étudiées ainsi que le nœud qui génère le plus de force. Ce dernier, ainsi que la partie de la paroi adjacente, sont représentés en rouge. On remarque que le nœud qui exerce le plus de forces est le même pour les trois formes de citernes. En effet, ce nœud est situé en avant de la citerne en raison de la décélération longitudinale qu'il subit. De plus, il n'a aucun contact avec les parois latérales. Ceci peut être expliqué par le fait que l'accélération longitudinale a plus d'incidence sur l'emplacement de la zone critique de la citerne que l'accélération latérale.





b) Section ovale modifiée.



c) Section trapézoïdale.

Figure 7-3 : zones critiques des citernes (excitations simultanées)

Le tableau 7-3 donne les valeurs des forces maximales générées dans la zone critique de chaque forme, l'aire de la surface de la paroi adjacente au nœud et la pression appliquée sur cette surface. On remarque que, dans ce cas, la force maximale générée par le nœud du modèle ainsi que la pression appliquée sur la zone critique sont plus élevées pour la citerne à section circulaire. Ces valeurs sont légèrement plus petites pour la citerne à section ovale modifiée. Cependant, pour la section trapézoïdale, ces valeurs sont plus réduites en raison de la limitation du mouvement du liquide par la géométrie de cette citerne. De plus, en comparant avec les valeurs des tableaux 7-1 et 7-2, on constate que les contraintes sont beaucoup plus importantes lorsque les deux forces d'excitations sont appliquées conjointement. On peut ainsi démontrer l'utilité et l'efficacité du nouveau modèle dynamique en trois dimensions élaboré dans cette thèse. En effet, un modèle qui représente un liquide en deux dimensions n'aurait pas pu calculer efficacement les forces maximales dans ce cas. En se basant sur un tel modèle pour déterminer l'épaisseur requise des parois de la citerne, les forces seraient sous-estimées et pourraient entraîner un défaut de conception. Une représentation en trois dimensions est plus proche de la réalité puisqu'un liquide transporté par voie routière peut subir différentes forces extérieures simultanées.

Tableau 7-3 : Pression appliquée dans les zones critiques (excitations simultanées)

Section	Circulaire	Ovale modifiée	Trapézoïdale
Force maximale (N)	5224	4981	3870
Aire de la surface adjacente (m^2)	0.1277	0.1256	0.1010
Pression (Pa)	40898	39656	38320

7.2 Calcul de l'épaisseur et du poids de la coque

Dans cette partie, nous allons utiliser les pressions calculées dans la section précédente afin de déterminer l'épaisseur minimale requise des parois de citernes. Nous allons utiliser différents matériaux dont des alliages d'aluminium et comparer les trois formes étudiées. De plus, nous allons déterminer le poids de la coque pour chaque matériau et forme de citerne. Pour cela, nous posons les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur des parois est uniforme partout.
- L'épaisseur est très petite par rapport au rayon de courbure des parois latérales.
- Le matériau de fabrication est homogène et isotrope.
- Les forces de pression sont normales aux parois du réservoir et sont distribuées uniformément sur la surface.

Afin de déterminer l'épaisseur minimale nécessaire, nous allons établir une formule adéquate en se basant sur le calcul de la contrainte longitudinale σ_L dans un réservoir cylindrique à faible pression. En effet, nous avons montré précédemment que les parois longitudinales sont celles qui subissent la pression la plus importante. La contrainte σ_L longitudinale sur les parois transversales [65] est donnée par :

$$\sigma_L = \frac{F_p}{L_p e_H} \quad (7.1)$$

où $F_p = p/A_s$ est la force de pression appliquée sur les parois, p est la pression effective exercée sur la paroi transversale, A_s est l'aire de la section, L_p est la circonférence de la paroi transversale et e_H est l'épaisseur des parois. On obtient alors la formule suivante :

$$\sigma_L = \frac{p A_s}{L_p e_H} \quad (7.2)$$

où A_s et L_p sont respectivement l'aire et le périmètre de la section latérale du réservoir. Ainsi on retrouve l'épaisseur par la formule :

$$e_H = \frac{p A_s}{L_p \sigma_L} \quad (7.3)$$

Les valeurs de p seront tirées du tableau 7-3. Nous avons établi ces valeurs dans des conditions de manœuvres extrêmes simultanées. Ceci démontre que les valeurs obtenues représentent la pression maximale réelle appliquée sur les parois de la citerne.

Ces valeurs peuvent légèrement varier en fonction des dimensions du réservoir. D'autre part, en raison de l'existence des jointures circonférentielles, il est important d'introduire un coefficient d'efficacité afin de corriger la perte de résistance due au soudage. D'ailleurs, l'assemblage des réservoirs mobiles se fait généralement par soudage. On peut retrouver des soudures longitudinales ou circonférentielles. Ce procédé occasionne des modifications de la microstructure du matériau au niveau des joints soudés. Toutefois, ces modifications peuvent aussi atteindre les zones environnantes des jointures lorsque le soudage se fait à haute température. En fonction du matériau soudé et du procédé utilisé, les modifications métallurgiques peuvent causer des fragilités ou des baisses de résistance mécanique. Le coefficient d'efficacité varie entre 0 et 1. Sa valeur varie selon la nature du matériau de base et du matériau d'apport. D'après l'ASME [60], dans le cas de présence des soudures dans l'assemblage des réservoirs cylindrique, le coefficient d'efficacité n_H doit être au moins égal à 0.7. Dans notre situation, nous allons poser $n_H = 0.5$ puisque d'autres formes sont utilisées. Ainsi, en introduisant n_H dans la formule (7.3), on obtient :

$$e_H = \frac{p A_s}{L_p \sigma_H n_H} \quad (7.4)$$

Par ailleurs, il est aussi important d'ajouter un facteur de sécurité au calcul de l'épaisseur minimale. En effet, la définition du coefficient de sécurité diffère d'une branche d'ingénierie à une autre. En mécanique, il désigne le rapport entre la résistance du matériau et les contraintes induites dans la pièce étudiée. Autrement dit, il exprime

le rapport entre la capacité de charge d'une pièce et les charges qu'elle supporte réellement. On le note par le symbole S_f avec $S_f > 1$. Le facteur de sécurité est alors :

$$S_f = \frac{\text{résistance à la traction(limite ultime)}}{\text{contrainte maximale autorisée}} = \frac{R_m}{\sigma_a} \quad (7.5)$$

Toutefois, puisque les déformations plastiques sont rarement acceptées par les organismes concernés et afin d'augmenter la durée de vie de la pièce élaborée, la définition du coefficient de sécurité est souvent modifiée de telle sorte à remplacer la limite ultime R_m du matériau utilisé par sa limite d'élasticité R_e . Son expression devient alors :

$$S_f = \frac{\text{limite d'élasticité}}{\text{contrainte maximale autorisée}} = \frac{R_e}{\sigma_a} \quad (7.6)$$

Il n'existe pas de base concrète permettant de déterminer un facteur de sécurité convenable. Les valeurs varient d'un domaine d'ingénierie à un autre, elles sont choisies en se basant sur l'expérience de la vie sociale, la sécurité humaine et les conséquences économiques en cas d'échec. La valeur du facteur de sécurité est d'autant plus élevée que les conditions d'utilisation sont mal définies ou mal maîtrisées. Dans le cadre de cette étude, nous allons choisir $S_f = 3$, ce qui implique que les parois de la citerne seront capables de supporter trois fois la contrainte maximale à laquelle elles sont prévues normalement.

Dans l'intention de déterminer l'épaisseur minimale des parois, nous devons poser $\sigma_H = \sigma_a$. Ce qui veut dire que la contrainte appliquée sur les parois transversales ne doit pas dépasser la contrainte maximale autorisée. En introduisant le facteur de sécurité, la formule permettant de calculer l'épaisseur minimale devient :

$$e_H = \frac{S_f p A_s}{L_p R_e n_H} \quad (7.7)$$

Afin de comparer les différentes possibilités de matériaux de conception, nous allons calculer les épaisseurs pour 6 matériaux différents dont quatre alliages d'aluminium de la série 5xxx. Ces alliages sont les plus adaptés à la conception des citernes mobiles. En effet, les alliages à base de magnésium sont très malléables. Ils peuvent être laminés, pliés et soudés en conservant une grande partie de leurs propriétés mécaniques. Le tableau 7-4 présente les différents matériaux sélectionnés ainsi que leurs propriétés mécaniques.

Tableau 7-4 : Matériaux sélectionnés et leurs propriétés [60].

Matériau	Acier doux (Ms)	Acier inoxydable (Ss)	Aluminium	Aluminium	Aluminium	Aluminium
			1	2	3	4
			5052-0	5154-0	5052-H32	5154-H32
			5652-0	5254-0	5652-H32	5254-H32
				5454-0		5454-H32
R_e (MPa)	335	310.2	172.4	206.8	213.7	248.2
ρ (kg/m ³)	7850	8020	2680	2660	2680	2660

Le poids P_c de la coque sera calculé en déterminant le volume de matériaux nécessaire pour fabriquer les parois du réservoir multiplié par la densité volumique de chaque matériau et il est donné par la formule suivante :

$$P_c = (2A_s + L_p \cdot L) \cdot e_H \cdot \rho \quad (7.8)$$

où L est la longueur de la citerne. Dans cette formule, nous ne calculons que le poids des parois. Aucun accessoire lié à la citerne mobile n'est inclus dans ces calculs (couvercle, échelle, déflecteur, support...). Le tableau 7-5 montre les épaisseurs obtenues pour chaque forme de citernes en utilisant les six matériaux sélectionnés. On remarque que l'épaisseur est plus petite pour les deux types d'acier puisque leur limite d'élasticité est plus grande. Cependant, le poids de la coque est plus élevé pour ces deux matériaux en raison de leur grande densité volumique. On peut remarquer que le

poids est deux fois plus élevé par rapport aux alliages d'aluminium. Pour ces derniers, on remarque que les alliages écrouis et stabilisés (*H32*) permettent des parois moins épaisses et une coque plus légère par rapport aux alliages non écrouis. En effet, le traitement *H32* permet de corriger la perte des propriétés mécaniques subie par le laminage. Pour les alliages Aluminium 4 (tableau 7-4), ce traitement permet même d'augmenter leur limite d'élasticité tout en conservant une faible densité volumique. Le gain en légèreté est de 20 % par rapport aux alliages non écrouis. Par ailleurs, en comparant les épaisseurs des trois types de citernes, on remarque que la forme circulaire nécessite des épaisseurs plus grandes en raison de la forte pression appliquée sur ses parois. En effet, les parois sont d'autant plus épaisses que la pression interne est élevée. Toutefois, la différence entre les poids des formes circulaire et ovale modifiée n'est pas significative puisque le périmètre de la section latérale de cette dernière est plus grand. Cela nécessite des parois latérales plus longues, donc, plus de matériaux. Ainsi, les quantités de matériaux sont presque équivalentes. En ce qui concerne la forme trapézoïdale, bien que le périmètre de sa section latérale soit le plus grand, le poids de la coque reste inférieur par rapport aux autres réservoirs en raison de son épaisseur. Les coques d'une citerne trapézoïdale sont 7 % plus légères qu'une citerne circulaire et 4 % plus légère qu'une citerne ovale modifiée.

Tableau 7-5 : Épaisseurs minimales des parois et poids minimaux de la coque.

Section de citerne	Matériau	Paramètres de la forme	Épaisseur minimale des parois (mm)	Poids minimal de la coque (kg)
Circulaire	Ms	$A_s = 3.26 \text{ m}^2$ $L_p = 6.40 \text{ m}$ $p = 40898 \text{ Pa}$ $S_f = 3$ $n_H = 0.5$ $L = 12.5 \text{ m}$	0.373	253.4
	Ss		0.403	279.6
	A11		0.725	168.1
	A12		0.604	139.1
	A13		0.585	135.6
	A14		0.504	115.9
Ovale modifiée	Ms	$A_s = 3.26 \text{ m}^2$ $L_p = 6.63 \text{ m}$ $p = 39656 \text{ Pa}$ $S_f = 3$ $n_H = 0.5$ $L = 12.5 \text{ m}$	0.349	245.1
	Ss		0.377	270.4
	A11		0.679	162.6
	A12		0.566	134.5
	A13		0.547	131.2
	A14		0.471	112.1
Trapézoïdale	Ms	$A_s = 3.26 \text{ m}^2$ $L_p = 6.69 \text{ m}$ $p = 38320 \text{ Pa}$ $S_f = 3$ $n_H = 0.5$ $L = 12.5 \text{ m}$	0.334	236.7
	Ss		0.361	261.1
	A11		0.650	157.0
	A12		0.542	129.9
	A13		0.524	126.7
	A14		0.451	108.2

Finalement, nous pouvons conclure que l'utilisation des alliages d'aluminium dans la conception des citernes est très avantageuse puisque ces matériaux permettent de diminuer le poids du réservoir d'environ 50 % par rapport à l'acier. De plus, si l'alliage d'aluminium est écroui et stabilisé, la réduction du poids peut être encore plus intéressante. Bien que le coût de fabrication d'une citerne en alliages d'aluminium soit plus dispendieux par rapport à l'acier, les diverses qualités de ce matériau permettraient de réduire le coût de l'entretien augmenterait sa durée vie du réservoir. D'autre part, nous avons démontré que la citerne à section trapézoïdale permet de réduire le mouvement du liquide dans le réservoir. De plus, puisque la pression exercée sur les parois est plus faible par rapport aux citernes conventionnelles, l'épaisseur des parois peut être réduite, ce qui diminuera le poids de la coque.

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

8.1 Conclusions

Les camions citernes sont des véhicules indispensables pour le transport terrestre des liquides. Parmi les éléments qui influencent leur comportement dynamique, la hauteur de son centre de masse, la forme de la citerne et le mouvement du liquide dans le réservoir. Plusieurs études expérimentales et numériques ont été effectuées pour étudier le mouvement du liquide dans des réservoirs mobiles. Cependant, ces études s'avèrent complexes, délicates et très coûteuses. D'autres études se sont alignées pour l'élaboration de modèles mécaniques équivalents relativement simples, comme les systèmes masses ressorts ou des pendules, pour simuler le ballonnement du liquide dans les citernes. Les résultats obtenus par ces modèles sont généralement comparables aux modèles numériques. Cependant, ils ne représentent le liquide que dans le cas de deux dimensions. En effet, les excitations subies par la citerne peuvent survenir de tous les

sens à cause des manœuvres complexes du véhicule. Les déplacements et les forces appliquées sur les parois seraient sous-estimées par de tels modèles.

Dans le but de représenter le liquide dans des citernes mobiles de manière plus appropriée, nous avons développé un nouveau modèle mécanique équivalent en trois dimensions qui permet de simuler le mouvement du liquide dans des citernes mobiles. Ce modèle est constitué d'un réseau de systèmes masse-ressort-amortisseur en 3D. L'élaboration de ce modèle a nécessité trois étapes importantes. Premièrement, un modèle de discrétisation du liquide a été établi pour calculer les masses et les coordonnées de chaque nœud du maillage. En effet, le liquide est discrétisé en plusieurs particules. Les nœuds du réseau sont les centres de masse de chaque particule. De plus, ce modèle a été conçu de telle sorte qu'il soit adapté à toutes les formes de sections latérales de réservoirs ainsi que tout taux de remplissage. Deuxièmement, nous avons relié les nœuds voisins par des arêtes contenant un amortisseur et un ressort parallèles qui admettent une élongation longitudinale seulement. Les nœuds en contact avec les parois de la citerne sont liés à la structure par la même sorte d'arêtes. Les raideurs des ressorts et les coefficients d'amortissement sont déterminés en se basant sur des hypothèses spécifiques. Troisièmement, nous avons formulé et solutionné numériquement le système d'équations du mouvement du nouveau modèle 3D. Nous avons d'abord déterminé les équations de chaque nœud du maillage. D'ailleurs, tout nœud possède trois équations qui décrivent son mouvement. Ensuite, nous avons regroupé toutes les équations en un

seul système d'équations différentielles. Ce dernier est résolu numériquement en utilisant le logiciel de calcul numérique et symbolique *Maple*. En effet, les trois étapes de l'élaboration du nouveau modèle ont été formulées, programmées et résolues sur ce même logiciel.

Afin de valider le nouveau modèle dynamique élaboré dans cette étude, nous avons simulé trois manœuvres du véhicule et analysé les résultats obtenus en termes de déplacements du centre de masse du liquide et de forces engendrées par son mouvement. Les résultats ont été comparés aux résultats obtenus par deux modèles développés antérieurement au sein de notre équipe de recherche. Le premier est un modèle analytique simplifié représentant le mouvement de la surface libre dans la citerne. Le deuxième est un modèle numérique complet élaboré sur un logiciel de simulation de fluide. Les trois manœuvres simulées dans cette analyse comparative sont le mouvement dans une courbe, le changement de voie simple et le freinage. Deux taux de remplissages ont été sélectionnés pour chaque manœuvre. L'analyse comparative de ces trois simulations permet de conclure que les résultats obtenus par le nouveau modèle 3D sont comparables aux deux autres modèles. En outre, les résultats du nouveau modèle sont plus proches des résultats du modèle numérique, qui nécessite plusieurs heures de calcul, par rapport au modèle analytique simplifié. Nous avons aussi reproduit la forme de la surface libre du liquide en fonction de l'emplacement des nœuds supérieurs du modèle.

Après avoir validé le nouveau modèle dynamique développé dans cette étude, nous avons utilisé ce dernier en vue d'analyser le comportement du liquide dans des citernes de formes complexes. En premier lieu, nous avons étudié l'effet de la géométrie de la citerne sur son mouvement latéral et longitudinal. Pour ce faire, nous avons sélectionné trois formes différentes de section latérale. D'abord, la section circulaire qui n'est pas large, mais que son centre de masse est haut. Ensuite, la section ovale modifiée qui a un centre de masse plus bas mais qui est plus large, ce qui signifie que le ballonnement du liquide est plus important. Finalement, la section trapézoïdale qui a été conçue pour limiter le mouvement latéral du liquide tout en ayant un centre de masse plus bas. La comparaison du mouvement du liquide s'est faite en calculant la position instantanée et l'accélération du centre de masse global du liquide représenté par le centre de masse de tous les nœuds du maillage. L'étude du décalage latéral du liquide a été simulé par la manœuvre d'un mouvement dans une courbe pour deux taux de remplissages. Les résultats obtenus ont permis de confirmer le fait que le ballonnement latéral du liquide est plus important lorsque la citerne est plus large et que la citerne à section trapézoïdale le réduit considérablement en raison des parois latérales inclinées. De plus, à l'instar des citernes conventionnelles, les forces engendrées par ce mouvement n'augmentent pas avec le taux de remplissage dans la citerne trapézoïdale. Par ailleurs, nous avons analysé le décalage longitudinal en simulant un freinage du véhicule. Les résultats obtenus nous ont révélé que la citerne à section trapézoïdale permet aussi de restreindre le mouvement longitudinal du

liquide. Cependant, lorsque le taux de remplissage n'est pas élevé, les forces générées par ce mouvement sont légèrement plus élevées par rapport aux citernes conventionnelles. Tandis que quand le taux de remplissage est plus grand, les forces augmentent considérablement dans la citerne à section ovale modifiée.

La deuxième application du nouveau modèle élaboré dans cette recherche s'est intéressée à l'analyse de l'influence de la viscosité dynamique du liquide sur son comportement dans la citerne. Nous avons choisi deux liquides possédant la même densité volumique et des viscosités dynamiques très différentes. Pour ce faire, nous avons simulé une manœuvre de freinage pour analyser le mouvement longitudinal du liquide ainsi que les forces engendrées dans les trois formes de citernes discutées précédemment avec un taux de remplissage fixé. Les résultats ont montré que la viscosité dynamique réduit les déplacements et les oscillations effectués par le liquide. Cette réduction est mineure dans le cas de la citerne à section trapézoïdale puisque le liquide est déjà restreint en raison de cette géométrie. En outre, un liquide avec une viscosité dynamique élevée produit moins de forces lorsqu'il est en mouvement.

Par ailleurs, nous avons utilisé le nouveau modèle du liquide pour la conception et l'optimisation des citernes en termes de poids et de résistance. D'abord, nous avons repéré les zones critiques dans les trois formes de réservoirs où les forces de pression sont les plus élevées en utilisant le nouveau modèle du liquide. Pour cela, nous avons utilisé trois manœuvres extrêmes : un mouvement dans une courbe, un freinage et ces

deux mouvements combinés. Ensuite, nous avons évalué les forces de pressions maximales réelles appliquées dans ces zones. Ces valeurs ont servi comme pressions effectives pour déterminer l'épaisseur minimale des parois et le poids minimal de la coque en utilisant différents matériaux. Les résultats ont démontré que l'utilisation des alliages d'aluminium dans la conception des citernes permet une diminution de plus de 50 % par rapport à l'acier. De plus, en utilisant des alliages écrouis et traités, le poids est encore davantage réduit. Par ailleurs, nous avons montré que l'emploi de la forme trapézoïdale permet de limiter le déplacement du liquide dans le réservoir. De ce fait, la pression générée par ce mouvement est moins importante et l'épaisseur des parois nécessaire pour contenir cette pression est plus petite. L'utilisation de cette géométrie réduirait le poids de la coque d'environ 5 % par rapport aux citernes conventionnelles.

Avec ces résultats, nous avons démontré que le nouveau modèle dynamique en 3D conçu dans cette recherche permet d'analyser le mouvement du liquide subissant de nombreux types d'excitations externes. Les résultats obtenus se comparent très bien avec la littérature et se calculent en quelques minutes seulement, sans employer de logiciel de simulation numérique. Sa polyvalence lui permet d'étudier le mouvement du liquide dans multiples formes de citernes avec des taux de remplissage différents. Il permet aussi d'analyser des liquides avec des propriétés différentes et de simuler la forme de la surface libre du liquide. De plus, il permet aussi d'évaluer les forces de

pression appliquées sur les parois dans les différentes régions de la citerne. Ceci ouvre la porte à plusieurs autres applications futures.

8.2 Recommandations

Les diverses qualités du nouveau modèle 3D élaboré dans ce projet nous ont permis d'obtenir les résultats qui répondent aux objectifs fixés. De plus, les champs d'application de ce modèle peuvent être élargis pour étudier d'autres aspects importants.

D'abord, puisque que la validation du nouveau modèle a été effectuée en comparant les résultats avec des modèles numériques, il serait envisageable de revalider le nouveau modèle en effectuant une étude expérimentale appropriée et en comparant les résultats obtenus.

Étant donné la rapidité et la simplicité d'implémentation de ce modèle, il pourrait être implanté dans un modèle de véhicule complet afin d'étudier et de comparer la stabilité du camion par rapport aux diverses formes de citernes avec des liquides et des taux de remplissage différents.

Ce modèle peut aussi être utilisé pour étudier l'effet des différents types de chicanes sur le mouvement du liquide. Ceci nécessitera de légères modifications dans le système d'équations de mouvement.

Le modèle du liquide peut être adapté à des formes encore plus complexes de réservoirs, tels que des réservoirs coniques ou sphériques. Ainsi, il pourrait être utilisé dans des applications en génie civil.

Le nouveau modèle ne prend pas en considération la conservation du volume des liquides incompressibles transportés généralement par les camions citernes. Il serait intéressant d'ajouter une contrainte supplémentaire au modèle afin de respecter la conservation de volume.

En dernier lieu, il serait aussi avantageux de programmer tout le modèle avec un programme gratuit tel que Python qui contient tous les outils nécessaires pour l'élaboration symbolique et la résolution du système d'équations du modèle ainsi que des outils graphiques intéressants. Nous réduirions encore plus le coût des simulations.

RÉFÉRENCES :

-
- [1] <http://ici.radio-canada.ca/nouvelle/623827/transport-matieres-dangereuses-camion>
- [2] <http://www5.statcan.gc.ca/cansim/>
- [3] <http://ile-de-groix.info/blog/spip.php?article10808>
- [4] <https://www.flickr.com/photos/38289621@N03/11248858194/lightbox/>
- [5] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:B_double_yass_truck_stop.JPG
- [6] <https://www.pinterest.com/chrisbryers/bp-fuel-tanker/>
- [7] L. Jarossi, D. Hershberger and J. Woodroffe (2012), «*Trucks involved in fatal accidents factbook 2010*», Center for National Truck and Bus Statistics: Michigan.
- [8] S. A. A. Q. Québec (2010), «*Bilan 2009 des taxis, des autobus, des camions lourds et des tracteurs routiers* », Direction des études et des stratégies en sécurité routière: Québec.
- [9] N. H. T. S. Administration and N. C. S. A. (2006), «*Traffic Safety Facts 2006*», U.S. Department of Transportation, Washington, DC 20590.

-
- [10] <http://www.ultimatetowingandrecovery.com/MilkTankerRollover.html>
- [11] <http://csinewsnow.com/?p=73333>
- [12] J. R. Billing and J. D. Patten (2006), «*An assessment of tank truck roll stability*». 9th International Symposium on Heavy Vehicle Weights and Dimensions, Penn State, State College, Pennsylvania.
- [13] M. Toumi (2008), «*Étude et analyse de la stabilité des camions citernes*», Thèse de doctorat, Université du Québec à Chicoutimi (CANADA): Chicoutimi. p. 178.
- [14] M. Toumi, M. Bouazara and M. J. Richard (2007), «*Impact of liquid sloshing on the behaviour of vehicles carrying liquid cargo*». European Journal of Mechanical engineering/Solids. 28(5): p. 1026-1034.
- [15] J. A. Romero, A. Lozano and W. Ortiz (2007), «*Modeling of liquid cargo-vehicle interaction during turning manoeuvres*», in 12th IFToMM World Congress. Besançon France.
- [16] M. Toumi, M Bouazara and M. J. Richard (2013), «*Development of analytical model for modular tank vehicle carrying liquid cargo*». World Journal of Mechanics. 3 122-138.

-
- [17] M. Bouazara, M. Toumi and M. J. Richard (2014), «*Study of the directional stability of fully articulated tank-vehicle under random excitation*». International Journal of Vehicle Systems modelling and Testing. 9 (2) 193-205.
- [18] B. Nicolsen, L. Wang and A. Shabana (2017), «*Nonlinear finite element analysis of liquid sloshing in a complex vehicle motion scenarios*», Journal of Sound and Vibration. 405 (2017) 208-223.
- [19] B. F. Chen and R. Nokes (2005), «*Time-independent finite difference analysis of fully non-linear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank*». Journal of Computational Physics,. 209(1): p. 47-81.
- [20] S. Chantasiriwan (2009), «*Modal analysis of free vibration of liquid in rigid container by the method of fundamental solutions*». Engineering Analysis with Boundary Elements. 33(5): p. 726-730.
- [21] D. Liu and P. Lin (2008), «*A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks*». Journal of Computational Physics. 227 (2008) 2921-3939.
- [22] Y.G. Chen, K. Djidjeli and W.G. Price (2009), «*Numerical simulation of liquid sloshing phenomena in partially filled containers*». Computers and Fluids. 38 (2009) 830-842.

-
- [23] C. Zhang, Y. Li and Q. Meng (2015), «*Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank*». *Computers & Fluids*. 116 (2015) 88-104.
- [24] P. Pal and S. K. Bhattacharyya (2010), «*Sloshing in partially filled liquid containers-Numerical and experimental study for 2-D problems*». *Journal of Sound and Vibration*, 329(21): p. 4466-4485.
- [25] P. K. Panigrahy, U. K. Saha and D. Maity (2009), «*Experimental studies on sloshing behavior due to horizontal movement of liquids in baffled tanks*». *Ocean Engineering*. 36(3-4): p. 213-222.
- [26] T. M. Wasfy, J. O'Kins and S. Smith (2008), «*Experimental Validation of a Coupled Fluid-Multibody Dynamics Model for Tanker Trucks*». *SAE International*. 2008-01-0777.
- [27] P. Pal, S.K. Bhattacharyya (2010), «*Sloshing in partially filled liquid containers – Numerical and experimental study for 2-D problems*». *Journal of Sound and Vibration*. 329 (2010) 4466-4485
- [28] V. S. Sanapala, S. D. Sajish, K. Velusamy and B.S.V. Patnaik (2019), «*An experimental investigation on the dynamics of liquid sloshing in a rectangular tank and its interaction with an internal vertical pole*». *Journal of Sound and Vibration*. 449 (2019) 43-63.

-
- [29] X. Kang (2001), «*Optimal tank design and directional dynamic analysis of liquid cargo vehicles under steering and braking*». Thèse de doctorat, Concordia University (Canada): Montreal. p. 323.
- [30] X. Kang, S. Rakheja and I. Stiharu (2001), «*Effects of tank shape on the roll dynamic response of a partly filled tank vehicle*». *Vehicle System Dynamics*. 35(2): p. 75-102.
- [31] M. M. Ziarani (2003), «*Optimization of liquid tank geometry of partially filled tank vehicles*». Mémoire de maîtrise, Université Laval: Québec. p. 78.
- [32] S. M. Hasheminejad and M. Aghabeigi (2009), «*Liquid sloshing in half-full horizontal elliptical tanks*». *Journal of Sound and Vibration*. 324(1-2): p. 332-349.
- [33] S. M. Hasheminejad and M. M. Mohammadi (2011), «*Effect of anti-slosh baffles on free liquid oscillations in partially filled horizontal circular tanks*». *Ocean Engineering*. 38(1): p. 49-62.
- [34] M. Toumi, M. Bouazar, M.J. Richard (2008), «*Analytical and numerical analysis of the liquid longitudinal sloshing impact on a partially filled tank-vehicle with and without baffles*». *International Journal of Vehicle Systemes Modelling and Testing*. 3 (3), 229-249.

-
- [35] J.R. Cho and H.W. Lee (2004), «*Numerical study on liquid sloshing in baffled tank by nonlinear finite element method*». Computer methods in applied mechanics engineering.
- [36] C. Wu, O.M. Faltinsen and B. Chen (2012), «*Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time independent finite difference and fictitious cell method*». Computers & Fluids. 63 (2012) 9-26.
- [37] J.D. Wang, S.H. Lo, D.Zhou (2012), «*Liquid sloshing in rigid cylindrical container with multiple rigid annular baffles: Free vibration*». Journal of Fluids and Structures. 34 (2012) 138-156.
- [38] H. N. Abramson (1966), «*The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*». NASA SP-106.
- [39] M. Ebrahimian, M.A. Noorian and H. Haddadpour (2014), «*Equivalent mechanical model of liquid sloshing in multi-baffles containers*». Engineering Analysis with Boundary Elements. 47 (2014) 82-95.
- [40] M. Farid, O. Gendelman (2017), «*Internal resonances and dynamic responses in equivalent mechanical model of partially Liquid-filled Vessel*». X International Conference on Structural Dynamics, EURODDN 2017. Procedia Engineering 199 (2017) 3440-3443.

-
- [41] R. Ranganathan and al (1993), «*Analysis of fluid in partially filled tanks and their impact on the directional response of tank vehicles*». SAE Technical Paper 932942, p. 39-45.
- [42] S. Aliabadi, A. Johnson and Jalal Abedi (2003), «*Comparison of finite element and pendulum models for simulation of sloshing*». Computers and Fluids. 32 (2003) 535-545.
- [43] B. Godderidge, S.R. Turnock and M. Tan (2012), «*A rapid method for simulation of sloshing using mathematical model based on the pendulum equation*». Computers & Fluids. 57 (2012) 163-171.
- [44] Q. Li, X. Ma and T.Wang (2011), «*Equivalent mechanical model for liquid sloshing during draining*». Acta Astronautica. 68 (2011) 91-100.
- [45] M. Nan, L. Junfeng, and W. Tianshu (2017), «*Equivalent mechanical model of large-amplitude liquid sloshing under time-dependent lateral excitation in low-gravity conditions*». Journal of Sound and Vibration. 386 (2017) 421-432
- [46] M. Farid and O. V. Gendelman (2017), «*Response regimes in equivalent mechanical model of strongly nonlinear liquid sloshing*». International Journal of Non-Linear Mechanics. 94 (2017) 146-159.

-
- [47] V. Sharma, C.O. Arun and I.R. P. Krishna (2019) «*Development and validation of a simple two degree of freedom model for predicting maximum fundamental sloshing mode wave height in a cylindrical tank*». Journal of Sound and Vibration. 461 (2019) 114906.
- [48] F. Liu, B. Yue, Y. Tang and M. Deng (2019) «*3DOF-rigid pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks*». Journal of Sound and Vibration. 460 (2019) 114907.
- [49] Y. Sun, D. Zhou and J. Wang (2019) «*An equivalent mechanical model for fluid sloshing in a rigid cylindrical tank equipped with a rigid annular baffle*». Applied Mathematical Modelling. 72 (2019) 569-587.
- [50] A. A. El Damatty, A.M.I. Sweedan (2006), «*Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks* », Thin-Walled Structures 44(2006) 429-440.
- [51] O. Noui (2012), «*Étude et modélisation des citernes en aluminium pour véhicule routier* », Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Chicoutimi.
- [52] X. Provot (1995), «*Deformation constraints in a Mass-Spring Model to Describe Rigid Cloth Behavior* », Institut national de Recherche en Informatique et Automatique.

-
- [53] M. Balci, H. Foroosh (2006), « *Real-time 3D fire simulation using a spring-mass model* ». Multi-Media modelling conference proceedings, 2006 12th International, Beijing
- [54] J. Mesit, R. Guha, S. Chaudhry (2007), « *3D soft Body Simulation Using Mass-Spring System with Internal Pressure Force and Simplified Implicit Integration* », Journal Of Computers, Vol. 2, No. 8.
- [55] L. P. Nedel, D. Thalmann (1998) « *Real Time Muscle Deformations using spring mass systems* », Computer graphics International, page 156-165.
- [56] B. Gilmont (2011), « *L'aluminium dans les véhicules industriels* ». European aluminium association.
- [57] D. Beaulieu (2003), « *Calcul des charpentes en aluminium* ». PRAL (Press aluminium).
- [58] C. Boucher (2000), « *L'aluminium et ses alliages : Soudabilité métallurgie du soudage* ». Institut de soudure, publications du soudage et de ses applications.
- [59] ASME International (2010), « *Rules for construction and continued service of Transport Tanks* ». ASME Boiler And Pressure Vessel Code, An international Code, Section XII.

-
- [60] ASME International (2010), « *Properties, Metric* ». ASME Boiler And Pressure Vessel Code, An international Code, Section II, Part D.
- [61] F.T. Dodge (2000), « *The new dynamic behaviour of liquids in moving containers* ». Southwest Research Institute (SRI), San Antonio, Texas (États-unis).
- [62] Maple (2016) Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario.
- [63] E. Fehlberg (1969). « *Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems* ». NASA Technical Report 315
- [64] A. Fortin (2015), « *Analyse numérique pour ingénieurs* », Presses internationales Polytechnique (cinquième édition)
- [65] S. Timoshenko (1968), « *Théorie des plaques et coques* », Dunod.