ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU DOCTORAT EN
GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE
Ph.D.

PAR
ALIN DORIAN DINU

NOUVELLE MÉTHODE POUR LES ÉTUDES DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES EN BOUCLE OUVERTE SUR LES AVIONS F/A – 18, CL – 604 ET ATM ET EN BOUCLE FERMÉE SUR L'ATM

MONTRÉAL, LE 10 NOVEMBRE 2005

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

Mme Ruxandra Botez, directrice de thèse
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Christian Masson, président du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

M. Stéphane Hallé, membre du jury
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

Mme Karima Ben Souda, membre du jury
Directrice R&D, TowerTex Inc.

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 26 JANVIER 2006

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

NOUVELLE MÉTHODE POUR LES ÉTUDES DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES EN BOUCLE OUVERTE SUR LES AVIONS F/A – 18, CL – 604 ET ATM ET EN BOUCLE FERMÉE SUR L'ATM

Alin Dorian Dinu

SOMMAIRE

L'aéroservoélasticité est le résultat de la fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion. L'aéroélasticité, d'une part, a trait à la nature flexible d'un avion et étudie les phénomènes de couplage entre les forces structurelles et les forces aérodynamiques. La commande du vol, d'autre part, considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction exercée par les lois de commande, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion. Mener une analyse aéroservoélastique sur un avion est un problème complexe, très important dans la certification des avions, étant donné que les instabilités issues des interactions adverses entre la structure, les forces aérodynamiques et les lois de commande peuvent survenir en tout point de l'enveloppe de vol.

Dans cette thèse, nous avons conçu, implémenté et validé sur trois modèles différents d'avion une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires, qui représente une contribution originale permettant d'analyser les interactions aéroservoélastiques, à l'aide des polynômes orthogonaux de Chebyshev. Nous étudions donc un aspect important de l'aéroservoélasticité, une nouvelle méthode de conversion des forces aérodynamiques du domaine de la fréquence (en aéroélasticité) dans le domaine temporel (en commande) dans le but de simuler le comportement de l'avion flexible en temps réel.

La première série de résultats obtenus par notre nouvelle méthode, ici développée, concernant les erreurs d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires, est comparée avec les résultats d'autres méthodes classiques comme la méthode de Padé et la méthode de moindres carrés LS (Least Squares). La deuxième série de résultats constituée par les vitesses et fréquences de battement obtenues avec cette nouvelle méthode est comparée avec les vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes classiques de Padé et LS.

Ces deux séries de résultats obtenues par notre méthode et par les deux méthodes classiques Padé et LS sont validés sur trois types différents d'avions : l'ATM (Aircraft Test Model) et le F/A – 18 en collaboration avec les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center, et le Challenger CL – 604 de Bombardier Aéronautique.

Suite à la comparaison des résultats obtenus par la méthode Chebyshev avec les résultats obtenus par les méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques Padé et LS, sur les mêmes modèles d'avion, nous avons constaté que notre nouvelle méthode est plus rapide et précise que les méthodes classiques. Du point de vue informatique, l'implémentation de notre nouvelle méthode est très facile, indépendamment du modèle d'avion utilisé, à l'aide des fonctions décrivant les polynômes de Chebyshev du premier type prédéfinies en Matlab.

NEW METHOD FOR THE AEROSERVOELASTIC INTERACTION STUDIES IN OPEN LOOP FOR THE AIRCRAFTS F/A – 18, CL – 604 AND ATM AND IN CLOSED LOOP FOR THE ATM

Alin Dorian Dinu

ABSTRACT

Aeroservoelasticity is the result of the fusion between two large theories interested in different aspects of aircrafts' dynamics. Aeroelasticity, on one hand, treats the flexible nature of an aircraft and studies the couplings phenomena between structural forces and aerodynamic forces. Flight controls, on the other hand, considers the aircraft as a rigid solid in a retroaction configuration exerted by the control laws, and studies the influence of the control system over aircraft's dynamics. Conducting an aeroservoelastic analysis on an aircraft is a complex issue, very important for the aircrafts' certification, given the fact that the instabilities arisen from adverse interactions between the structure, the aerodynamic forces and the control laws could appear in each and every point of the flight's envelope.

In this thesis, we have conceived, implemented and validated on three different aircraft models a new approximation method for unsteady aerodynamic forces, which is an original contribution that allows the analysis of aeroservoelastic interactions by use of the Chebyshev orthogonal polynomials. In brief, we are studying an important aspect of aeroservoelasticity, a new conversion method for aerodynamic forces from the frequency domain (aeroelasticity) to the time domain (control) in order to simulate the flexible aircraft's behaviour in real time.

The first set of results obtained by our new method, here developed, concerning the approximation errors of the unsteady aerodynamic forces, is compared with the results of other classical methods such as Padé method and LS (Least Squares) method. The second set of results, containing the flutter speeds and frequencies obtained by use of this new method, is compared with the flutter speeds and frequencies obtained by use of classical methods Padé and LS.

These two sets of results obtained by our method and by the two classical methods Padé and LS are validated on three different types of aircraft: the ATM (Aircraft Test Model) and the F/A – 18 in collaboration with NASA Dryden Flight Research Center laboratories, and the Challenger CL – 604 from Bombardier Aéronautique.

Once compared the results obtained by use of Chebyshev method with the results obtained by use of the classical methods of aerodynamic force approximation Padé and

LS, on the same aircraft models, we have concluded that our new method proved to be faster and more accurate than the classical methods. From the programming point of view, implementing our new method was very easy, no matter the aircraft's model, by making use of the Matlab's predefined functions that describe the Chebyshev polynomials of the first kind.

REMERCIEMENTS

Je souhaite à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu et encouragé pour faire de ce projet un succès.

Je tiens à remercier ma directrice de recherche, Mme Ruxandra Botez, professeure au département de génie de la production automatisée de l'École de technologie supérieure, pour son inégalable support tout au long de cette thèse, pour m'avoir toujours très bien guidé, encouragé et motivé. Je remercie également les compagnies Bombardier Aéronautique et NASA DFRC, ainsi que le CRSNG et l'ÉTS pour leur support financier.

Je remercie aussi les ingénieurs des laboratoires NASA DFRC (Dryden Flight Research Center), spécialement M. Marty Brenner, et les ingénieurs de Bombardier Aéronautique pour leurs inestimables conseils et pour partager leur expérience avec nous.

Je remercie beaucoup mon meilleur ami, Iulian, pour être toujours là, même dans les moments les plus difficiles, pour sa patience et pour le courage qu'il m'a insufflé.

Je dédie ce travail à ma famille, de Montréal et Craiova, qui m'a énormément soutenu.

TABLE DES MATIÈRES

Page

SOMMAIRE i

ABSTRACT iii

REMERCIEMENTS v

TABLE DES MATIÈRES vi

LISTE DES TABLEAUX ix

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES GRAPHIQUES xii

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES xv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1

1.1 Introduction et justification du projet 1
1.2 Recherche bibliographique 3
1.2.1 Recherche bibliographique sur les logiciels d'analyse aéroservoélastique 3
1.2.2 Recherche bibliographique sur les méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace 6

CHAPITRE 2 MÉTHODES CLASSIQUES POUR L'ANALYSE AÉROSERVOÉLASTIQUE 10

2.1 Les équations du mouvement de l'avion 10
2.2 La méthode d'approximation par polynômes orthogonaux de Padé 13
2.3 La méthode d'approximation Least Squares (LS) 17

CHAPITRE 3 LA MÉTHODE D'APPROXIMATION PAR LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE CHEBYSHEV 23

3.1 Les polynômes de Chebyshev du Premier Type 23
3.2 Le développement des fonctions sous la forme de Chebyshev 24
3.3 L'orthogonalité des polynômes de Chebyshev 24
3.4 La formule de récurrence et la solution des polynômes de Chebyshev 27
3.5 La méthode d'approximation des forces aérodynamiques par des polynômes de Chebyshev 29

CHAPITRE 4 MÉTHODES D'ANALYSE DU BATTEMENT 31

4.1 La méthode *pk* 31
4.1.1 La solution linéaire 31
4.1.2 La solution non linéaire 33
4.2. La méthode *p* 35
4.2.1 Système aéroélastique en boucle ouverte et l'équation normalisée 35
4.2.2 Système aéroservoélastique en boucle fermée 38
4.2.2.1 Les modes de commande 39
4.2.2.2 Les capteurs 41
4.2.2.3 La chaîne de contrôle 42

CHAPITRE 5 ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE L'ATM (AIRCRAFT TEST MODEL) EN BOUCLE OUVERTE ET EN BOUCLE FERMÉE 47

5.1 Présentation générale de l'ATM (Aircraft Test Model) 47
5.1.1 Détails du modèle structurel de l'ATM 48
5.1.2 L'analyse des vibrations de l'ATM 50
5.1.3 Les matrices modales 53
5.1.4 Le modèle aérodynamique de l'ATM 54
5.1.5 Les lois de contrôle de l'ATM 55
5.2 Résultats obtenus pour l'ATM 57
5.2.1 Résultats obtenus pour l'ATM en boucle ouverte 57
5.2.2 Résultats obtenus pour l'analyse aéroservoélastique de l'ATM en boucle fermée 70

CHAPITRE 6 ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE F/A - 18 EN BOUCLE OUVERTE 76

6.1 Présentation générale de l'avion F/A - 18 76
6.2 Le modèle analytique du F/A - 18 81
6.3 Résultats obtenus pour le F/A - 18 85

CHAPITRE 7 ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE CL - 604 EN BOUCLE OUVERTE 102

7.1 Présentation générale du Challenger 604 (CL - 604) 102
7.2 Le modèle analytique de l'avion CL - 604 104
7.3 Résultats obtenus pour l'avion CL - 604 108

CHAPITRE 8 CONCLUSIONS 123

8.1 Conclusions générales 123
8.2 Recommandations 125

ANNEXES

1: Les polynômes de Chebyshev pour les calculs des forces aérodynamiques non stationnaires en aéroservoélasticité 127

2: Approximations des forces aérodynamiques par la méthode Chebyshev pour les études aéroservoélastiques en boucle fermée 158

3: Méthode basée sur les théories des polynômes de Chebyshev pour les études des interactions aéroservoélastiques sur l'avion F/A - 18 181

4: Études des interactions aéroservoélastiques sur un avion corporatif 204

5: La procédure de réduction du modèle Luus-Jakola appliquée aux systèmes aéroservoélastiques 225

6: Linéarisation des angles d'Euler 235

7: Graphiques supplémentaires pour les erreurs d'approximation obtenues par les méthodes Chebyshev et Padé pour le modèle de l'ATM 238

BIBLIOGRAPHIE 241

LISTE DES TABLEAUX

		Page
Tableau I	L'analyse des vibrations libres pour le calcul des modes et fréquences naturelles	54
Tableau II	Erreurs totales normalisées de Chebyshev et de Padé pour 3 ordres d'approximation et 4 nombres de *Mach* pour l'ATM en boucle ouverte	68
Tableau III	Vitesses et fréquences de battement pour l'ATM en boucle ouverte	70
Tableau IV	Erreurs totales normalisées de Chebyshev et de Padé pour 3 ordres d'approximation pour l'ATM en boucle fermée	71
Tableau V	Vitesses et fréquences de battement pour l'ATM en boucle fermée	72
Tableau VI	Les fréquences naturelles du modèle structurel pour l'avion F/A – 18	82
Tableau VII	Erreurs totales normalisées pour le F/A – 18	90
Tableau VIII	Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Chebyshev par rapport aux vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Standard	99
Tableau IX	Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* LS par rapport aux vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Standard	101
Tableau X	Les huit modes et fréquences réduites de battement pour l'avion CL – 604	105
Tableau XI	Fréquences réduites utilisées dans l'élaboration de **Q** pour l'avion CL – 604	108
Tableau XII	Erreurs totales normalisées des approximations des forces pour l'avion CL – 604	113

Tableau XIII Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences pour les modes symétriques de l'avion CL – 604 119

Tableau XIV Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences pour les modes anti-symétriques de l'avion CL – 604 120

LISTE DES FIGURES

Page

Figure 1 Diagramme de la méthode LS 22

Figure 2 L'algorithme de la méthode *pk* 34

Figure 3 L'ATM modélisé par les éléments finis 49

Figure 4 Les huit modes élastiques du modèle de l'ATM 51

Figure 5 Les 3 modes rigides et les 2 modes de commande du modèle de l'ATM .. 52

Figure 6 La modélisation aérodynamique de l'ATM par des panneaux 55

Figure 7 Les boucles de contrôle du modèle de l'ATM 56

Figure 8 Le système aéroservoélastique en boucle fermée 57

Figure 9 L'avion F/A – 18 vu d'en haut 77

Figure 10 L'avion F/A – 18 vu d'en bas 78

Figure 11 L'avion F/A – 18 à l'atterrissage 79

Figure 12 Design de l'avion F/A – 18 80

Figure 13 L'enveloppe de vol pour un avion 81

Figure 14 Essais au sol sur l'avion F/A – 18 84

Figure 15 L'avion CL – 604 en vue antérieure 102

Figure 16 L'avion CL – 604 en vue latérale 103

Figure 17 Représentation graphique de la matrice **Q** pour l'avion CL – 604 106

Figure 18 Représentation graphique de la matrice **Q** en 3-D pour l'avion CL – 604 107

LISTE DES GRAPHIQUES

Page

Graphique 1 Les cinq premiers polynômes de Chebyshev du premier type sur l'intervalle [-1, 1] 23

Graphique 2 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé ordre d'approximation [15, 13] et *Mach* = 0,5 59

Graphique 3 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé ordre d'approximation [16, 14] et *Mach* = 0,5 60

Graphique 4 $\mathbf{Q_R}(1,7)$ versus les fréquences réduites k 62

Graphique 5 Erreurs normalisées d'approximation pour $\mathbf{Q_R}(1,7)$ versus les fréquences réduites k 63

Graphique 6 $\mathbf{Q_I}(1,7)$ versus les fréquences réduites k 64

Graphique 7 Erreurs normalisées d'approximation pour $\mathbf{Q_I}(1,7)$ versus les fréquences réduites k 65

Graphique 8 $\mathbf{Q_I}(1,7)$ versus $\mathbf{Q_R}(1,7)$ 66

Graphique 9 Erreurs normalisées d'approximation pour $\mathbf{Q}(1,7)$ versus les fréquences réduites k 67

Graphique 10 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* M = 1,4 86

Graphique 11 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* M = 1,4 87

Graphique 12 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* M = 1,6 88

Graphique 13 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* M = 1,6 89

Graphique 14 Approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev 91

Graphique 15 Erreur d'approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev 92

Graphique 16 Approximation de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev 93

Graphique 17 Erreur d'approximation de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev 94

Graphique 18 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus l'approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ par les méthodes Padé et Chebyshev 95

Graphique 19 Erreur d'approximation de $\mathbf{Q}$ (1,1) versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev 96

Graphique 20 Apparition du battement pour les modes symétriques de F/A – 18 et pour le nombre de *Mach* $M = 1{,}6$ 98

Graphique 21 Apparition du battement pour les modes anti-symétriques de F/A – 18 et pour le nombre de Mach $M = 1{,}6$ 98

Graphique 22 Le diagramme des erreurs d'approximation pour les vitesses et les fréquences de battement par la méthode *pk* Chebyshev calculées par rapport aux vitesses et fréquences de battements obtenues par la méthode *pk* Standard 100

Graphique 23 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [6, 4] 110

Graphique 24 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [7, 5] 111

Graphique 25 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [6, 4] 112

Graphique 26 L'approximation de $\mathbf{Q_R}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_R}(9,9)$ calculé par la méthode DLM vs *k* pour l'avion CL – 604 115

Graphique 27 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_I}(9,9)$ calculé par la méthode DLM vs *k* pour l'avion CL – 604 116

Graphique 28 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(9,9)$ vs $\mathbf{Q_R}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_I}(9,9)$ vs $\mathbf{Q_R}(9,9)$ calculés par la méthode DLM pour l'avion CL – 604 117

Graphique 29 Diagramme des erreurs d'approximation des valeurs de battement calculés par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes symétriques de CL – 604 120

Graphique 30 Diagramme des erreurs d'approximation des valeurs de battement calculés par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes anti-symétriques de CL – 604 121

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$\mathbf{A}_e$	Matrice des coefficients aérodynamiques pour un nombre de Mach et une fréquence réduite donnés
$\mathbf{A}_i$	Coefficients matriciels calculés par l'algorithme des moindres carrés LS
ATM	Aircraft Test Model
b	Demi- longueur de corde de l'aile
$\mathbf{C}$	Matrice modale d'amortissement
$\mathbf{C}_e$	Matrice modale d'amortissement structurel
CPM	Méthode des pressions constantes (Constant Pressure Method)
c	Longueur de corde de l'aile
DFRC	Dryden Flight Research Center
DLM	Méthode des doublets (Doublet Lattice Method)
d_i	Partie réelle d'une valeur propre, représente l'amortissement
G_c	Fonction de transfert de la chaîne de contrôle
$\mathbf{I}$	Matrice identité
j	Racine carrée de –1
J	Erreur d'approximation (linéaire, quadratique ou moyenne normalisée)
$J_{\mathbf{Q}}$	Erreur totale normalisée
$\mathbf{K}$	Matrice modale de rigidité
$\mathbf{K}_e$	Matrice modale de rigidité structurelle
k	Fréquence réduite
LJ	Méthode de Luus-Jakola
LS	Méthode des moindres carrés (Least Squares)
$\mathbf{M}$	Matrice modale d'inertie ou de masse
$\mathbf{M}_e$	Matrice modale d'inertie ou de masse structurelle
M, Mach	Nombre de Mach
MP	Méthode de la matrice Padé (Matrix Padé)
MS	Méthode de l'état minimum (Minimum State)

N_{lags}	Nombre des états augmentés
n	Nombre de modes indépendants ou coordonnées généralisées
n_β	Nombre de retards aérodynamiques
$\mathbf{P}(t)$	Vecteur des forces externes (les rafales et les perturbations des surfaces de commande)
p, pk	Méthodes de calcul du battement
$\mathbf{Q}$	Matrice des forces aérodynamiques généralisées
$\mathbf{Q_I}$	Partie imaginaire de la matrice des forces aérodynamiques généralisées
$\mathbf{Q_R}$	Partie réelle de la matrice des forces aérodynamiques généralisées
q	Vecteur de déplacement des nœuds
q_{dyn}	Pression dynamique
s	Variable de Laplace
$\overline{s}$	Variable de Laplace normalisée
T_n	Polynômes de Chebyshev
V	Vitesse vraie
V_E	Vitesse équivalente
V_0	Vitesse de référence
V_p	Matrice des vecteurs propres
X_j	Vecteurs d'état des modes aérodynamiques
Z	Altitude de référence
β_n	États augmentés (retards aérodynamiques)
η	Coordonnées généralisées
η_e	Coordonnées généralisées des modes élastiques
η_r	Coordonnées généralisées des modes rigides
η_δ	Coordonnées généralisées des surfaces de commande
$\mathbf{\Phi}$	Matrice de forme ou modale
$\mathbf{\Phi}_e$	Coordonnées généralisées des modes élastiques
$\mathbf{\Phi}_r$	Coordonnées généralisées des modes rigides
$\mathbf{\Phi}_s$	Matrice de forme associée au vecteur de déplacement des capteurs

$\mathbf{\Phi}_\delta$	Coordonnées généralisées des surfaces de commande
λ	Vecteur des valeurs propres
λ_i	Valeurs propres
ν	Rapport de vitesse équivalente
ρ	Densité atmosphérique vraie
ρ_0	Densité atmosphérique de référence
σ	Rapport de densité atmosphérique
ω	Fréquence naturelle
ω_0	Fréquence de référence
ω_i	Partie imaginaire d'une valeur propre, représente la fréquence
$[.]^P$	Notation relative à une quantité soumise au changement de variable de la méthode p - translation en fréquence de $\dfrac{1}{\omega_0}$

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Introduction et justification du projet

L'aéroservoélasticité est le fruit de la fusion de deux grandes théories s'intéressant à des aspects bien différents de la dynamique d'un avion. L'aéroélasticité, d'une part, a trait à la nature flexible d'un avion et étudie les phénomènes de couplage entre les forces structurelles (élasticité) et les forces aérodynamiques (aéro). La commande du vol, d'autre part, considère l'avion comme un solide rigide en configuration de rétroaction exercée par les lois de commande, et étudie l'influence du système de commande sur la dynamique de l'avion.

Mener une analyse aéroservoélastique sur un avion est un problème complexe, très important dans la certification des avions, étant donné que les instabilités issues des interactions adverses entre la structure, les forces aérodynamiques et les lois de commande peuvent survenir en tout point de l'enveloppe de vol. L'aéroservoélasticité est étudiée pour les avions à commande électrique (Fly-By-Wire) car ces avions nécessitent l'intégration de plusieurs disciplines par l'ordinateur et cette recherche en aéroservoélasticité est indispensable pour la construction et la certification des avions modernes à commande électrique.

L'analyse des interactions des lois de commande sur l'avion flexible modélisé par éléments finis est réalisée en construisant un modèle de commande sous forme d'espace d'état linéaire et invariant dans le temps d'un système aéroservoélastique. Pour ce faire, les forces aérodynamiques non stationnaires doivent être des fonctions rationnelles de la variable de Laplace, d'où la nécessité de leur conversion du domaine de la fréquence au domaine du temps. Dans ce projet, on va analyser et valider une nouvelle méthode de conversion des forces aérodynamiques du domaine de la fréquence (en aéroélasticité) dans le domaine temporel (en commande) dans le but de simuler le comportement de l'avion flexible en temps réel.

Le calcul des forces aérodynamiques non – stationnaires dans le domaine de fréquence entre la structure flexible de l'avion et les systèmes de commande de l'avion sont en général réalisées en utilisant des logiciels d'analyse par les éléments finis qui ont été développés et sont en continu développement par les centres de recherche aux États – Unis. Ces logiciels d'analyse par les éléments finis sont principalement ASTROS, ISAC, ADAM, FAMUSS, STARS et NASTRAN et utilisent les méthodes de doublets (Doublet Lattice Method) en régime subsonique et les méthodes de la pression constante (Constant Pressure Method) en régime supersonique. Ces logiciels seront brièvement présentés dans la prochaine section 1.2. Dans cette thèse, nous avons utilisé, pour ces types de calculs, les logiciels de modélisation par des éléments finis STARS (pour l'ATM et pour le F/A – 18) et NASTRAN (pour le CL – 604). Les vitesses et les fréquences de battement ont été calculées par les méthodes de battement *p* et *pk*, programmées en Matlab. Il faut définir le phénomène de battement en étant issu du couplage entre les forces structurelles et aérodynamiques. Ce phénomène peut provoquer la perte de contrôle d'un avion, l'affaiblissement de la structure et peut entraîner la destruction d'une partie ou de la totalité de l'avion.

Dans cette thèse on étudie donc un aspect important de l'aéroservoélasticité, une nouvelle méthode de conversion des forces aérodynamiques du domaine de la fréquence dans le domaine de Laplace. Cette nouvelle méthode se base sur les polynômes de Chebyshev et leurs propriétés d'orthogonalité.

La première série de résultats obtenus par notre nouvelle méthode d'approximation de forces aérodynamiques non stationnaires ici développée sera comparé avec les résultats d'autres méthodes classiques comme la méthode de Padé et la méthode de moindres carrés LS (Least Squares). La deuxième série de résultats constitue les vitesses et fréquences de battement obtenues par cette nouvelle méthode, qui seront comparées aux vitesses et fréquences de battement obtenues par les méthodes classiques de Padé et LS.

La première série de résultats sera présentée graphiquement sous forme d'erreur totale normalisée en fonction des fréquences réduites. La deuxième série de résultats sera présentée graphiquement sous forme des vitesses et des fréquences de battement, pour lesquelles l'avion devient instable.

Ces deux séries de résultats obtenues par notre méthode et par les deux méthodes classiques LS et Padé ont été validés sur trois types différents d'avions : l'ATM (Aircraft Test Model) et le F/A – 18 en collaboration avec les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center, et le Challenger CL – 604 de Bombardier Aéronautique.

Dans la section suivante, une recherche bibliographique est présentée et divisée dans deux parties. Dans la première partie de cette recherche bibliographique, une description pour les plus utilisés logiciels dans le domaine des interactions aéroservoélastique est donnée et dans la deuxième partie de cette recherche bibliographique, une description des méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace est fournie.

1.2 Recherche bibliographique

1.2.1 Recherche bibliographique sur les logiciels d'analyse aéroservoélastique

Nous allons présenter premièrement dans cette section les logiciels les plus utilisés dans l'analyse et la validation des interactions aéroservoélastiques entre la structure flexible de l'avion et les systèmes de commande de l'avion. Ces logiciels, développés aux États-Unis, sont les suivants : ISAC, ADAM, FAMUSS, STARS et ASTROS.

Le logiciel ISAC (Interaction of Structures, Aerodynamics, and Controls) [1,2] a été développé au début des années '70 par les laboratoires de recherche de la NASA Langley dans le but d'obtenir un outil capable d'analyser et d'investiguer les interactions qui peuvent apparaître entre les structures flexibles, les forces aérodynamiques non stationnaires et les contrôles actifs des avions. Des développements et des raffinements ont été ajoutés à ce logiciel pendant les années '80, qui l'ont transformé dans un outil efficace pour les analyses aéroservoélastiques. Ce logiciel a été utilisé dans les projets suivants : le calcul du battement d'une aile de DC-10 dans une soufflerie [3], les analyses d'un avion flexible ayant une aile oblique [4], les essais dans une soufflerie pour une aile flexible active AFW (Active Flexible Wing) [5-7], pour le DAST (Drone for Aerodynamic and Structural Testing), pour les ARW-1 [8] et ARW-2 (Aeroelastic Research Wing) [9] et pour les véhicules hypersoniques génériques [10,11].

Dans le logiciel ADAM (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method) [12], les interactions entre les forces aérodynamiques non stationnaires, les systèmes de commande avec plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO) et la dynamique structurelle ont été étudiées. Ce logiciel a été développé chez Air Force Wright Aeronautical Laboratories (AFWAL) au Laboratoire de la Dynamique du Vol (Flight Dynamics Laboratory – FDL). Dans le but de valider le logiciel ADAM, un nombre de 3 modèles d'essais ont été utilisés. Deux modèles parmi les trois modèles étaient des modèles réduits dans les souffleries : le modèle d'aile pour la suppression du battement d'un avion Y-17 dans une soufflerie transsonique et le modèle d'une aile dans une soufflerie subsonique. Le troisième modèle était celui d'un avion X-29 A.

Le logiciel FAMUSS (Flexible Aircraft Modeling Using State Space) [13] a été développé par la compagnie McDonnell Aircraft et il a été utilisé pour construire un modèle linéaire sous forme d'espace d'état invariant dans le temps pour calculer la réponse d'un avion flexible pour l'analyse aéroservoélastique.

Dans FAMUSS, les techniques d'obtention d'un système aéroservoélastique diffèrent en philosophie des techniques classiques utilisées dans les autres logiciels d'analyse par des éléments finis. Les forces aérodynamiques sont approchées pour un nombre de *Mach* par les méthodes des fonctions rationnelles. Cette approche est utilisée pour générer un modèle sous forme d'espace d'état pour un avion flexible. Un tel modèle sous forme d'espace d'état sera utile pour valider la réponse en fréquence de la fonction de transfert de l'avion flexible. Le modèle d'état a un plus petit ordre que celui obtenu par des fonctions rationnelles.

STARS (STructural Analysis RoutineS) [14] est un logiciel conçu dans les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center. STARS a été utilisé pour l'analyse aéroservoélastique sur les avions suivants : X-29A, F-18 High Alpha Research Vehicle / Thrust Vectoring Control System, B-52 Pegasus, Generic Hypersonics, National AeroSpace Plane (NASP), SR-71 / Hypersonic Launch Vehicle, et High Speed Civil Transport (HSCT). Le logiciel a été écrit en langage Fortran et a été exécuté sur plusieurs types d'ordinateurs. STARS a été utilisé dans cette thèse pour les études des interactions aéroservoélastiques sur les avions ATM et F/A – 18.

ASTROS (Automated STRuctural Optimisation System) [15] est un logiciel conçu chez ZONA Technologies pour la réalisation du design multidisciplinaire et de l'analyse de structures aérospatiales. Les algorithmes d'optimisation mathématique sont combinés dans ASTROS avec les méthodes d'éléments finis pour réaliser le design préliminaire automatisé de la structure d'un avion. Le logiciel ASTROS a été développé par le Consortium de Northrop, UAI et Air Vehicles Directorate. Le logiciel ASTROS* [16] est une intégration de la variante commerciale du logiciel aéroélastique ZAERO [17,18] dans le logiciel ASTROS.

Les logiciels ci haut mentionnés utilisent deux méthodes classiques pour l'approximation de forces aérodynamiques non stationnaires du domaine de la fréquence dans le domaine de Laplace: « La méthode de moindres carrés LS (Least Squares) » [19] et « La méthode de l'état minimum MS (Minimum State) » [20].

Dans la section suivante, nous allons présenter une recherche bibliographique sur les méthodes d'approximation des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}(k, Mach)$ du domaine de la fréquence dans le domaine de Laplace $\mathbf{Q}(s)$.

1.2.2 Recherche bibliographique sur les méthodes de conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace

Dans les années 50, Theodorsen [21] a démontré que $\mathbf{Q}(s)$ dépendait de la variable de Laplace s à travers les fonctions de Hankel. Quelques années plus tard, Wagner [21] a trouvé une première approximation rationnelle de $\mathbf{Q}(s)$ par des polynômes de Padé pour chaque terme de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires.

Cette approche était basé sur une approximation fractionnelle de type $P(s)$ / $R(s)$, où P et R sont deux polynômes en s, pour chaque terme de la matrice aérodynamique. Chaque racine de $R(s)$ faisait apparaître un nouvel état, appelé état augmenté, dans le système linéaire invariant dans le temps.

Dans le cas où la matrice de départ est de l'ordre N et l'approximation Padé est de l'ordre M, nous obtenons un nombre de N $(N+M)$ états augmentés. Le nombre d'états augmentés a été réduit par Roger [19]. Dans sa formulation, un nombre de N x M modes ont été introduits, où N est le nombre de modes de départ. La méthode de Roger était basée sur le fait que les termes de retard aérodynamiques ne changeaient pas et étaient les mêmes pour tous les éléments de la matrice des forces aérodynamiques (seulement les coefficients des numérateurs changeaient). Cette méthode a été appelée LS (Least

Squares) et elle est encore utilisée dans la plupart des logiciels d'analyses aéroservoélastiques.

Une méthode proche en formulation à la méthode LS et appelée Matrix Padé (MP) a été proposée par Vepa [22]. Dans cette méthode, les mêmes dénominateurs que ceux considérés dans la méthode LS ont été considérés pour chaque colonne de la matrice des forces aérodynamiques **Q**.

Des différentes améliorations ont été apportées aux deux méthodes présentées LS et MP. Les approximations des forces aérodynamiques pourraient être contraintes à passer par certains points. Par exemple, une approximation était considérée exacte en zéro et en deux autres points choisis. Parmi les deux points choisis, le premier point correspondait à la fréquence de battement estimée et le deuxième point correspondait à la fréquence de la rafale. L'appellation des deux méthodes LS et MS devenait alors : « La méthode ELS (Extended Least Squares) » [23,24] et « La méthode EMMP (Extended Modified Matrix Padé) » [25,26].

Karpel [20] a proposé une approche complètement différente par rapport à celles des deux approximations précédentes. En sachant dès le départ que le but était de trouver un système linéaire invariant dans le temps, il a incorporé cette information directement dans l'équation des approximations des forces aérodynamiques non stationnaires en rajoutant un terme ressemblant à une fonction de transfert d'un système linéaire.

L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Roger est l'obtention d'une approximation aussi précise que celle de Roger mais avec un nombre inférieur d'états augmentés, et pour cette raison la méthode de Karpel s'appelle « La méthode d'état minimum MS (Minimum State MS) ». Même si la méthode MS introduit un nombre réduit d'états augmentés, elle reste fortement itérative par rapport aux méthodes LS et MP, ce qui reste un désavantage par rapport aux méthodes LS et MP.

Toutes les méthodes ci-dessus décrites permettaient d'approcher les forces aérodynamiques non stationnaires dans le domaine de Laplace pour un seul nombre de *Mach* à la fois. Afin d'obtenir une approximation de ces forces pour plusieurs nombres de *Mach*, il fallait refaire toute la démarche d'approximation ce qui pourrait être très coûteux en temps de calcul.

La connaissance d'une approximation des forces aérodynamiques valide pour une plage de nombres de *Mach* et des fréquences réduites pourrait s'avérer très utile pour les avions militaires à commande électrique (Fly-by-Wire) pour lesquels le nombre de *Mach* variait rapidement pendant les manœuvres à grande vitesse. Dans ce but, Poirion [27,28] a construit une approximation des forces aérodynamiques non stationnaires pour une plage de plusieurs nombres des *Mach* et des fréquences réduites. Plusieurs approximations par la méthode MS ont été obtenues en utilisant des techniques d'interpolations par des splines pour une plage de plusieurs nombres de *Mach* et des fréquences réduites k.

Nous savons que les méthodes d'approximation doivent remplir deux critères opposés : une très bonne approximation, obtenue par l'augmentation du nombre de termes de retard, et un système linéaire invariant d'ordre réduit dans le temps (lorsque le nombre des termes de retard est le plus bas possible). Il n'existe pas à l'heure actuelle une méthode permettant de satisfaire les deux critères.

Dans deux articles, Cotoi et Botez [29,30] ont proposé une nouvelle approche basée sur une approximation de Padé très précise. Les deux auteurs ont utilisé des méthodes de réduction de la taille du dernier terme de leur formulation, terme vu comme une fonction de transfert d'un système linéaire.

Ils ont utilisé les méthodes de réduction suivantes : la méthode de la réalisation minimale, la méthode de Schur et la méthode de BST-REM (Balance Stochastic Truncation – Relative Error Method) programmées en Matlab. Une comparaison entre les résultats obtenus avec cette nouvelle approche utilisant les méthodes de réduction ci haut mentionnées et les résultats obtenus avec la méthode de MS a été présentée. Les auteurs ont trouvé que l'erreur obtenue par cette nouvelle approche était entre 12 et 40 fois plus petite que l'erreur obtenue par la méthode d'approximation MS pour le même nombre d'états augmentés et sa valeur était dépendante de la méthode de réduction considérée dans la nouvelle approche. Cependant, cette nouvelle méthode était coûteuse du point de vue de l'effort de calcul.

À la suggestion de R. Luus [31], la méthode de Luus-Jakola [32] a été utilisée pour la réduction du système aéroservoélastique. Dans cette approche, la procédure dynamique itérative connue sous le nom de procédure d'optimisation de Luus-Jakola (**LJ**) a été utilisée. On voulait obtenir un modèle du plus bas ordre sans diminuer l'exactitude de l'approximation. La procédure **LJ** a demandé un effort de calcul plus petit que celui pour la réduction de l'ordre du modèle, et cette procédure était moins prédisposée aux erreurs numériques.

Dans cette thèse, une nouvelle méthode a été développée, plus rapide et précise que les méthodes classiques Padé [33] et LS, à l'aide de polynômes orthogonaux de Chebyshev [34-36], et cette méthode a été validée sur les trois modèles d'avions suivants : F/A – 18, ATM et CL – 604.

CHAPITRE 2

MÉTHODES CLASSIQUES POUR L'ANALYSE AÉROSERVOÉLASTIQUE

Dans le but de mieux comprendre la raison pour laquelle nous avons développé une nouvelle méthode d'approximation de forces aérodynamiques, nous allons présenter premièrement dans ce chapitre le contexte de la partie de recherche et développement du domaine de l'aéroservoélasticité nécessitant cette nouvelle approche. Nous allons présenter, dans la deuxième partie du chapitre 2, les deux méthodes classiques de Padé et des moindres carrés (Least Squares LS) utilisées pour la validation des résultats obtenus par notre nouvelle méthode.

2.1 Les équations du mouvement de l'avion

Le mouvement d'un avion flexible sous l'influence des charges aérodynamiques non stationnaires [37,38] est décrit par l'équation matricielle suivante:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathrm{q}} + \mathbf{K}\mathrm{q} + q_{dyn}\mathbf{A}_e(k, Mach)\mathrm{q} = \mathbf{P}(t) \tag{2.1}$$

où **M**, **C** et **K** sont les matrices généralisées de masse, amortissement et rigidité ; q_{dyn} est la pression dynamique : q_{dyn} = 0,5 ρV^2 où ρ est la densité de l'air et V est la vitesse vraie ; $k = \omega b/V$ est la fréquence réduite où ω est la fréquence naturelle et b est la semi corde ; $\mathbf{A}_e(k)$ est la matrice des coefficients aérodynamiques d'influence pour un nombre de *Mach* donné et un ensemble de fréquences réduites k; q est le vecteur des déplacements et $\mathbf{P}(t)$ est le vecteur de forces externes (les rafales et les perturbations des surfaces de commande). Dans l'absence des forces externes $\mathbf{P}(t)$, l'équation (2.1) dévient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathrm{q}} + \mathbf{K}\mathrm{q} + q_{dyn}\mathbf{A}_e(k, Mach)\mathrm{q} = 0 \tag{2.2}$$

Dans le cas de l'avion au sol (dans l'absence des coefficients d'influence aérodynamiques, $\mathbf{A}_e = 0$, et lorsque la matrice de l'amortissement $\mathbf{C}$ est nulle), l'équation (2.2) s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathbf{K}\mathrm{q} = 0 \tag{2.3}$$

d'où les fréquences ω et les modes de vibration $\mathbf{\Phi}$ sont calculés. La transformation des coordonnées décrite par l'équation (2.4) est appliquée au vecteur de déplacement q :

$$\mathrm{q} = \mathbf{\Phi}\eta \tag{2.4}$$

dans l'équation (2.1) et en multipliant des deux côtés de l'équation (2.1) par $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}$ et $\mathbf{\Phi}$, l'équation généralisée du mouvement de l'avion dévient :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\eta} + \hat{\mathbf{K}}\eta + q_{dyn}\mathbf{Q}(k, Mach)\eta = \hat{\mathbf{P}}(t) \tag{2.5}$$

où les changements de variables suivants sont utilisés :

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi},\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi},\ \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi} \\ &\mathbf{Q}(k, Mach) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_e(k)\mathbf{\Phi} \\ &\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{\Phi} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Les deux matrices : de la forme modale $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{\Phi}_r \quad \mathbf{\Phi}_e \quad \mathbf{\Phi}_\delta]$ et des coordonnées généralisées $\eta = [\eta_r \quad \eta_e \quad \eta_\delta]^{\mathrm{T}}$ incorporent les formes modales et les coordonnées des modes rigides $\boldsymbol{r}$, élastiques $\boldsymbol{e}$, et des surfaces de commande δ de l'avion.

Pour effectuer une analyse aéroservoélastique, donc une analyse en temps réel des commandes sur l'avion flexible, on calcule la transformée de Laplace de l'équation (2.5) :

$$\left[\hat{\mathbf{M}}\bar{s}^2 + \hat{\mathbf{C}}\bar{s} + \hat{\mathbf{K}} + q_{dyn}\mathbf{Q}(\bar{s})\right]\eta(\bar{s}) = \hat{\mathbf{P}}(\bar{s}) \tag{2.7}$$

où $\bar{s} = sb/V$ est la variable normalisée de Laplace. Dans ce contexte, la matrice $\mathbf{Q}(\bar{s})$ peut être représentée par un rapport polynomial en $\bar{s}$. Pour les analyses des interactions aéroservoélastiques, la matrice des coefficients d'influence aérodynamique $\mathbf{A}_e(k, Mach)$ doit être convertie sous la forme de la matrice des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}(\bar{s})$ en utilisant des méthodes d'approximation des forces aérodynamiques pour un nombre de *Mach* à la fois.

Dans cette thèse, une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques a été développée en utilisant des polynômes de Chebyshev. Les résultats obtenus par cette nouvelle méthode sur trois types d'avions ont été comparés aux résultats obtenus en utilisant deux autres méthodes classiques d'approximation sur les mêmes types d'avions. Les deux autres méthodes classiques sont la méthode de Padé et la méthode par des moindres carrés LS (Least Squares). La comparaison entre les résultats obtenus par cette nouvelle méthode et ceux obtenus par les méthodes classiques d'approximation est réalisée aux deux niveaux des :

- erreurs totales normalisées des forces aérodynamiques;
- vitesses et fréquences de battement de l'avion.

Une brève description de ces algorithmes utilisés dans les deux méthodes classiques de Padé et LS est donnée dans les sections suivantes.

2.2 La méthode d'approximation par polynômes orthogonaux de Padé

L'utilisation d'une approximation polynomiale pour la conversion des forces aérodynamiques du domaine de fréquence au domaine de Laplace peut faire apparaître des matrices de type Vandermonde. Ces matrices sont habituellement mal conditionnées, ce qui nous donne, suite à la résolution numérique du système linéaire, des mauvais coefficients du polynôme.

Une approximation basée sur les polynômes orthogonaux [33] comme base de l'espace vectoriel des polynômes de degré N va résoudre le problème du mauvais conditionnement. Si du point de vue théorique le polynôme obtenu comme solution est le même que celui obtenu en utilisant les polynômes de Lagrange ou de Newton (car il existe théoriquement un seul polynôme de degré N qui passe par N+1 points), du point de vue numérique, une fois débarrassés du mauvais conditionnement de la matrice Vandermonde, les résultats sont différents. Selon la solution numérique, nous n'obtenons pas le même système à résoudre car :

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{N} x_n s^n \text{ donne un système de la forme } \mathbf{V}_N x = \mathbf{b} \text{ avec } cond(\mathbf{V}_N) >> 1 \tag{2.8}$$

et

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{N} y_n q_n(s) \text{ donne un système de la forme } \mathbf{A}y = \mathbf{b} \text{ avec } cond(\mathbf{A}) << cond(\mathbf{V}_N) \tag{2.9}$$

où x_n et y_n sont les coefficients des développements en série des polynômes, s est la variable de Laplace et q_n sont les termes des polynômes orthogonaux.

La démarche suivie pour générer les fractions rationnelles de Padé, donc pour implémenter l'approximation Padé est la suivante : soit $Q_N(x)$ un polynôme (une fonction rationnelle) d'ordre N écrit sous la forme $Q_N(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k x^k$, où c_k sont les coefficients polynomiaux. Ce polynôme peut s'écrire sous forme fractionnelle suivante :

$$Q_N(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k x^k = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k x^k}{1+\sum_{k=1}^{M-N} b_k x^k} = \frac{P_M(x)}{R_{M-N}(x)} \tag{2.10}$$

Ce polynôme représente un approximant Padé pour une série de puissances $f(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ si :

$$Q_N(0)=f(0) \text{ et } \left.\frac{d^k}{dx^k}Q_N(x)\right|_{x=0} = \left.\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right|_{x=0}, \text{ où } k=1,2,\ldots,M. \tag{2.11}$$

Pour résoudre le problème posé par l'équation (2.10), il faut déterminer les coefficients de $P(x)$ et $R(x)$. Pour y arriver, nous utilisons une identification de système exprimée par l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^{N} c_k x^k = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k x^k}{1+\sum_{k=1}^{M-N} b_k x^k} \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) peut être réécrite sous une nouvelle forme :

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_N x^N = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_M x^M}{1 + b_1 x + \cdots + b_{M-N} x^{M-N}} \tag{2.13}$$

En utilisant le même dénominateur pour l'équation (2.13), on peut écrire :

$$\left(c_0 + c_1 x + \cdots + c_N x^N\right)\left(1 + b_1 x + \cdots + b_{M-N} x^{M-N}\right) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_M x^M \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) est l'équivalent de la forme compacte suivante :

$$\sum_{\substack{0 \le i \le N \\ 0 \le j \le M-N}} c_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k \tag{2.15}$$

que nous pouvons écrire sous une forme mettant en évidence la série de puissances suivante :

$$\sum_{l=0}^{M} \left(\sum_{i=0}^{l} c_i b_{l-i} \right) x^l = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k \tag{2.16}$$

En identifiant les coefficients des puissances de x dans l'équation (2.16), nous allons obtenir deux systèmes sous forme matricielle.

Le premier système a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} c_l & c_{l-1} & \cdots & \cdots & c_1 \\ c_{l+1} & c_l & \cdots & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{l+M-2} & c_{l+M-3} & \cdots & \ddots & c_{l-1} \\ c_{l+M-1} & c_{l+M-2} & \cdots & c_{l+1} & c_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-N-1} \\ b_{M-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{l+1} \\ -c_{l+2} \\ \vdots \\ -c_{l+M-1} \\ -c_{l+M} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

et il peut être considéré comme un système linéaire dont les inconnues sont incluses dans le vecteur $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{M-N-1} & b_{M-N} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Ce système est résolu en utilisant une décomposition LU suivie par une substitution, car il s'écrit sous la forme $[\mathbf{A}_1][\mathbf{b}] = [\mathbf{C}]$ d'où nous pouvons facilement trouver le vecteur des inconnues $[\mathbf{b}] = [\mathbf{A}_1]^{-1}[\mathbf{C}]$.

Le deuxième système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{M-1} & c_{M-2} & \cdots & \ddots & 0 \\ c_M & c_{M-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{M-N-1} \\ b_{M-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \\ a_M \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Les inconnues $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{M-1} & a_M \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ dans ce deuxième système, qui a la forme $[\mathbf{a}] = [\mathbf{A}_2][\mathbf{b}]$, peuvent ainsi être calculées de la même manière que dans le premier système.

Dans l'article publié dans le comptes rendus du Congrès de l'Académie Roumaine Américaine (voir l'Annexe 5), nous avons proposé une amélioration de la méthode Padé d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires consistant d'abord dans l'application de la procédure itérative d'optimisation Luus-Jakola (**LJ**) pour obtenir un ordre réduit du modèle aérodynamique. La procédure **LJ** demande un effort de calcul plus réduit que les procédures classiques de réduction d'ordre du modèle et elle est moins prédisposée aux erreurs numériques.

Les techniques de réduction utilisées dans la théorie du contrôle s'appliquent aux systèmes en entier et ne sont pas recommandées pour des systèmes de grand ordre, tandis que la procédure **LJ** s'applique à chaque terme de l'approximation Padé. Un aspect important de la procédure **LJ** est qu'elle permet de garder les informations pertinentes sur les fréquences à partir de l'approximation initiale et qu'elle peut s'appliquer dans l'optimisation de la méthode classique d'approximation Least Squares (LS), présentée dans la section suivante.

2.3 La méthode d'approximation Least Squares (LS)

La méthode d'approximation par moindres carrés LS consiste dans l'approximation de la matrice des forces aérodynamiques généralisées **Q** par des polynômes de Padé à l'aide d'une minimisation de type moindres carrés (Least Squares). Dans cette méthode, une linéarisation est appliquée au système et elle introduit des termes de retard aérodynamiques (appelés « aerodynamic lag terms ») afin de décrire la dépendance de la matrice des forces aérodynamiques **Q** de la fréquence réduite *k*.

Tous les éléments des matrices aérodynamiques sont linearisés et présentés sous forme de polynômes matriciels fractionnels. Cependant, les équations de l'espace d'état renferment les états augmentés représentant les termes de retard aérodynamiques. Le nombre de ces états augmentés est égal au nombre de racines du dénominateur dans l'approximation rationnelle par des polynômes matriciels fractionnels.

En utilisant la méthode des doublets (Doublet Lattice Method) en régime subsonique ou la méthode des pressions constantes CPM (Constant Pressure Method) en régime supersonique, les forces aérodynamiques $\mathbf{Q}(k,\ Mach)$ ont été calculées. Ces forces peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\mathbf{Q}(\mathrm{j}k) = \mathbf{Q_R} + \mathrm{j}\mathbf{Q_I} \tag{2.19}$$

Les forces aérodynamiques sont approximées à la suite sous la forme de polynômes de Padé [39] suivante :

$$\hat{\mathbf{Q}}(s) = \hat{\mathbf{Q}}(\mathrm{j}k) = \hat{\mathbf{Q}}_\mathbf{R} + \mathrm{j}\hat{\mathbf{Q}}_\mathbf{I} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathrm{j}k - \mathbf{A}_2k^2 + \sum_{n=1}^{N_{lags}} \mathbf{A}_{(n+2)} \frac{\mathrm{j}k}{\mathrm{j}k + \beta_n} \tag{2.20}$$

où $\mathbf{A}_i$ sont des coefficients matriciels calculés par l'algorithme des moindres carrés LS, N_{lags} est le nombre des états augmentés introduits et β_n sont les états augmentés (retards aérodynamiques).

Les fractions contenant les états augmentés sont réécrites en multipliant par le complexe conjugué de cette fraction :

$$\frac{1}{\mathrm{j}k + \beta_n} = \frac{\beta_n - \mathrm{j}k}{\beta_n^2 + k^2} \tag{2.21}$$

En introduisant l'équation (2.21) dans l'équation (2.20) et en séparant les parties réelles et imaginaires des approximations des forces aérodynamiques, nous obtenons :

$$\hat{\mathbf{Q}}_\mathbf{R}(\mathrm{j}k) = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_2k^2 + \sum_{n=1}^{N_{lags}} \mathbf{A}_{(n+2)} \frac{k^2}{k^2 + \beta_n{}^2} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{Q}}_\mathbf{I}(\mathrm{j}k) = \mathbf{A}_1k + \sum_{n=1}^{N_{lags}} \mathbf{A}_{(n+2)} \frac{\beta_n k}{k^2 + \beta_n{}^2} \tag{2.22}$$

Dans le cas où nous tenons compte du fait que la variable de Laplace est $s = \mathrm{j}\omega$, nous allons définir $\overline{s} = \dfrac{sb}{V} = \mathrm{j}k$, la variable de Laplace normalisée, en utilisant la relation $k = \omega b/V$. Les équations (2.22) sont réécrites sous la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R}}(\overline{s}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2\overline{s}^2 + \sum_{n=1}^{N_{lags}} \mathbf{A}_{(n+2)} \frac{\overline{s}^2}{\overline{s}^2 + \beta_n^{\ 2}} \text{ et } \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{I}}(\overline{s}) = -\mathbf{A}_1\overline{s} - \sum_{n=1}^{N_{lags}} \mathbf{A}_{(n+2)} \frac{\beta_n \overline{s}}{\overline{s}^2 + \beta_n^{\ 2}} \quad (2.23)$$

Les parties réelles et imaginaires de l'erreur d'approximation $J_{\mathrm{R},l}$ et $J_{\mathrm{I},l}$ sont tabulées pour les éléments de la matrice $\mathbf{Q}(k_l)$ pour chaque valeur de la fréquence réduite $k_l \in \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{\max}\}$ comme suit :

$$J_{\mathbf{R},l} = \mathbf{Q}_{\mathbf{R},l} - \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{R},l} = \mathbf{Q}_{\mathbf{R},l} - [\mathbf{B}_{\mathbf{R},l}][\mathbf{A}] \text{ et } J_{\mathbf{I},l} = \mathbf{Q}_{\mathbf{I},l} - \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{I},l} = \mathbf{Q}_{\mathbf{I},l} - [\mathbf{B}_{\mathbf{I},l}][\mathbf{A}] \quad (2.24)$$

où

$$\begin{cases} [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{(n+1)} & \mathbf{A}_{(n+2)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{R},l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k_l^2 & \dfrac{k_l^2}{k_l^2+\beta_1^2} & \dfrac{k_l^2}{k_l^2+\beta_2^2} & \cdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{I},l} = \begin{bmatrix} 0 & k_l & 0 & \dfrac{k_l\beta_1}{k_l^2+\beta_1^2} & \dfrac{k_l\beta_2}{k_l^2+\beta_2^2} & \cdots \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.25)$$

La fonction de l'erreur complexe a été définie pour les équations précédentes comme $J_l = \mathbf{W}_{ijl}(J_{\mathbf{R},l} + \mathrm{j}J_{\mathbf{I},l})$, ayant le complexe conjugué $\overline{J}_l = \mathbf{W}_{ijl}(J_{\mathbf{R},l} - \mathrm{j}J_{\mathbf{I},l})$. Dans ce contexte, $\mathbf{W}_{ijl}$ est la matrice de pondération qui est habituellement choisie comme suit :

$$\mathbf{W}_{ijl} = \frac{1}{\max\left(1, \left|\mathbf{Q}_{ij}(\mathrm{j}k_l)\right|\right)} \tag{2.26}$$

Certaines méthodes d'optimisation sont introduites dans l'algorithme des moindres carrés LS dans le but de calculer les valeurs optimales de retards aérodynamiques β_i. L'erreur quadratique d'approximation J entre la matrice des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}(k, \mathit{Mach})$ calculée par la méthode des doublets DLM ou par la méthode des pressions constantes CPM et son approximation par des polynômes de Padé donnée par l'équation (2.20) est minimisée en utilisant ces méthodes d'optimisation. Le but est de trouver les coefficients $\mathbf{A}_{(n+2)}$ qui minimisent l'erreur quadratique J_l donnée par l'équation suivante :

$$J_l^2 = \sum_i \sum_j \sum_l \mathbf{W}_{ijl}^2 \left|\mathbf{Q}_{ij}(\mathrm{j}k_l) - \hat{\mathbf{Q}}_{ij}(\mathrm{j}k_l)\right|^2 \tag{2.27}$$

En fixant la valeur des termes de retard aérodynamique β_i, la fonction objectif devient quadratique linéaire et elle peut être minimisée. Le problème devient alors un problème linéaire de moindres carrés où la solution du problème de minimisation peut être représentée par les coefficients $\mathbf{A}_{0ij}$, $\mathbf{A}_{1ij}$, etc. de l'équation suivante :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0ij} \\ \mathbf{A}_{1ij} \\ \vdots \end{bmatrix} = \left\{ \sum_l \mathbf{W}_{ijl}^2 \left(\mathbf{B}_{\mathbf{R}l}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\mathbf{R}l} + \mathbf{B}_{\mathbf{I}l}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_{\mathbf{I}l} \right) \right\}^{-1} \left\{ \sum_l \mathbf{W}_{ijl}^2 \left(\mathbf{B}_{\mathbf{R}l}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{R}ijl} + \mathbf{B}_{\mathbf{I}l}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{I}ijl} \right) \right\} \tag{2.28}$$

où $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}ijl} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{Q}_{ij}(\mathrm{j}k_l)\right\}$ et $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}ijl} = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{Q}_{ij}(\mathrm{j}k_l)\right\}$.

Cette solution dépends des valeurs des termes de retards aérodynamiques β_i que nous remplaçons dans la fonction objectif donnée par l'équation (2.27) pour construire une nouvelle fonction objectif dépendante des valeurs des termes de retards aérodynamiques β_i. Le diagramme présenté dans la Figure 1 montre l'algorithme de la méthode LS.

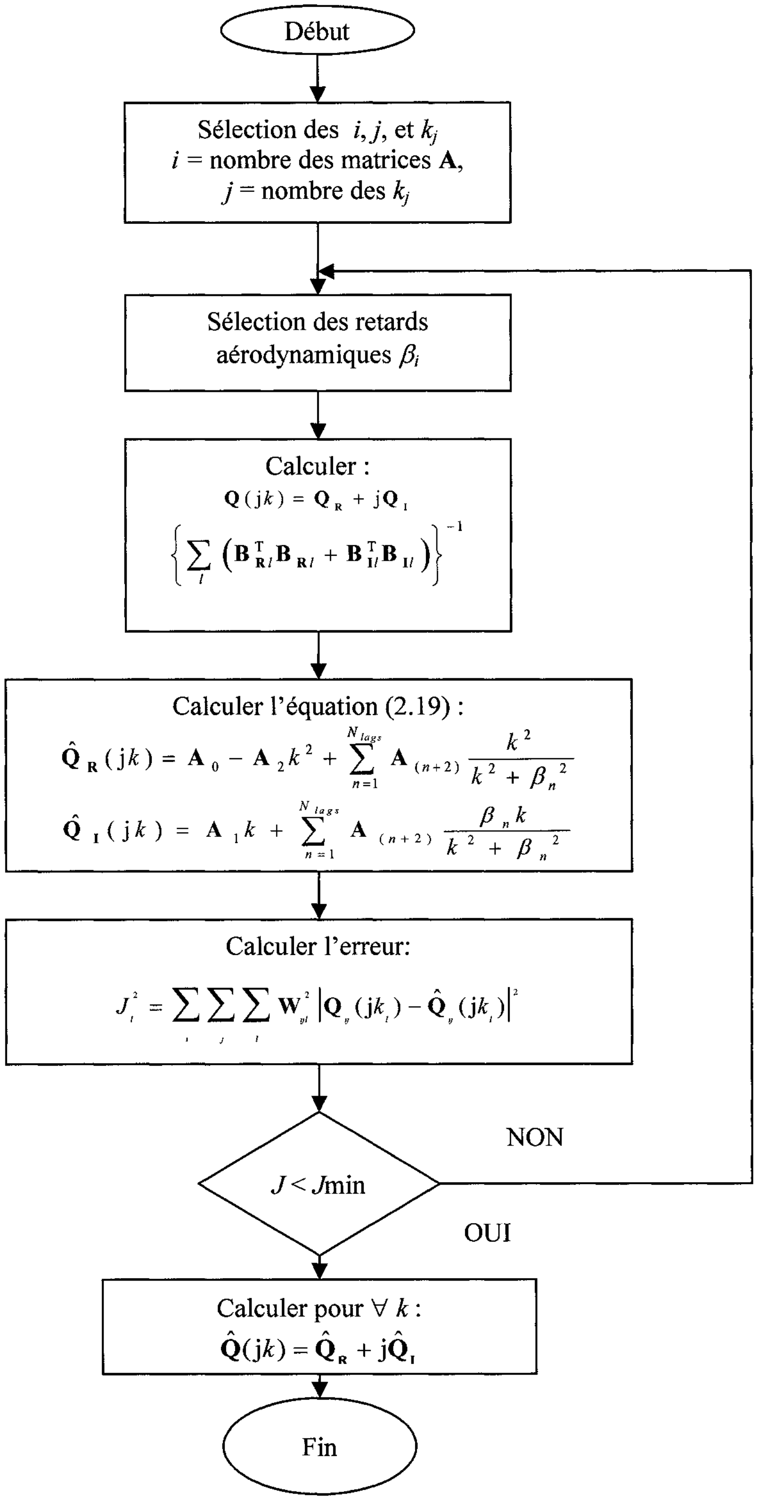


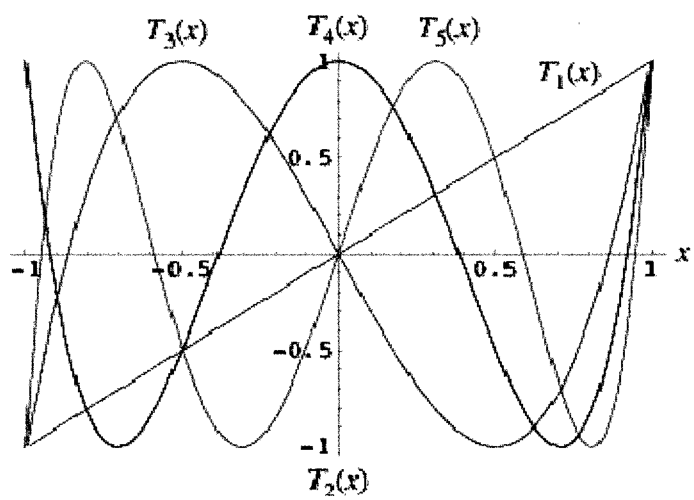
Figure 1 Diagramme de la méthode LS

CHAPITRE 3

LA MÉTHODE D'APPROXIMATION PAR LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE CHEBYSHEV

3.1 Les polynômes de Chebyshev du Premier Type

Les polynômes de Chebyshev, dénotés par $T_n(x)$, représentent un set de polynômes orthogonaux définis comme étant les solutions de l'équation différentielle de Chebyshev. Ces polynômes représentent un cas spécial des polynômes ultra sphériques et utilisent les formules trigonométriques des angles multiples. Les polynômes de Chebyshev du premier type sont implémentés en Mathematica et dénotés par ChebyshevT [n, x]. Habituellement, nous retrouvons ces polynômes en littérature sous une forme normalisée, $T_n(1) = 1$. Dans le Graphique 1, nous représentons les cinq premiers polynômes de Chebyshev [34] du premier type $T_n(x)$, où $n = 1, 2, \ldots, 5$, sur l'intervalle $x \in [-1, 1]$.



Graphique 1 Les cinq premiers polynômes de Chebyshev du premier type sur l'intervalle [-1, 1]

3.2 Le développement des fonctions sous la forme de Chebyshev

Toutes les fonctions continues $f(x)$ s'expriment par des polynômes de Chebyshev $T_j(x)$ comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x) \tag{3.1}$$

où les coefficients utilisés dans l'équation (3.1) ont la forme suivante :

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ pour } j = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Chaque polynôme de Chebyshev $T_j(x)$ s'écrit sous la forme :

$$T_j(x) = \cos(j\arccos(x)) \tag{3.3}$$

3.3 L'orthogonalité des polynômes de Chebyshev

Les polynômes de Chebyshev [34-36] ont une propriété spécifique, appelée la propriété d'orthogonalité, qui nous permet de garder l'erreur de l'approximation dans un intervalle prédéterminé. L'orthogonalité des polynômes de Chebyshev peut s'exprimer comme suit :

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_r(x)T_s(x)dx = \begin{cases} 0, \; r \neq s \\ \pi, \; r = s = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \; r = s \neq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

***Preuve* :**

Les polynômes Chebyshev $T_r(x)$ et $T_s(x)$ peuvent s'écrire sous la forme donnée dans l'équation (3.3). Nous calculons l'expression suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_r(x) T_s(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \{\cos(r \arccos(x)) \cos(s \arccos(x))\} \, dx \qquad (3.5)$$

Nous utilisons le changement de variable :

$$y = \arccos x \text{, d'où } dy = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad (3.6)$$

et l'intervalle pour l'intégration devient :

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = \arccos(-1) = \pi \\ x = 1 \Rightarrow y = \arccos(1) = 0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

L'expression (3.5) à calculer devient :

$$I = -\int_{\pi}^{0} \{\cos(ry)\cos(sy)\} \, dy = \int_{0}^{\pi} \{\cos(ry)\cos(sy)\} \, dy \qquad (3.8)$$

Trois cas sont considérés dans le calcul de I donné par l'expression (3.8) :

a) **Cas 1 :** $r = s \neq 0$. Dans ce cas, l'expression (3.8) s'écrit :

$$I = \int_{0}^{\pi} \cos^2(ry) dy = \int_{0}^{\pi} \frac{1+\cos(2ry)}{2} dy = \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos(2ry) dy = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \qquad (3.9)$$

b) **Cas 2 :** $r = s = 0$, alors l'expression (3.8) devient :

$$I = \int_0^{\pi} 1 dy = \pi \tag{3.10}$$

c) **Cas 3 :** $r \neq s$, alors l'expression (3.8) devient :

$$I = \int_0^{\pi} \{\cos(ry)\cos(sy)dy\} \tag{3.11}$$

Dans le but de résoudre l'expression (3.11), nous utilisons les formules trigonométriques suivantes :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right] \tag{3.12}$$

Dans le contexte de notre problème, nous remplaçons *a* par *ry* et *b* par *sy* dans l'équation (3.12) et nous obtenons :

$$\cos(ry)\cos(sy) = \frac{1}{2}\left[\cos((r-s)y) + \cos((r+s)y)\right] \tag{3.13}$$

Nous remplaçons l'équation (3.13) dans l'équation (3.11) et nous obtenons :

$$I = \int_0^{\pi} \{\cos(ry)\cos(sy)dy\} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi} \cos((r-s)y)dy + \int_0^{\pi} \cos((r+s)y)dy\right\} \tag{3.14}$$

d'où :

$$I = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin((r-s)y)}{r-s} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin((r+s)y)}{r+s} \Big|_0^{\pi} \right\} \tag{3.15}$$

et nous obtenons :

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(r-s)\pi}{r-s} - \frac{\sin(r-s)0}{r-s} + \frac{\sin(r+s)\pi}{r+s} - \frac{\sin(r+s)0}{r+s} \right] = 0 \tag{3.16}$$

Les équations (3.9), (3.10) et (3.16) confirment l'énoncé exprimé dans l'équation (3.4) concernant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev.

3.4 La formule de récurrence et la solution des polynômes de Chebyshev

Dans le but de calculer chaque terme du développement utilisé dans la nouvelle méthode d'approximation par des polynômes de Chebyshev, nous utilisons la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour déterminer la solution des polynômes de Chebyshev, nous imposons la condition suivante :

$$T_r(x) = 0 \tag{3.18}$$

Cette condition nous donne la solution suivante :

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{3.19}$$

où $j = 0, 1, \ldots, r$ spécifie l'ordre du polynôme de Chebyshev.

***Preuve* :**

Nous remplaçons $j = r$ dans les équations (3.3) et (3.18) et nous obtenons :

$$\cos(r\arccos(x)) = 0 \tag{3.20}$$

Nous utilisons le changement de variable suivant :

$$y = r\arccos(x) \tag{3.21}$$

En remplaçant l'équation (3.21) dans l'équation (3.20), nous obtenons :

$$\cos(y) = 0\,. \tag{3.22}$$

La solution de l'équation (3.22) est :

$$y = (2j+1)\frac{\pi}{2} \tag{3.23}$$

Nous remplaçons y donné par l'équation (3.23) dans l'équation (3.21) et nous obtenons :

$$r\arccos(x) = (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \arccos(x) = \frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{3.24}$$

ce qui nous permet de trouver la solution des polynômes de Chebyshev :

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \qquad \text{où} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, r-1. \tag{3.25}$$

L'expression $T_r(x)$ est une fonction définie par des fonctions de cosinus, ce qui nous laisse conclure qu'entre deux solutions de cette fonction, nous trouvons un extrême d'amplitude $|1|$ au milieu de l'intervalle, plus précisément à :

$$x = \cos\frac{j\pi}{r} \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,r \tag{3.26}$$

3.5 La méthode d'approximation des forces aérodynamiques par des polynômes de Chebyshev

Pour développer et implémenter cette nouvelle méthode d'approximation, nous avons utilisé les deux fonctions prédéfinies *chebpade* et *chebyshev* dans le module du logiciel Maple incorporé en Matlab.

Les fonctions *chebpade* et *chebyshev* nous ont permis de construire une interpolation polynomiale des forces aérodynamiques non stationnaires agissant sur un modèle d'avion flexible. Les éléments des matrices des forces aérodynamiques non stationnaires ont été notés $\mathbf{Q}(i,j)$ et leur nombre dépend du nombre des modes utilisés pour calculer les vitesses et les fréquences de battement de la structure de l'avion flexible.

L'approximation de ces forces à l'aide de cette nouvelle méthode s'obtient en utilisant une démarche similaire à celle utilisée pour la méthode Padé. Pour chaque élément de la matrice des forces aérodynamiques non stationnaires nous allons trouver un développement par des séries des puissances (en utilisant la fonction *chebyshev*) qui a la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{1}{2} c_0^{(ij)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s) \tag{3.27}$$

où

$$c_n^{(ij)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{Q}_{ij}(s) T_n^{(ij)}(s)}{\sqrt{(1-s^2)}} ds \text{ pour } n = 0, 1, \ldots \tag{3.28}$$

En utilisant la fonction *chebpade*, nous trouvons une approximation par des fractions rationnelles, qui ont comme termes les polynômes de Chebyshev, écrite sous la forme suivante:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} a_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)}{1 + \sum_{n=1}^{P} b_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)} \tag{3.29}$$

La relation $M = P + 2$ est utilisée dans l'implémentation de cette nouvelle méthode, car cette méthode est utilisée pour l'approximation des forces aérodynamiques qui se trouvent dans l'équation classique de mouvement aéroélastique du deuxième ordre.

L'expression donnée par l'équation (3.29) est très utile, car elle incorpore les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev et nous permet de varier l'ordre du numérateur M et du dénominateur P pour obtenir une meilleure approximation et un système d'un ordre plus réduit que ceux obtenus par des méthodes classiques comme LS ou MS.

CHAPITRE 4

MÉTHODES D'ANALYSE DU BATTEMENT

Afin de comparer les résultats obtenus par la méthode Chebyshev avec les résultats obtenus par les méthodes classiques Padé et LS exprimés sous forme des vitesses et fréquences de battement de la structure flexible de l'avion, nous avons utilisé dans cette thèse les méthodes d'analyse du battement *pk* et *p* [39,40]. Une brève description de ces méthodes est donnée dans les sections suivantes.

4.1 La méthode *pk*

Nous avons vu que l'équation généralisée du mouvement de l'avion s'écrit sous la forme de l'équation (2.5). Dans l'absence de l'influence des forces externes $\mathbf{P}(t)$, cette équation s'écrit :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\eta} + \hat{\mathbf{K}}\eta + q_{dyn}\mathbf{Q}(k, Mach)\eta = 0 \tag{4.1}$$

4.1.1 La solution linéaire

Dans le cas où les forces aérodynamiques $\mathbf{Q}$ sont quasi-stationnaires, l'équation précédente est une équation linéaire qui a comme paramètres la pression dynamique q_{dyn} et le nombre de *Mach*. La solution de cette équation linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\eta(t) = V_p e^{\lambda t} V_p^{-1} \eta(0) \tag{4.2}$$

où $\eta(0)$ est la valeur initiale du vecteur de coordonnées généralisées, λ est le vecteur de dimension n des valeurs propres, $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n]^{\mathrm{T}}$, et η est le vecteur des coordonnées généralisées, ayant la forme $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_n]^{\mathrm{T}}$. V_p est la matrice des vecteurs propres associés au système représenté par l'équation (4.1) et elle contient dans chacune de ses colonnes les vecteurs propres associées à chaque valeur propre.

Étant donné que les valeurs propres sont distinctes (les modes de l'avion définis par l'intermède des vecteurs propres sont distincts), la matrice $e^{\lambda t}$ est définie comme suit :

$$e^{\lambda t} = \mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t} \ e^{\lambda_2 t} \ \cdots \ e^{\lambda_n t}\right] \tag{4.3}$$

Les valeurs propres λ_i s'expriment comme suit :

$$\lambda_i = d_i + \mathrm{j}\omega_i, \quad 1 \le i \le n \tag{4.4}$$

où d_i est la partie réelle des valeurs propres et représente l'amortissement, et ω_i est la partie imaginaire des valeurs propres et représente la fréquence.

L'équation (4.1) est écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}} + q_{dyn}\mathbf{Q}\right) & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

pour calculer ensuite les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice **A**.

Nous obtenons $2n$ valeurs propres conjuguées λ_i mais seules celles correspondant à une partie imaginaire positive, soit une fréquence positive ω_i, sont prises en considération lors de l'étude du battement qui apparaît lorsque la partie réelle d'une des valeurs propres du système (l'amortissement) devient positive.

Par conséquence, dans le cas d'un avion en vol, en variant le nombre de *Mach* et la pression dynamique q_{dyn}, donc la vitesse et l'altitude de vol, nous pouvons trouver la combinaison de ces paramètres (nombre de *Mach* et pression dynamique) pour laquelle le phénomène de battement apparaîtra.

4.1.2 La solution non linéaire

Cette solution s'adresse au cas où les forces aérodynamiques **Q** sont non stationnaires, donc le cas où ces forces montrent une dépendance de deux variables : la fréquence réduite $k = \omega b/V$ et le nombre de $Mach = V/a$. Dans ce cas, l'équation (4.1) est une équation non linéaire de deuxième degré par rapport à la vitesse vraie V.

L'enveloppe de vol de l'avion s'obtient en traçant les vitesses de battement (les nombres de *Mach* correspondant au battement) en fonction de l'altitude. Pour ces vitesses, l'avion devient instable. Dans le but de calculer les vitesses de battement, nous devons d'abord calculer les valeurs de l'amortissement et de la fréquence à partir des valeurs propres du système. L'obtention des valeurs propres suffit pour juger de la stabilité de l'avion, car le battement apparaît lorsque l'amortissement est nul.

En aéronautique, la méthode *pk* est l'une des méthodes qui permet de trouver les valeurs propres de la matrice **A**. L'algorithme de cette méthode consiste à fixer un nombre de *Mach* M et une altitude de vol (donc une vitesse du son), pour ensuite calculer les valeurs propres pour une plage des vitesses autour du M donnée par un processus itératif sur la fréquence réduite k. Il ne reste plus qu'a investiguer quant à la stabilité du système par le calcul des valeurs propres (donc de l'amortissement en fonction de la vitesse). L'algorithme de la méthode *pk* est représenté dans la Figure 2.

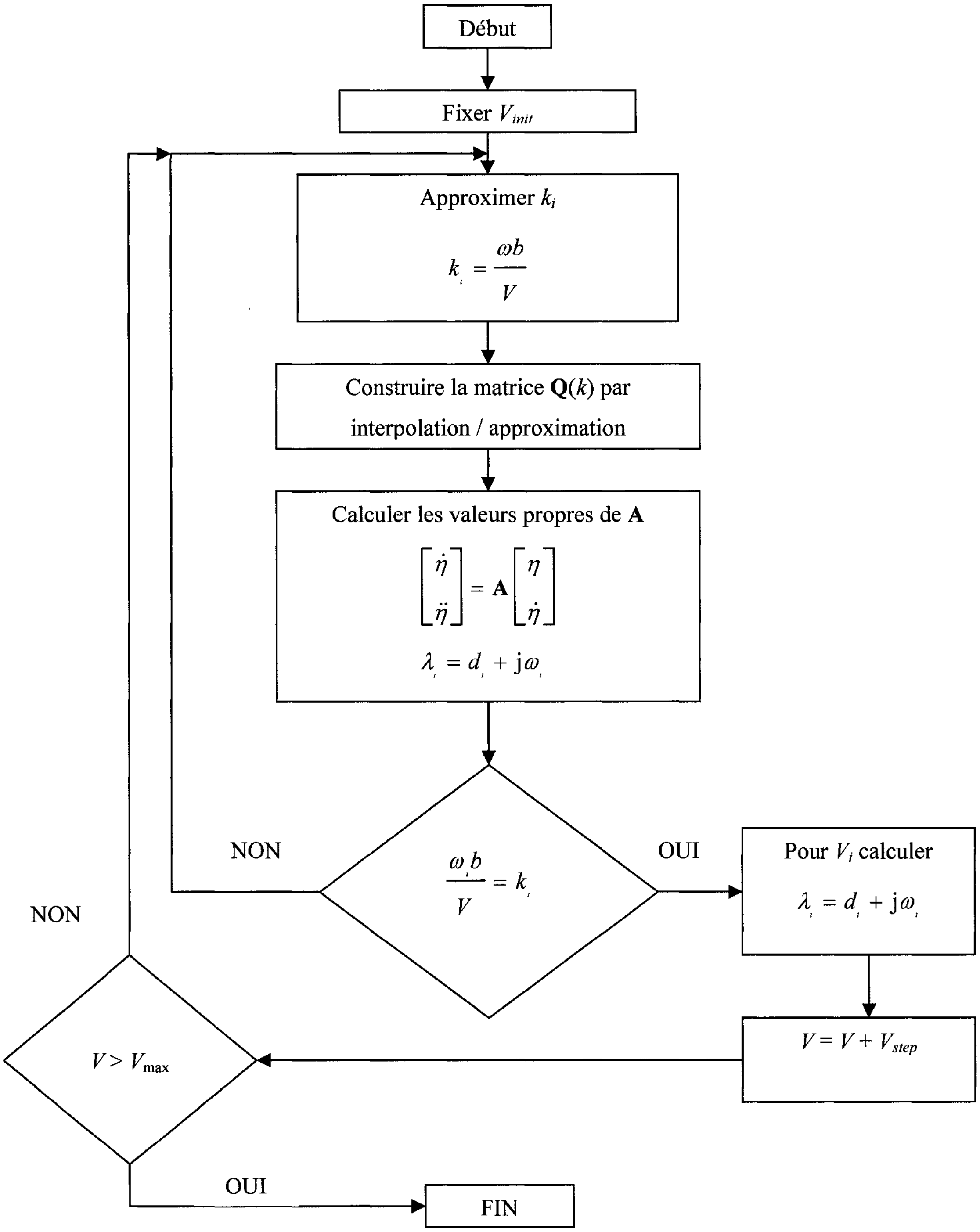


Figure 2 L'algorithme de la méthode *pk*

4.2 La méthode *p*

4.2.1 Système aéroélastique en boucle ouverte et l'équation normalisée

La méthode *p* est issue de la méthode *pk.* Le processus itératif reste identique, seulement la forme des équations change. La méthode *p* est en effet une représentation non dimensionnelle de la méthode *pk.* Dans cette méthode, nous utilisons des valeurs normalisées ν et σ pour la vitesse équivalente V_E et pour la densité ρ par rapport à la vitesse fixe V_0 et à la densité au sol ρ_0, respectivement, tel que montré dans les équations suivantes :

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad V_E = V\sqrt{\sigma}, \quad \nu = \frac{V_E}{V_0}, \quad V_0 = c\omega_0 = \frac{b}{2}\omega_0 \tag{4.6}$$

À partir des équations précédentes, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&V = \frac{\nu}{\sqrt{\sigma}}V_0 \\
&q_{dyn} = \frac{1}{2}\rho_0 V_E^2 = \frac{1}{2}\rho_0 c^2\omega_0^2\nu^2 \\
&\frac{b}{V} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\upsilon\omega_0} \\
&\rho V c = \rho_0\sigma\frac{V_E}{\sqrt{\sigma}}c = \rho_0\sqrt{\sigma}V_E c \\
&\rho V^2 = \rho_0 V_E^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

La différence entre les deux méthodes réside dans le fait que les équations de la méthode *pk* utilisent la vraie vitesse *V* et la vraie densité atmosphérique ρ, pendant que les équations de la méthode p sont paramétrées par le rapport des vitesses ν et le rapport des densités σ. Le processus d'obtention de l'algorithme de la méthode p à partir de l'algorithme de la méthode pk est présenté dans les paragraphes suivants.

Dans l'équation (4.1) la matrice modale des forces aérodynamiques généralisées $\mathbf{Q}$ est une matrice complexe, donc nous pouvons l'écrire sous la forme $\mathbf{Q} = \mathbf{Q_R} + j\mathbf{Q_I}$. La partie réelle $\mathbf{Q_R}$ de $\mathbf{Q}$ s'appelle « rigidité aérodynamique » et vibre en phase avec le vecteur position, et la partie imaginaire $\mathbf{Q_I}$ de $\mathbf{Q}$ s'appelle « amortissement aérodynamique » et vibre en phase avec le vecteur vitesse. Pour respecter la dynamique mentionnée précédemment, nous associons $\mathbf{Q_R}$ au vecteur de coordonnées généralisées η et $\mathbf{Q_I}$ à la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées $\dot{\eta}$.

La matrice $\mathbf{Q}$ est déjà facteur du vecteur de coordonnées généralisées η, donc nous pouvons diviser $\mathbf{Q_I}$ par ω de telle sorte que $\mathbf{Q_I}$ peut être exprimée comme facteur de la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées $\dot{\eta}$. De cette manière, l'équation aéroélastique (4.1) s'écrit :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \left(\hat{\mathbf{C}} + \frac{1}{\omega} q_{dyn}\mathbf{Q}_\mathrm{I}\right)\dot{\eta} + \left(\hat{\mathbf{K}} + q_{dyn}\mathbf{Q}_\mathrm{R}\right)\eta = 0 \tag{4.8}$$

Nous remplaçons ω et q_{dyn} en utilisant les expressions $k = \dfrac{\omega b}{V}$ et $q_{dyn} = \dfrac{1}{2}\rho V^2$ dans l'équation (4.8) pour obtenir l'équation suivante :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \left(\hat{\mathbf{C}} + \frac{1}{4k}\rho V c\mathbf{Q}_\mathrm{I}\right)\dot{\eta} + \left(\hat{\mathbf{K}} + \frac{1}{2}\rho V^2\mathbf{Q}_\mathrm{R}\right)\eta = 0 \tag{4.9}$$

En remplaçant les expressions pour ρVc et ρV^2 données par les équations (4.7) dans l'équation (4.9), nous obtenons :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta}+\left(\hat{\mathbf{C}}+\frac{1}{4k}\rho_0 c\sqrt{\sigma}V_E\mathbf{Q_I}\right)\dot{\eta}+\left(\hat{\mathbf{K}}+\frac{1}{2}\rho_0 V_E^2\mathbf{Q_R}\right)\eta=0 \tag{4.10}$$

Pour la normalisation des vitesses, nous utilisons un changement de variable en exprimant la vitesse de référence V_0 en fonction de la fréquence de référence ω_0 tel que montré dans les équations (4.6). En plus, nous définissons η^P comme étant le nouveau vecteur de coordonnées généralisées correspondant à la méthode p. Le changement de variable dans le vecteur des coordonnées généralisées correspond à une normalisation en fréquence. Dans le cas où l'ancien vecteur de coordonnées généralisées η est associé à la fréquence ω, alors le nouveau vecteur de coordonnées généralisées η^P est associé à une nouvelle fréquence normalisée ω^P définie comme suite :

$$\eta^P\left(\omega^P\right)=\eta(\omega) \qquad \text{où} \qquad \omega^P=\frac{\omega}{\omega_0} \tag{4.11}$$

À partir de ces relations, les équations suivantes sont déduites :

$$\dot{\eta}=\omega_0\dot{\eta}^P \qquad \text{et} \qquad \ddot{\eta}=\omega_0^2\ddot{\eta}^P \tag{4.12}$$

Selon l'analyse aéroélastique, les matrices des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}$ dépendent de la fréquence réduite k. La fréquence réduite k est obtenue en fonction des paramètres ω^P, ν et σ et nous obtenons :

$$k=\frac{\omega b}{V}=b\omega^P\omega_0\frac{\sqrt{\sigma}}{V_E}=\frac{c}{2}\omega^P\frac{V_0}{c}\frac{\sqrt{\sigma}}{V_E}=\frac{\sqrt{\sigma}}{2\nu}\omega^P \tag{4.13}$$

En remplaçant les équations (4.6) et les équations (4.11) à (4.13) dans l'équation (4.10), nous obtenons l'équation aéroélastique utilisée dans la méthode p de battement :

$$\hat{\mathbf{M}}^P \ddot{\eta}^P + \left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{Q}}^P\right)\dot{\eta}^P + \left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{Q}}^P\right)\eta^P = 0 \tag{4.14}$$

où les matrices $\hat{\mathbf{M}}^P$, $\hat{\mathbf{D}}^P$, $\hat{\mathbf{D}}_{\mathrm{Q}}^P$, $\hat{\mathbf{K}}^P$ et $\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{Q}}^P$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{M}}^P &= \hat{\mathbf{M}} \\
\hat{\mathbf{K}}^P &= \frac{1}{\omega_0^2}\hat{\mathbf{K}} \\
\hat{\mathbf{C}}^P &= \frac{1}{\omega_0}\hat{\mathbf{C}} \\
\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{Q}}^P &= \frac{1}{4k}\rho_0 c^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{I}}\left(k, Mach\right) \\
\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{Q}}^P &= \frac{1}{2}\rho_0 c^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{R}}\left(k, Mach\right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2.2 Système aéroservoélastique en boucle fermée

Pour construire la configuration en boucle fermée du système, nous ajoutons les modes rigides et les modes de commande issus de la théorie de la dynamique du vol aux modes élastiques engendrés par le couplage des vibrations structurales et des forces aérodynamiques. L'interaction de la dynamique des modes d'un système aéroservoélastique est représentée par les équations suivantes :

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\eta} + \hat{\mathbf{K}}\eta + \hat{\mathbf{K}}_g\vartheta + q_{dyn}\mathbf{Q}(k, Mach)\eta = 0 \tag{4.16}$$

et $$\dot{\vartheta} = \mathbf{E}_v \dot{\eta} + \mathbf{E}_p \vartheta \tag{4.17}$$

où $\hat{\mathbf{K}}_g$ est le terme supplémentaire lié à la gravité. L'équation (4.17), appelée l'équation des perturbations des angles d'Euler et obtenue suite à la linéarisation de la variation de ces angles autour des leurs valeurs au « trim » (à l'équilibre). Dans cette équation, ϑ est le vecteur des perturbations des angles d'Euler qui définissent la matrice de rotation du repère inertiel au repère lié aux axes de l'avion (voir l'Annexe 6).

En utilisant les mêmes changements des variables que ceux utilisés dans la section précédente, la formulation de la méthode *p* pour un système aéroservoélastique devient :

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{M}}^P \ddot{\eta}^P + \left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right) \dot{\eta}^P + \left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right) \eta^P + \hat{\mathbf{K}}_g^P \vartheta^P = 0 \\ &\dot{\vartheta}^P = \mathbf{E}_v^P \dot{\eta}^P + \mathbf{E}_p^P \vartheta^P \end{aligned} \tag{4.18}$$

où le vecteur ϑ^P et les matrices $\hat{\mathbf{K}}_g^P$, $\mathbf{E}_v^P$ et $\mathbf{E}_p^P$ sont définies comme suit :

$$\dot{\vartheta}^P = \frac{1}{\omega_0}\dot{\vartheta},\ \ \hat{\mathbf{K}}_g^P = \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}\hat{\mathbf{K}}_g,\ \ \mathbf{E}_v^P = \mathbf{E}_v \ \text{ et }\ \mathbf{E}_p^P = \frac{1}{\omega_0}\mathbf{E}_p\,. \tag{4.19}$$

4.2.2.1 Les modes de commande

Le vecteur de coordonnées généralisées est écrit sous la forme suivante :

$$\eta^P = \left[\eta_r^P\left(\omega^P\right) \quad \eta_e^P\left(\omega^P\right) \quad \eta_c^P\left(\omega^P\right)\right] \tag{4.20}$$

où η_r^P est le vecteur de déplacement des modes rigides (la position de l'avion est considère rigide en 6 degrés de liberté), η_e^P est le vecteur de déplacement des modes élastiques (due aux déformations élastiques de la structure) et η_c^P est le vecteur de déplacement des modes de commande (due aux déplacements angulaires des surfaces de commande et à la variation de la force de poussée). Toutes ces coordonnées généralisées sont en fonction de la nouvelle fréquence normalisée ω^P calculée par la méthode p de battement. Nous décomposons le vecteur de coordonnées généralisées des modes de commande η_c^P comme suit :

$$\eta_c^P = \left(\eta_c^P\right)_0 + \Delta\eta_c^P \tag{4.21}$$

où $\left(\eta_c^P\right)_0$ correspond au mouvement des surfaces de commande à l'équilibre et $\Delta\eta_c^P$ correspond à la perturbation des surfaces de commande.

En utilisant la même démarche que celle montrée dans l'équation (4.21), nous décomposons le vecteur total des coordonnées généralisées η^P comme suit :

$$\eta^P = \eta_0^P + \mathbf{R}\Delta\eta_0^P \tag{4.22}$$

où $$\eta_0^P = \begin{bmatrix}\eta_r^P & \eta_e^P & \left(\eta_c^P\right)_0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4.23}$$

Dans l'équation (4.23), η_r^P sont les coordonnées généralisées des modes rigides, η_e^P sont les coordonnées généralisées des modes élastiques et $\left(\eta_c^P\right)_0$ sont les coordonnées généralisées des modes de commande.

La partie du mouvement générée par l'action des commandes, représentée par η_c^P et mise en évidence par la décomposition du vecteur de coordonnées généralisées η^P, permet d'étudier la dynamique du système (de l'avion) en boucle fermée.

En remplaçant les équations (4.22) et (4.23) dans l'équation (4.18), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}_0^P = &-\left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right)\dot{\eta}_0^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right)\eta_0^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\hat{\mathbf{K}}_g^P\vartheta^P \\ &- \mathbf{R}\Delta\ddot{\eta}_c^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right)\mathbf{R}\Delta\dot{\eta}_c^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right)\mathbf{R}\Delta\eta_c^P \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\dot{\vartheta}^P = \mathbf{E}_v^P\dot{\eta}^P + \mathbf{E}_p^P\vartheta^P = \mathbf{E}_v^P\dot{\eta}_0^P + \mathbf{E}_p^P\vartheta^P$$

4.2.2.2 Les capteurs

Les mesures des capteurs q_s sont exprimées par rapport au vecteur de coordonnées généralisées η_0 à l'équilibre comme suit :

$$\begin{aligned} \mathrm{q}_s &= \mathbf{\Phi}_s\eta_0 && \text{- le vecteur de déplacement} \\ \dot{\mathrm{q}}_s &= \mathbf{\Phi}_s\dot{\eta}_0 && \text{- le vecteur de vitesse} \\ \ddot{\mathrm{q}}_s &= \mathbf{\Phi}_s\ddot{\eta}_0 && \text{- le vecteur d'accélération} \end{aligned} \tag{4.25}$$

où $\mathbf{\Phi}_s$ est la matrice de forme associée au vecteur de déplacement des capteurs qui est calculée par l'interpolation de la matrice de forme $\mathbf{\Phi}$ dépendamment de la position des capteurs par rapport aux nœuds de l'avion. Les capteurs donnent des informations sur la position, la vitesse et l'accélération de la partie de l'avion dans laquelle ils sont situés. Cette information est partielle et elle est fournie sur des axes privilégiés – appelées aussi les axes des capteurs, d'où la matrice de forme des capteurs peut contenir des coefficients de sélection des axes.

En convertissant les équations (4.25) dans le domaine de Laplace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} q_s &= \mathbf{\Phi}_s \eta_0 \\ \dot{q}_s &= s\mathbf{\Phi}_s \dot{\eta}_0 \\ \ddot{q}_s &= s^2\mathbf{\Phi}_s \ddot{\eta}_0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

La matrice de forme des capteurs s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_s = \text{diag}\begin{bmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_{\theta x} & \sigma_{\theta y} & \sigma_{\theta z}\end{bmatrix} \frac{l_{i2}l_{i3}\mathbf{\Phi}_{i1} + l_{i1}l_{i3}\mathbf{\Phi}_{i2} + l_{i1}l_{i2}\mathbf{\Phi}_{i3}}{l_{i1}l_{i2} + l_{i1}l_{i3} + l_{i2}l_{i3}} \tag{4.27}$$

où $\mathbf{\Phi}_{i1}$, $\mathbf{\Phi}_{i2}$ et $\mathbf{\Phi}_{i3}$ sont les matrices de forme des deux nœuds les plus proches du capteur i et l_{i1} , l_{i2} et l_{i3} sont les distances des nœuds au capteur i. Les coefficients σ sont les coefficients de sélection des axes, dont les valeurs sont égales à 0 ou à 1. Dans le cas où le capteur fournit une information selon un axe, alors nous attribuons la valeur 1 au coefficient σ, dans le cas contraire, nous lui assignons la valeur 0.

4.2.2.3 La chaîne de contrôle

Composée par la dynamique des senseurs, la dynamique des actionneurs, les contrôleurs et les autres filtres, la chaîne de contrôle est décrite par la fonction de transfert suivante :

$$\Delta\eta_c = G_c(s)q_s \tag{4.28}$$

En remplaçant les équations (4.26) dans l'équation (4.28), nous obtenons :

$$\Delta\eta_c = G_c(s)\mathbf{\Phi}_s\eta_0 \tag{4.29}$$

De la même manière que celle utilisée pour obtenir les équations (4.26), nous obtenons les transformations dans le domaine de Laplace pour les dérivées du vecteur $\Delta\eta_c$:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\eta}_c &= sG_c(s)\mathbf{\Phi}_s\eta_0 \\ \Delta\ddot{\eta}_c &= s^2G_c(s)\mathbf{\Phi}_s\eta_0\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pour décrire le système aéroservoélastique de type MIMO (multiples entrées – multiples sorties), il faut écrire les équations aéroservoélastiques sous forme matricielle. Dans ce but nous utilisons la conversion des fonctions de transfert sous la forme d'un système d'espace d'état composé par $G_c(s)$ et $sG_c(s)$:

$$\begin{bmatrix} G_c(s) \\ sG_c(s) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c1} \\ \mathbf{C}_{c2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Le vecteur d'état X_c du système défini par l'équation matricielle (4.31) s'écrit :

$$\dot{X}_c = \mathbf{A}_c X_c + \mathbf{B}_c\mathbf{\Phi}_s\eta_0 \tag{4.32}$$

Les variations du vecteur de déplacement des modes de commande et de ses dérivées sont exprimées en fonction du vecteur d'espace d'état X_c par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta\eta_c &= \mathbf{C}_{c1}X_c \\ \Delta\dot{\eta}_c &= \mathbf{C}_{c2}X_c \\ \Delta\ddot{\eta}_c &= \mathbf{C}_{c2}\dot{X}_c = \mathbf{C}_{c2}\mathbf{A}_c X_c + \mathbf{C}_{c2}\mathbf{B}_c\mathbf{\Phi}_s\eta_0\end{aligned} \tag{4.33}$$

Dans les sections précédentes nous avons défini toutes les variables aéroservoélastiques utilisées dans la méthode p en fonction de la fréquence normalisée ω^P. Étant donné que le vecteur X_c est défini par rapport à la fréquence naturelle ω, nous exprimons ce vecteur dans le domaine défini par la fréquence normalisée ω^P. Dans ce but, nous définissons une nouvelle forme de la fonction de transfert de la chaîne de contrôle :

$$G_c^P\left(\omega^P\right)=G_c\left(\omega\right)=G_c\left(\omega_0\omega^P\right) \tag{4.34}$$

Nous définissons le système sous la forme de l'espace d'état dans le domaine de la fréquence normalisée ω^P :

$$\begin{bmatrix} G_c^P(s^P) \\ s^P G_c^P(s^P) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^P, \mathbf{B}_c^P, \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{c1}^P \\ \mathbf{C}_{c2}^P \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Le nouveau vecteur d'état X_c^P de la chaîne de contrôle du système (4.35) nous permet d'obtenir des équations similaires aux équations (4.32) et (4.33) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X}_c^P &= \mathbf{A}_c^P X_c^P + \mathbf{B}_c^P \mathbf{\Phi}_s \eta_0^P \\ \Delta\eta_c^P &= \mathbf{C}_{c1}^P X_c^P \\ \Delta\dot{\eta}_c^P &= \mathbf{C}_{c2}^P X_c^P \\ \Delta\ddot{\eta}_c^P &= \mathbf{C}_{c2}^P \dot{X}_c^P = \mathbf{C}_{c2}^P \mathbf{A}_c^P X_c^P + \mathbf{C}_{c2}^P \mathbf{B}_c^P \mathbf{\Phi}_s \eta_0^P \end{aligned} \tag{4.36}$$

Nous remplaçons les vecteurs définis par les équations (4.36) dans le système d'équations (4.24) et nous obtenons :

$$\ddot{\eta}_0^P = -\left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right)\dot{\eta}_0^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right)\eta_0^P - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\hat{\mathbf{K}}_g^P\vartheta^P$$
$$- \mathbf{R}\left(\mathbf{C}_{c2}^P\mathbf{A}_c^P X_c^P + \mathbf{C}_{c2}^P\mathbf{B}_c^P\mathbf{\Phi}_s\eta_0^P\right) - \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right)\mathbf{R}\mathbf{C}_{c2}^P X_c^P$$
$$- \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right)\mathbf{R}\mathbf{C}_{c1}^P X_c^P \tag{4.37}$$

$$\dot{\vartheta}^P = \mathbf{E}_\nu^P\dot{\eta}_0^P + \mathbf{E}_p^P\vartheta^P$$

Les équations du système aéroservoélastique en boucle fermée (4.37) sont écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_0^P \\ \ddot{\eta}_0^P \\ \dot{X}_c^P \\ \dot{\vartheta}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ -\mathbf{K}_{tot}^P & -\mathbf{C}_{tot}^P & -\mathbf{K}_c^P & -\left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\hat{\mathbf{K}}_g^P \\ \mathbf{B}_c^P\mathbf{\Phi}_s & 0 & \mathbf{A}_c^P & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_\nu^P & 0 & \mathbf{E}_p^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0^P \\ \dot{\eta}_0^P \\ X_c^P \\ \vartheta^P \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

dans laquelle les notations suivantes ont été utilisées :

$$\mathbf{K}_{tot}^P = \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right) + \mathbf{R}\mathbf{C}_{c2}^P\mathbf{B}_c^P\mathbf{\Phi}_s$$
$$\mathbf{C}_{tot}^P = \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right) \tag{4.39}$$
$$\mathbf{K}_c^P = \mathbf{R}\left(\mathbf{C}_{c2}^P\mathbf{A}_c^P + \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^P + \nu\sqrt{\sigma}\hat{\mathbf{C}}_Q^P\right)\mathbf{C}_{c2}^P + \left(\hat{\mathbf{M}}^P\right)^{-1}\left(\hat{\mathbf{K}}^P + \nu^2\hat{\mathbf{K}}_Q^P\right)\mathbf{C}_{c1}^P\right)$$

Le système matriciel (4.38) représente la forme générale d'un système aéroservoélastique en boucle fermée en utilisant la méthode *p*.

Dans ce projet, les valeurs des vitesses et fréquences de battement ont été calculés en utilisant la méthode *pk* en boucle ouverte sur l'ATM (Aircraft Test Model), le F/A-18 et le CL-604 et la méthode *p* en boucle fermée sur l'ATM.

La méthode p n'a pas été utilisée pour le calcul des vitesses et fréquences de battement sur les avions F/A-18 et sur le CL-604 en boucle fermée à cause du fait que les deux compagnies : la NASA DFRC (Dryden Flight Research Center) et Bombardier Aéronautique n'ont pas fourni les lois de commande pour ces avions (la méthode p est utilisée uniquement pour le calcul des vitesses et fréquences de battement pour un avion en boucle fermée).

Dans les trois chapitres suivants, nous présentons une description des avions sur lesquels nous avons utilisé notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques ainsi que les méthodes classiques Padé et LS. Une comparaison des résultats obtenus par la méthode Chebyshev avec les résultats obtenus par les méthodes classiques Padé et LS est ensuite présentée. Ces résultats seront présentés sous la forme des erreurs totales normalisées, et des vitesses et fréquences de battement.

CHAPITRE 5

ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE L'ATM (AIRCRAFT TEST MODEL) EN BOUCLE OUVERTE ET EN BOUCLE FERMÉE

5.1 Présentation générale de l'ATM (Aircraft Test Model)

L'avion flexible ATM (Aircraft Test Model) [14] est modélisé par un ensemble d'éléments finis, donc par des poutres flexibles d'une certaine masse, amortissement et rigidité (**M**, **C** et **K**). Les équations de mouvement de la structure de l'avion sont calculées en fonction des déplacements de chaque point de la structure considérée. Nous considérons d'abord l'ATM au sol, dans l'absence des forces aérodynamiques. Les résultats des équations de mouvement consistent en un ensemble d'environ 50 à 100 fréquences en bas de 100 Hz, et de leurs modes de vibrations correspondants.

Les modes de vibrations et les fréquences des composantes de l'avion dans le plan latéral proviennent principalement des modes de flexion et de torsion pour les ailes et le fuselage, et des modes des surfaces de commande (la gouverne de direction et les ailerons).

Nous considérons par la suite l'ATM en vol, dans la présence des forces aérodynamiques non stationnaires généralisées. Dans ce cas, les surfaces portantes (les ailes, l'empennage horizontal et l'empennage vertical) de l'ATM sont divisées dans des panneaux trapézoïdaux parallèles aux vitesses de l'air et la distribution des pressions induites sur ces surfaces est calculée. Les forces aérodynamiques sont calculées pour un ensemble de 14 fréquences réduites et 9 nombres de *Mach*. Les vitesses et fréquences de battement pour lesquelles l'avion devient instable sont ensuite calculées.

Dans le but de construire un modèle de commande sous forme d'espace d'état linéaire et invariant dans le temps d'un système aéroservoélastique, les forces aérodynamiques non stationnaires doivent être des fonctions rationnelles de la variable de Laplace, d'où la nécessité de leur conversion du domaine de la fréquence au domaine de Laplace.

L'ATM est le modèle de référence qui sert aux premiers essais de validation de notre nouvelle méthode et ce modèle nous a été fourni par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center. L'ATM est modélisé par des éléments finis et il est étudié dans son plan latéral.

5.1.1 Détails du modèle structurel de l'ATM

La description de l'avion par des éléments finis n'a été réalisée que sur la moitié de l'avion, puisque l'avion est symétrique par rapport à son plan longitudinal. Un nombre de 74 nœuds permettent de décrire la moitié de l'avion (Figure 3), chaque nœud étant associé à une inertie et à une position par rapport à un repère lié aux axes de l'avion. Ce repère est défini selon les axes principaux de l'avion et il a son origine au nœud 39, tel que montré dans la Figure 3 [14].

Le modèle latéral de l'ATM par des éléments finis est réalisé en calculant les forces structurelles sur chaque nœud de l'ATM. De cette manière, les matrices d'inertie $\mathbf{M}_{N,N}$, d'amortissement $\mathbf{C}_{N,N}$ et de rigidité $\mathbf{K}_{N,N}$ de l'avion ATM sont générées dans l'espace des nœuds. La génération de ces matrices est effectuée par la routine SOLIDS du logiciel STARS.

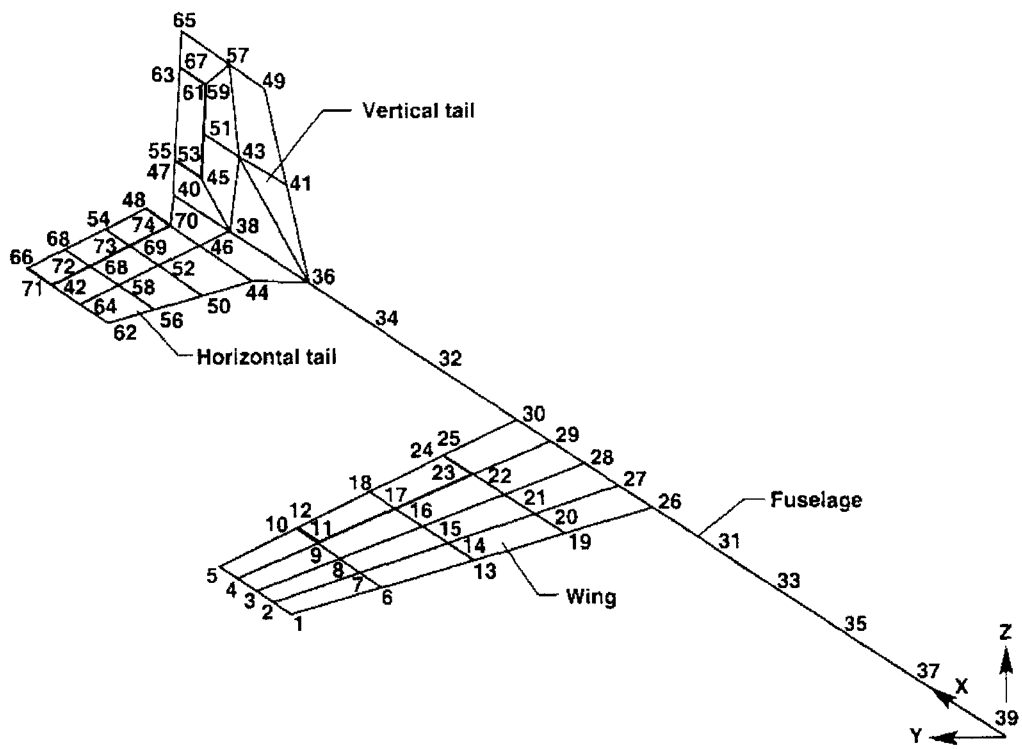


Figure 3 L'ATM modélisé par les éléments finis

5.1.2 L'analyse des vibrations de l'ATM

Une analyse de vibrations libres réalisée sur le modèle ATM permet de déterminer les degrés de liberté η indépendants du modèle, ainsi que la matrice de forme $\mathbf{\Phi}$ reliant ces degrés de liberté au vecteur des déplacements des nœuds.

Suite à une analyse de vibrations appliquée au modèle latéral de l'ATM, nous avons considéré un nombre de 13 modes de vibration du modèle ATM : 3 modes rigides, 8 modes élastiques et 2 modes de commande.

Les 8 modes élastiques du modèle ATM (Figure 4) représentent les déformations en flexion (bending – B) ou en torsion (torsion – T) d'une ou de plusieurs parties de l'avion (le fuselage, l'aile (wing) et l'empennage vertical (fin)).

Les trois modes rigides (Figure 5) sont définis par rapport au centre de gravitée de l'avion. Puisque l'avion n'est représenté que dans son plan latéral, le modèle ne comprend que trois modes rigides, au lieu de 6 modes rigides : translation en Y, rotation en X (roulis) et rotation en Z (lacet). Dans l'ATM, le centre de gravitée se trouve à une position de 6,875 m (275 pouces) sur l'axe des X, c'est à dire au nœud 27. Les deux modes de commande (Figure 5) correspondent aux déplacements angulaires des ailerons et de la gouverne de direction.

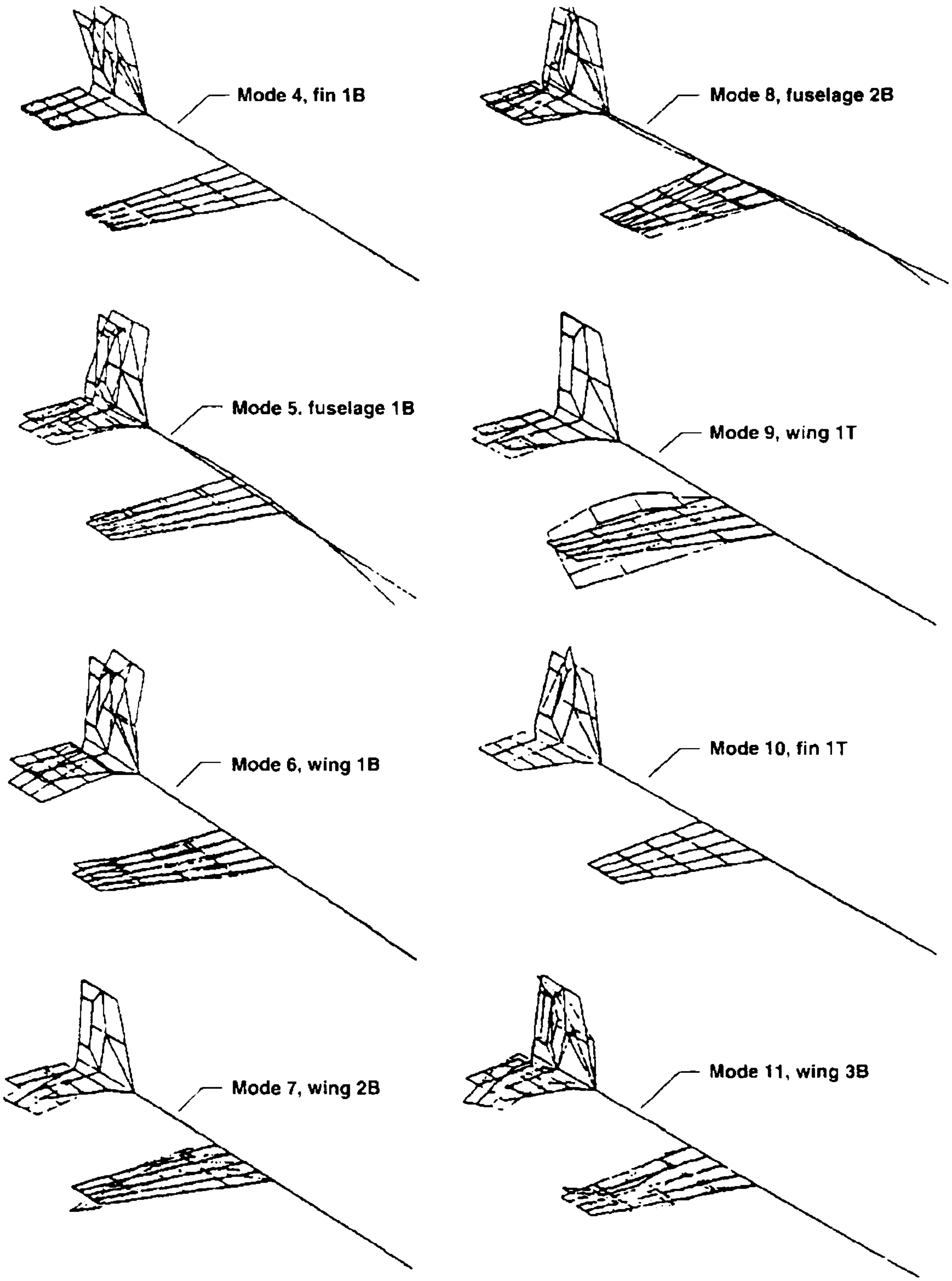


Figure 4 Les huit modes élastiques du modèle de l'ATM

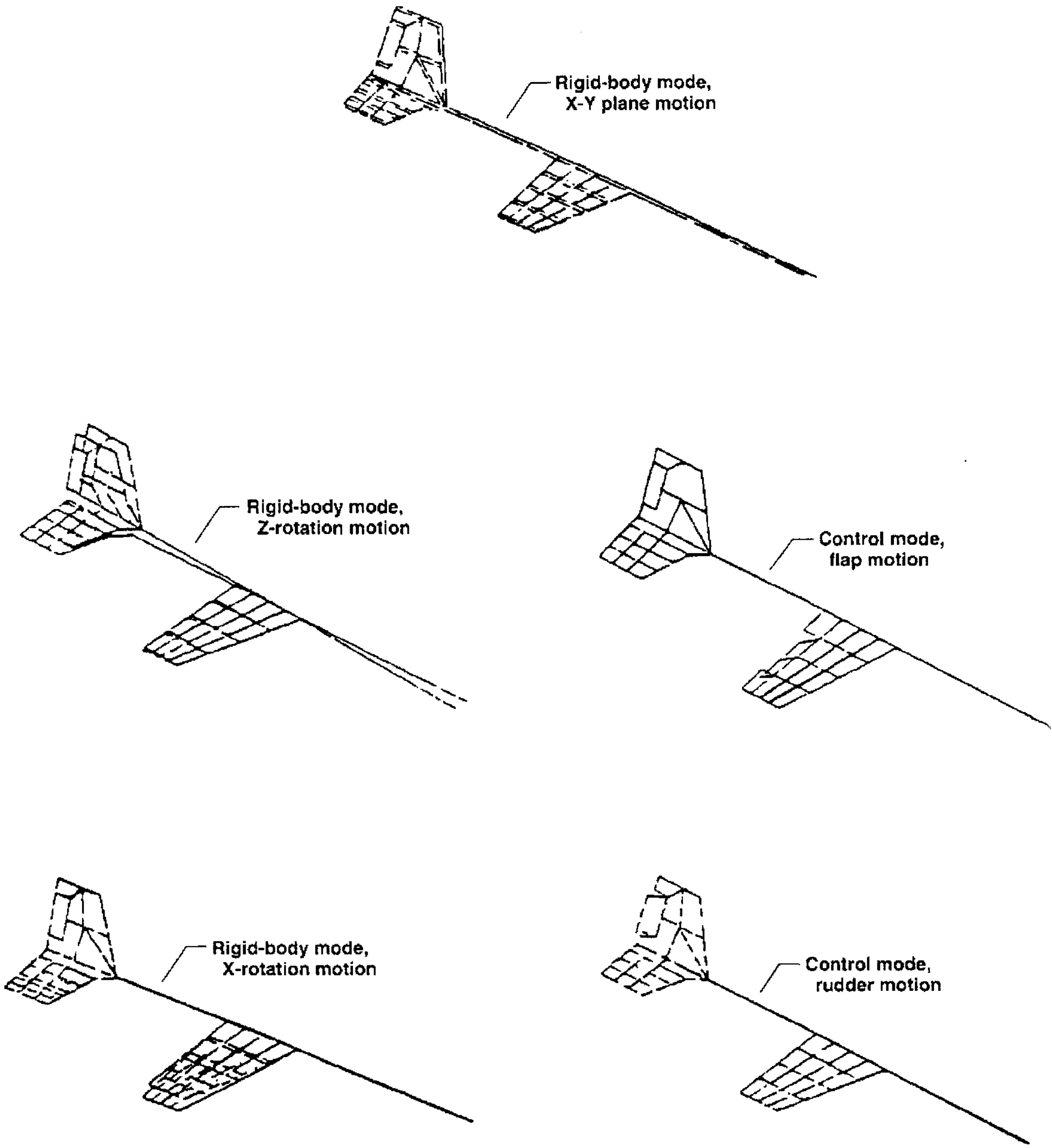


Figure 5 Les 3 modes rigides et les 2 modes de commande du modèle de l'ATM

5.1.3 Les matrices modales

Dans l'absence des forces aérodynamiques, une analyse de l'avion au sol permet de calculer les modes de vibration et les fréquences naturelles, obtenus à l'aide de l'équation suivante :

$$\mathbf{M}_e\ddot{\eta} + \mathbf{C}_e\dot{\eta} + \mathbf{K}_e\eta = 0 \tag{5.1}$$

où $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{C}_e$ et $\mathbf{K}_e$ sont les matrices structurelles de masse, amortissement et rigidité. Dans le cas où la matrice $\mathbf{C}_e$ est nulle et les matrices $\mathbf{M}_e$ et $\mathbf{K}_e$ sont diagonales, alors les fréquences naturelles de la structure sont données par l'équation suivante :

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\mathbf{K}_e(i,i)}{\mathbf{M}_e(i,i)}} \tag{5.2}$$

Les matrices modales structurelles $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{C}_e$, $\mathbf{K}_e$ et leurs fréquences naturelles associées sont calculées en STARS à l'aide du module SOLIDS et sont présentées dans le Tableau I, dans lequel les modes rigides et de commande ont une fréquence naturelle nulle.

Tableau I

L'analyse des vibrations libres pour le calcul des modes et fréquences naturelles

Mode	Fréquence naturelle		Forme du mode	
	Hz	Rad/sec		
1	0	0	Translation selon Y	Φ_R
2	0	0	Rotation selon X (roulis)	Φ_R
3	0	0	Rotation selon Z (lacet)	Φ_R
4	10,141	63,715	1ère flexion de l'empennage vertical	Φ_E
5	12,45	78,224	1ère flexion du fuselage	Φ_E
6	14,684	92,262	1ère flexion de l'aile	Φ_E
7	28,751	180,649	2ème flexion de l'aile	Φ_E
8	29,809	187,296	2ème flexion du fuselage	Φ_E
9	32,448	203,879	1ère torsion de l'aile	Φ_E
10	35,736	224,535	1ère torsion de l'empennage	Φ_E
11	51,137	321,303	3ème flexion du fuselage	Φ_E
12	0	0	Déflection des ailerons	Φ_C
13	0	0	Déflexion de la gouverne de direction	Φ_C

5.1.4 Le modèle aérodynamique de l'ATM

Un modèle aérodynamique de l'ATM est composé par des panneaux sur lesquels les forces aérodynamiques non stationnaires sont générées. Des différentes méthodes sont utilisées pour la génération de ces forces en régime subsonique ou supersonique (la méthode des doublets – DLM - en régime subsonique et la méthode des pressions constantes – CPM - en régime supersonique). Ces forces aérodynamiques sont calculées pour un nombre de *Mach* donné et pour une plage des fréquences réduites. Si nous regroupons les forces aérodynamiques sur tous les panneaux, nous pouvons former la matrice $\mathbf{Q}_{N,N}$ pour un nombre de *Mach* et pour une plage des fréquences réduites *k*. La modélisation aérodynamique de l'ATM est représentée dans la Figure 6.

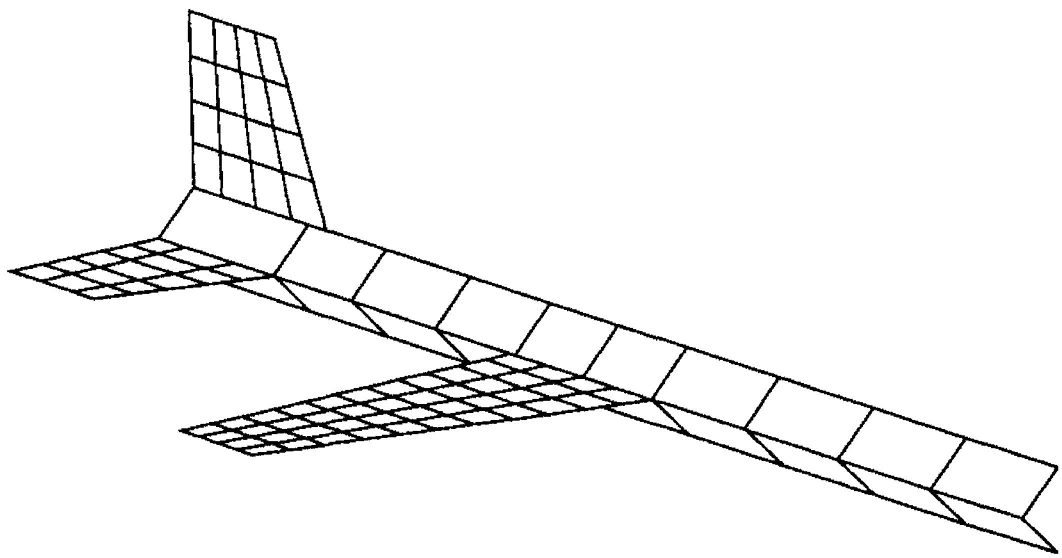


Figure 6 La modélisation aérodynamique de l'ATM par des panneaux

Le module AERO du logiciel STARS permet de calculer les forces aérodynamiques généralisées **Q** du modèle ATM, en fonction du nombre de *Mach* et des fréquences réduites *k*.

5.1.5 Les lois de contrôle de l'ATM

Les deux lois de contrôle de l'ATM en mouvement latéral relient les capteurs de roulis et de lacet aux ailerons et à la gouverne de direction. Chaque loi de commande incorpore la dynamique des capteurs, la dynamique des actionneurs, des filtres et des contrôleurs.

L'architecture des lois de commande du modèle de l'ATM est présentée dans la Figure 7 :

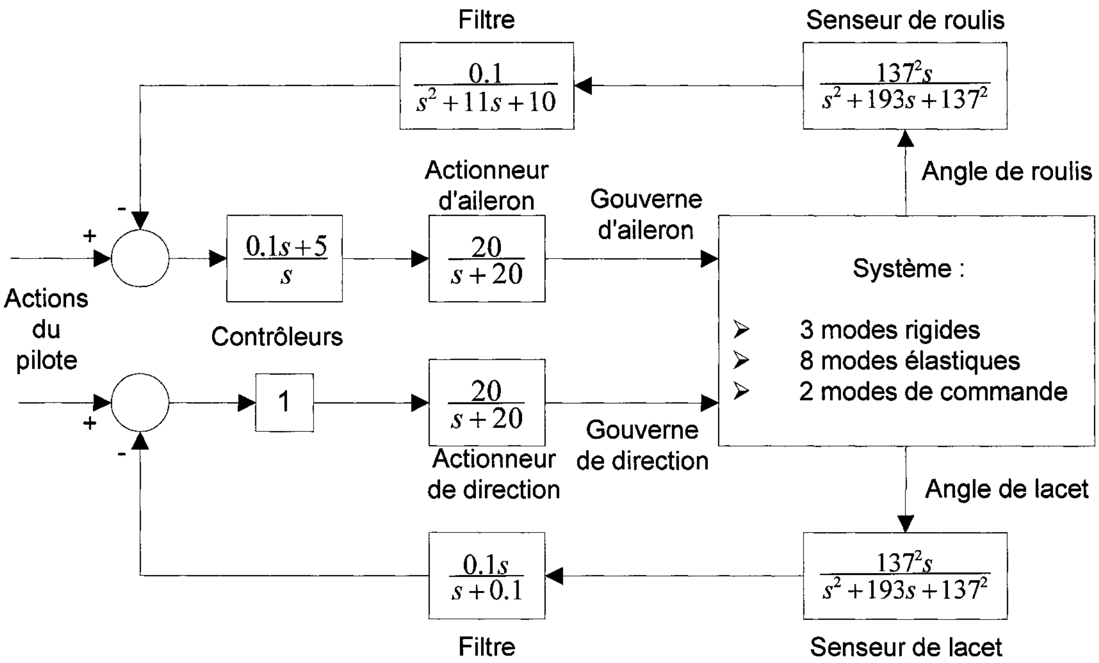


Figure 7 Les boucles de contrôle du modèle de l'ATM

Nous représentons le schéma d'un système aéroservoélastique en boucle fermée dans la Figure 8 et par l'équation (4.31) :

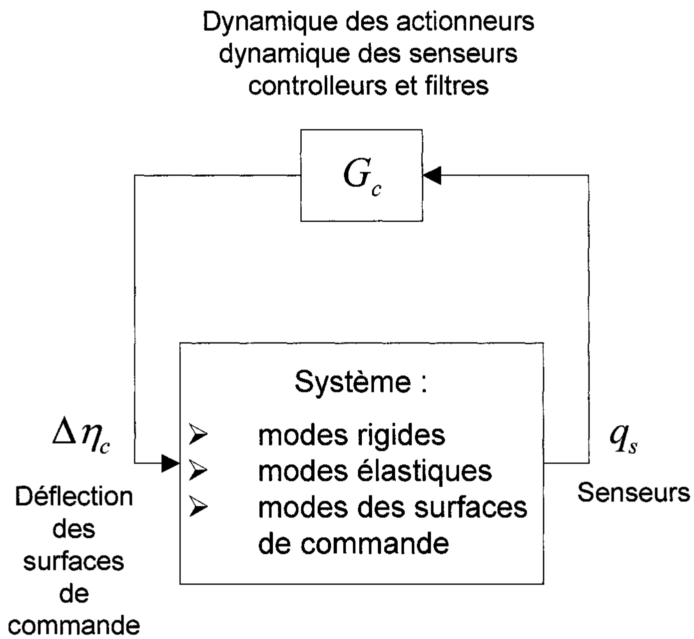


Figure 8 Le système aéroservoélastique en boucle fermée

5.2 Résultats obtenus pour l'ATM

5.2.1 Résultats obtenus pour l'ATM en boucle ouverte

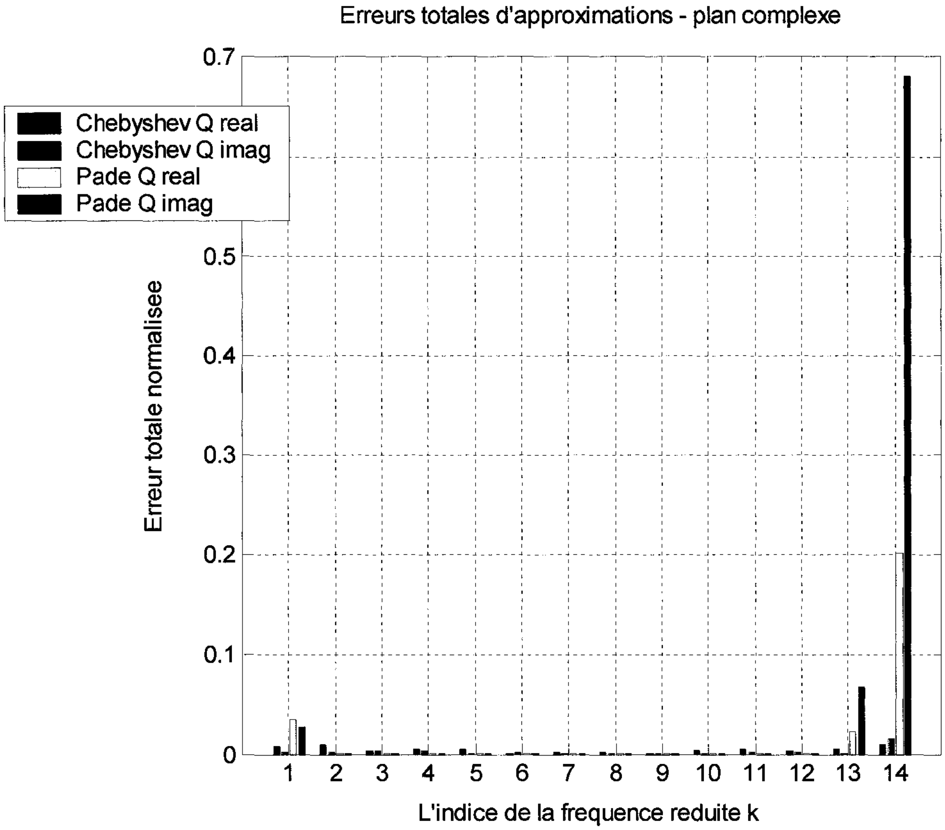
Dans la nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires du domaine de fréquence au domaine de Laplace, nous avons choisi d'utiliser les fonctions *chebyshev* et *chebpade* prédéfinies pour les polynômes de Chebyshev qui se trouvent dans les sous-routines de Maple en Matlab (voir l'Annexe 1 pour plus des détails).

Ces deux fonctions (*chebyshev* et *chebpade*) nous ont permis l'interpolation polynomiale des forces aérodynamiques généralisées agissant sur l'ATM pour 14 fréquences réduites k = [0,0100 0,1000 0,2000 0,3030 0,4000 0,5000 0,5882 0,6250 0,6667 0,7143 0,7692

0,8333 0,9091 1,0000] et 9 valeurs du nombre de *Mach* M = [0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9].

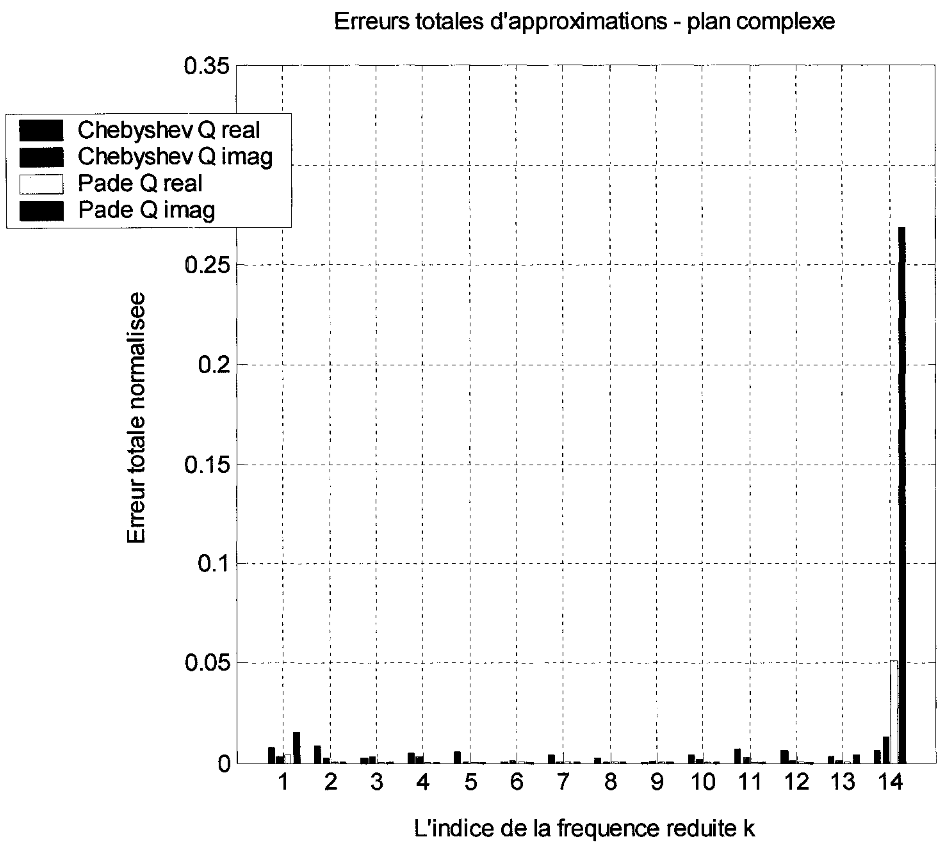
La fonction « *chebyshev* » permet d'obtenir un développement en séries de puissances sous la forme de l'équation (3.27) et la fonction « *chebpade* » permet d'obtenir une approximation par des fractions rationnelles sous la forme de l'équation (3.29). Cette dernière forme de fonction est similaire à la forme fractionnelle utilisée dans la méthode de Padé. Cette fonction incorpore les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev et elle nous permet de varier les degrés du numérateur et du dénominateur. La première comparaison des résultats a été effectuée au niveau des erreurs totales normalisées obtenues pour les éléments $\mathbf{Q}(i,j)$ par chaque méthode d'approximation (Chebyshev et Padé) par rapport aux valeurs des éléments $\mathbf{Q}(i,j)$ obtenues par la méthode DLM en STARS.

Dans les approximations des forces aérodynamiques montrées dans les Graphiques 2 et 3, choisies arbitrairement, nous observons que l'erreur totale normalisée obtenue par la méthode de Chebyshev est beaucoup plus petite que l'erreur totale normalisée obtenue par la méthode de Padé. Grâce aux propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev, nous avons imposé un intervalle de convergence pour l'erreur d'approximation de chaque élément $\mathbf{Q}(i,j)$ de la matrice $\mathbf{Q}$, ce qui nous a permis d'obtenir une erreur d'approximation presque constante sur l'intervalle des fréquences réduites k.



Graphique 2 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé ordre d'approximation [15, 13] et *Mach* = 0,5

Dans les Graphiques 2 et 3, les erreurs totales normalisées des parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques généralisées sont présentées en fonction de la fréquence réduite en utilisant les méthodes d'approximation Chebyshev et Padé. Dans le Graphique 2 l'ordre d'approximation de ces méthodes est [15, 13], et dans le Graphique 3 l'ordre d'approximation de ces méthodes est [16, 14].



Graphique 3 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé ordre d'approximation [16, 14] et *Mach* = 0,5

Nous observons les plus grandes différences entre les erreurs obtenues par la méthode de Chebyshev et les erreurs obtenues par la méthode de Padé à chaque extrémité de l'intervalle d'approximation (voir aussi Annexe 7).

Les différences obtenues sont dues au fait que la méthode de Padé donne une très bonne approximation surtout dans la proximité du point d'approximation (dans notre cas, le point d'approximation est le centre de l'intervalle d'approximation, $k = 0,5$), tandis que la méthode de Chebyshev offre une excellente approximation au long de l'intervalle d'approximation. Grâce aux propriétés des polynômes de Chebyshev, nous imposons dès le début une valeur maximale de l'erreur d'approximation pour chaque élément

$\mathbf{Q}(i,j)$, ce qui démontre que notre méthode est meilleure par rapport à la méthode de Padé.

Nous présentons dans les graphiques suivants, les parties réelles, imaginaires et totales d'un élément des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}(i,j)$ ainsi que les erreurs normalisées d'approximation versus les fréquences réduites k, calculés par les méthodes de Padé et Chebyshev par rapport aux valeurs initiales calculées en STARS. L'ordre d'approximation est [15, 13] et le nombre de *Mach* est $M = 0{,}5$.

L'erreur d'approximation est normalisée pour les parties réelles et imaginaires de chaque élément de la matrice **Q** pour chaque fréquence réduite en utilisant les équations suivantes :

$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}} \frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}new} - \mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right) * 100\%$$

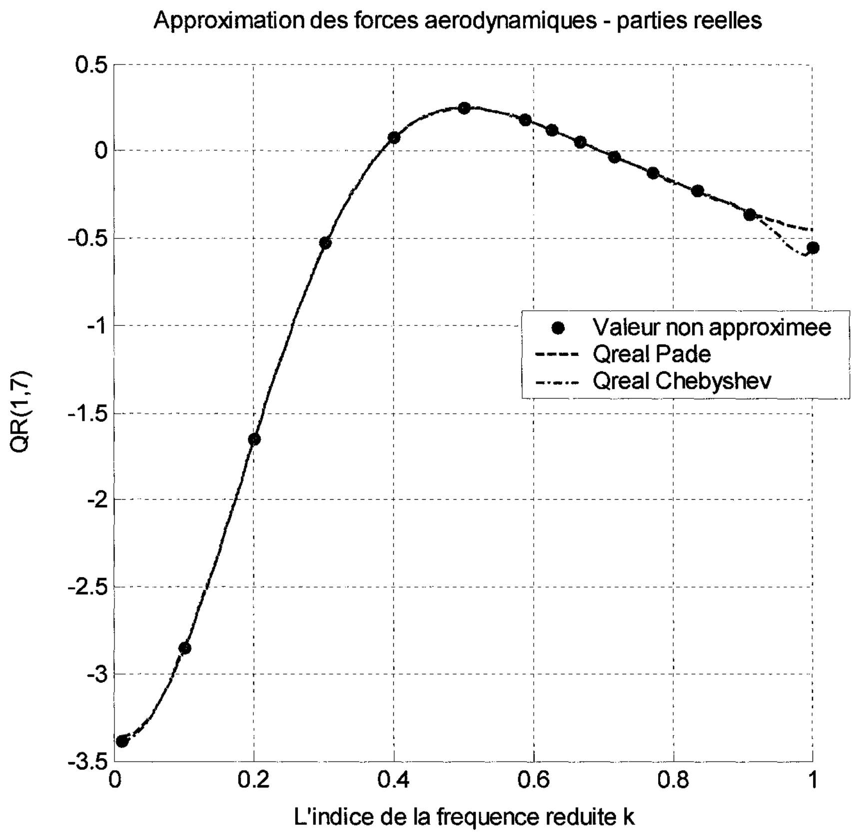
$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imaginary}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}} \frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}new} - \mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right) * 100\% \qquad (5.3)$$

et

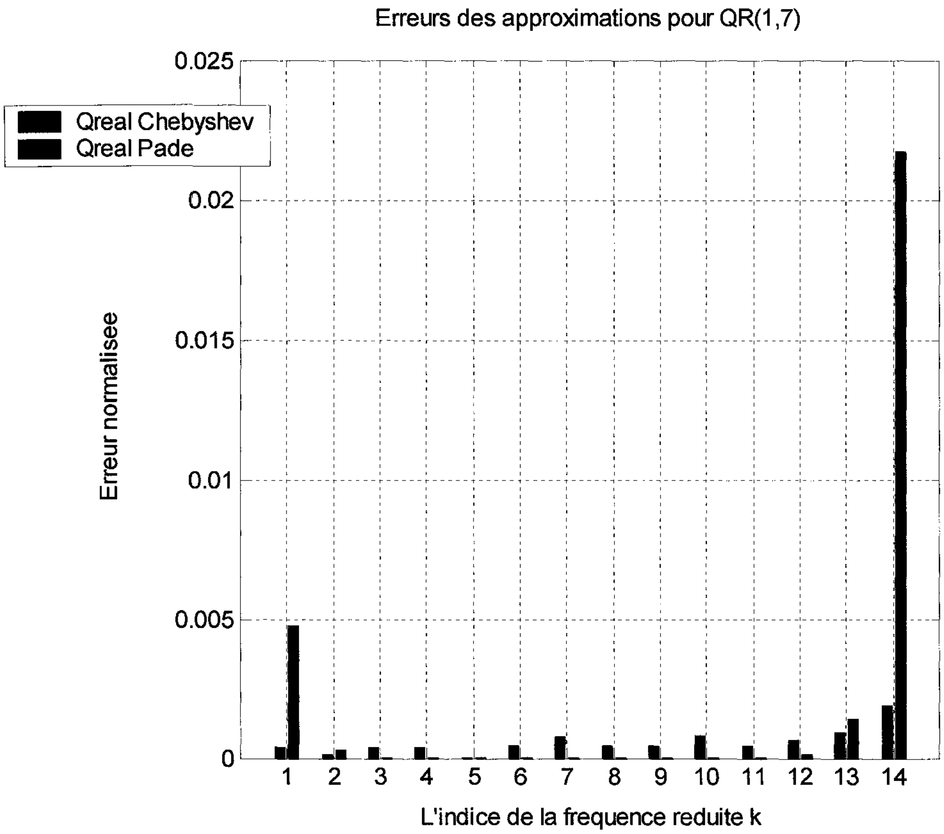
$$J_{\mathbf{Q}} = J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{real}} + J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{imaginary}}$$

où $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}old}$ et $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}old}$ sont les parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques non stationnaires calculées initialement (*old*) en STARS et $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}new}$ et $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}new}$ sont les parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques non stationnaires (*new*) calculées par la méthode Chebyshev ou par la méthode Padé. N_{modes} est le nombre des modes dépendant des dimensions de la matrice **Q** et J est l'erreur totale normalisée.

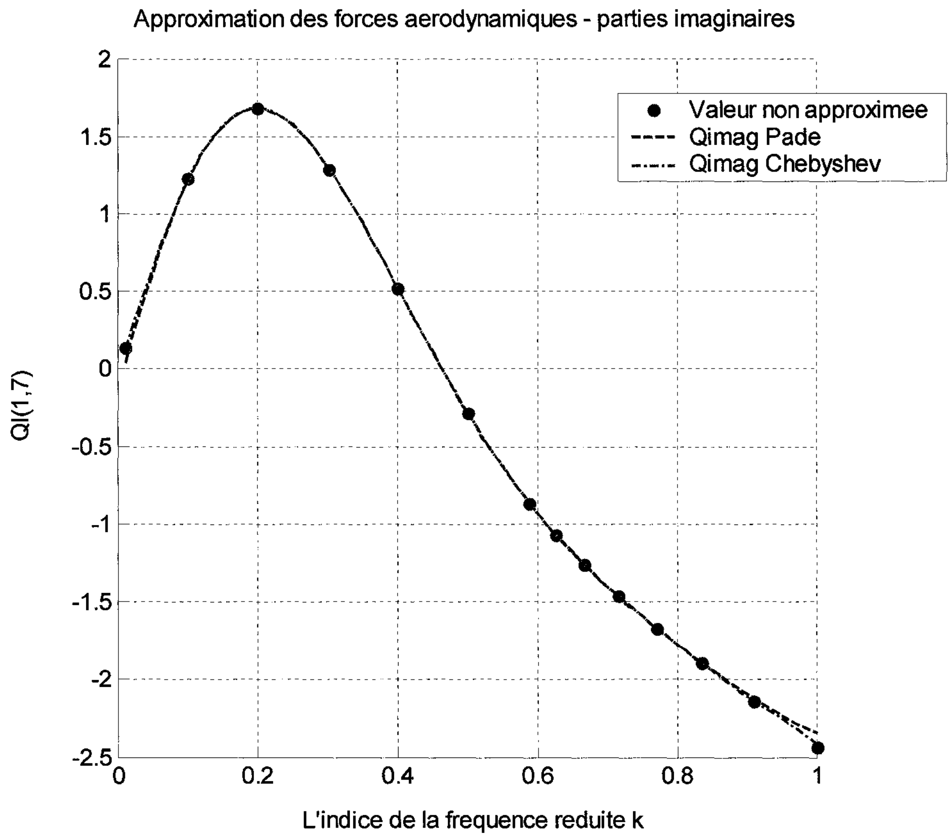
Plus spécifiquement, dans les Graphiques 4 et 5, nous représentons les parties réelles de $\mathbf{Q}(1,7)$, dénotées par $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(1,7)$ et leurs erreurs d'approximation versus les fréquences réduites k. Les parties imaginaires de **Q**(1,7) dénotées par $\mathbf{Q_I}$(1,7) et leurs erreurs d'approximation versus les fréquences réduites k sont représentées dans les Graphiques 6 et 7. Les parties imaginaires de **Q**(1,7), dénotées par $\mathbf{Q_I}$(1,7) sont représentées en fonction des parties réelles de **Q**(1,7) dénotées par $\mathbf{Q_R}$(1,7) dans le Graphique 8. Les erreurs normalisées d'approximation pour les forces aérodynamiques totales **Q**(1,7) sont représentées en fonction des fréquences réduites k dans le Graphique 9.



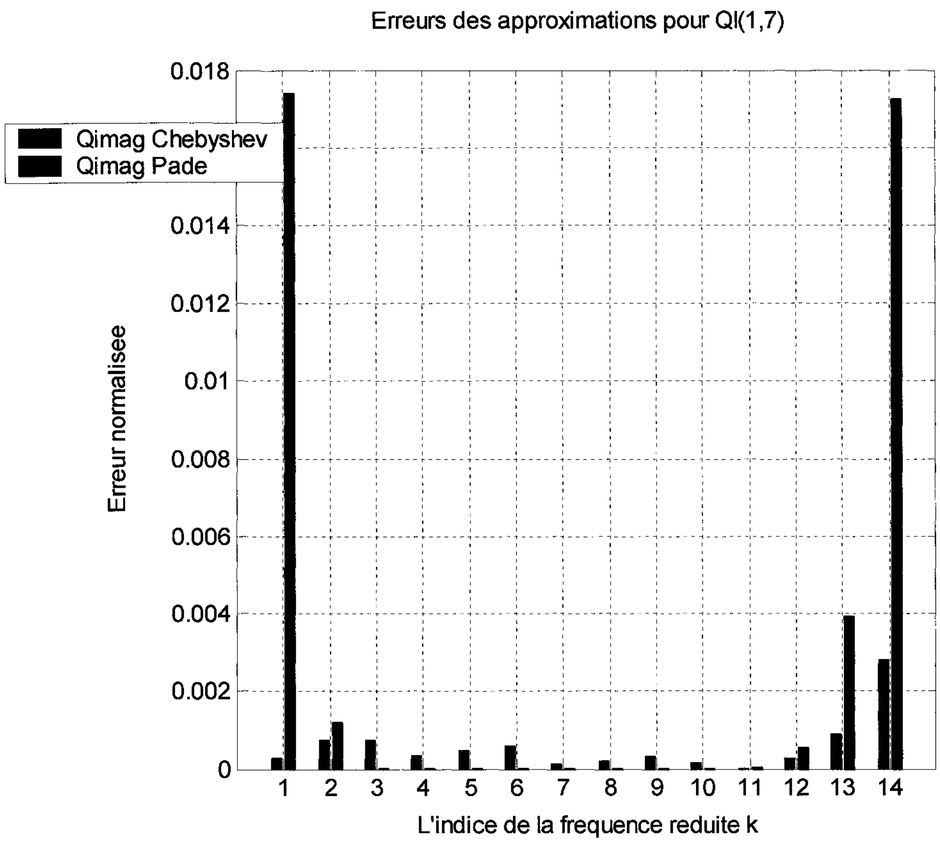
Graphique 4 $\mathbf{Q_R}$(1,7) versus les fréquences réduites k



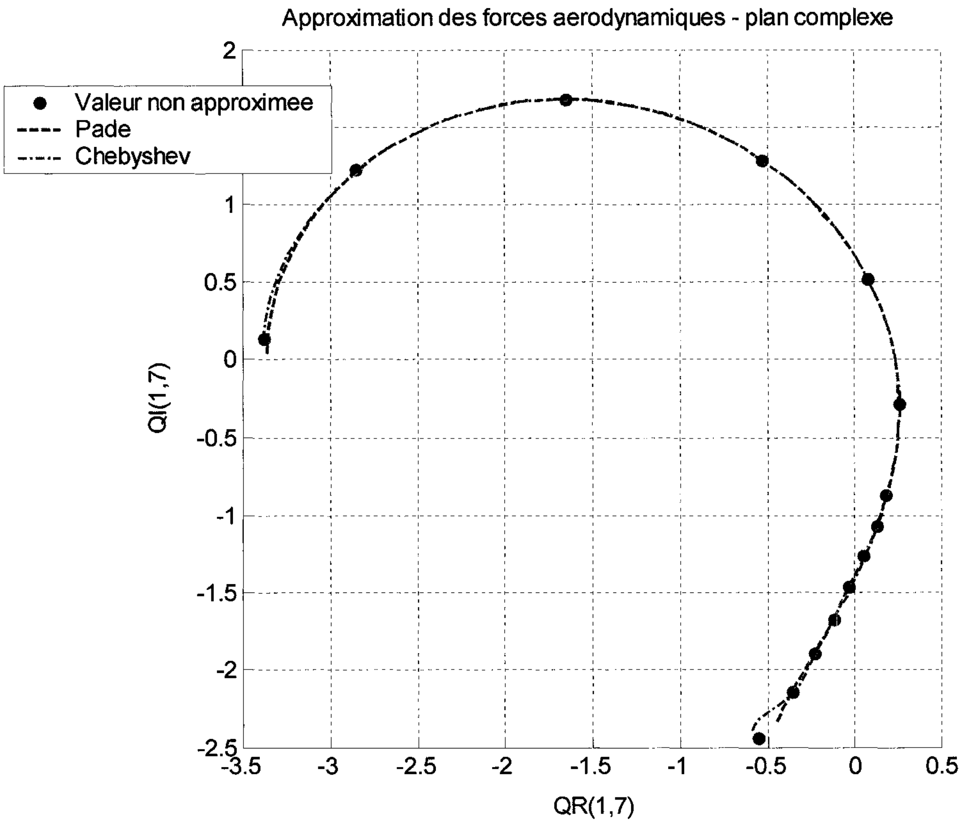
Graphique 5 Erreurs normalisées d'approximation pour $\mathbf{Q_R}(1,7)$ versus les fréquences réduites *k*



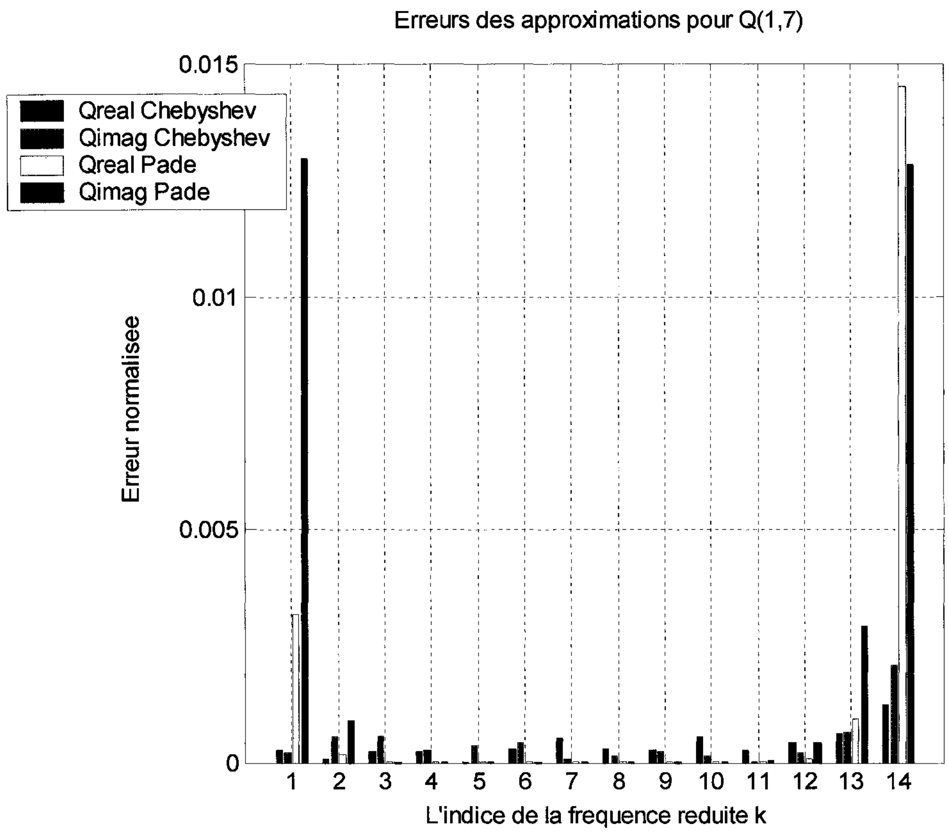
Graphique 6 **Q$_I$**(1,7) versus les fréquences réduites *k*



Graphique 7 Erreurs normalisées d'approximation pour $\mathbf{Q}_\mathrm{I}(1,7)$ versus les fréquences réduites k



Graphique 8 **Q**$_{\mathbf{I}}$(1,7) versus **Q**$_{\mathbf{R}}$(1,7)



Graphique 9 Erreurs normalisées d'approximation pour **Q**(1,7) versus les fréquences réduites *k*

Étant donné qu'il est difficile de visualiser les valeurs numériques des erreurs des approximations dans les Graphiques 2 à 9, nous présentons dans le tableau suivant les valeurs numériques des erreurs normalisées obtenues pour 4 nombres de *Mach* et pour 3 ordres de l'approximation.

Tableau II

Erreurs totales normalisées de Chebyshev et de Padé pour 3 ordres d'approximation et 4 nombres de *Mach* pour l'ATM en boucle ouverte

Nombre de Mach	Ordre d'approximation	Méthode	Erreur totale normalisée		
			$J_{Q\,\mathrm{real}}$	$J_{Q\,\mathrm{imaginary}}$	J_Q
0,4	[16,14]	Chebyshev	0,0656	0,1670	0,2326
		Padé	0,7831	0,2020	0,9852
	[15,13]	Chebyshev	0,0643	0,1605	0,2248
		Padé	0,1226	0,5149	0,6376
	[10,8]	Chebyshev	0,0676	0,1670	0,2346
		Padé	0,0570	0,0705	0,1275
0,5	[16,14]	Chebyshev	0,0647	0,0343	0,0991
		Padé	0,0552	0,2876	0,3429
	[15,13]	Chebyshev	0,0672	0,0367	0,1039
		Padé	0,2601	0,7759	1,0361
	[10,8]	Chebyshev	0,0500	0,0299	0,0799
		Padé	0,1363	0,0556	0,1919
0,6	[16,14]	Chebyshev	0,1209	0,0911	0,2121
		Padé	0,1451	0,0792	0,2243
	[15,13]	Chebyshev	0,1209	0,0804	0,2013
		Padé	0,1610	3,7261	3,8871
	[10,8]	Chebyshev	0,1222	0,0786	0,2009
		Padé	0,3213	0,0289	0,3503
0,7	[16,14]	Chebyshev	0,0871	0,1710	0,2581
		Padé	1,2893	1,8254	3,1148
	[15,13]	Chebyshev	0,0867	0,1703	0,2571
		Padé	2,3919	2,8628	5,2547
	[10,8]	Chebyshev	0,0926	0,1607	0,2533
		Padé	219,2462	5,6375	224,8837

L'erreur totale normalisée calculée par la méthode de Chebyshev se stabilise autour des valeurs $J_Q = 0{,}1 \ldots 0{,}2$, tandis que l'erreur calculée par la méthode de Padé (et, par conséquence, par toutes les autres méthodes basées sur les fractions rationnelles de Padé) présente des fluctuations constantes en fonction de l'ordre de l'approximation.

Dans le but de comparer les résultats obtenus avec notre méthode avec les données initiales, nous calculons les valeurs de battement (vitesses et fréquences) pour l'ATM en boucle ouverte. Nous avons utilisé les mêmes paramètres d'entrée de simulation que ceux utilisés en STARS : la longueur de référence pour la moitié de la corde de l'aile b = 0,98 m (38,89 pouces), la densité de référence de l'air au niveau de la mer $\rho_0 = 1{,}225$ kg/m^3, l'altitude de référence $Z = 0$ m, le nombre de *Mach* $M = 0{,}9$ et la vitesse de référence du son au niveau de la mer $a_0 = 340{,}294$ m/s.

Les valeurs des vitesses et fréquences de battement, obtenues par la méthode de Chebyshev et par la méthode de Padé pour plusieurs ordres d'approximation, sont montrées dans le Tableau III.

La variation de la fréquence et de l'amortissement en fonction de la vitesse est présentée dans les Figures 3 à 7 à l'Annexe 1, pour chaque mode élastique.

Nous avons constaté que les résultats obtenus par la méthode de Chebyshev sont très précis et qu'à partir de l'ordre d'approximation [8, 6] ou [9,7], la solution du système (exprimée en termes de vitesses et fréquences de battement) converge. La méthode Padé converge pour une approximation d'ordre minimal [18, 16]. Dans le cas de la méthode Padé, le temps de calcul et les ressources de mémoire sont plus grands à cause de l'ordre d'approximation plus élevé auquel la méthode converge par rapport à l'ordre d'approximation de notre méthode.

Tableau III

Vitesses et fréquences de battement pour l'ATM en boucle ouverte

Méthode	Battement 1 (F1B – Fuselage 1st Bending)		Temps de calcul (s)
	Vitesse (noeuds)	Fréquence (rad/s)	
STARS - ASE	474,1	77,3	-
pk - Padé [8,6]	445,5	77,5	122
pk - Padé [9,7]	445,5	77,5	134
pk - Padé [10,8]	445,8	77,5	144
pk - Padé [11,9]	446,0	77,5	151
pk - Chebyshev [8,6]	446,5	77,5	40
pk - Chebyshev [9,7]	446,6	77,5	47
pk - Chebyshev [10,8]	446,6	77,5	53
pk - Chebyshev [11,9]	446,6	77,5	58

5.2.2 Résultats obtenus pour l'analyse aéroservoélastique de l'ATM en boucle fermée

L'approximation des forces aérodynamiques est réalisée pour 14 fréquences réduites k et 9 nombres de *Mach* (voir Annexe 2). Les mêmes types de différences entre les valeurs des erreurs totales normalisées obtenues avec les méthodes Chebyshev et Padé ont été observées à chaque extrémité de l'intervalle d'approximation pour le système ATM en boucle fermée que pour le système ATM en boucle ouverte. Nous pouvons voir que la méthode Chebyshev est en mesure de fournir une erreur très petite et presque constante au long de l'intervalle d'approximation.

Les valeurs des erreurs totales normalisées présentées dans le Tableau IV, correspondantes aux ordres d'approximation [16, 14], [15, 13] et [10, 8] et *Mach* = 0,9 nous montrent que la méthode Chebyshev donne des résultats beaucoup plus exacts que la méthode Padé (erreurs plus petites). L'erreur totale normalisée calculée avec la méthode Chebyshev se stabilise rapidement autour des valeurs J_Q = 0,09 … 0,1, tandis que l'erreur totale normalisée calculée par la méthode Padé (et, par conséquence, par toutes les méthodes basées sur les fractions rationnelles de Padé) présente des fluctuations constantes dépendantes de l'ordre de l'approximation.

Tableau IV

Erreurs totales normalisées de Chebyshev et de Padé pour 3 ordres d'approximation pour l'ATM en boucle fermée

Ordre d'approximation	Méthode	Erreur totale normalisée		
		$J_{Q\ \mathrm{real}}$	$J_{Q\ \mathrm{imaginary}}$	J_Q
[16, 14]	Chebyshev	0,0651	0,0376	0,1027
	Padé	0,0653	0,2877	0,3530
[15, 13]	Chebyshev	0,0554	0,0401	0,0955
	Padé	0,2601	0,7760	1,0361
[10, 8]	Chebyshev	0,0615	0,0351	0,0966
	Padé	0,1363	0,0556	0,1919

Nous observons que l'erreur obtenue avec la méthode de Padé est entre 2 et 10 fois plus grande que l'erreur obtenue avec notre méthode. Pour réaliser la comparaison des résultats de battement (vitesses et fréquences) obtenus par les deux méthodes, nous utilisons la méthode p de calcul du battement. Les paramètres de simulation suivants ont été utilisés (qui sont les mêmes paramètres que ceux utilisés pour l'ATM en STARS): la moitié de la corde de référence de l'aile b = 0,98 m (38,89 pouces), la densité de référence de l'air au niveau de la mer ρ_0 = 1,225 kg/m^3, l'altitude de référence Z = 8540 m (28000 pieds), le nombre de *Mach* de référence M = 0,9, une plage de vitesses équivalente de 0 à 600 nœuds (308,66 m/s), et la vitesse de référence du son au niveau de la mer a_0 = 340,294 m/s. Les valeurs des vitesses et fréquences de battement, pour plusieurs ordres d'approximation, obtenues par les méthodes Chebyshev et Padé, sont données dans le Tableau V :

Tableau V

Vitesses et fréquences de battement pour l'ATM en boucle fermée

Méthode	Battement 1 (mode de commande 2)		
	Vitesse (nœuds)	Fréquence (rad/s)	Temps de calcul (s)
p - Padé [4,2]	287,7	51,15	354
p - Padé [5,3]	287,6	51,13	361
p - Padé [8,6]	287,6	51,10	392
p - Chebyshev [4,2]	287,6	50,92	97
p - Chebyshev [5,3]	287,6	50,92	102
p - Chebyshev [8,6]	286,7	50,72	126

Les valeurs des vitesses et fréquences de battement obtenues avec notre nouvelle méthode sont très proches de celles obtenues avec la méthode Padé. Cependant, le temps de calcul nécessaire pris par la méthode Padé est de 2 à 3 fois plus grand que le temps d'exécution pris par la méthode Chebyshev, dépendamment de l'ordre d'approximation utilisé.

Dans le but d'obtenir un système aéroservoélastique équivalent mais d'une taille réduite et dans le but de réduire le temps de calcul, nous considérons les algorithmes de réduction LRSRM (Low Rank Square Root Method) et LRSM (Low Rank Schur Method) [41,42].

L'utilisation d'un algorithme de réduction revient à remplacer la matrice $\mathbf{Q}(\overline{s})$, écrite sous la forme d'espace d'état suivante : $\mathbf{Q}(\overline{s}) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(\overline{s}\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ par une matrice $\hat{\mathbf{Q}}(\overline{s}) = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{C}}(\overline{s}\mathbf{I}_j - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ de dimension réduite. Les algorithmes décrits sont des méthodes de projection de l'espace d'état, qui s'obtiennent toutes de la manière suivante :

- Soit $\mathbf{T}$ une matrice carrée n x n inversable choisie de la manière que l'espace de projection est engendré par les j premières colonnes de $\mathbf{T}$.
- Le quadruplet $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT},\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{CT},\ \mathbf{D})$ est équivalent à $(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$.
- Soit $\mathbf{S}_B = \mathbf{T}(:,1:j)$ et $\mathbf{S}_C = \mathbf{T}^{-\mathrm{T}}(:,1:j)$.
- Alors $(\mathbf{S}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{S}_B,\ \mathbf{S}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{B},\ \mathbf{C}\mathbf{S}_B,\ \mathbf{D})$ est le système réduit qui satisfait la propriété de bi-orthogonalité $\mathbf{S}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_B = \mathbf{I}_j$.
- Différents choix de réduction du système donnent des différents résultats. Les algorithmes choisis par nous sont basés sur des approximations de rang réduit des solutions (grammiens) des équations de Lyapunov :

  $$\mathbf{A}X_B + X_B\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$
  $$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}X_C + X_C\mathbf{A} = -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$$

où X_B est le grammien d'observabilité et X_C est le grammien de contrôlabilité du système (**A**,**B**,**C**,**D**).

Nous avons utilisé le module Lyapack [43] développé en Matlab par Penzl pour l'implémentation des algorithmes LRSRM et LRSM. Les étapes de ces algorithmes sont les suivantes :

L'algorithme LRSRM

- Le calcule d'une approximation des grammiens : $X_B = Z_B Z_B^{\mathrm{T}}$ et $X_C = Z_C Z_C^{\mathrm{T}}$ en utilisant l'algorithme LR-Smith [44-46].
- La décomposition en valeurs singulières (*SVD*) du produit $Z_C^{\mathrm{T}} Z_B = \mathbf{U}_{C0} \mathbf{\Sigma}_0 \mathbf{U}_{B0}^{\mathrm{T}}$.
- Les matrices réduites $\mathbf{U}_C = \mathbf{U}_{C0(:,1:j)}$, $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{\Sigma}_{0(:,1:j)}$ et $\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_{B0(:,1:j)}$ sont définies.
- Les matrices de transformation $\mathbf{S}_B = Z_B \mathbf{U}_B \mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ et $\mathbf{S}_C = Z_C \mathbf{U}_C \mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ sont définies.
- Le système réduit est défini par les matrices suivantes : $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_C^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{S}_B$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{S}_C^{\mathrm{T}} \mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{S}_B$, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$.

L'algorithme LRSM

- Le calcul de Z_B et Z_C en utilisant l'algorithme LR-Smith.
- La factorisation ***QR*** de Z_B et Z_C en utilisant les équations : $Z_B = \mathbf{Q}_{B1} \mathbf{R}_B$ et $Z_C = \mathbf{Q}_{C1} \mathbf{R}_C$.
- La décomposition en valeurs singulières (*SVD*) du produit $\mathbf{R}_B Z_B^{\mathrm{T}} Z_C \mathbf{R}_C^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}_{B2} \mathbf{D} \mathbf{Q}_{C2}^{\mathrm{T}}$.
- Les matrices $\mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}_{B1} \mathbf{Q}_{B2}$ et $\mathbf{Q}_C = \mathbf{Q}_{C1} \mathbf{Q}_{C2}$ sont définies.

- La factorisation de type Schur : $\mathbf{D}\mathbf{Q}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_B = \mathbf{P}_B\mathbf{T}_B\mathbf{P}_B^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_C = \mathbf{P}_c\mathbf{T}_c\mathbf{P}_c^{\mathrm{T}}$ est réalisée.
- Les matrices $\mathbf{V}_B = \mathbf{Q}_B\mathbf{P}_{B(:,1:j)}$, $\mathbf{V}_C = \mathbf{Q}_C\mathbf{P}_{C(:,1:j)}$ sont définies.
- La décomposition en valeurs singulières (*SVD*) du produit $\mathbf{V}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_B = \mathbf{U}_C\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}_B^{\mathrm{T}}$ est réalisée.
- Les matrices de transformation $\mathbf{S}_B = Z_B\mathbf{U}_B\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ et $\mathbf{S}_C = Z_C\mathbf{U}_C\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ sont définies.
- Le système réduit est défini par les matrices suivantes : $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{S}_B$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{S}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{S}_B$, $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$.

Ces algorithmes sont utilisés pour la réduction des systèmes de grande dimension ($n > 500$) et sont décrits en détail par Penzl. Suite à l'application des algorithmes LRSRM et LRSM nous avons obtenu les mêmes résultats que ceux obtenus en utilisant la méthode *p*. La différence entre ces résultats a été observée au niveau du temps de calcul qui a été presque la moitié du temps de calcul normal.

Cependant, ces deux algorithmes présentent le désavantage d'une application limitée : lorsque le système est instable (dans le cas d'un avion, lorsque le battement apparaît), le module Lyapack n'est pas capable de résoudre les équations de Lyapunov. Dans le cas de l'ATM, la première instabilité correspond à l'apparition du premier battement, alors les valeurs du premier battement (vitesses et fréquences) peuvent être calculées, mais il est impossible de calculer les valeurs des battements (vitesses et fréquences) suivants.

CHAPITRE 6

ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE F/A – 18 EN BOUCLE OUVERTE

6.1 Présentation générale de l'avion F /A – 18

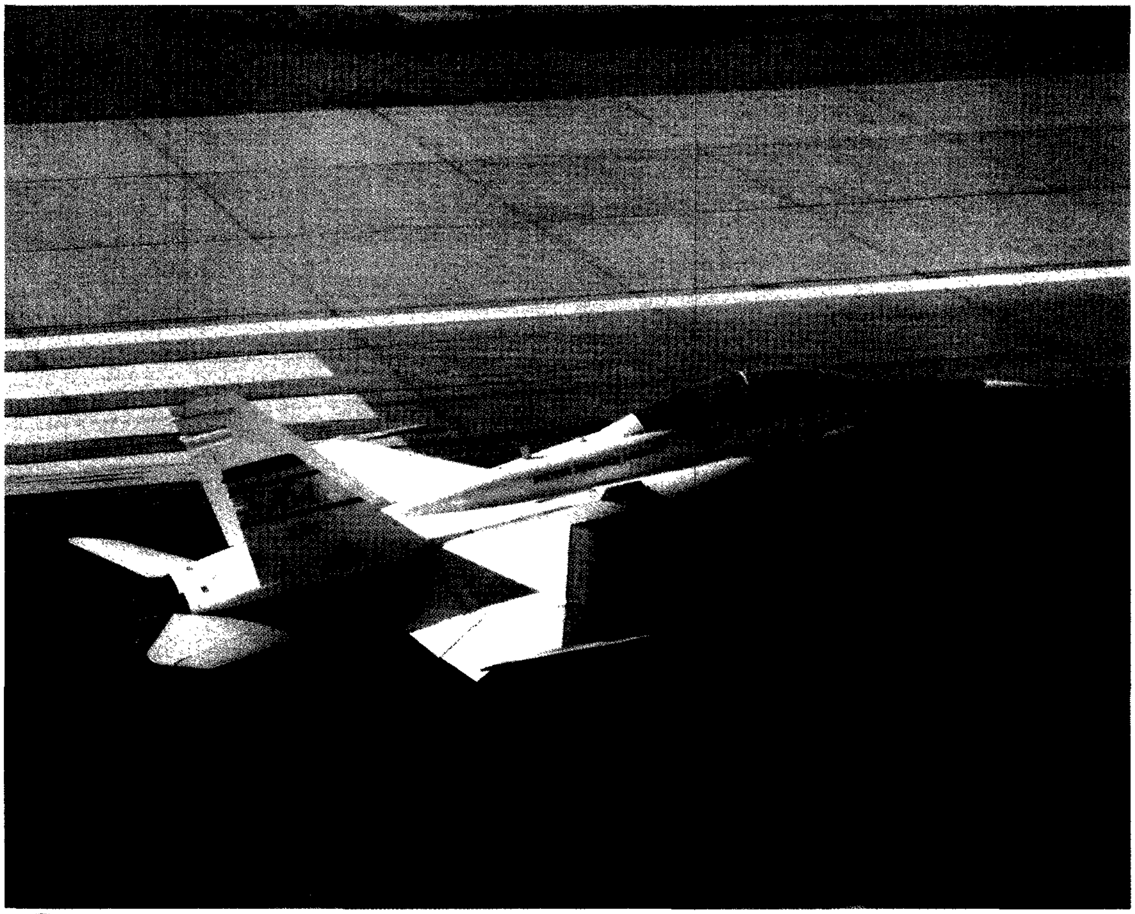
Les données des matrices structurelles **M**, **C** et **K** et aérodynamiques **Q**(*k*, *Mach*) pour l'avion F/A-18 nous ont été fournies par les laboratoires de la NASA Dryden Flight Research Center (NASA DFRC). Cet avion est un avion standard à deux places.

Ce modèle d'avion est présenté dans les 3 figures suivantes (Figures 9 à 11) trouvées sur les pages Internet des laboratoires de la NASA DFRC [47]. Dans la Figure 12 nous trouvons un schéma de cet avion qui a été connu d'abord chez NASA DFRC sous le nom de « Ship 845 ». Des capteurs ont été installés sur sa structure flexible pour calculer des différentes charges aérodynamiques.

Figure 9 L'avion F/A - 18 vu d'en haut

Dryden Flight Research Center EC95-42988-1 Photographed FEB1995
F-18 Hornet modified as a Systems Research Aircraft to evaluate
new operating and control technologies. (NASA/Jim Ross)

Figure 10 L'avion F/A - 18 vu d'en bas



NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection
http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html
NASA Photo: EC98-44672-3 Date: Jul 1998

F-18 Systems Research Aircraft (SRA) touches down on main runway at Edwards AFB

Figure 11 L'avion F/A – 18 à l'atterrissage

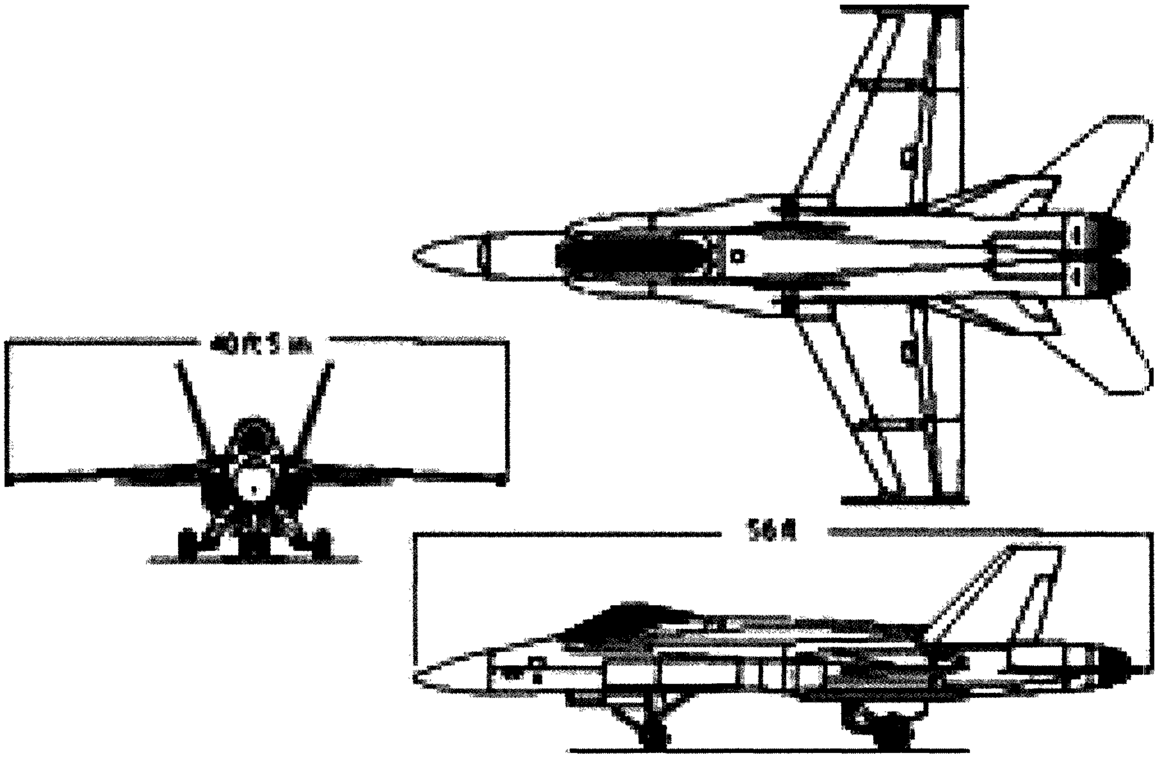


Figure 12 Design de l'avion F/A – 18

Les battements de la structure de l'avion peuvent provoquer la perte de contrôle de l'avion, l'affaiblissement de sa structure et ils peuvent même entraîner sa destruction. L'enveloppe de vol de l'avion (Figure 13) représente la plage d'altitude et de vitesse dans laquelle l'avion peut voler sans le risque d'apparition du phénomène de battement.

Dans le but de calculer les vitesses et les fréquences de battement, et de construire l'enveloppe de vol de l'avion, plusieurs analyses aéroservoélastiques ont été menées sur ce type d'avion chez NASA DFRC. Toute modification structurelle de l'avion effectuée dans le but d'améliorer ses performances a continué à provoquer des nouvelles analyses aéroservoélastiques et à modifier l'enveloppe de vol de l'avion.

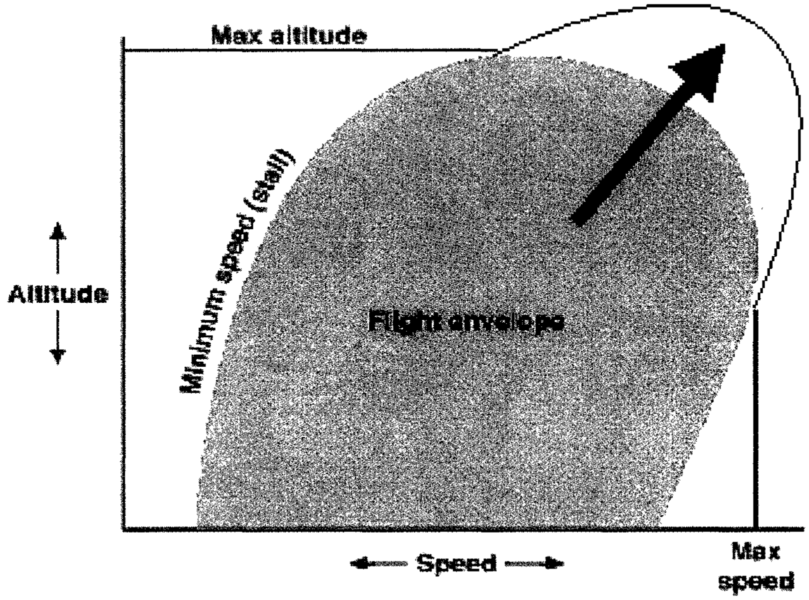


Figure 13 L'enveloppe de vol pour un avion

Par exemple, des essais de battement pour l'avion F/A - 18 ont été répétés suite à des modifications majeures structurelles de l'aile gauche. Ces modifications ont été réalisées dans le but d'intégrer des différents types d'actuateurs hydrauliques et électromécaniques sur l'aileron de l'aile gauche.

6.2 Le modèle analytique du F/A – 18

L'avion F/A – 18 a été modélisé par les théories des éléments finis. Suite à cette modélisation en STARS, chez NASA DFRC, la dynamique aéroélastique et les caractéristiques modales de cet avion ont été calculées. Dans l'absence des forces aérodynamiques, donc au sol, nous considérons un total de 43 modes de vibration :

- 5 modes rigides (2 symétriques et 3 anti-symétriques)
- 28 modes élastiques (14 symétriques et 14 anti-symétriques)
- 10 modes de commande (5 symétriques et 5 anti-symétriques)

Dans les conditions des essais au sol, les surfaces de contrôle ne sont pas actives et les modes de commande ne sont pas inclus dans le modèle. Les noms des modes et les valeurs de leurs fréquences naturelles associées sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau VI

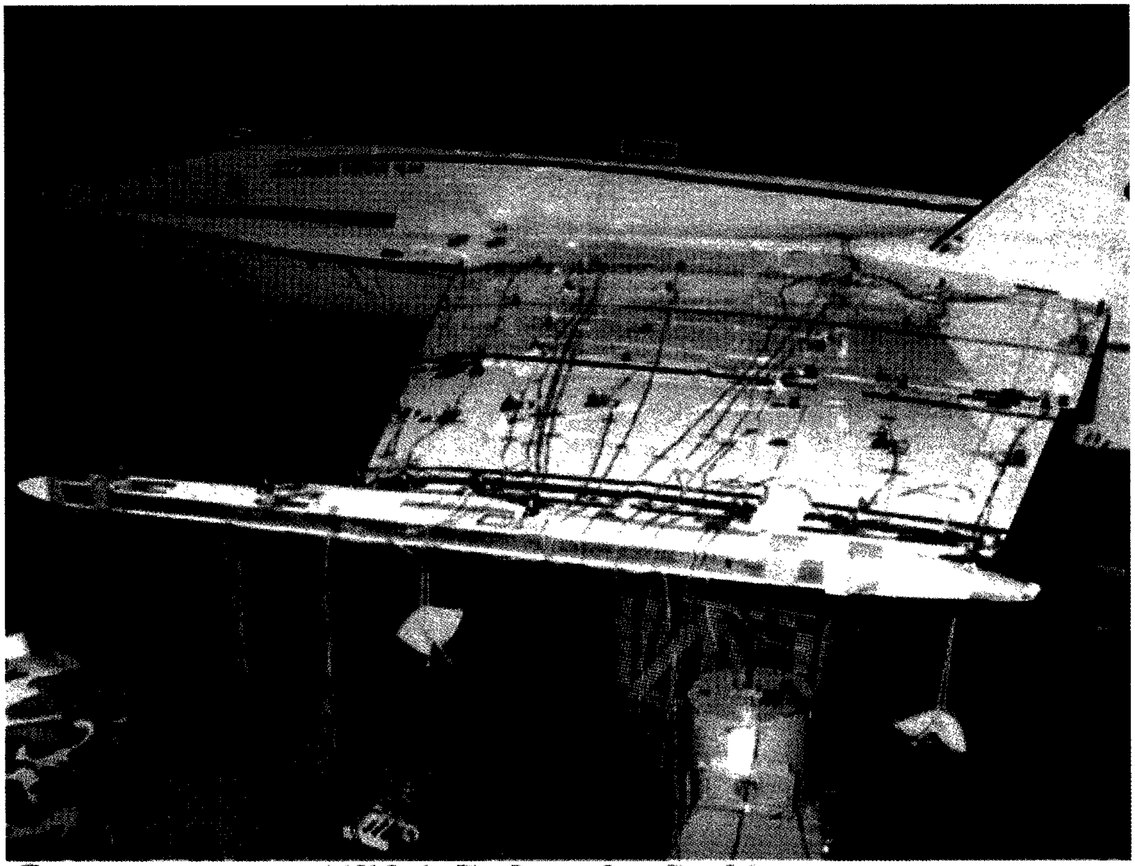
Les fréquences naturelles du modèle structurel pour l'avion F/A – 18

Mode	Symmetric (Hz)	Anti-symmetric (Hz)
1ère flexion de l'aile (Wing 1st Bending **W1B**)	5,59	8,84
1ère flexion de fuselage (Fuselage 1st Bending **FUS1B**)	9,30	8,15
1ère flexion de l'empennage (Stabilator 1st Bending **S1B**)	13,21	12,98
1ère torsion de l'aile (Wing 1st torsion **W1T**)	13,98	14,85
1ère flexion de l'empennage vertical (Vertical Tail 1st Bending **VT1B**)	16,83	15,61
2ième flexion de l'aile (Wing 2nd Bending **W2B**)	16,95	16,79
Torsion vers l'extérieur de l'aile (Wing Outboard Torsion **WOBT**)	17,22	-
2ième flexion du fuselage (Fuselage 2nd Bending **FUS2B**)	19,81	18,62
Rotation des flaps au bord de fuite (Trailing Edge Flap Rotation **TEFR**)	23,70	23,47

Tableau VI (suite)

Mode	Symmetric (Hz)	Anti-symmetric (Hz)
Torsion de fuselage (Fuselage Torsion **FUST**)	-	24,19
Mode latéral (Launcher Rail Lateral **LRL**)	-	24,35
Mode en avant et en arrière du stabilisateur (Stabilator Fore and Aft **SFA**)	28,31	28,58
$2^{ième}$ torsion de l'aile (Wing 2^{nd} Torsion **W2T**)	29,88	29,93
Rotation des ailerons (Aileron Rotation **AROT**)	33,44	-
Torsion de fuselage en arrière (Aft Fuselage Torsion **AFT**)	-	37,80
Torsion de l'aileron (Aileron Torsion **ATOR**)	38,60	-
Tangage de l'aile (Wing Pitch **WPIT**)	-	39,18
$3^{ième}$ flexion de l'aile (Wing 3^{rd} Bending **W3B**)	43,17	-

Nous pouvons voir dans la Figure 14 les positions des accéléromètres et des autres capteurs pendant les essais au sol de l'avion F/A – 18.



NASA Dryden Flight Research Center Photo Collection
http://www.dfrc.nasa.gov/gallery/photo/index.html
NASA Photo: EC02-0203-46 Date: August 22, 2002 Photo by: Tom Tschida
The upper wing surfaces of the Active Aeroelastic Wing F/A-18 test aircraft are covered with accelerometers and other sensors during ground vibration tests at NASA Dryden Flight Research Center.

Figure 14 Essais au sol sur l'avion F/A – 18

La méthode des doublets (Doublet Lattice Method DLM) et la méthode des pressions constantes (CPM) sont utilisées en STARS pour calculer les forces aérodynamiques non stationnaires pour plusieurs nombres de *Mach* et fréquences réduites *k*'s : en régime subsonique (la méthode DLM) et en régime supersonique (la méthode CPM). Plus précisément, ces forces aérodynamiques sont calculées pour 6 nombres de *Mach* = 0,85 ; 0,9 ; 1,1 ; 1,3 ; 1,4 et 1,6 et pour 14 fréquences réduites k = 0,01 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,303 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,588 ; 0,625 ; 0,667 ; 0,714 ; 0,769 ; 0,833 ; 0,909 et 1.

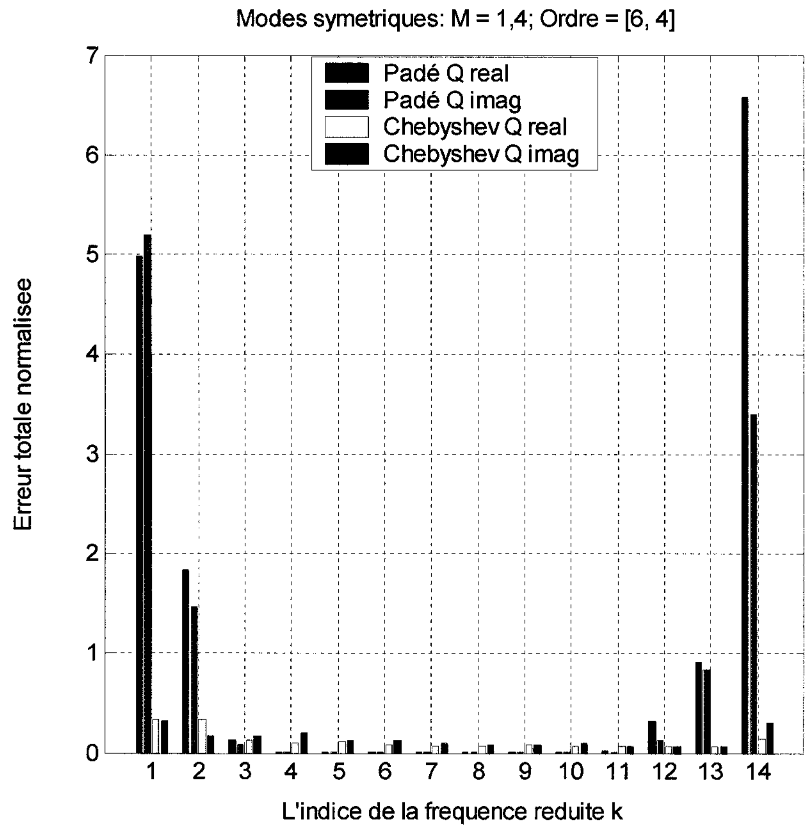
À l'aide de notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques par des polynômes orthogonaux de Chebyshev, nous allons calculer des valeurs intermédiaires des forces aérodynamiques pour les fréquences réduites intermédiaires.

6.3 Résultats obtenus pour le F/A – 18

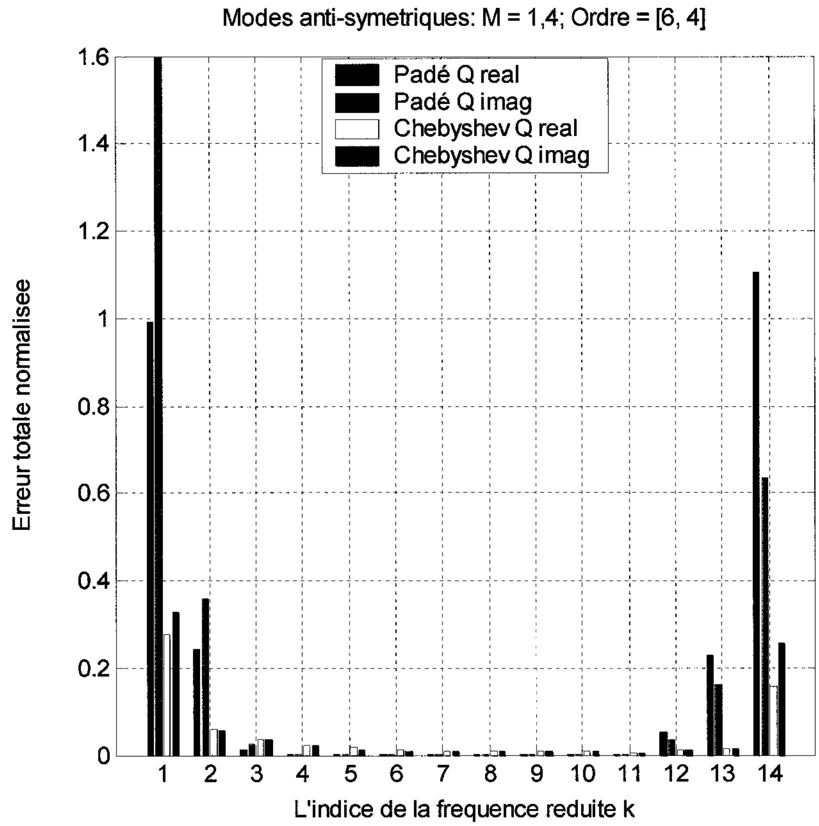
Dans le but de valider notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires (voir l'article dans l'Annexe 3), nous avons considéré 2 nombres de *Mach*, M = 1,4 et M = 1,6 et 14 fréquences réduites k décrites dans la section précédente. L'erreur totale normalisée obtenue avec la nouvelle méthode en utilisant les polynômes de Chebyshev a été comparée avec l'erreur totale normalisée obtenue avec la méthode Padé.

Les approximations des forces aérodynamiques sont réalisées pour le F/A-18, premièrement pour les modes symétriques et deuxièmement pour les modes anti-symétriques de cet avion F/A-18 et pour trois ordres d'approximation de cette méthode: [4, 2], [5, 3] et [6, 4].

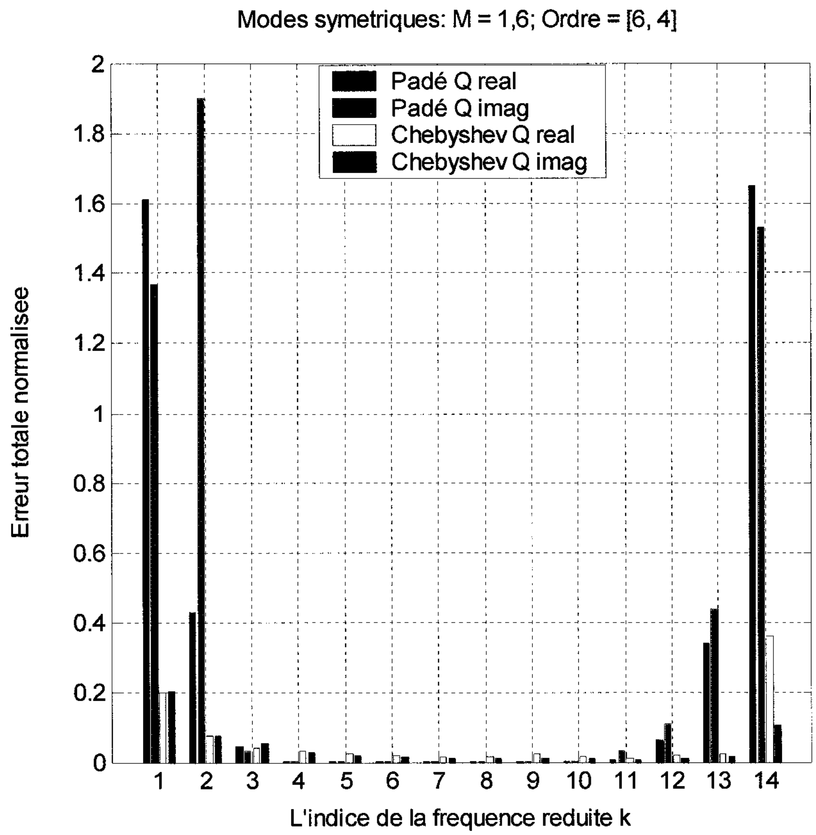
Dans les Graphiques 10 à 13, nous observons la variation des erreurs totales normalisées par des méthodes d'approximations Padé et Chebyshev pour 14 fréquences réduites k, pour 2 nombres de *Mach* M = 1,4 et M = 1,6 et pour l'ordre d'approximation [6, 4]. Les erreurs sont calculées séparément pour les parties réelles et pour les parties imaginaires des éléments composant la matrice des forces aérodynamiques **Q**, et les valeurs des erreurs totales normalisées sont calculées à l'aide des équations (5.3).



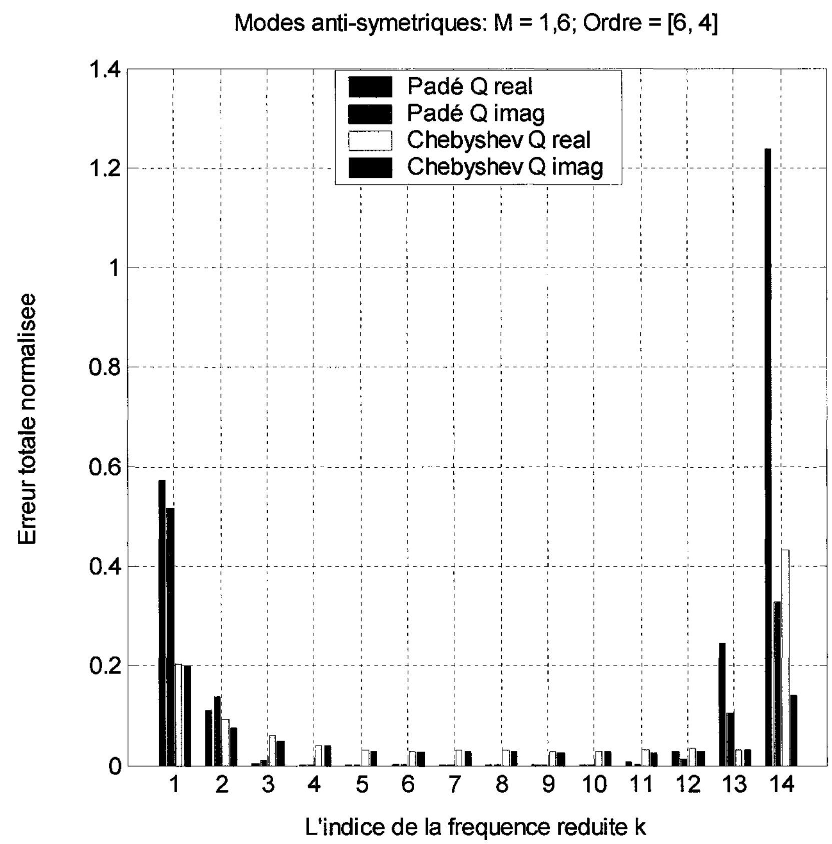
Graphique 10 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* $M = 1{,}4$



Graphique 11 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* $M = 1{,}4$



Graphique 12 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* $M = 1{,}6$



Graphique 13 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion F/A – 18 pour le nombre de *Mach* $M = 1{,}6$

La méthode Padé, appliquée pour l'avion F/A-18, donne des erreurs d'approximation très basses uniquement au milieu de l'intervalle des fréquences réduites, pendant que les erreurs d'approximation obtenues avec la méthode Chebyshev sont plus petites globalement que celles obtenues par la méthode de Padé. Les erreurs obtenues par la méthode Chebyshev sont presque constantes sur l'intervalle des fréquences réduites.

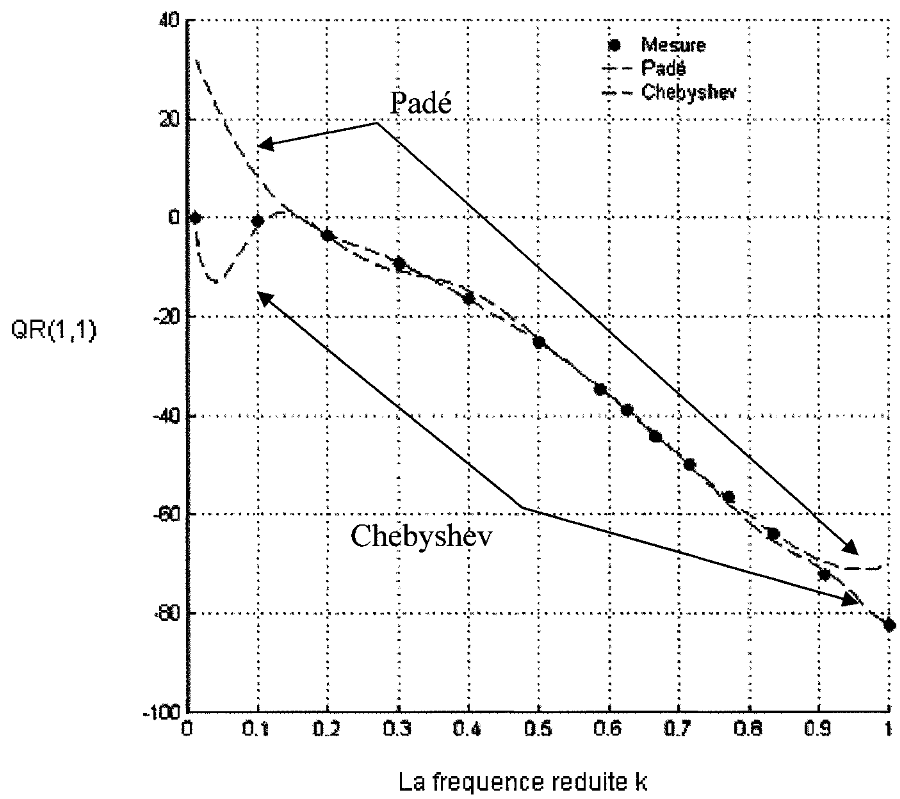
Dans le Tableau VII, nous voyons les valeurs numériques des erreurs totales normalisées pour trois ordres d'approximation [4, 2], [5, 3] et [6,4] et deux nombres de *Mach* $M = 1{,}4$ et $M = 1{,}6$ pour les parties réelles et imaginaires des forces aérodynamiques pour les modes symétriques et anti-symétriques de l'avion F/A – 18.

Tableau VII

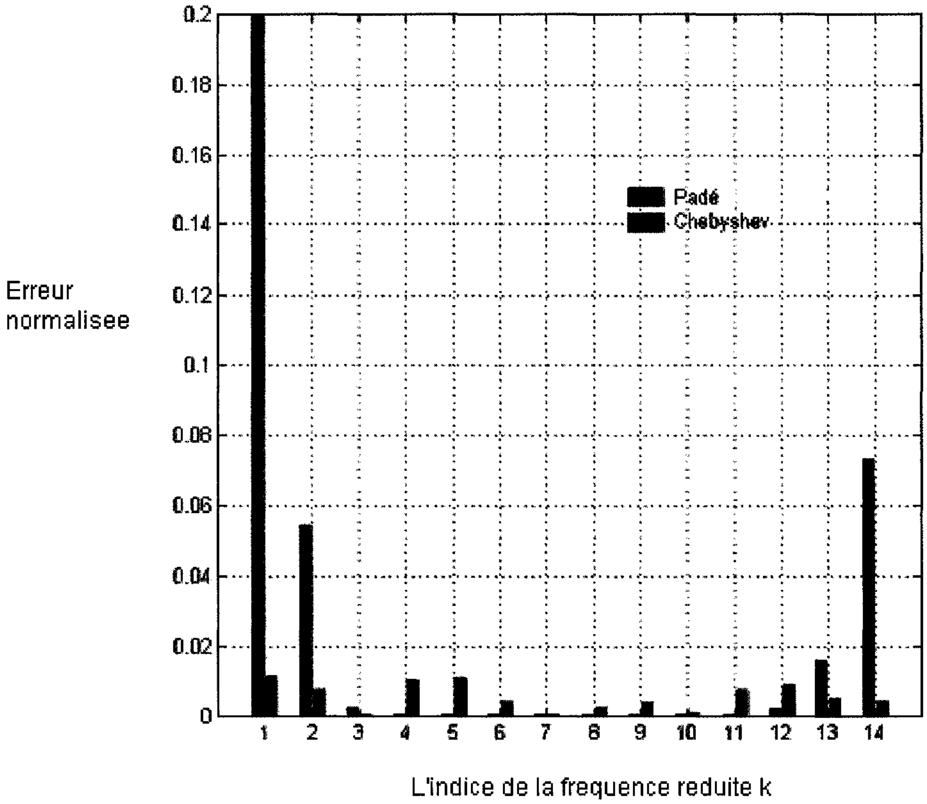
Erreurs totales normalisées pour le F/A – 18

Nombre de *Mach*		M = 1,4			M = 1,6		
Ordre d'approximation		[4,2]	[5,3]	[6,4]	[4,2]	[5,3]	[6,4]
Modes symétriques	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}}$ Padé	19,55	57,48	14,80	10,21	27,84	4,14
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imag}}$ Padé	17,06	83,79	11,16	8,31	31,04	5,42
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}}$ Chebyshev	5,59	2,48	1,71	2,99	1,12	0,86
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imag}}$ Chebyshev	4,14	2,23	1,99	1,82	1,09	0,57
Modes anti-symétriques	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}}$ Padé	5,46	13,55	2,66	3,27	7,68	2,21
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imag}}$ Padé	5,09	26,45	2,82	2,94	6,34	1,12
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}}$ Chebyshev	2,34	1,14	0,65	1,61	4,77	1,11
	$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imag}}$ Chebyshev	1,90	1,13	0,79	1,62	0,81	0,76

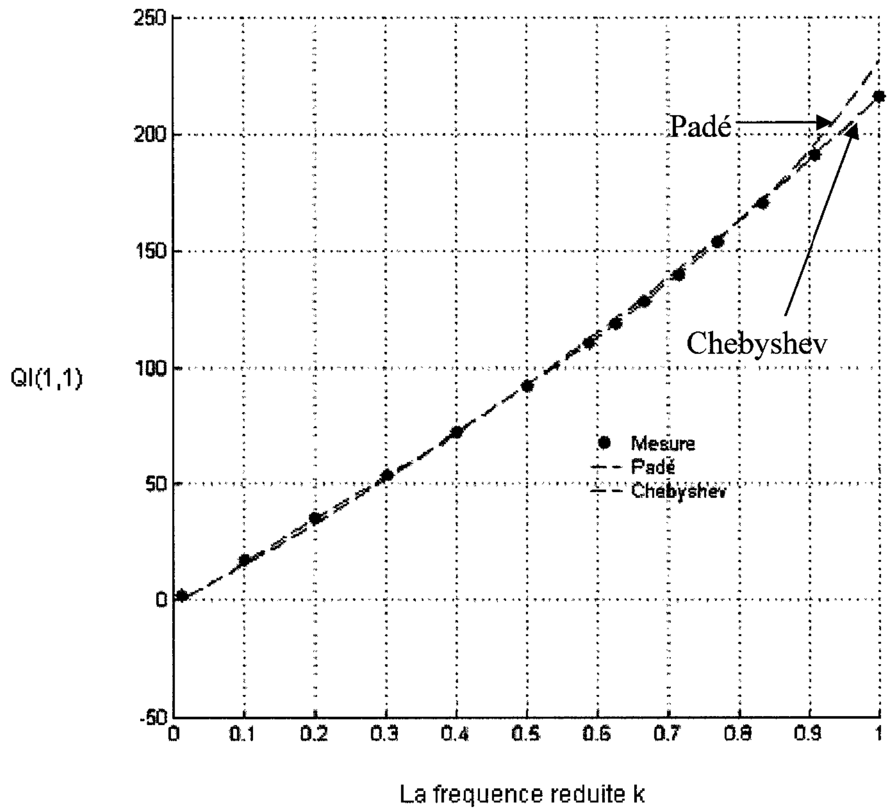
Pour très bien comprendre la différence entre les valeurs numériques des erreurs d'approximation obtenues par les deux méthodes Padé et Chebyshev, nous observons dans les graphiques suivants la manière à laquelle les deux méthodes approximent le premier élément $\mathbf{Q}(1,1)$ de la matrice des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}$ ainsi que les erreurs normalisées d'approximation obtenues par les deux méthodes versus les fréquences réduites. La partie réelle de l'élément est dénoté par $\mathbf{Q_R}(1,1)$ et sa partie imaginaire est dénotée par $\mathbf{Q_I}(1,1)$. Les Graphiques 14 et 15 montrent les approximations et les erreurs normalisées de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ versus la plage des fréquences réduites *k*, les Graphiques 16 et 17 montrent les approximations et les erreurs normalisées de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus la plage des fréquences réduites, le Graphique 18 montre les approximations de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus les approximations de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ et le Graphique 19 montre l'erreur d'approximation de $\mathbf{Q}(1,1)$ versus l'indice de la fréquence réduite. L'ordre d'approximation est [6, 4] et le nombre de *Mach* est $M = 1,6$.



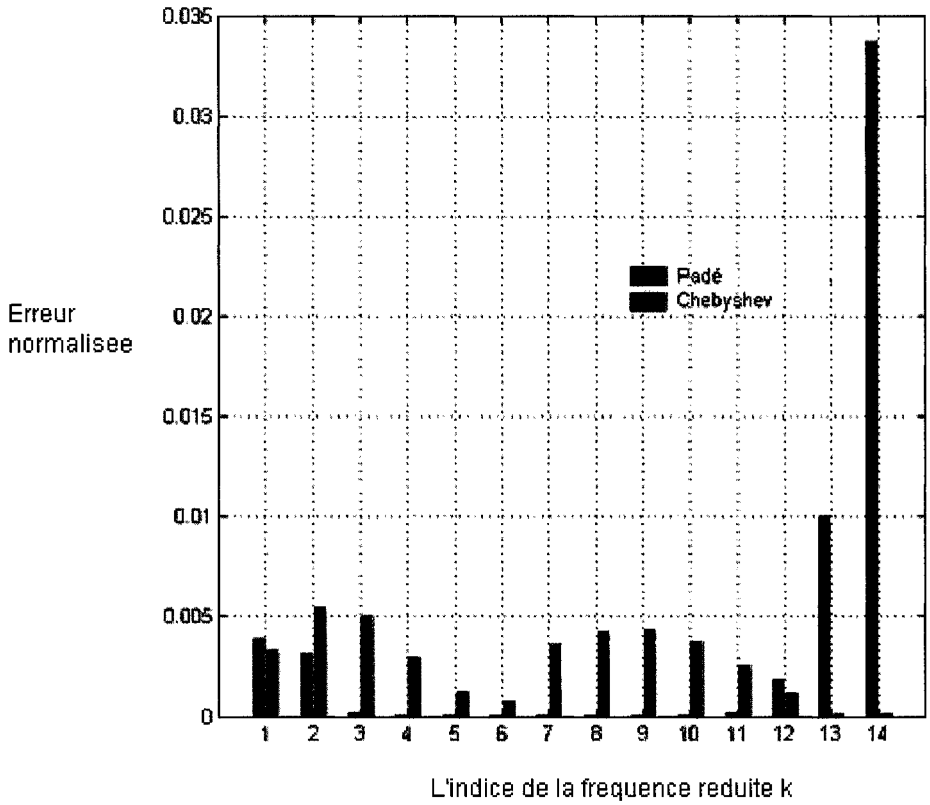
Graphique 14 Approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev



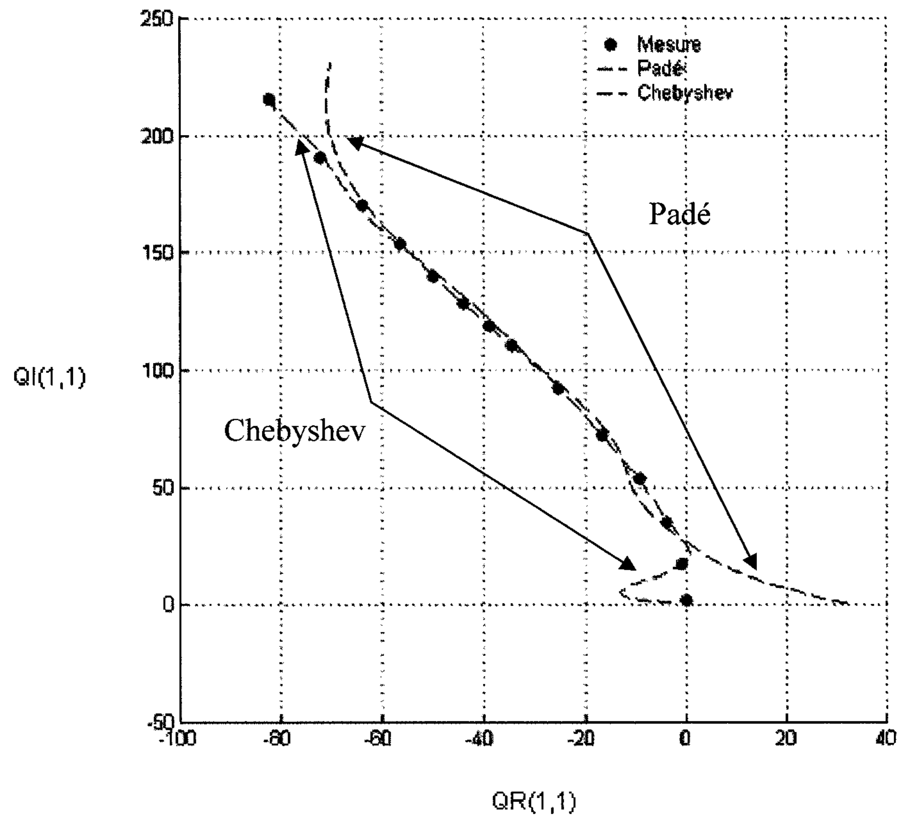
Graphique 15 Erreur d'approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev



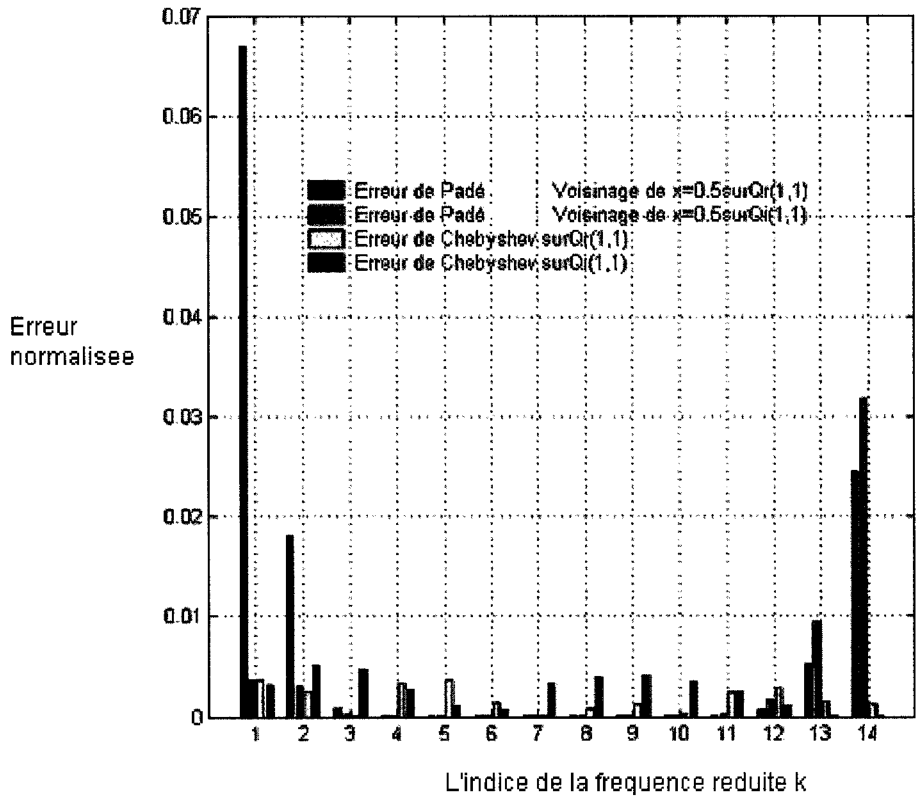
Graphique 16 Approximation de $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev



Graphique 17 Erreur d'approximation de $\mathbf{Q}_I(1,1)$ versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev



Graphique 18 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(1,1)$ versus l'approximation de $\mathbf{Q_R}(1,1)$ par les méthodes Padé et Chebyshev



Graphique 19 Erreur d'approximation de **Q** (1,1) versus les fréquences réduites par les méthodes Padé et Chebyshev

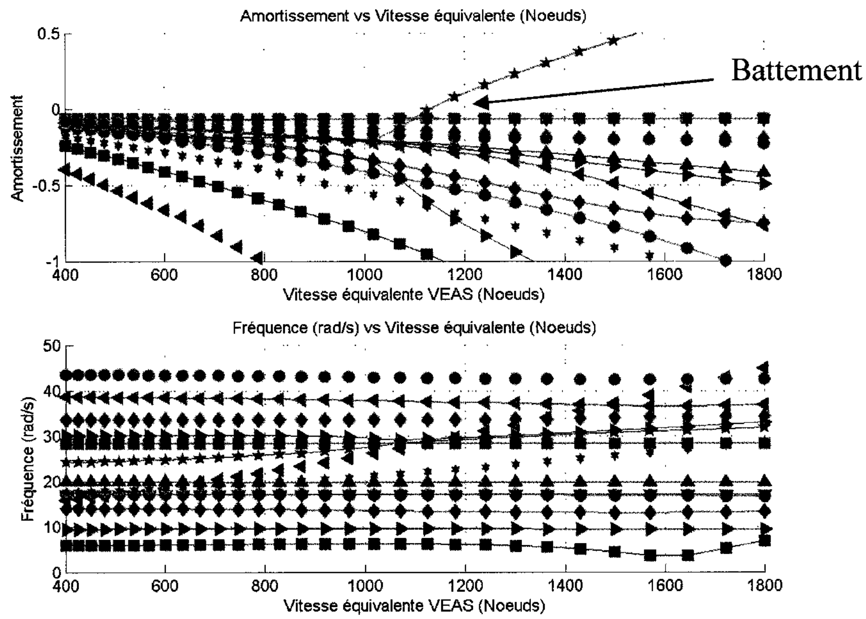
Nous constatons que l'interpolation par la méthode Padé ne passe pas par des valeurs très proches des valeurs des forces aérodynamiques mesurées pour les premières et les dernières fréquences réduites. À cause de ce fait, les erreurs d'approximation obtenues avec Padé sont plus grandes que celles obtenues avec Chebyshev. Cette différence entre les résultats obtenus avec les deux méthodes d'approximation a été observée pour chaque élément de la matrice **Q**.

Suite aux calculs effectués, nous avons constaté qu'un ordre d'approximation [6, 4] dans les calculs des forces aérodynamiques par notre nouvelle méthode nous a permis d'obtenir une erreur assez petite, tandis que l'erreur obtenue par la méthode de Padé reste grande même pour des ordres supérieurs à [18, 16] (ce qui implique un temps de calcul plus grand).

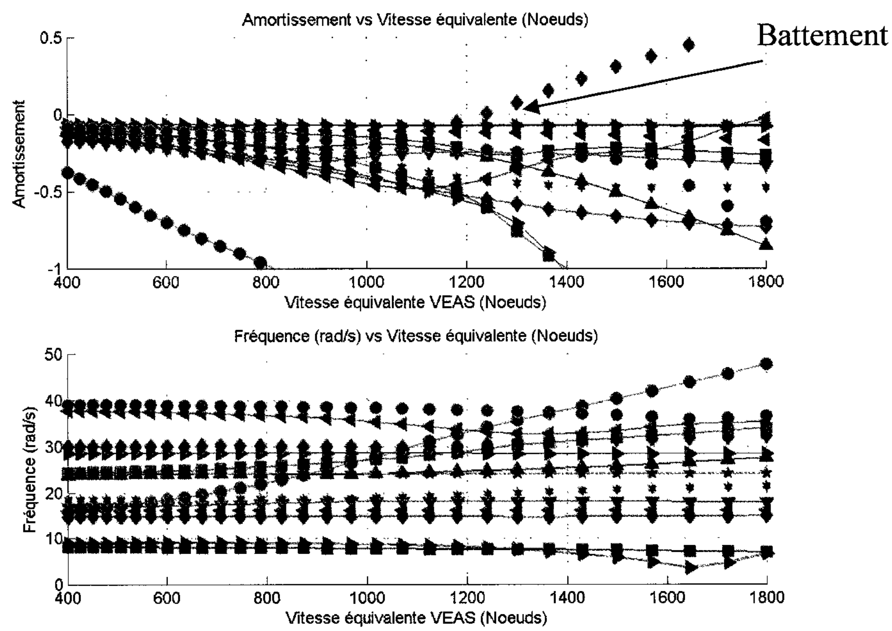
Pour comparer les résultats en termes des vitesses et fréquences de battement par notre nouvelle méthode d'approximation, nous avons utilisé la méthode *pk* de battement. Les paramètres suivants ont été utilisés : la densité de référence de l'air au niveau de la mer ρ_0 = 1,225 kg/m^3, les nombres de *Mach* de référence M = 1,4 et M = 1,6, la plage de vitesse équivalente V_{EAS} (en anglais : Equivalent AirSpeed) de 400 à 1 800 nœuds, et la vitesse de référence du son au niveau de la mer a_0 = 340,294 m/s.

Suite à l'utilisation de la méthode de battement *pk* Standard, nous obtenons les courbes présentées dans les Graphiques 20 et 21. Ces graphiques montrent la variation de l'amortissement et de la fréquence de chaque mode (symétrique et anti-symétrique) en fonction de la vitesse équivalente V_{EAS} et pour le nombre de *Mach* M = 1,6.

L'apparition du phénomène de battement, équivalente au passage vers des valeurs positives de l'amortissement d'un mode aérodynamique, est montrée sur ces graphiques. Des graphiques similaires ont été obtenus suite à l'utilisation des valeurs approximées des forces aérodynamiques par les méthodes de Chebyshev et Padé dans l'algorithme de battement *pk* Standard. Les valeurs numériques des erreurs de battement de la méthode Chebyshev, sous forme de pourcentage, sont presque nulles – voir le Tableau VIII.



Graphique 20 Apparition du battement pour les modes symétriques de F/A – 18 et pour le nombre de *Mach* $M = 1,6$



Graphique 21 Apparition du battement pour les modes anti-symétriques de F/A – 18 et pour le nombre de Mach $M = 1,6$

Plus spécifiquement, la différence entre les valeurs de battement obtenues pour les vitesses et fréquences avec les deux méthodes est présentée sous forme d'écart (pourcentage de l'erreur) dans le Tableau VII. Cette erreur est calculée avec l'équation suivante :

$$Ecart\,\% = \frac{\left| Valeur\ pk\,\text{Standard} - Valeur\ pk\,\text{Chebyshev} \right|}{Valeur\ pk\,\text{Standard}} * 100\,\% \tag{6.1}$$

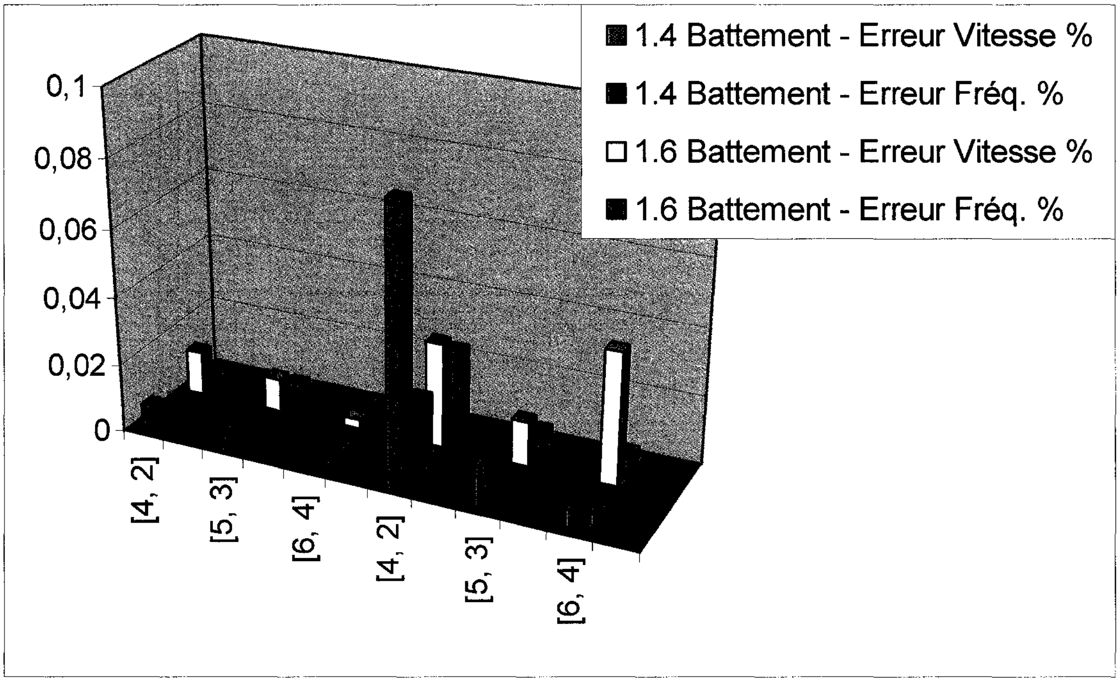
où « *Valeur* » représente les valeurs numériques des vitesses ou fréquences de battement trouvées avec les deux méthodes pour $M = 1{,}4$ et $M = 1{,}6$.

Tableau VIII

Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Chebyshev par rapport aux vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Standard

Nombre de *Mach*		$M = 1{,}4$		$M = 1{,}6$	
Modes	Ordre de la méthode Chebyshev	Écart vitesse (%)	Écart fréquence (%)	Écart vitesse (%)	Écart fréquence (%)
Symétriques	[4,2]	0,0076	0,0024	0,0129	0,0013
	[5,3]	0,0072	0,0017	0,0098	0,0024
	[6,4]	0,0003	0,0007	0,0029	0,0006
Anti-symétriques	[4,2]	0,0814	0,0202	0,0309	0,0232
	[5,3]	0,0122	0,0037	0,0132	0,0042
	[6,4]	0,0055	0	0,0390	0,0032

Les mêmes valeurs numériques trouvées au Tableau VIII sont représentées dans le Graphique 22.



Graphique 22 Le diagramme des erreurs d'approximation pour les vitesses et les fréquences de battement par la méthode *pk* Chebyshev calculées par rapport aux vitesses et fréquences de battement obtenues par la méthode *pk* Standard

Le Tableau VIII et le Graphique 22 nous montrent que les valeurs des vitesses et fréquences de battement calculées avec notre nouvelle méthode d'approximation Chebyshev sont très proches de celles obtenues en utilisant les forces aérodynamiques initiales en STARS. Nous pouvons constater, à partir du Tableau VII, que des excellents résultats sont obtenus pour un ordre d'approximation [6,4] et que l'erreur se stabilise très vite. Cependant, l'erreur d'approximation obtenue avec la méthode Padé est beaucoup plus grande que celle calculée avec la méthode de Chebyshev et présente des fluctuations permanentes et dépendantes de l'ordre de l'approximation. Nous avons remarqué ce problème à d'autres méthodes d'approximation, basées sur une décomposition polynomiale de type Padé, un exemple étant la méthode LS. Nous allons présenter dans le Tableau IX les erreurs d'approximation des vitesses et fréquences de battement obtenues avec la méthode LS, pour M = 1,6, en introduisant plusieurs nombres de termes de retard aérodynamique (lag terms). Il faut préciser qu'un ordre d'approximation [6, 4] pour la méthode Chebyshev est l'équivalent mathématique, dans ce cas, d'une méthode LS qui utilise 4 termes de retard aérodynamique.

Tableau IX

Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* LS par rapport aux vitesses et fréquences de battement par la méthode *pk* Standard

Modes	Méthode	Erreurs	
		Vitesse (%)	Fréquence (%)
Symétriques	*pk* LS 1 lag	0,2840	0,0093
	pk LS 2 lags	0,0754	0,0052
	pk LS 3 lags	0,3926	0,1385
	pk LS 4 lags	0,3926	0,1385
Anti-symétriques	*pk* LS 1 lag	2,8518	0,8456
	pk LS 2 lags	0,6491	0,1175
	pk LS 3 lags	3,3084	0,7166
	pk LS 4 lags	3,3084	0,7166

Suite à une comparaison entre les erreurs des valeurs des vitesses et fréquences de battement présentées dans les Tableaux VIII et IX pour les méthodes Chebyshev et LS, il devient évident que la méthode Chebyshev donne une meilleure approximation. De plus, l'effort de calcul supposé par cette méthode (implémentation de l'algorithme en Matlab, temps de calcul, ressources de mémoire dédiées par l'ordinateur pour les calculs) est beaucoup moins élevé que celui nécessaire dans l'application de la méthode LS.

CHAPITRE 7

ÉTUDE DES INTERACTIONS AÉROSERVOÉLASTIQUES DE CL – 604 EN BOUCLE OUVERTE

7.1 Présentation générale du Challenger 604 (CL – 604)

Le CL – 604 est un avion de type « jet corporatif », conçu et construit par Bombardier Aéronautique. Cet avion a donc une taille et une capacité de transport moyenne, pouvant accueillir à son bord un nombre de 9 à 19 passagers et un équipage de 3 membres (2 pilotes et 1 steward).

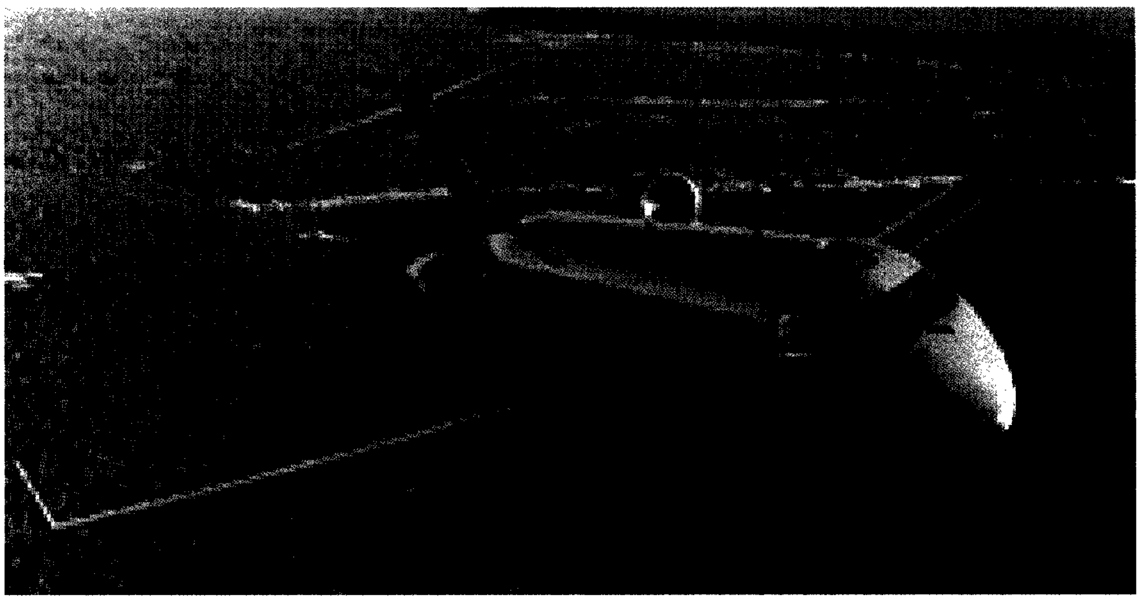


Figure 15 L'avion CL – 604 en vue antérieure

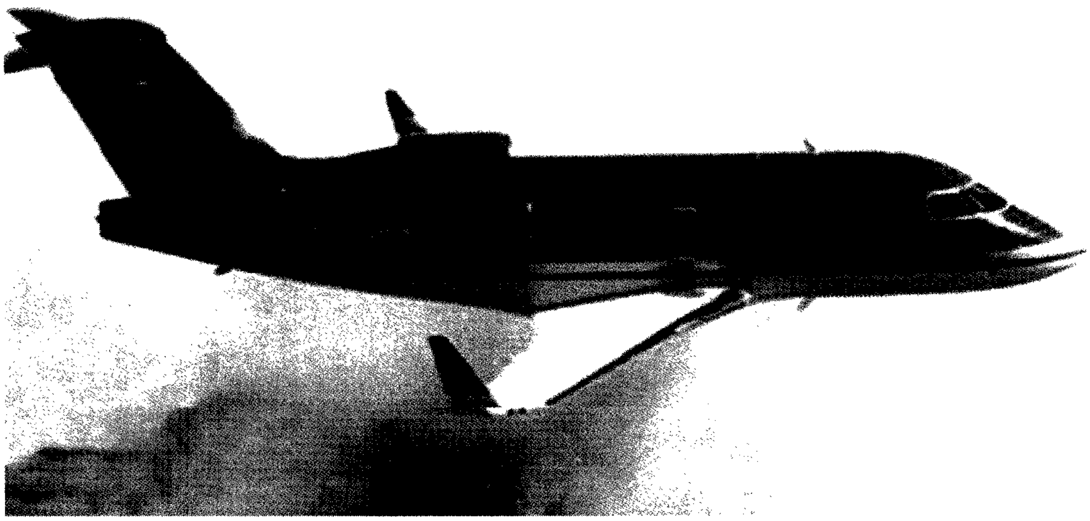


Figure 16 L'avion CL – 604 en vue latérale

Parmi les caractéristiques de cet avion, nous pouvons énumérer :

- *La portée maximale*
  - 7458 km à un nombre de *Mach* $M = 0,74$
  - 6878 km à un nombre de *Mach* $M = 0,80$
- *La vitesse de croisière*
  - croisière à haute vitesse : $M = 0,82$ (870 km/h)
  - typique : $M = 0,80$ (850 km/h)
  - à portée maximale : $M = 0,74$ (787 km/h)
- *Les dimensions*
  - longueur : 20,85 m
  - largeur (wingspan) : 19,61 m
  - surface des ailes : 45,71 m^2
  - hauteur : 6,30 m

- *L'altitude de vol*
  - maximale : 12497 m (41000 pi)
  - de croisière : 11278 m (37000 pi)
- *Le temps pour atteindre l'altitude de croisière* : 22 minutes
- *La distance d'atterrissage* : 846 m
- *Le niveau de bruit*
  - décollage : 81,2 dB
  - atterrissage : 90,3 dB
  - en vol : 86,2 dB
- *Le poids maximal*
  - au décollage : 21863 kg (48200 livres)
  - à l'atterrissage : 17237 kg (38000 livres)
  - sans combustible : 14515 kg (32000 livres)
  - de référence : 12331 kg (27185 livres)
  - charge maximale : 2184 kg (4815 livres)
  - charge maximale avec combustible : 7394 kg (16300 livres)

L'avion est doté avec 2 moteurs turboréacteurs CF34-3B produits par la compagnie General Electric qui développent une puissance de 38,84 kN au décollage et de 41,00 kN en vol.

7.2 Le modèle analytique de l'avion CL – 604

Une modélisation par des éléments finis de l'avion CL – 604 a été réalisée en Nastran chez Bombardier Aéronautique pour calculer les modes de vibration et la dynamique aéroélastique de l'avion. Suite à une analyse au sol chez Bombardier Aéronautique, sur le CL – 604, un total de 100 modes de vibration ont été obtenus, comme suit :

- 6 modes rigides (3 symétriques et 3 anti-symétriques)
- 94 modes élastiques (44 symétriques et 50 anti-symétriques)

Suite à une analyse de battement sur le CL – 604, les ingénieurs de Bombardier Aéronautique ont obtenu les fréquences réduites k correspondant aux modes de battement de cet avion. Dans le Tableau X, nous montrons les fréquences de battement k_f correspondantes aux huit vitesses de battement lorsque l'avion est considéré avec 100 modes et avec 94 modes (lorsque les modes rigides ne sont pas pris en considération) pour le nombre de *Mach* $M = 0,88$.

Tableau X

Les huit modes et fréquences réduites de battement pour l'avion CL – 604

Modes de battement pour $M = 0,88$	k_f pour 100 modes	k_f pour 94 modes
Mode anti-symétrique de l'aile	0,245	0,231
Mode symétrique de l'empennage horizontal	1,415	1,416
Mode anti-symétrique de l'aile	0,282	0,271
Mode anti-symétrique de l'empennage horizontal	1,539	1,538
Mode de l'aileron	0,161	0,161
$2^{ième}$ mode symétrique de l'aile	0,290	0,290
$3^{ième}$ mode symétrique de l'aile	0,333	0,335
1^{er} mode symétrique de l'aile	0,196	0,181

Nous avons obtenu dans les deux cas (94 modes élastiques et 100 modes rigides et élastiques) presque les mêmes valeurs des vitesses et fréquences de battement

Le modèle total de l'avion en question est composé donc par 100 modes qui sont classés en modes rigides (modes 1 à 6) et élastiques (modes 7 à 100). Nous pouvons représenter la matrice des forces aérodynamiques **Q** pour une seule fréquence réduite à la fois de la manière suivante :

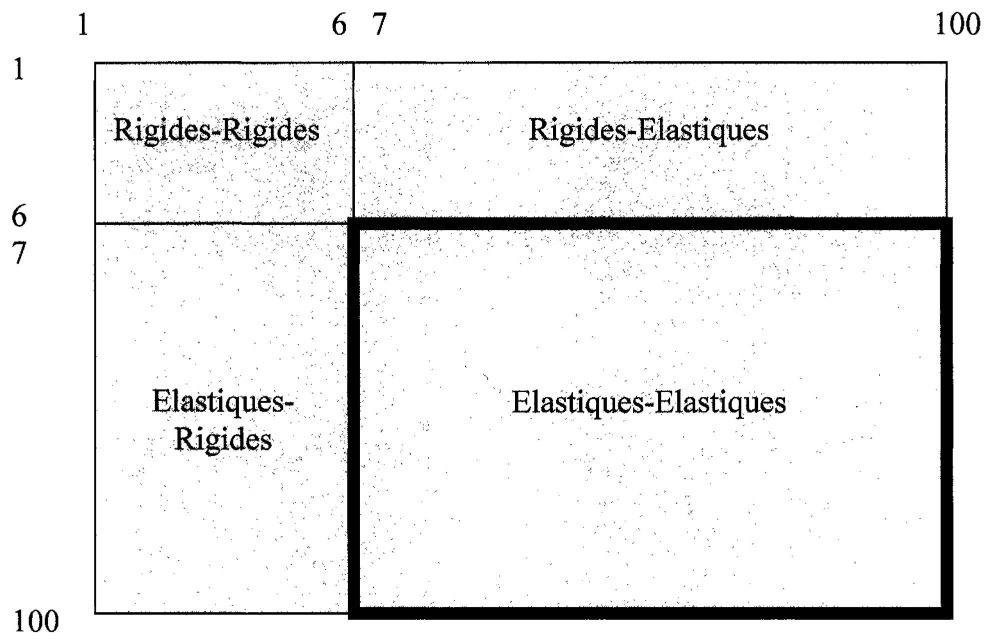


Figure 17 Représentation graphique de la matrice **Q** pour l'avion CL – 604

La méthode des doublets (Doublet Lattice Method DLM) a été utilisée en régime subsonique pour calculer les matrices des forces aérodynamiques non stationnaires **Q** pour le nombre de *Mach* $M = 0{,}88$ et huit fréquences réduites k.

Les matrices des forces aérodynamiques **Q** sont calculées pour 8 fréquences réduites, alors nous obtenons une matrice en 3-D des forces aérodynamiques de la forme suivante :

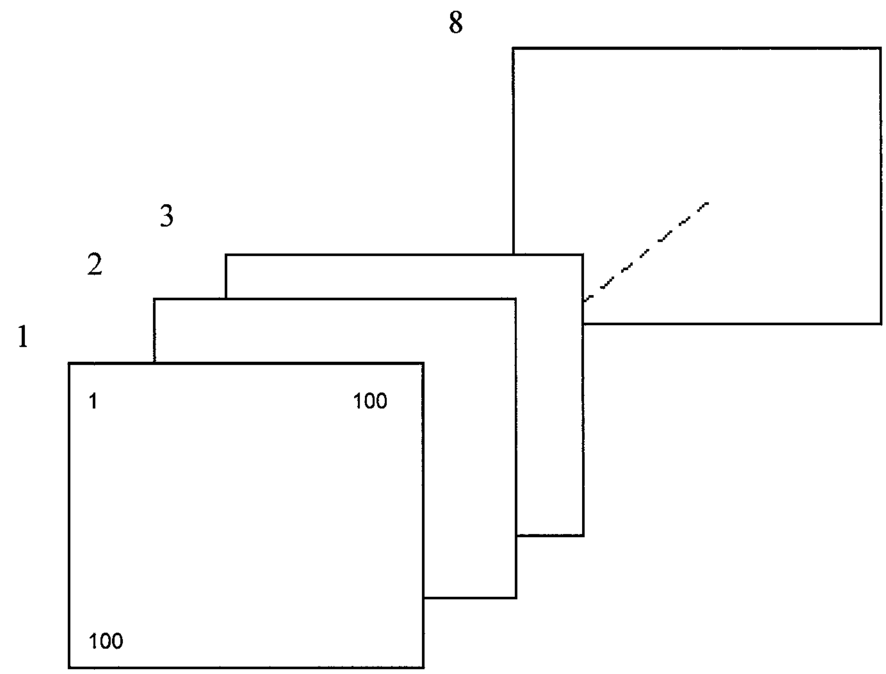


Figure 18 Représentation graphique de la matrice **Q** en 3-D pour l'avion CL – 604

Nous pouvons trouver les valeurs numériques des 8 fréquences réduites k dans le Tableau XI. Il faudrait noter la différence en notation entre les 8 fréquences réduites k (voir le Tableau XI) et les valeurs des 8 fréquences de battement k_f (voir le Tableau X). Les forces aérodynamiques ont été calculées en Nastran en utilisant DLM pour un nombre de *Mach* $M = 0{,}88$ et 8 k's. En appliquant la méthode de battement *pk* à l'avion CL – 604 nous obtenons les huit résultats de battement sous forme des fréquences et amortissements de battement versus la vitesse équivalente. Pour chaque mode de battement, une fréquence k_f est obtenue (Tableau X).

Tableau XI

Fréquences réduites utilisées dans l'élaboration de **Q** pour l'avion CL – 604

Fréquences réduites k							
k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
0,001	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4

Les valeurs des forces aérodynamiques **Q**(i,j), fournies par Bombardier Aéronautique, ne sont donc déterminées qu'à certaines fréquences réduites k. Un but des méthodes d'approximation, donc de notre nouvelle méthode par polynômes orthogonaux de Chebyshev, est l'interpolation de ces valeurs dans l'intervalle des fréquences réduites.

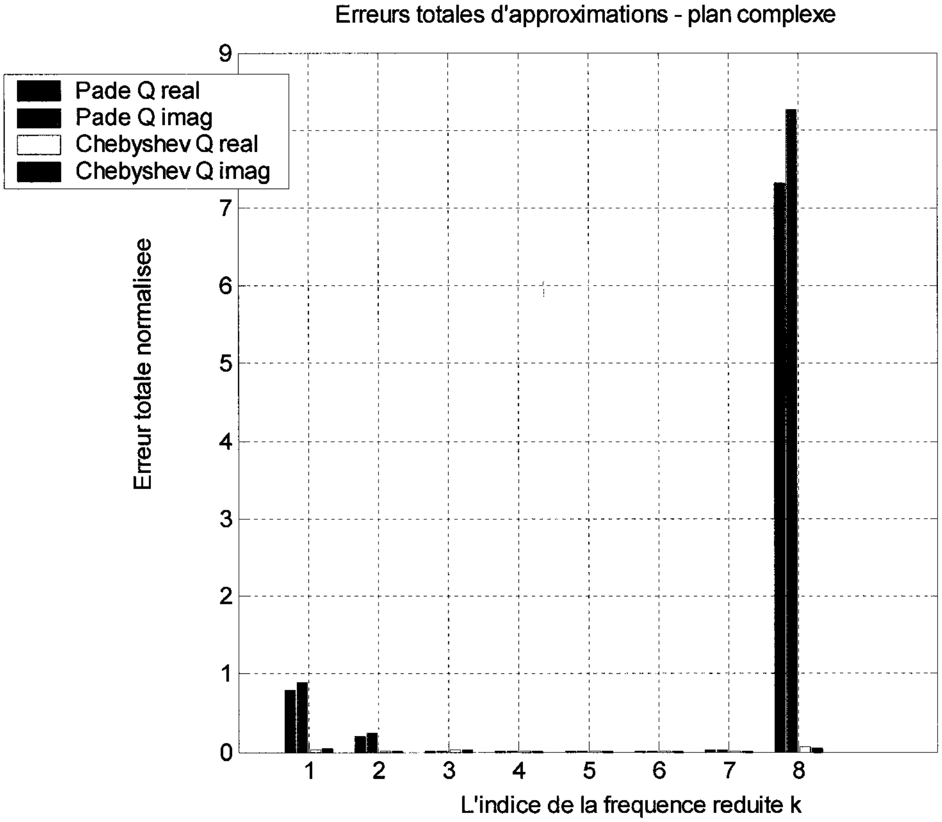
7.3 Résultats obtenus pour l'avion CL – 604

Dans le but de valider notre nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires (voir l'article en Annexe 4), nous avons utilisé les matrices des forces aérodynamiques **Q**(i,j) pour l'avion CL – 604 fournies par Bombardier Aéronautique pour le nombre de *Mach* M = 0,88 et les 8 fréquences réduites k décrites dans la section précédente. Pour étudier les résultats obtenus au niveau de l'approximation des forces aérodynamiques, tout comme dans le cas de l'ATM et du F/A – 18, nous avons comparé les erreurs totales normalisées obtenues suite à l'approximation par les polynômes de Chebyshev avec les erreurs totales normalisées obtenues en utilisant la méthode Padé.

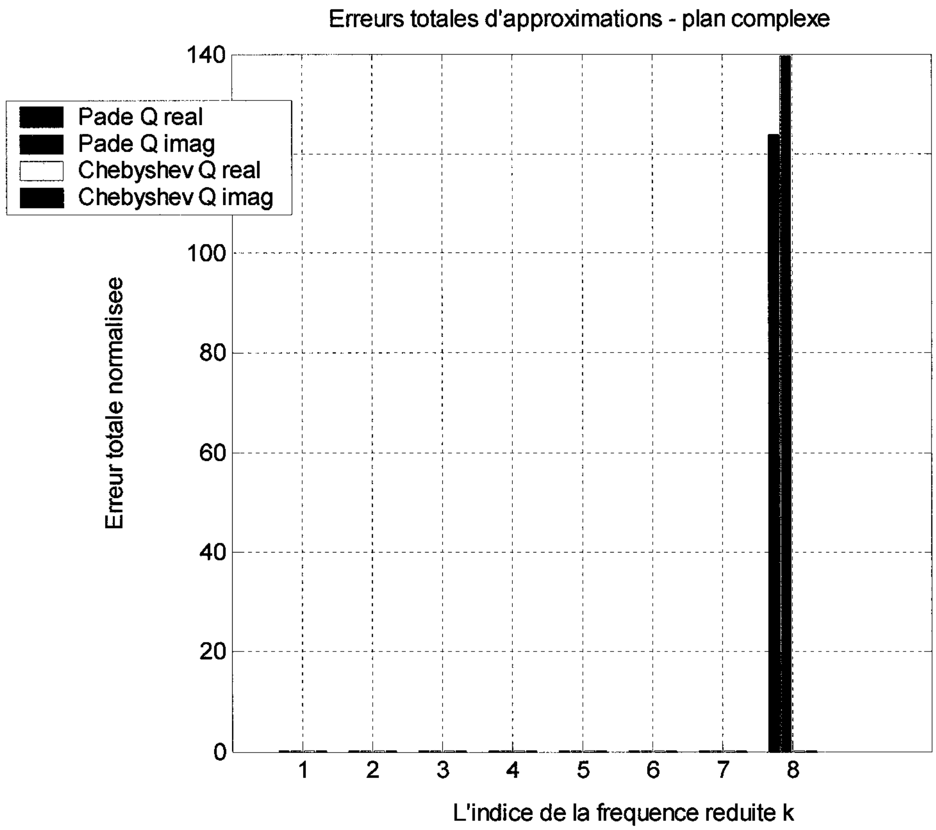
Les approximations ont été réalisées pour les modes symétriques et ensuite pour les modes anti-symétriques de l'avion CL – 604, pour les ordres d'approximation suivants : [6, 4], [7, 5], [8, 6], [9, 7] et [10, 8].

Dans les Graphiques 23 à 25 nous observons la variation des erreurs totales normalisées des approximations par des méthodes Padé et Chebyshev versus les fréquences réduites k au nombre de *Mach* M = 0,88. Dans le cas des modes élastiques symétriques pour l'avion F/A-18, les résultats obtenus par ces méthodes avec les ordres d'approximation [6,4] et [7, 5] ont été tracés et dans le cas des modes élastiques anti-symétriques pour l'avion F/A-18, les résultats obtenus par ces méthodes avec l'ordre d'approximation [6, 4] ont été tracés. Ces ordres d'approximation ont été choisis arbitrairement dans le but de tracer graphiquement les variations des erreurs.

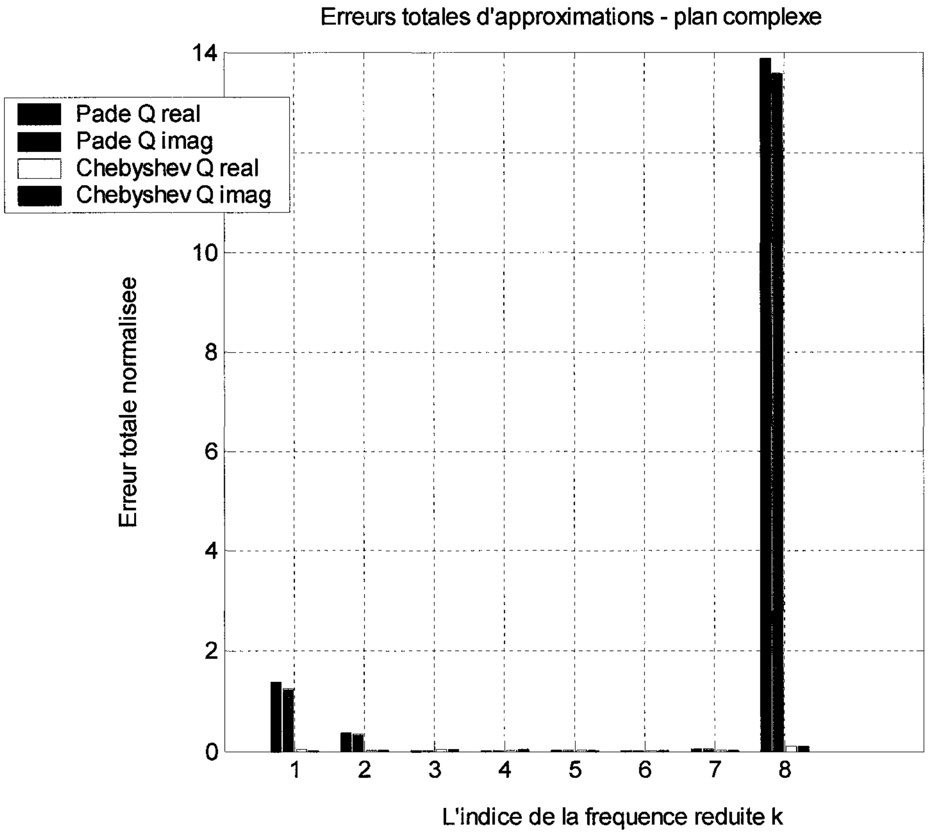
Les erreurs ont été calculées séparément pour les parties réelles et pour les parties imaginaires des éléments composant la matrice **Q**, et finalement ont été additionnées pour obtenir les erreurs totales normalisées des forces aérodynamiques conformément aux équations (5.3).



Graphique 23 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [6, 4]



Graphique 24 Erreurs totales normalisées pour les modes symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [7, 5]



Graphique 25 Erreurs totales normalisées pour les modes anti-symétriques de l'avion CL – 604 par les méthodes Chebyshev et Padé de l'ordre [6, 4]

Tout comme dans le cas de l'ATM et de l'avion F/A – 18, dans le cas de l'avion CL – 604 la méthode Padé donne une bonne approximation des forces aérodynamiques seulement au milieu de l'intervalle de fréquences réduites, tandis que les erreurs d'approximation obtenues avec la méthode Chebyshev sont beaucoup plus petites et presque constantes tout au long de l'intervalle d'approximation.

Dans le Tableau XII nous pouvons voir les valeurs des erreurs totales normalisées obtenues pour les ordres d'approximation [6, 4], [7, 5], [8, 6], [9, 7] et [10, 8] pour le nombre de *Mach* M = 0,88, pour les modes élastiques symétriques et élastiques anti-symétriques de l'avion CL – 604. Nous n'avons pas pris dans les calculs les modes rigides à cause que ces modes représentent les déplacements structurels de l'avion et ils ont des valeurs très petites (d'ordre 10^{-10} jusqu'à 10^{-31}) qui n'influencent pas les valeurs des approximations des forces ou de battement (vitesses et fréquences).

Tableau XII

Erreurs totales normalisées des approximations des forces pour l'avion CL – 604

Modes	Ordre d'approximation	$J_{Q\ real}$ Padé	$J_{Q\ imag}$ Padé	$J_{Q\ real}$ Chebyshev	$J_{Q\ imag}$ Chebyshev
Symétriques	[6, 4]	8,35821	9,4265	0,1637	0,1544
	[7, 5]	123,9417	139,7621	0,0354	0,0132
	[8, 6]	50,9315	96,2094	0,0354	0,0132
	[9, 7]	1,8054	1,1595	0,0354	0,0132
	[10, 8]	58,9544	65,7236	0,0354	0,0132
Anti-symétriques	[6, 4]	15,6480	15,2306	0,3040	0,3024
	[7, 5]	n.o.	n.o.	0,0397	0,0192
	[8, 6]	n.o.	n.o.	0,0397	0,0192
	[9, 7]	n.o.	n.o.	0,0397	0,0192
	[10, 8]	n.o.	n.o.	0,0397	0,0192

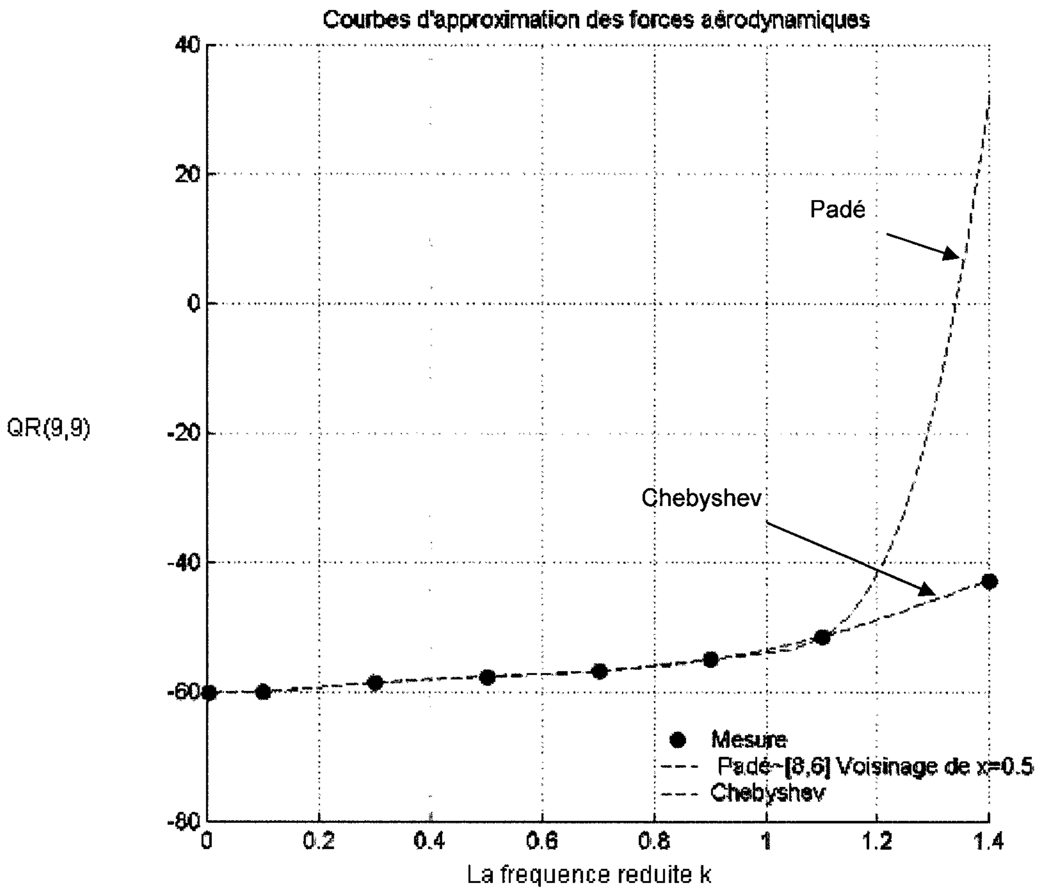
Suite à ces calculs, nous avons constaté que par l'approximation de Chebyshev nous obtenons des valeurs très petites pour l'erreur totale normalisée, qui convergent très rapidement (à partir de l'ordre [7, 5]) vers une valeur constante, pour les modes élastiques symétriques, ainsi que pour les modes élastiques anti-symétriques.

Par contre, si nous analysons les valeurs des erreurs normalisées obtenues en utilisant l'approximation de Padé et présentées dans le Tableau XII, nous pouvons observer que ces valeurs varient fortement avec l'ordre de l'approximation et qu'elles sont parfois 10000 fois plus grandes que les valeurs correspondantes obtenues avec Chebyshev. Une conséquence de ces valeurs trop grandes des erreurs d'approximation par la méthode de Padé est le fait qu'en utilisant les approximations des forces aérodynamiques par Padé dans la méthode *pk* nous n'avons pas été en mesure de détecter toutes les valeurs de battement.

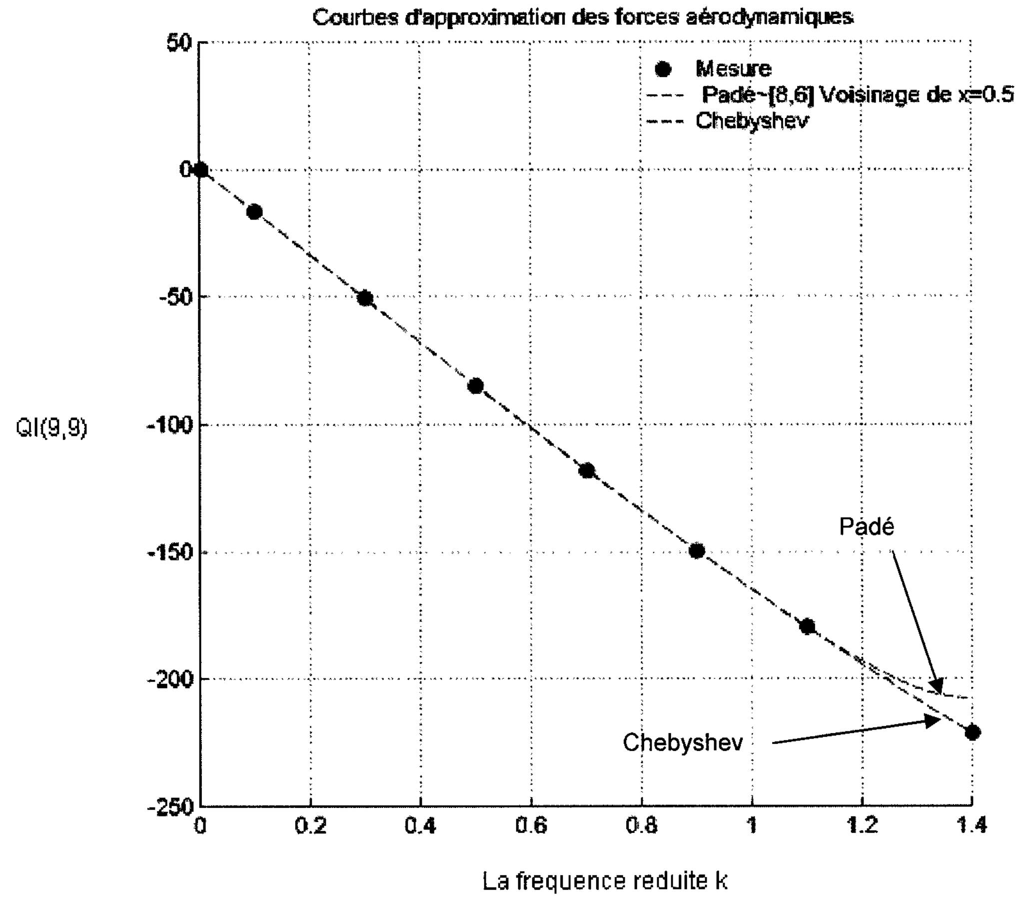
Nous avons constaté que l'approximation par Padé, tout comme dans le cas de l'ATM et du F/A – 18, demande beaucoup plus de ressources de calcul que notre nouvelle méthode d'approximation, surtout en ce qui concerne la mémoire utilisée pour effectuer les calculs. À cause de ce fait et du fait que Matlab 6.5 ne peut pas gérer plus de 1 GB de mémoire active, la méthode Padé n'a pas pu être appliquée pour obtenir les approximations des forces aérodynamiques dans le cas des modes élastiques anti-symétriques pour un ordre d'approximation plus grand que [6, 4]. Dans le Tableau XII nous avons signalé ce fait avec la mention « n.o. » (non obtenue). Cependant, notre nouvelle méthode a fonctionné dans tous les cas, avec une très bonne précision d'approximation.

Pour mieux comprendre d'où la différence entre les valeurs des erreurs d'approximation obtenues avec les deux méthodes provient, à chaque bout de l'intervalle des fréquences réduites, nous observons dans les graphiques suivantes la manière dont les deux méthodes approximent, par exemple, l'élément $\mathbf{Q}(9,9)$ – choisi d'une manière aléatoire – de la matrice des forces aérodynamiques $\mathbf{Q}$. Dans le Graphique 26, la partie réelle de $\mathbf{Q}(9,9)$, dénoté par $\mathbf{Q}_\mathbf{R}(9,9)$, est tracée versus les fréquences réduites k, dans le Graphique 27, la partie imaginaire de $\mathbf{Q}(9,9)$, dénoté par $\mathbf{Q}_\mathbf{I}(9,9)$, est tracée versus les fréquences réduites k et dans le Graphique 28 $\mathbf{Q}_\mathbf{I}(9,9)$ est tracée versus $\mathbf{Q}_\mathbf{R}(9,9)$.

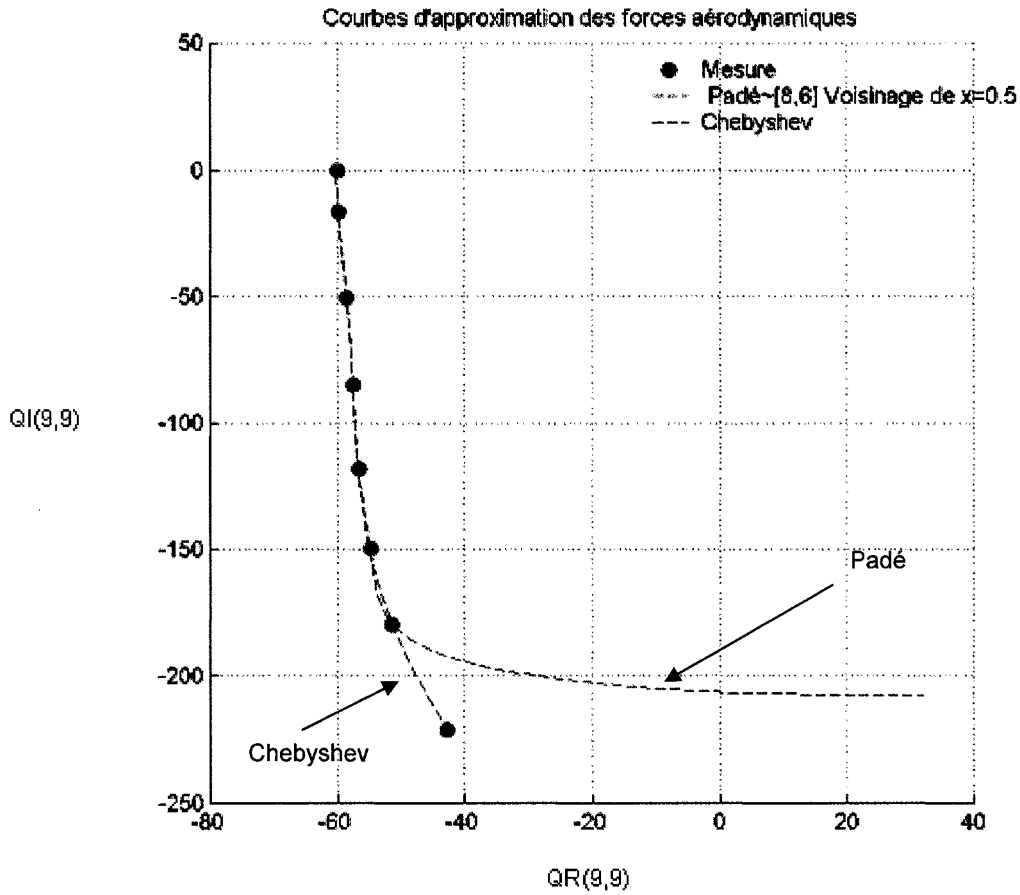
Dans ces graphiques, l'expression « *Mesuré* » signifie que les valeurs ont été calculées par la méthode DLM, donc il s'agit des valeurs non approximées des forces aérodynamiques non stationnaires dans le domaine des fréquences.



Graphique 26 L'approximation de $\mathbf{Q_R}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_R}(9,9)$ calculé par la méthode DLM vs k pour l'avion CL-604



Graphique 27 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_I}(9,9)$ calculé par la méthode DLM vs k pour l'avion CL-604



Graphique 28 L'approximation de $\mathbf{Q_I}(9,9)$ vs $\mathbf{Q_R}(9,9)$ par les méthodes Padé et Chebyshev et $\mathbf{Q_I}(9,9)$ vs $\mathbf{Q_R}(9,9)$ calculés par la méthode DLM pour l'avion CL-604

Dans le but de comparer les résultats obtenus par notre nouvelle méthode d'approximation au niveau des valeurs des vitesses et fréquences de battement, nous avons utilisé la méthode *pk* de calcul du battement. Les paramètres de simulation suivants ont été utilisés (les mêmes paramètres que ceux utilisés par la compagnie Bombardier Aéronautique): la densité de référence de l'air au niveau de la mer ρ_0 = 1,225 kg/m^3, le nombre de *Mach* de référence M = 0,88, la plage de vitesses équivalentes V_{EAS} (en anglais : Equivalent AirSpeed) de 25 à 1 025 nœuds, et la vitesse de référence du son au niveau de la mer a_0 = 340,294 m/s.

Les différences entre les valeurs de battement (les erreurs) obtenues avec les deux méthodes LS et Chebyshev par rapport à la méthode *pk* Standard sont présentées sous forme de pourcentage dans le Tableau XIII.

Ces erreurs sont calculées à l'aide des équations suivantes :

$$J_{V_{\mathrm{EAS}}} = \frac{\left|\text{Valeur\_}V_{\mathrm{EAS}}\text{\_}pk\text{\_Standard - Valeur\_}V_{\mathrm{EAS}}\text{\_}pk\text{\_Methode Approx}\right|}{\text{Valeur\_}V_{\mathrm{EAS}}\text{\_}pk\text{\_Standard}} * 100\%$$

$$J_{\mathrm{Freq}} = \frac{\left|\text{Valeur\_Freq\_}pk\text{\_Standard - Valeur\_Freq\_}pk\text{\_Methode Approx}\right|}{\text{Valeur\_Freq\_}pk\text{\_Standard}} * 100\% \qquad (7.1)$$

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{N_{battement}} \left[J_{V_{\mathrm{EAS}}}(i) + J_{\mathrm{Freq}}(i) \right]}{2 * N_{battement}}$$

Dans les équations (7.1), Valeur_V_{EAS}_*pk*_Standard et Valeur_V_{EAS}_*pk*_MethodeApprox sont les vitesses équivalentes calculées par la méthode de battement *pk* Standard et par les méthodes d'approximation LS et Chebyshev, Valeur_Freq_*pk*_Standard et Valeur_Freq_*pk*_MethodeApprox sont les fréquences calculées par la méthode de battement *pk* Standard et par les méthodes d'approximation LS et Chebyshev. $N_{battement}$ représente le nombre de battements détecté. Nous pouvons voir dans le Tableau XIII les 4 points de battement (vitesses équivalentes et fréquences) détectés pour les modes symétriques de l'avion CL-604 et dans le Tableau XIV nous voyons les 4 points de battement (vitesses équivalentes et fréquences) détectés pour les modes anti-symétriques de l'avion CL-604.

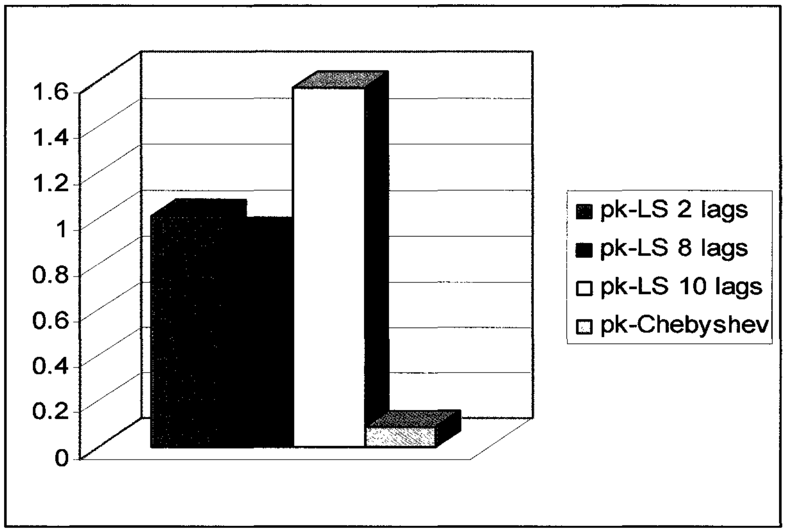
Tableau XIII

Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences pour les modes symétriques de l'avion CL – 604

Erreurs de battement (%) – 44 modes symétriques									
Méthode	B#1 Mode 7		B#2 Mode 15		B#3 Mode 19		B#4 Mode 41		Erreur moyenne J
	$J_{V\text{EAS}}$	$J_{\text{Fréq}}$	$J_{V\text{EAS}}$	$J_{\text{Fréq}}$	$J_{V\text{EAS}}$	$J_{\text{Fréq}}$	$J_{V\text{EAS}}$	$J_{\text{Fréq}}$	
pk-LS 2 lags	2,31	0,42	n.o.	n.o.	n.o.	n.o.	1,02	0,29	1,01
pk-LS 8 lags	4,70	0,84	0,47	0,42	0,48	0,07	0,38	0,07	0,93
pk-LS 10 lags	4,23	0,42	5,92	1,53	0,06	0,15	0,24	0	1,57
pk-Chebyshev	0,20	0,14	0,21	0	0,05	0	0,08	0,04	0,09

Dans ce tableau, la mention « n.o. » signifie le fait que le battement n'a pas été détecté à cause des erreurs d'approximation de la méthode LS.

Le Graphique 29 est l'équivalent du Tableau XIII pour la représentation des erreurs moyennes de battement obtenues par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes symétriques de l'avion CL-604.



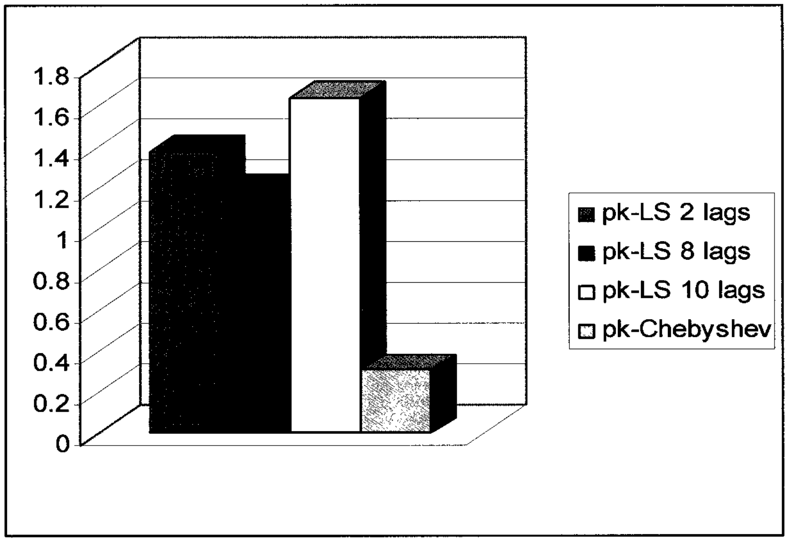
Graphique 29 Diagramme des erreurs d'approximation des valeurs de battement calculés par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes symétriques de CL – 604

Tableau XIV

Erreurs d'approximation des vitesses et fréquences pour les modes anti-symétriques de l'avion CL-604

Erreurs de battement (%) – 50 modes anti-symétriques									
Méthode	B#1 Mode 9		B#2 Mode 10		B#3 Mode 17		B#4 Mode 66		Erreur moyenne
	$J_{V_{EAS}}$	$J_{Fréq}$	$J_{V_{EAS}}$	$J_{Fréq}$	$J_{V_{EAS}}$	$J_{Fréq}$	$J_{V_{EAS}}$	$J_{Fréq}$	J
pk-LS 2 lags	3,44	0,64	2,56	0,77	2,22	0,27	0,28	0,85	1,38
pk-LS 8 lags	0,55	0,16	1,00	1,21	4,87	0,37	1,03	0,34	1,19
pk-LS 10 lags	0,67	0	1,67	1,32	6,50	0,46	2,34	0,18	1,64
pk-Chebyshev	1,50	0,32	0,09	0	0,29	0,09	0,19	0	0,31

Le Graphique 30 est l'équivalent du Tableau XIV pour les erreurs moyennes de battement calculées par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes anti-symétriques de l'avion CL-604.



Graphique 30 Diagramme des erreurs d'approximation des valeurs de battement calculés par les méthodes LS et Chebyshev pour les modes anti-symétriques de CL – 604

Les Tableaux XIII et XIV, ainsi que les Graphiques 29 et 30 nous montrent que les valeurs de battement calculées en utilisant les forces aérodynamiques approximées par notre nouvelle méthode sont très proches de celles obtenues initialement en Nastran par DLM (Doublet Lattice Method).

Nous constatons, à partir du Tableau XII, que l'erreur d'approximation de Chebyshev se stabilise très vite à une valeur petite en augmentant l'ordre de l'approximation et que l'ordre [7, 5] est suffisamment grand pour obtenir des excellents résultats.

Suite à une comparaison entre les erreurs des valeurs de battement présentées dans les Tableaux XIII et XIV obtenus par les méthodes Chebyshev et LS, il devient évident que la méthode de Chebyshev donne une meilleure approximation. De plus, l'effort de calcul demandé par cette méthode (l'implémentation de l'algorithme en Matlab, le temps de calcul, les ressources de mémoire dédiées par l'ordinateur pour les calculs) est beaucoup moins élevé que celui nécessaire dans le cas de l'utilisation de la méthode LS.

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS

8.1 Conclusions générales

Dans ce projet de recherche nous avons conçu, implémenté et validé sur trois modèles différents d'avion une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires à l'aide des polynômes orthogonaux de Chebyshev pour les études des interactions aéroservoélastiques. Les modèles utilisés sont ceux de l'ATM (Aircraft Test Model) et le F/A – 18, qui nous ont été fournis par les chercheurs de la NASA Dryden Flight Research Center, ainsi que le modèle de CL – 604 fourni par les ingénieurs chez Bombardier Aéronautique.

La conception de cette nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques a été réalisée à l'aide de la théorie des polynômes de Chebyshev de premier type et des propriétés d'orthogonalité de ces polynômes.

La forme rationnelle de ces polynômes nous a permis la variation de l'ordre d'approximation et la comparaison des résultats obtenus par des polynômes d'ordre différent. Nous avons obtenu les mêmes types des résultats (erreurs d'approximation très petites) indépendamment de l'ordre de l'approximation. Des très bonnes approximations ont été obtenues avec un effort de calcul réduit.

Cette méthode a été implémentée en utilisant le logiciel Matlab et les sous-routines de Maple qui se retrouvent en Matlab et qui permettent de définir le développement en série des polynômes de Chebyshev. Ces sous-routines nous ont permis d'obtenir des polynômes d'approximation avec un ordre d'approximation réduit et une erreur minimale.

La validation de notre nouvelle méthode d'approximation a été réalisée par la comparaison entre les résultats obtenus avec cette méthode et les résultats obtenus avec deux autres méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques Padé et Least Squares LS (Méthode de moindres carrés). Cette comparaison a été effectuée pour :

- les erreurs totales normalisées d'approximation et
- les vitesses et fréquences de battement, calculées en utilisant les méthodes de battement *p* et *pk*.

Suite à la comparaison des résultats obtenus avec la nouvelle méthode avec les résultats obtenus par les méthodes classiques d'approximation des forces aérodynamiques Padé et LS, sur les mêmes modèles d'avions, nous avons constaté que :

1. Les erreurs totales normalisées obtenues en utilisant la méthode Chebyshev sont beaucoup plus petites.

2. Des très bonnes approximations au long de l'intervalle d'approximation sont calculées par la méthode Chebyshev, incluant les extrémités de l'intervalle où les deux autres méthodes classiques donnent des moins bons résultats.

3. Les vitesses et les fréquences de battement obtenues suite à l'introduction des valeurs approximées des forces aérodynamiques par la méthode Chebyshev dans les algorithmes *p* et *pk* sont très proches des vitesses et fréquences obtenues initialement en utilisant les valeurs des forces aérodynamiques calculées par les programmes d'éléments finis NASTRAN ou STARS.

4. La méthode Chebyshev s'est avérée d'être au moins deux à quatre fois plus rapide que les deux méthodes classiques utilisées dans la comparaison, indépendamment du type d'avion (et de nombre de modes utilisé).

5. Les ressources de mémoire active nécessaires pour l'utilisation de la méthode Chebyshev ont été jusqu'à deux fois moins élevées que ceux requises pour l'utilisation des autres méthodes. Cet aspect est très important, car il s'est avéré pénalisant dans le cas de l'utilisation de la méthode Padé pour un grand nombre des modes aérodynamiques.

6. Du point de vue informatique, l'implémentation de notre nouvelle méthode en Matlab est facile, indépendamment du modèle d'avion utilisé, à l'aide des fonctions décrivant les polynômes de Chebyshev du premier type prédéfinies en Maple.

Ces fonctions nous ont permis d'imposer, dès le début des calculs, un seuil pour l'erreur d'approximation de chaque terme de la matrice des forces aérodynamiques, et aussi nous ont permis de varier l'ordre d'approximation de ces forces aérodynamiques pour obtenir une construction polynomiale avec un nombre réduit de termes qui offre la plus petite possible erreur d'approximation.

8.2 Recommandations

Dans certains travaux futurs, des améliorations à cette méthode d'approximation peuvent être apportées.

Suite à l'implémentation informatique de cette nouvelle méthode, nous avons constaté qu'il faut imposer des restrictions sur la valeur minimale du seuil de l'erreur d'approximation pour chaque élément de la matrice des forces aérodynamiques. Ces restrictions ont apparues suite aux grandes différences entre les valeurs des éléments adjacents (d'ordre 10^{31}) de la matrice des forces aérodynamiques, suivis par des groupes des éléments pour lesquels cette différence est presque nulle (valeurs presque égales des éléments). La génération des polynômes de Chebyshev était mathématiquement impossible sans imposer ces restrictions.

Dans le but d'éliminer ces restrictions, un prétraitement des données à approximer sera étudié et implémenté avant d'utiliser la méthode d'approximation. Un exemple de prétraitement pourrait être la normalisation des éléments de la matrice des forces aérodynamiques qui pourrait éliminer les différences entre les valeurs de ces éléments.

Certains algorithmes d'optimisation, tel que l'algorithme de Rémès ou l'Algorithme de la Correction Différentielle (DCA – Differential Correction Algorithm) ont les propriétés de produire des approximations rationnelles d'ordre minimal (degré du numérateur et du dénominateur réduit) et peuvent être utilisés une fois les polynômes d'approximation de Chebyshev générés. Ces algorithmes ont l'avantage de minimiser l'erreur d'approximation dans l'espace des fonctions continues et permettront l'obtention de bornes rigoureuses des erreurs de troncature.

La réduction du modèle peut se réaliser avec d'autres méthodes de réduction de l'ordre du système qu'avec celles utilisées dans ce projet. Il faut envisager des méthodes qui sont en mesure de réduire les systèmes stables ainsi que les systèmes devenus instables pour nous permettre un calcul rigoureux de toutes les valeurs de vitesses et fréquences de battement. La réduction du modèle permettra de réduire encore plus le temps de calcul nécessaire pour le calcul des vitesses et fréquences de battement.

Finalement, le travail réalisé dans cette thèse représente un avancement des travaux dans le domaine des interactions aéroservoélastiques et nos travaux ont été appliqués sur les avions F/A – 18 et CL – 604 conçus par les laboratoires de la NASA DFRC et Bombardier Aéronautique.

ANNEXE 1

Les polynômes de Chebyshev pour les calculs des forces aérodynamiques non stationnaires en aéroservoélasticité

L'article suivant a été publié dans *Journal of Aircraft*.

Chebyshev Polynomials for Unsteady Aerodynamic Calculations in Aeroservoelasticity

Alin Dorian Dinu[1], Ruxandra Mihaela Botez[2], and Iulian Cotoi[3]

École de technologie supérieure, Université du Québec, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada

The aerodynamic forces in the reduced frequency domain have to be approximated in the Laplace domain, in order to study the effects of the control laws on the flexible aircraft structure. This type of approximation of unsteady generalized aerodynamic forces from the frequency domain into the Laplace domain, acting on a Fly-By-Wire aircraft, presents an important challenge in the aeroservoelasticity area. In this paper we present a new method for approximation of the generalized aerodynamic forces, using Chebyshev polynomials and their orthogonality properties. A comparison of results expressed in terms of flutter speeds and frequencies obtained by this new method and by the Padé method is here presented. This new approximation method gives excellent results with respect to Padé method and is validated on the Aircraft Test Model from NASA Dryden Flight Research Center.

---

[1] Ph.D. Student, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada.
[2] Professor, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada. AIAA Member.
[3] Researcher, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada.

Nomenclature

c	=	wing chord length
k	=	reduced frequency
q	=	non-dimensional generalized coordinates (with respect to time t)
q_{dyn}	=	dynamic pressure
$\mathbf{C}$	=	modal damping matrix
$\mathbf{K}$	=	modal elastic stiffness matrix
$\mathbf{M}$	=	modal inertia or mass matrix
M	=	Mach number
$\mathbf{Q}$	=	modal generalized aerodynamic force matrix
$\mathbf{Q_I}$	=	imaginary part of modal generalized aerodynamic force matrix
$\mathbf{Q_R}$	=	real part of modal generalized aerodynamic force matrix
T	=	Chebyshev polynomial
V	=	true airspeed
V_E	=	equivalent airspeed
V_0	=	reference true airspeed
$\mathbf{\Phi}$	=	modal transformation matrix
η	=	generalized coordinates
ν	=	airspeed ratio
ρ	=	true air density
ρ_0	=	reference air density
ω	=	natural frequency

Introduction

Aeroservoelasticity represents the combination of several theories regarding different aspects of aircraft dynamics. Studies of aeroservoelastic interactions on an aircraft are very complex problems to solve, but are essential for an aircraft's certification. Instabilities deriving from adverse interactions between the flexible structure, the aerodynamic forces and the control laws acting upon it can occur at any time inside the flight envelope. Therefore, it is clear that aeroservoelastic interactions are mainly studied in the research field located at the intersection of the following three disciplines: aerodynamics, aeroelasticity and servo-controls. One main aspect of aeroservoelasticity is the conversion of the unsteady generalized aerodynamic forces $\mathbf{Q}(k, M)$ from the frequency domain into the Laplace domain $\mathbf{Q}(s)$, where k is the reduced frequency, M is the Mach number and s is the Laplace variable. There are basically three classical methods to approximate the unsteady generalized forces by rational functions from the frequency domain to the Laplace domain[1-5]: Least Squares (LS), Matrix Padé (MP) and Minimum State (MS). To date, the approximation that yields the smallest order time-domain state-space model is the MS method.[5] All three methods use rational functions in the Padé form.

Several aeroservoelastic analysis software codes have been developed for the aerospace industry. The Analog and Digital Aeroservoelasticity Method (ADAM) was developed at the Flight Dynamics Laboratory (FDL). ADAM[6] has been used for the non augmented X-29A and for two wind-tunnel models: 1) the FDL model (YF-17) tested in a 16 ft transonic dynamics tunnel and 2) the Forward Swept Wing (FSW) model mounted in a 5 ft subsonic wind tunnel. ISAC[7] (Interaction of Structures, Aerodynamics, and Controls) was developed at NASA Langley Research Center, and has been used on various flight models such as DAST (Drone for Aeroelastic Structure Testing) ARW-1 (Aeroelastic Research Wing), ARW-2 and DC-10 wind-tunnel flutter models, generic X-wing feasibility studies, analyses of elastic oblique-wing aircraft, AFW (Active Flexible Wing) wind tunnel test programs, generic hypersonic vehicles and high-speed civil transports. Recently, an aeroelastic code, ZAERO[8], was developed at Zona Technology, and has been used for aeroservoelastic studies.

The desire for an aeroelastic state-space modeling technique that does not necessitate the addition of lag states to the model has led to the development of FAMUSS.[9] The elements of the state-space matrices are determined by a *Pk* flutter solution and linear and nonlinear least-square fits of the direct solution of the system's transfer function frequency response. This results in fewer fit equations than the rational function approach. Fitting the transfer function frequency response gives a good indication of the difference between the original system and the equivalent system as sensed by the control system. The pole zero model is used to aid in determining the poles of the system. If the generalized force data is available, then the system poles are obtained directly from them. The linear technique requires that the poles be either input manually or input from the pole zero model. The state-space model generated by FAMUSS is coupled with the model of the Flight Control System in Matrix_x for an aeroservoelastic analysis.

STARS[10] code was developed at NASA Dryden Flight Research Center (DFRC) and has been applied on various projects at NASA DFRC: X-29A, F-18 High Alpha Research Vehicle / Thrust Vectoring Control System, B-52 / Pegasus, Generic Hypersonics, National AeroSpace Plane (NASP), SR-71 / Hypersonic Launch Vehicle, and High Speed Civil Transport. The STARS program is an efficient tool for aeroservoelastic interactions studies and has an interface with NASTRAN[11], a computer program frequently used in the aeronautical industry. All of the above codes use two main classical methods for aerodynamic force approximations from the frequency domain (aeroelasticity) into the Laplace domain (aeroservoelasticity): Least Squares (LS) and Minimum State (MS). We further present a detailed survey on the other methods existing in the literature.

The aerodynamic forces dependence on s may be written as an irrational function even for simple cases such as two-dimensional potential incompressible flows on an aircraft wing profile. During the 1950's, Theodorsen[12] proved that $\mathbf{Q}(s)$ could be expressed by use of Hankel's functions. A few years later, Wagner found the first rational approximation for $\mathbf{Q}(s)$. Another approach used the approximation of unsteady aerodynamic forces by Padé polynomials. This approach was based on a fractional approximation of the form $P(s)/R(s)$, where P and R are two polynomials in s, for every term of the unsteady force matrix. In this way, every pole of $R(s)$ showed a new state, called augmented state, in the final linear invariant aeroservoelastic system. In case where the initial square matrix has the N dimension, and where a Padé approximation of M order is used, then $N\,(N+M)$ augmented states will be introduced.

The number of augmented states was reduced by Roger.[3] In his formulation, only N x M modes were introduced, where N is the number of initial modes. Roger's method is based on the fact that the aerodynamic lag terms remain the same for each element of the unsteady aerodynamic force matrix. This method is called Least Squares (LS) and is used in computer aeroservoelastic codes such as STARS and ADAM.

Another method derived from the LS method was proposed by Vepa.[4] This method uses the same denominators for every column of the aerodynamic matrix $\mathbf{Q}$, and is called Matrix Padé (MP).

Various improvements were done for the two methods presented above, LS and MP. One such type of improvement is that one could impose different conditions (restrictions) to these approximations to pass through certain points. Generally, the approximations are imposed to be exact at zero and at two other chosen points. The first point could be chosen to represent the estimated flutter frequency and the second point to represent the gust frequency. The improved methods have been renamed: ELS method (Extended Least-Squares) [1, 13] and EMMP method (Extended Modified Matrix-Padé).[14] Later, Karpel[15] proposed a completely different approach in order to solve the above approximations. His goal was to find a linear invariant system in the time domain and so he decided to integrate this information directly into the equation representing the unsteady aerodynamic force values by adding a term similar to the transfer function of a linear system. Because he wanted to find a linear system of reasonable dimensions, he wrote the approximation under the MS (Minimum State) form. The advantage of this method over Roger's method is that it provides an excellent approximation with a smaller number of augmented states.

All of the methods described above allow the approximation of unsteady aerodynamic forces for one Mach number at a time. A valid approximation for a range of Mach numbers would be very useful for military Fly-By-Wire aircraft, where the

Mach number varies rapidly during high speed maneuvers, and where aeroservoelastic interactions are extremely important. Poirion[16, 17] constructed an approximation allowing the calculation of the unsteady aerodynamic forces for a range of Mach numbers and for a range of reduced frequencies. He used several MS approximations, obtained for several fixed Mach numbers, and a spline interpolation method for Mach number dependence. Thus, he obtained formulae which allow the unsteady aerodynamic forces to be computed for any couple (k, M), where k is the reduced frequency and M is the Mach number.

Winther[18] provides an efficient procedure for real-time simulations which is based on a formulation that eliminates the need for auxiliary state variables to represent the unsteady aerodynamics. The solution includes transformations to a body axes coordinate system and integration of the structural dynamic equations with the quasi-steady, nonlinear equations of motion.

The approximation methods should simultaneously satisfy two opposed criteria: an excellent (exact) approximation, which can be obtained by increasing the number of lag terms, and a linear invariant system in the time domain of a very small dimension (with the smallest possible number of lag terms). For the time being, there is no method adequately satisfying both criteria. In two recent papers, Botez and Cotoi[19, 20] proposed a new approach based on a precise Padé approximation. The authors used four order reduction methods for the last term of the approximation, a term which could be seen as a transfer function of a linear system. The approximation error for this new method is 12-40 times less than for the MS method for the same number of augmented states and is dependent on the choice of the order reduction method. However, this method remains very expensive in terms of computing time.

An alternative approach to rational function aerodynamics and minimum state aerodynamics is presented by Smith.[21] In this paper the authors provide a technical review of the methods for the generation of a state-space model for a flexible aircraft with frequency-varying aerodynamic forcing. The RFA methods described entail the introduction of aerodynamic, or lag states, to the system for accurate approximation of the generalized aerodynamic forcing. Furthermore, it is shown that the *P*-transform and FAMUSS methods generate state model approximations of the system directly. Neither FAMUSS nor *P*-transform requires the introduction of additional lag states and the accuracy between the methods is about the same. The FAMUSS method includes the option of introducing lag states to the system, whereas the *P*-transform method does not.

In this paper, we present a new method that uses Chebyshev polynomials to produce approximations for $\mathbf{Q}(s)$. The lateral dynamics of a half Aircraft Test Model (ATM) modeled in STARS manual[10] were used. This means that in this paper, for our comparisons, we have used the data containing only the anti-symmetric modes of the ATM. After performing the finite element structural modeling and the doublet lattice aerodynamic modeling on the ATM in STARS, the unsteady aerodynamic forces $\mathbf{Q}$ are calculated as functions of the reduced frequencies k and of the Mach number M. Due to the fact that $\mathbf{Q}(k, M)$ can only be tabulated for a finite set of reduced frequencies k, at a fixed Mach number M, it must be interpolated in the s domain in order to obtain $\mathbf{Q}(s)$. In this paper we describe a new interpolation method which uses the Chebyshev polynomials, and their properties. Results expressed in terms of flutter speeds and frequencies obtained by use of Chebyshev theory applied to *Pk* flutter method are compared to same type of results obtained by Padé method on the ATM model.

Aircraft Equations of Motion

Flexible aircraft equations of motion, where no external forces are included, may be written in the time-domain as follows:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\eta}+\tilde{\mathbf{C}}\dot{\eta}+\tilde{\mathbf{K}}\eta+q_{dyn}\mathbf{Q}(k,M)\eta=0 \tag{1}$$

where $q_{dyn} = 0.5\rho V^2$ is the dynamic pressure with ρ as the air density and V as the true airspeed ; η is the generalized coordinates variable defined as $\mathrm{q} = \mathbf{\Phi}\eta$ where q is the displacement vector and $\mathbf{\Phi}$ is the matrix containing the eigenvectors of the following free-vibration problem:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathrm{q}} + \mathbf{K}\,\mathrm{q} = 0 \tag{2}$$

The following transformations are used in equation (1):

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi},\ \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi},\ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$$
$$\mathbf{Q}(k,M) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_e(k)\mathbf{\Phi} \tag{3}$$

where **M**, **K**, and **C** are the generalized mass, stiffness and damping matrices; k, the reduced frequency, is written as $k = \omega b/V$ where ω is the natural frequency and b is the wing semi-chord length. $\mathrm{A}_e(k)$ is the aerodynamic influence coefficient matrix for a given Mach number M and a set of reduced frequency values k. The Laplace transformation is further applied to Eq. (1), and we obtain:

$$[\tilde{\mathbf{M}}s^2 + \tilde{\mathbf{C}}s + \tilde{\mathbf{K}}]\eta(s) + q_{dyn}\mathbf{Q}(s)\eta(s) = 0 \tag{4}$$

The approximation of the unsteady generalized aerodynamic forces is essential for the control analysis of our system. Due to the fact that $\mathbf{Q}(k, M)$ can only be tabulated for a finite set of reduced frequencies, at a fixed Mach number M, these unsteady generalized aerodynamic forces must be interpolated in the s domain in order to obtain $\mathbf{Q}(s)$. In this paper we describe an interpolation method using the Chebyshev polynomials and its results. The details of Chebyshev polynomial theory are described in the next chapter.

Chebyshev Polynomials Theory

Chebyshev polynomials of the first kind

These polynomials[22] are a set of orthogonal polynomials defined as the solutions to the Chebyshev Eq. (10) and are denoted as $T_n(x)$. They are used as an approximation to a least squares fit, and are closely connected with trigonometric multiple-angle equations. Chebyshev polynomials of the first kind are implemented in Mathematica as ChebyshevT [n, x], and are normalized so that $T_n(1) = 1$.

Continuous functions by use of Chebyshev polynomials theory

Any continuous function may be expressed by use of Chebyshev polynomials as follows:

$$f(x)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{j=1}^{\infty}c_jT_j(x) \tag{5}$$

where the Chebyshev polynomials have the following form:

$$T_j(x)=\cos(j\arccos(x)) \tag{6}$$

and the coefficients c_j used in Eq. (5) are expressed as follows :

$$c_j=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ where } j=1,2,\ldots \tag{7}$$

Orthogonality of Chebyshev polynomials

In our new approximation method for unsteady aerodynamic forces, we have used the Chebyshev polynomials because they have a specific orthogonality property. This interesting property allows us to keep the approximation's error within a predetermined bandwidth, and may further be expressed as:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_r(x)T_s(x)dx=\begin{cases}0, & r\neq s\\ \pi, & r=s=0\\ \frac{\pi}{2}, & r=s\neq 0\end{cases} \tag{8}$$

Recurrence formulae and the solution of Chebyshev polynomials

The following recurrence relationships[22-24] have been used in the Chebyshev polynomials new approximation method:

$$\begin{cases}T_0(x)=1\\ T_1(x)=x\\ T_{r+1}(x)=2xT_r(x)-T_{r-1}(x)\end{cases} \tag{9}$$

Next, we impose the following condition to find the Chebyshev polynomials solution:

$$T_r(x)=0 \tag{10}$$

where r specifies the rank of the Chebyshev polynomial. Equation (10) gives the following solution:

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{11}$$

Thus, the expression:

$$\tilde{Q}_r(x) = \frac{1}{2^{r-1}} T_r(x) \tag{12}$$

will oscillate with a minimum maximum (extreme) amplitude within the interval [-1, 1].

Proof:

The condition in Eq. (10) is imposed and we obtain:

$$\cos(r \arccos(x)) = 0 \tag{13}$$

By use of the variables change:

$$y = r \arccos(x) \tag{14}$$

we found the following trivial equation solutions:

$$\cos(y) = 0 \tag{15}$$

so that $y = (2j+1)\frac{\pi}{2}; \qquad j = 0,1,...$ (16)

The solutions are further calculated by replacing Eq. (16) into Eq. (14):

$$r \arccos(x) = (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad => \quad \arccos(x) = \frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{17}$$

so that we obtain:

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \quad ; \quad j = 0,1,...,r-1 \tag{18}$$

Extreme amplitudes

$T_r(x)$ is a function defined by cosines, which lets us conclude that between two solutions of this function we will find an extreme of |1| amplitude exactly in the middle of the interval, specifically at :

$$x = \cos\frac{j\pi}{r} \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,r \tag{19}$$

Chebyshev approximation method for aeroservoelastic interactions studies

In order to develop our approximation method, we used the predefined functions using Chebyshev polynomials expressed in Eq. (6) which have already been implemented in the Maple's kernel, in Matlab.

These functions (*chebpade* and *chebyshev*) allowed the construction of a polynomial interpolation for the unsteady generalized aerodynamic forces, acting on the Aircraft Test Model (ATM) for 14 values of reduced frequencies *k*, and 9 values of Mach number. The elements forming the matrices of the unsteady generalized aerodynamic forces calculated by the Doublet Lattice Method DLM in STARS were denoted by **Q**(*i,j*) with $i = 1\ldots8$ and $j = 1\ldots8$ for the first eight elastic modes.

The approximation by means of this method is obtained using a similar path to the one used for the Padé method. For each element of the unsteady aerodynamic force matrix we have determined a power series development in the following form, by use of the "*chebyshev*" function:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{1}{2}c_0^{(ij)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s) \tag{20}$$

where $c_n^{(ij)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}_{ij}(s)T_n^{(ij)}(s)}{\sqrt{(1-s^2)}}ds$ for every $n = 0,1,\ldots$

Next, by use of the "*chebpade*" function, we have found an approximation by rational fractions in the following form:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} a_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)}{1 + \sum_{n=1}^{P} b_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)} \tag{21}$$

where $M = P + 2$.

This new form is very useful since it integrates the orthogonality properties of Chebyshev polynomials and allows us to vary the degree of the numerator and the denominator, in order to obtain a very good approximation.

We have compared the results found by means of our Chebyshev approximation method with the results given by another classical interpolation method such as Padé. These results were expressed in terms of the approximation's normalized error.

The Padé method uses a parameter identification solution in order to determine a polynomial fractional form which identifies an orthogonal polynomial interpolation. This fractional form is the key aspect of this method, due to the fact that it allows the order reduction system.

We see in Figs. 1 and 2 that our new approximation method by Chebyshev polynomials gives a smaller approximation error than Padé method. Due to Chebyshev polynomials properties, we were able to impose a bandwidth for the error convergence on the approximation for each element of the unsteady generalized aerodynamic force matrices. Both figures show the total normalized approximation error by Chebyshev and Padé polynomials for real and imaginary unsteady aerodynamic forces.

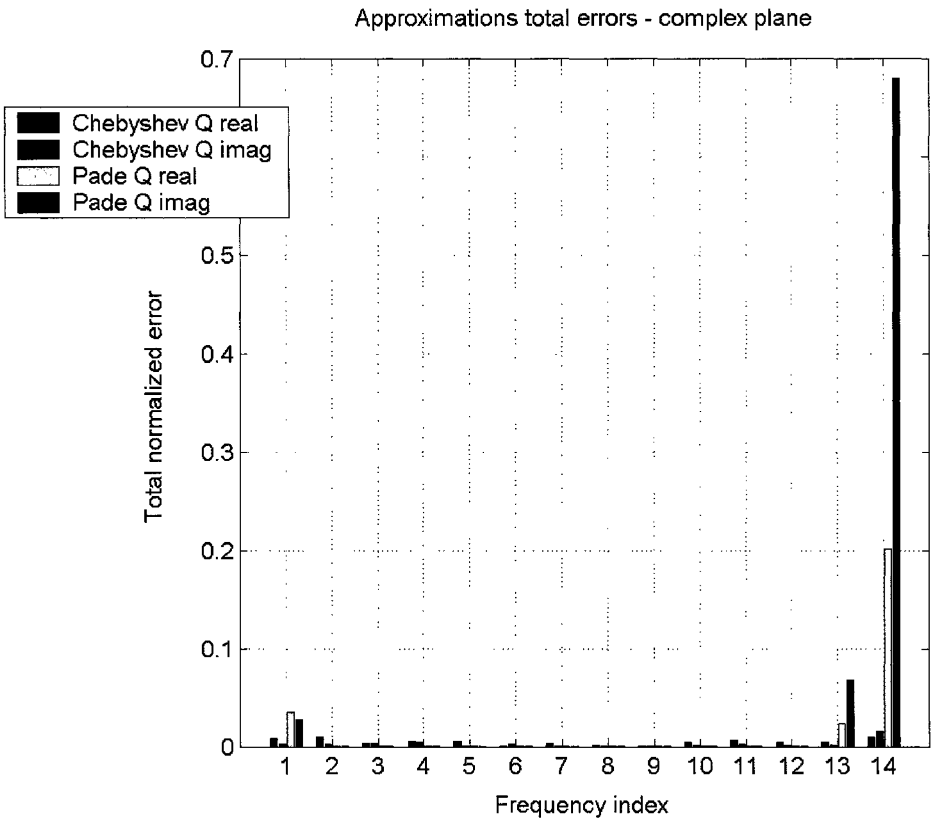


Fig. 1 Total normalized errors Padé and Chebyshev [15, 13] model order, Mach 0.5

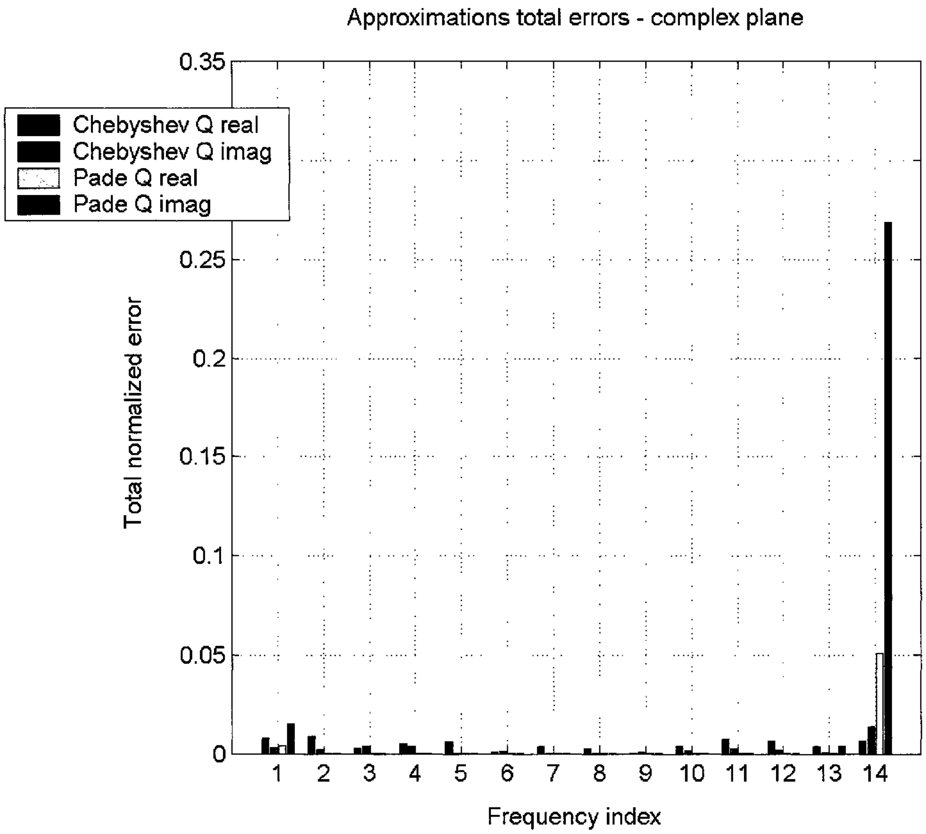


Fig. 2 Total normalized errors Padé and Chebyshev [16, 14] model order, Mach 0.5

Figure 1 shows the total normalized approximation error for real and imaginary aerodynamic forces for the [15, 13] model order by use of Padé and Chebyshev approximation methods, and Fig. 2 shows the total approximation error for real and imaginary aerodynamic forces for the [16, 14] model order by use of Padé and Chebyshev approximation methods. For this example, we applied both methods on the Aircraft Test Model ATM generated in STARS code at the Mach number $M = 0.5$ and for 14 reduced frequencies k = [0.0100 0.1000 0.2000 0.3030 0.4000 0.5000 0.5882 0.6250 0.6667 0.7143 0.7692 0.8333 0.9091 1.0000]. Some differences at both ends of the approximation interval may be seen in the figures. The polynomial approximation order in the Chebyshev method represents the maximum rank of the Chebyshev polynomials used to form the numerator (M) and the denominator (P) in Eq. (21). In other words, in Eq. (21), an approximation order $[M, P] = [16, 14]$ gives $M = 16$ and $P = 14$ where M is the maximum rank of Chebyshev polynomials at the numerator and P is the maximum rank of Chebyshev polynomials at the denominator. In the same way we defined the approximation order for Padé.

We used only a few different values of the polynomial approximation order by the Padé method and the Chebyshev polynomial fractions method (polynomial order should be equivalent for both methods) in order to calculate the total normalized approximation error - which was found to be much smaller for the Chebyshev polynomial method with respect to the overall approximation error given by Padé.

More specifically, Padé method gives a small error near the approximation point (in our examples, the middle of the reduced frequency interval) and an increased error towards each end of the interval. The Chebyshev approximation method demonstrates an almost constant value of the error all along the approximation interval. The threshold of this error could be imposed from the beginning of the calculations in order to find the unsteady generalized aerodynamic force approximation matrices.

In Figs. 1 and 2, we can only visualize the overall normalized approximation error, calculated for the whole unsteady generalized aerodynamic force matrix at Mach number $M = 0.5$, by use of the two described methods. As exact values for these approximations are difficult to compare on Figs. 1 and 2, we are providing Table 1 to show the numerical values of these errors obtained, for example, at 4 Mach numbers for 3 approximation orders ($M = 0.5$ included).

Table 1 Total normalized errors

Mach number	Approx. order	Method	Total normalized error $J_{Q\,\text{real}}$	$J_{Q\,\text{imaginary}}$	J_Q
	[16,14]	Chebyshev	0.0656	0.1670	0.2326
		Padé	0.7831	0.2020	0.9852
	[15,13]	Chebyshev	0.0643	0.1605	0.2248
0.4		Padé	0.1226	0.5149	0.6376
	[10,8]	Chebyshev	0.0676	0.1670	0.2346
		Padé	0.0570	0.0705	0.1275
	[16,14]	Chebyshev	0.0647	0.0343	0.0991
		Padé	0.0552	0.2876	0.3429
	[15,13]	Chebyshev	0.0672	0.0367	0.1039
0.5		Padé	0.2601	0.7759	1.0361
	[10,8]	Chebyshev	0.0500	0.0299	0.0799
		Padé	0.1363	0.0556	0.1919
	[16,14]	Chebyshev	0.1209	0.0911	0.2121
		Padé	0.1451	0.0792	0.2243
	[15,13]	Chebyshev	0.1209	0.0804	0.2013
0.6		Padé	0.1610	3.7261	3.8871
	[10,8]	Chebyshev	0.1222	0.0786	0.2009
		Padé	0.3213	0.0289	0.3503
	[16,14]	Chebyshev	0.0871	0.1710	0.2581
		Padé	1.2893	1.8254	3.1148
	[15,13]	Chebyshev	0.0867	0.1703	0.2571
0.7		Padé	2.3919	2.8628	5.2547
	[10,8]	Chebyshev	0.0926	0.1607	0.2533
		Padé	219.2462	5.6375	224.8837

The ATM data imply huge differences between the unsteady generalized aerodynamic force values for different reduced frequencies at different Mach numbers, and the total approximation error given in metrics does not provide a clear understanding of our new method's advantages for all reduced frequencies. For these reasons, we have chosen to normalize this approximation error for each element of the **Q** matrix, for the real and the imaginary part, at each reduced frequency using the equations:

$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right)*100\%$$

$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imaginary}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right)*100\% \qquad (22)$$

and $J_{\mathbf{Q}} = J_{\mathbf{Q}\mathrm{real}} + J_{\mathbf{Q}\mathrm{imaginary}}$

where $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}old}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}old}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces given by STARS for the ATM model and $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}new}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}new}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces approximated by Chebyshev or by Padé theories. N_{modes} is the total number of modes (also the dimension of **Q**), k is the index of the reduced frequency and J is the total normalized error.

In Table 1, the values presented for Chebyshev and Padé indicate the values of the total normalized errors obtained with these 2 methods according to Eq. (22). The case of the [10, 8] approximation order for Chebyshev and Padé, at $M = 0.4$, indicates that in this situation Padé approximation gives a smaller error than Chebyshev approximation. We have intentionally introduced this case in Table 1, since it was the only case out of the total of 108 cases that we have studied for the ATM (9 Mach numbers by 12 approximation orders between [6, 4] and [17, 15]) where Padé provided a smaller error than Chebyshev. The difference between the approximation errors of Padé and Chebyshev in this case was however very small (only 0.1%). In Table 1 are presented 12 of the 108 studied cases. The values of the total normalized approximation errors in Table 1 show that, with the $M = 0.4$ and [10, 8] exception, Chebyshev yields the smallest error.

Open Loop *Pk* flutter analysis

In order to present the open loop *Pk* flutter analysis, we need to define the aerodynamic quantities: air density ratio σ, equivalent airspeed V_E, airspeed ratio ν, dynamic pressure q_{dyn} and reduced frequency k in the following equations:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{23}$$

$$V_E = \sqrt{\sigma} V \tag{24}$$

$$\nu = \frac{V_E}{V_0} \tag{25}$$

$$q_{dyn} = \frac{1}{2}\rho V^2 \tag{26}$$

The formulation for linear aeroelastic analysis in the case of the *Pk* flutter method is the one presented in Eq. (1), where **Q**, the unsteady generalized aerodynamic force matrix, is usually complex. The real part of **Q** denoted by $\mathbf{Q_R}$, is called the "aerodynamic stiffness", and is in phase with the vibration displacement; the imaginary part of **Q** denoted by $\mathbf{Q_I}$ is called the "aerodynamic damping" and is in phase with the vibration velocity.

This dynamics equation is a second degree nonlinear equation with respect to the generalized coordinates' variable η. The nonlinearity comes from the fact that the aerodynamic force matrix **Q** is a function of reduced frequency k, depending of the natural frequency ω as shown:

$$k = \frac{\omega c}{2V} = \frac{\omega b}{V} \tag{27}$$

where c is the wing chord length, b is the semi-chord and V is the true airspeed. With respect to the dynamics Eq. (1), we associate $\mathbf{Q_R}$ with η and $\mathbf{Q_I}$ with $\dot{\eta}$. For this reason, as the **Q** matrix is already a coefficient of η, we need to divide $\mathbf{Q_I}$ by ω to express $\mathbf{Q_I}$ as a coefficient of $\dot{\eta}$. Thus, aeroelastic Eq. (1) becomes:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta} + \left(\mathbf{C} + \frac{1}{\omega} q_{dyn}\mathbf{Q_I}\right)\dot{\eta} + \left(\mathbf{K} + q_{dyn}\mathbf{Q_R}\right)\eta = 0 \tag{28}$$

Equation (27) gives ω as a function of k:

$$\omega = 2kV/c \tag{29}$$

We replace q_{dyn} and ω given by Eqs. (26) and (29) in Eq. (28), and obtain the following equation:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta}+\left(\mathbf{C}+\frac{1}{4k}\rho Vc\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}\right)\dot{\eta}+\left(\mathbf{K}+\frac{1}{2}\rho V^{2}\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}\right)\eta=0 \tag{30}$$

Equations (23) and (24) give the value of σ:

$$\sigma=\frac{V_{E}^{2}}{V^{2}}=\frac{\rho}{\rho_{0}} \tag{31}$$

from where :

$$\rho V^{2}=\rho_{0}V_{E}^{2} \tag{32}$$

If we divide both sides of Eq. (32) by V, and we use the definition of σ given by Eq. (24), we obtain:

$$\rho V=\rho_{0}\frac{V_{E}^{2}}{V}=\rho_{0}V_{E}\frac{V_{E}}{V}=\rho_{0}V_{E}\sqrt{\sigma} \tag{33}$$

Then, we replace Eq. (33) in the coefficient of $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}$ and Eq. (32) in the coefficient of $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}$, and get:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta}+\left(\mathbf{C}+\frac{1}{4k}\rho_{0}c\sqrt{\sigma}V_{E}\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}\right)\dot{\eta}+\left(\mathbf{K}+\frac{1}{2}\rho_{0}V_{E}^{2}\mathbf{Q}_{\mathbf{R}}\right)\eta=0 \tag{34}$$

Results and discussion

To validate our method, we used the anti-symmetric modes of the ATM developed in STARS code by the NASA Dryden Flight Research Center. This model includes aero-structural elements (flexible aircraft) and control surfaces (aircraft commands). The aircraft configuration and mode shapes are presented in the STARS[10] manual. First, a free vibration analysis was performed in the absence of aerodynamics to obtain the free modes of vibration. Then, we calculate aerodynamic forces in the frequency domain $\mathbf{Q}(k)$ by the Doublet Lattice Method (DLM). We obtained, as first step of validation, the same frequencies and modes of vibration by use of our method as the ones obtained by use of STARS code.

Table 2 Elastic anti-symmetric mode definition

Mode number	Mode shape	
1	Vertical fin first bending	VF1B
2	Fuselage first bending	FUS1B
3	Wing first bending	W1B
4	Wing second bending	W2B
5	Fuselage second bending	FUS2B
6	Wing first torsion	W1T
7	Fin first torsion	F1T
8	Fuselage third bending	FUS3B

Then, by use of the *Pk*-Chebyshev method we can find the values for the speeds and frequencies where first flutter point occurs. The results of the simulation are also shown in Figs. 3 – 7. The same simulation parameters were considered as in the STARS computer program: reference semi-chord length b = 38.89 in, reference air density at sea level ρ_0 = 1.225 kg/m^3, altitude at sea level Z = 0 ft, M = 0.9, reference sound airspeed at sea level a_0 = 340.294 m/s.

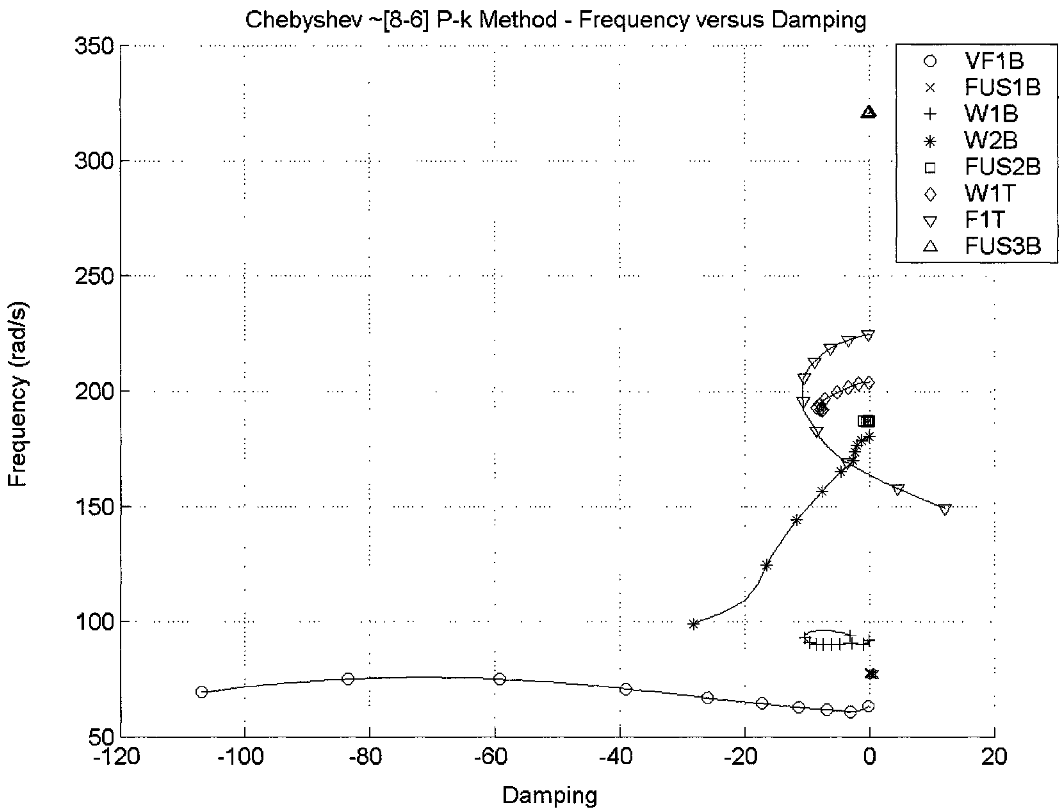


Fig. 3 **Frequency vs. damping for *Pk*-Chebyshev [8, 6] model order**

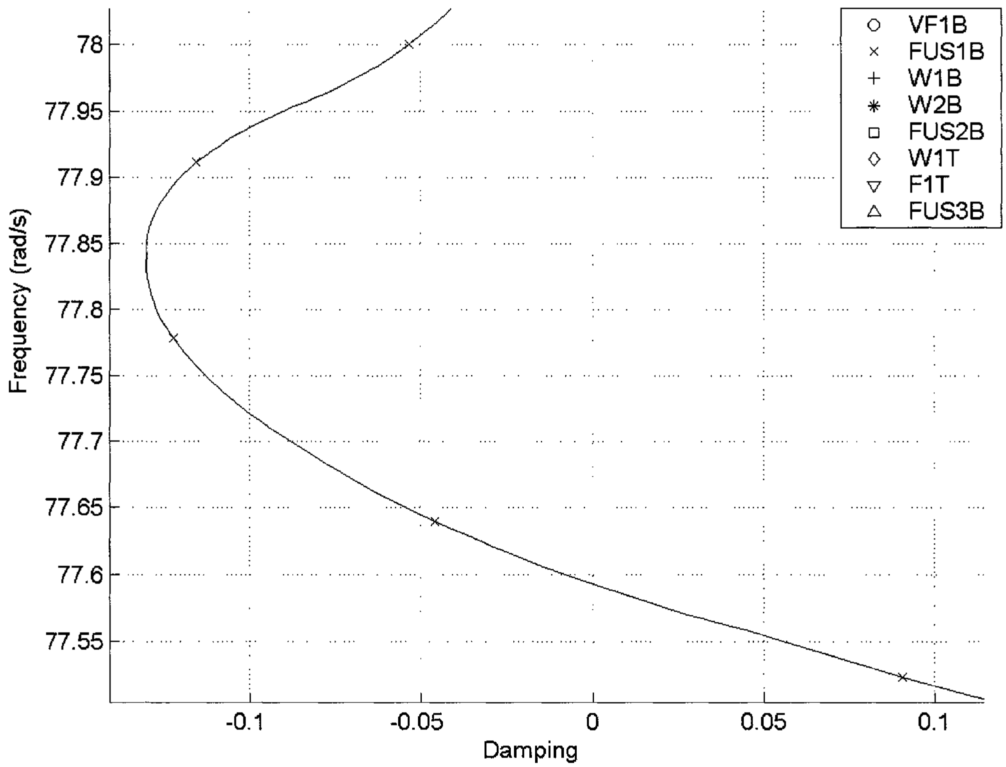


Fig. 4 **Frequency vs. damping *Pk*-Chebyshev [8, 6] model order – zoomed interest area**

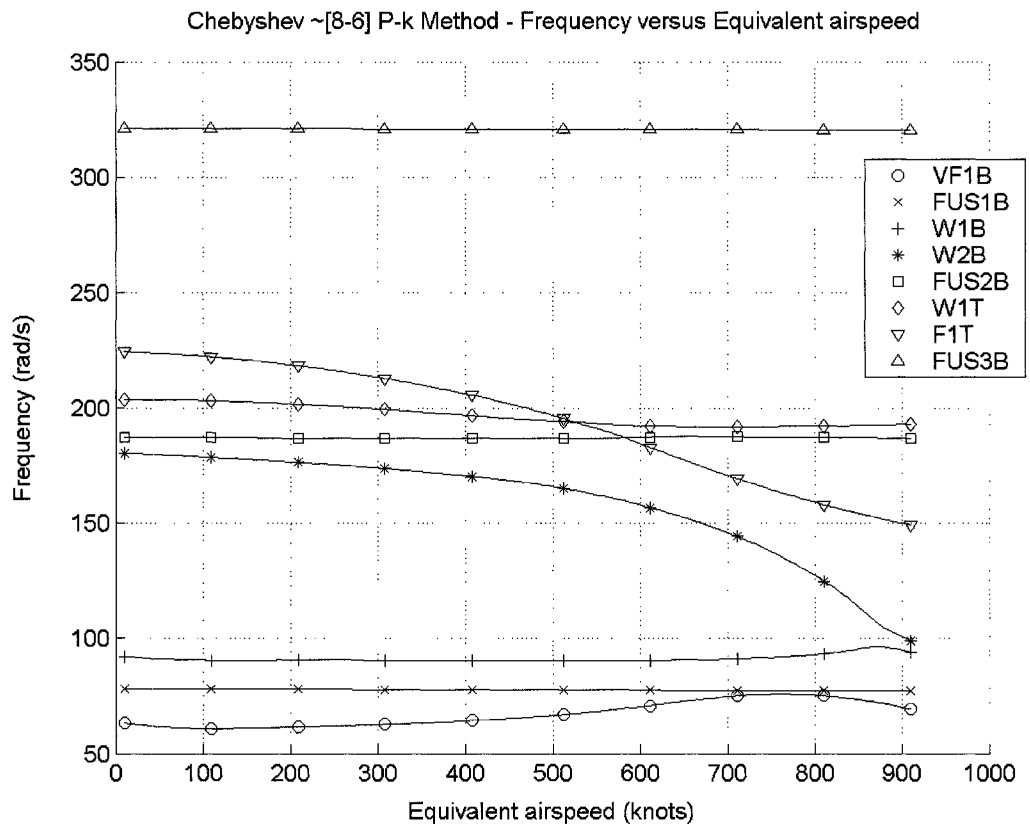


Fig. 5 **Frequency vs. equivalent airspeed for *Pk*-Chebyshev [8, 6] model order**

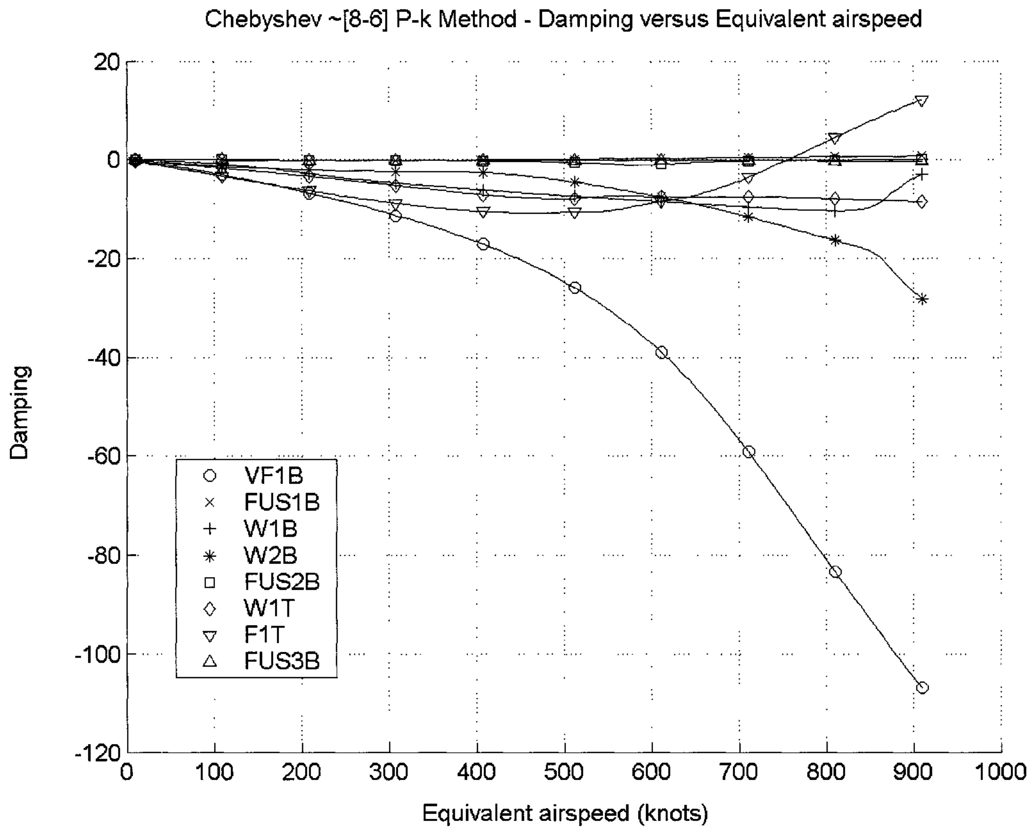


Fig. 6 **Damping vs. equivalent airspeed for *Pk*-Chebyshev [8, 6] model order**

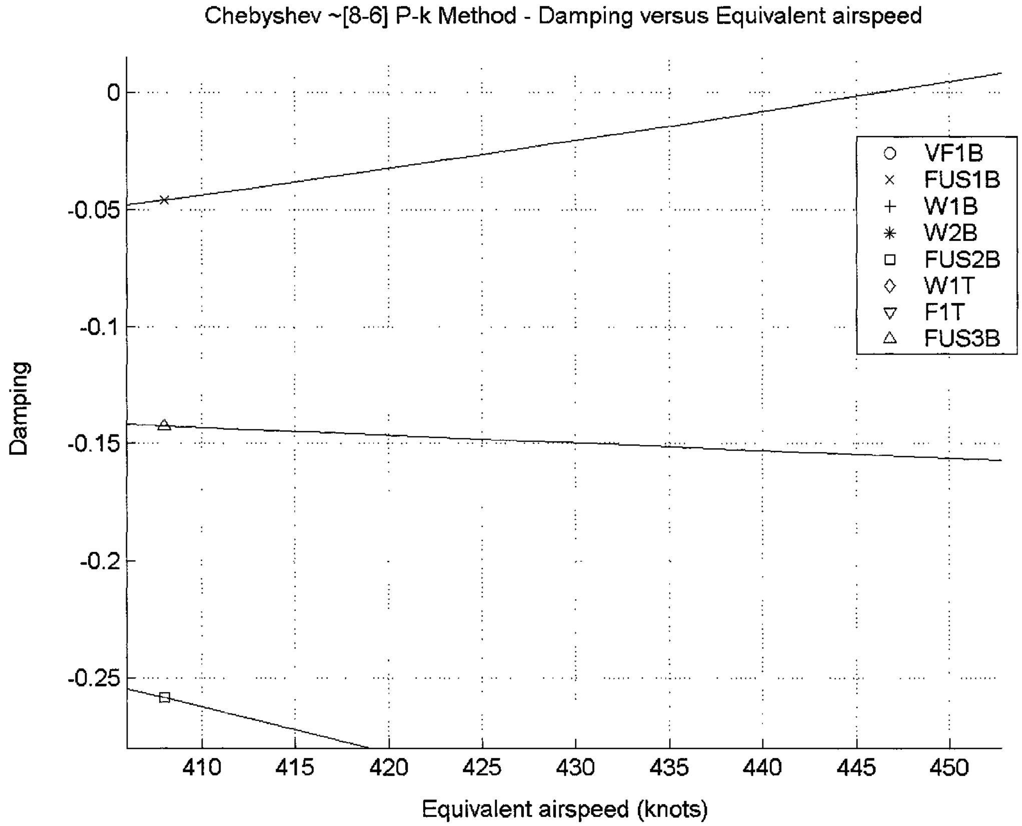


Fig. 7 Damping vs. equivalent airspeed *Pk*-Chebyshev [8, 6] model order – zoomed interest area

In Table 3, results are expressed in terms of velocities and frequencies at which the first flutter point occurs. In fact, the fuselage lateral first bending mode is a mode with a very small damping. The results found by means of our *Pk* method that makes use of the Chebyshev polynomial approximation are compared with the results given by *Pk*-Padé method and the methods programmed in STARS. We have provided the flutter speed and frequency obtained for 4 approximation orders for the Chebyshev method and the Padé method. The results for speed are given in knots to be able to compare them with the ones provided by STARS which are also given in knots.

Table 3 Speed and frequency for the first flutter point

Method	Flutter point 1 (F1B)		Computation time (seconds)
	Speed (knots)	Frequency (rad/sec)	
STARS - ASE	474.1	77.3	
STARS - *k*	443.3	77.4	
STARS - *Pk*	441.7	77.4	
Pk - Padé [8,6]	445.5	77.5	122 sec.
Pk - Padé [9,7]	445.5	77.5	134 sec.
Pk - Padé [10,8]	445.8	77.5	144 sec.
Pk - Padé [11,9]	446.0	77.5	151 sec.
Pk - Chebyshev [8,6]	446.5	77.5	40 sec.
Pk - Chebyshev [9,7]	446.6	77.5	47 sec.
Pk - Chebyshev [10,8]	446.6	77.5	53 sec.
Pk - Chebyshev [11,9]	446.6	77.5	58 sec.

We have found that the results of our method match closely those obtained by the other methods. In addition to that, if we take a closer look at the normalized approximation errors for the unsteady aerodynamic force matrix presented in Table 1 and we also take into account the computation costs of the Chebyshev method and the Padé method we can state that Chebyshev is a better method than Padé method (and consequently, than other methods based on Padé) and also a more "reliable" one: using Padé with an approximation order of [10, 8] for Mach number 0.7, we came to the conclusion that this method could sometimes provide unexpectedly large errors. Regarding the computation costs, it takes between 40 seconds and 1 minute to obtain the approximation of the unsteady aerodynamic forces for one Mach number using the

Chebyshev method and between 2 minutes and 2 minutes and 30 seconds using the Padé method, and 50 MB additional computer memory resources. Using the LS method on the same data, it will take between 20 and 25 minutes (depending on the number of lags introduced) and about 150 MB more computer memory allocated.

As seen in Table 1, the approximation's normalized total error calculated by the Chebyshev method stabilizes around 0.1, while the approximation's normalized error calculated by the Padé method (and consequently by any other method based on Padé rational fractions) presents constant fluctuations dependent upon the approximation order. It has been found that an approximation order of [8, 6] or [9, 7] (see Table 3) would be sufficient in the application of our Chebyshev method on the ATM model to calculate flutter velocities and frequencies. It has also been found that there is a link between the approximation order and the computational costs: the higher the approximation order is, the longer time it takes for computation. The reader should not oversee the fact that the accuracy normally obtained using an increased approximation order could be over-weighted by the computational truncation errors. Each one should choose the best suited approximation order for the data to be computed. Our method tries to find the best compromise between the computational costs and the accuracy of the results.

Conclusions

The Chebyshev approximation method provides an excellent approximation by comparison with the Padé method. However, due to the fact that the Chebyshev polynomials had to be generated using the data provided on the Aircraft Test Model, which involve quite large differences between the values of the elements contained in the unsteady generalized aerodynamic force matrices (1e +10), some restraints regarding the threshold of the approximation error had to be imposed, i.e. for smaller elements we have imposed a maximum error value of 1e-4 and for larger elements a maximum error value of 1e-2. Without these restraints, the Chebyshev polynomials cannot be generated.

We could see that using the Chebyshev method in Open Loop, we were able to find excellent approximated values for the flutter speed and the frequencies at which flutter occurs. The results in Table 3 were presented to show that a rather small approximation order would be sufficient for the Chebyshev method to provide accurate information for flutter speed and frequency, and a smaller approximation order means less computation time. One of the most important achievements of our new method, if not the most important, is the fact that the computation time for the open loop case is up to 3 times smaller than in the *Pk*-Padé method and up to 30 times smaller than in the Least Squares case, even for an increased approximation order.

Generally, an approximation method is considered to be better if it satisfies the following criteria: it provides a smaller approximation error; it is more rapid; and, ultimately, uses less computer resources, which could be in some cases a crucial criterion (when a significantly larger quantity of data to be approximated is used). In this case, Chebyshev provides better results, satisfying all criteria.

Acknowledgments

The authors would like to thank Mr. K.K. Gupta from NASA Dryden Flight Research Center for allowing us to use the ATM on STARS. We would also like to thank the other members of the STARS engineering group including Mr. Tim Doyle, Mr. Shun Lung and Mr. Marty Brenner for their precious assistance and collaboration.

References

[1]Tiffany, S.H. and Adams, W.M., "Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces", NASA TP 2776, July 1988.

[2]Edwards, JW., "Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control", SUDAAR 504, Stanford University, Stanford, CA, February 1977.

[3]Roger, K.L., "Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design", *Structural Aspects of Active Controls, CP-228*, August 1977, pp. 4.1-4.11.

[4]Vepa, R., "Finite State Modeling of Aeroelastic System", NASA CR-2779, February 1977.

[5]Karpel, M. ,"Design for Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State Space Modeling", *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, 1982, pp 221-227.

[6]Noll, T., Blair, M., Cerra, J., "ADAM, An Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems", *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11, 1986.

[7]Adams, W.A., Hoadley, S.T., "ISAC: A Tool for Aeroservoelastic Analysis", NASA TM 109031, 1993.

[8]Chen, P.C., Sulaeman, E., Liu, D.D., Denegri, C.M., "Influence of External Store Aerodynamics on Flutter / LCO of a Fighter Aircraft", *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA Paper 2002-1410, Denver, CO, USA, 22-25 April, 2002, pp. 1-11.

[9]Pitt, D.M., and Goodman, C.E., "FAMUSS: A New Aeroservoelastic Flexible Aircraft Modeling Tool", AIAA Paper 92-2395-CP, 1992.

[10]Gupta, K.K., "STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program", NASA TM-4795, 1997, pp. 1-285.

[11]Rodden, WP, Harder, RL, and Bellinger, ED., "Aeroelastic Addition to NASTRAN", NASA CR-3094, 1979.

[12]Dowell, E.H., *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic, Dordrech, The Netherlands, 1995.

[13]Tiffany, SH, Adams, W.M. Jr., "Fitting Aerodynamic Forces in the Laplace Domain: An Application of a Nonlinear Nongradient Technique to Multilevel Constrained Optimization", NASA TM 86317, 1984.

[14]Dunn, HJ., "An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain", NASA TP-1738, 1980.

[15]Karpel, M., "Multidisciplinary Optimization of Aeroservoelastic Systems Using Reduced Size Models". *Journal of Aircraft*. Vol. 29, No. 5, 1992, pp. 939-946.

[16]Poirion, F., "Modélisation Temporelle des Systèmes Aéroservoélastiques. Application à l'Étude des Effets des Retards", *La Recherche Aérospatiale*, No. 2, 1995, pp. 103-114.

[17]Poirion, F., "Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces", *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No. 6, 1996, pp. 1199-1201.

[18]Winther, B.A., Goggin, P.J., and Dykman, J.R., "Reduced-Order Dynamic Aeroelastic Model Development and Integration with Nonlinear Simulation", *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 5, 2000, pp. 833-839.

[19]Cotoi, I, Botez, R.M., "Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions", *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, 2002, pp. 985-987.

[20]Cotoi, I, Botez, R.M., "Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis", *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications* CA2001, Banff, Canada, 2001, pp. 105-108.

[21]Smith, T.A., Hakanson, J.W., Nair, S.S., Yurkovich, R.N., "State-Space Model Generation for Flexible Aircraft", *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No. 6, 2004, pp. 1473-1481.

[22]Weisstein, E.W., "Chebyshev Polynomial of the First Kind", *MathWorld - Wolfram Web*, URL: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html [cited March 2004].

[23]Rivlin, Th. J., Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory, 2nd ed., Wiley, New York, 1990.

[24]Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T., "Polynomial Approximation from Chebyshev Coefficients", Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1992, Chap. 5.

ANNEXE 2

Approximations des forces aérodynamiques par la méthode Chebyshev pour les études aéroservoélastiques en boucle fermée

L'article suivant a été publié dans *CASJ – Canadian Aeronautics and Space Journal.*

Aerodynamic Force Approximations by Chebyshev Method for Closed Loop Aeroservoelasticity Studies

Alin Dorian Dinu, Ruxandra Mihaela Botez and Iulian Cotoi
École de technologie supérieure
Department of Automated Production Engineering
1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, Canada, H3C 1K3
Fax: (514) 396-8595
Phone: (514) 396-8560
E-mail: ruxandra@gpa.etsmtl.ca

ABSTRACT

The approximation of unsteady generalized aerodynamic forces from the frequency into the Laplace domain acting on a Fly-By-Wire aircraft presents an important challenge in the aeroservoelasticity area. The aerodynamic forces in the reduced frequency domain are approximated in the Laplace domain, in order to study the effects of the control laws on the flexible aircraft structure. In this paper we present a new method for the approximation of the generalized aerodynamic forces by use of Chebyshev polynomials and their orthogonality properties. A comparison of this new method with Padé method used to calculate an approximation of the generalized aerodynamic forces from frequency into Laplace domain is presented. This comparison shows that this new method gives excellent results with respect to the Padé method and is applied on the Aircraft Test Model (ATM) from NASA DFRC (Dryden Flight Research Center).

L'approximation de forces aérodynamiques généralisées non stationnaires du domaine de la fréquence dans le domaine du Laplace, forces qui actionnent sur un avion a commandes électriques, représente une importante challenge pour le domaine de l'aéroservoélasticité. Les forces aérodynamiques du domaine de la fréquence réduite sont approximées dans le domaine du Laplace pour étudier les effets des lois de contrôle sur la structure flexible de l'avion. Dans cet article nous présentons une nouvelle méthode pour l'approximation de forces aérodynamiques généralisées en utilisant les polynômes de Chebyshev et leurs propriétés d'orthogonalité. Une comparaison de cette nouvelle méthode avec la méthode de Padé qui est habituellement utilisée pour calculer l'approximation de forces aérodynamiques généralisées du domaine de la fréquence dans le domaine du Laplace est aussi présentée. Cette comparaison nous montre que cette nouvelle méthode donne des résultats excellents par rapport à la méthode Padé en l'appliquant sur l'Aircraft Test Model (l'ATM) de NASA DFRC (Dryden Flight Research Center).

KEYWORDS

aeroelasticity, control laws, aeroservoelasticity, Chebyshev polynomials, unsteady aerodynamic forces, interpolation methods.

NOMENCLATURE

c	wing chord length
k	reduced frequency
$\mathbf{C}$	modal damping matrix
$\mathbf{K}$	modal elastic stiffness matrix
$\mathbf{M}$	modal inertia or mass matrix
M	Mach number
T	Chebyshev polynomial
q	non-dimensional generalized coordinates (with respect to time t)
q_{dyn}	dynamic pressure

$\mathbf{Q}$	modal generalized aerodynamic forces matrix
$\mathbf{Q}_I$	imaginary part of modal generalized aerodynamic forces matrix
$\mathbf{Q}_R$	real part of modal generalized aerodynamic forces matrix
V	true airspeed
V_E	equivalent airspeed
V_0	reference true airspeed
V_p	matrix of eigenvectors
λ	vector of eigenvalues
η	generalized coordinates
$\mathbf{\Phi}$	modal transformation matrix
ν	airspeed ratio
ω	natural frequency
ρ	true air density
ρ_0	reference air density
σ	*air density ratio*

Introduction

The aeroservoelasticity represents the combination of several theories regarding different aspects of aircrafts dynamics. Studies of aeroservoelastic interactions on an aircraft are very complex problems to solve, but essential for aircraft's certification. The instabilities issued by the adverse interactions between the flexible structure, the aerodynamic forces and the control laws acting on it could appear at any time inside the flight envelope, so we can state that the aeroservoelastic interactions concern mainly the research field located at the intersection of the three following disciplines: aerodynamics, aeroelasticity and servo-controls. One main aspect of the aeroservoelasticity is the conversion of the unsteady generalized aerodynamic forces $\mathbf{Q}(k, Mach)$ from the frequency domain into the Laplace domain $\mathbf{Q}(s)$, where k represents the reduced frequency, *Mach* is the Mach number and s is the Laplace variable. There are mainly three classical methods to approximate the unsteady generalized forces by rational functions from the frequency domain to the Laplace domain (Tiffany *et al.,* 1984 and 1988, Edwards, 1977, Roger, 1977, Karpel, 1982): Least Square (LS), Matrix Padé (MP) and Minimum State (MS). The approximation yielding until now in the literature the smallest order time-domain state-space model is the MS method (Karpel, 1982). All three methods use rational functions under Padé form.

Several aeroservoelastic analysis software codes are developed for the aerospace industry. One of the computer programs used for aeroservoelasticity analyses is the Analog and Digital Aeroservoelasticity Method (ADAM) which was developed at The Flight Dynamics Laboratory (Noll *et al.*, 1986). ISAC (The Interaction of Structures, Aerodynamics, and Controls) was developed at NASA Langley Research Center (Adams *et al.*, 1993). At Boeing Company, the aeroservoelastic software FAMUSS was used (Pitt, 1992). An aeroelastic code, ZAERO, has been developed at Zona Technology, which has been used for aeroservoelastic studies (Chen *et al.*, 2003). STARS code was developed at NASA Dryden Flight Research Center (Gupta, 1997).

Among all these computer codes, we have chosen to work with STARS code. STARS program is an efficient tool for aeroservoelastic interactions studies and has an interface with NASTRAN (Newsom *et al.*, 1984, Rodden *et al.*, 1979) a computer program frequently used in the aeronautical industry. In this paper, the lateral dynamics of a half aircraft test model ATM is modeled in STARS. Following to the finite element modeling and doublet lattice method application on the ATM in STARS, the unsteady aerodynamic forces are calculated as functions of reduced frequencies k and Mach number M. We have provided here a bibliographical research on the software used in aeroservoelasticity. All these codes exploit two main classical methods for aerodynamic force approximations from frequency domain (aeroelasticity) into Laplace domain (aeroservoelasticity): Least Squares LS and Minimum State MS.

We will now present in details a bibliographical research on other existing methods in the literature.

The approximation of the unsteady generalized aerodynamic forces is a must for the control analysis of our system. Due to the fact that **Q**(k, *Mach*) can only be tabulated for a finite set of reduced frequencies, at a fixed Mach number M, it must be interpolated in the s domain in order to obtain **Q**(s). In this paper we describe such an interpolation method that uses the Chebyshev polynomials and its results. In the subsonic regime, the unsteady generalized aerodynamic forces **Q**(k, *Mach*) are calculated, using finite elements computer programs such as STARS or NASTRAN, by the Doublet Lattice Method (DLM). We further need to convert these forces into the Laplace domain and they will be denoted as **Q**(s). The aerodynamic forces dependence of s may be written as an irrational function even for simple cases such as two-dimensional potential incompressible flows on an airplane wing profile. During the 50's, Theodorsen proved that **Q**(s) could be expressed by use of Hankel's functions. A few years later, Wagner found the first rational approximation (Dowell, 1995) for **Q**(s). Another approach used the approximations of unsteady aerodynamic forces by Padé polynomials. This approach was based on a fractional approximation of the form $P(s)/R(s)$, where P and R are two polynomials in s, for every term of the unsteady force matrix. In this way, every pole of $R(s)$ showed a new state called augmented state, in the final linear invariant aeroservoelastic system. Thus, if the initial square matrix had the N dimension, and if a Padé approximation of M order is used, then there will be introduced $N(N+M)$ augmented states. The number of augmented states was reduced by Roger (1977). In his formulation, only NxM modes were introduced, where N is the number of initial modes. Roger's method is based on the fact that the aerodynamic lag terms remain the same for each element of the unsteady aerodynamic force matrix. This method is called Least Squares LS and is used in computer aeroservoelastic codes such as STARS and ADAM.

Another method was derived from the LS method and was proposed by Vepa (1977). This method used the same denominators for every column of the aerodynamic matrix Q, and was called Matrix Padé MP.

Various improvements were done to those two methods above presented. One such type of improvement is that different conditions (restrictions) were imposed to approximations to pass through certain points. Generally, the approximations were imposed to be exact approximations at zero and at two other chosen points. Generally, the first point was chosen to represent the estimated flutter frequency and the second point to represent the gust frequency. Then, the improved methods have been renamed: ELS method (Extended Least-Squares) (Tiffany *et al.*, 1984) and EMMP method (Extended Modified Matrix-Padé) (Dunn, 1980). Later, Karpel (1998) proposed a completely different approach in order to solve the above approximations. He knew from the beginning that the goal was to find a linear invariant system in the time domain and he decided to integrate this information directly in the equation giving the unsteady aerodynamic forces values, by adding a term resembling to a transfer function of a linear system. Further, as he wanted to find a linear system of reasonable dimensions, he wrote the approximation under the MS (Minimum State) form. The advantage of this method with respect to the Roger's method resided in the fact that it allowed to obtain an excellent approximation, but with a smaller number of augmented states. All of the above described methods allowed the approximation of unsteady aerodynamic forces for one Mach number at the time. In order to obtain the approximations for several Mach numbers, we should perform the approximation approach given by the MS method for each Mach number, which might be expensive in terms of computing time. A valid approximation for a range of Mach numbers could be useful for military Fly-By-Wire aircrafts, where Mach number varies rapidly during high speed manoeuvres, and where aeroservoelastic interactions are extremely important. Poirion (1995 and 1996) constructed an approximation allowing the calculation of the unsteady aerodynamic forces for Mach number values contained in a specific interval and for a frequency domain. He used the MS method and considered a regular dependence with the Mach number. He used several MS approximations, obtained for several fixed Mach numbers, and a spline interpolation method for Mach number dependence. Thus, he obtained a formulae which allows the computing of the unsteady aerodynamic forces for any couple (*k*, *Mach*), where *k* is the reduced frequency, the equations remaining valid for a range of $(k, Mach) \in [k_{\min}, k_{\max}] * [M_{\min}, M_{\max}]$.

The approximation methods should satisfy simultaneously two opposed criteria: an excellent (exact) approximation, which could be obtained by increasing the number of lag terms and a linear invariant system in the time domain of a very small dimension (with the smallest possible number of lag terms). There is no method satisfying both criteria until now. In two recent papers, Botez and Cotoi (2001 and 2002) have proposed a new approach based again on a precise Padé approximation. The two authors used order reduction methods for the last term of the approximation, which could be seen as a transfer function of a linear system. The approximation error for this new method is 12-40 times lower than for MS for the same number of augmented states and depends of the choice made for the model reduction method. However, this method remains very expensive in terms of computing time. In the present paper, we are presenting a method with Chebyshev polynomials approximations for $\mathbf{Q}(s)$, which hasn't been used until now.

Aircraft equations of motion

The flexible aircraft equations of motion, where no external forces are included, may be written in the time-domain as follows:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\eta} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\eta} + \tilde{\mathbf{K}}\eta + q_{dyn}\mathbf{Q}(k, Mach)\eta = 0 \tag{1}$$

where ρ is the air density, V is the true airspeed and $q_{dyn} = 0.5\rho V^2$ is the dynamic pressure; η is the generalized coordinates variable defined as $\mathrm{q} = \mathbf{\Phi}\eta$ where q is the displacement vector and $\mathbf{\Phi}$ is the matrix containing the eigenvectors of the following free-vibration problem :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathbf{K}\mathrm{q} = 0 \tag{2}$$

The following transformations were used in equation (1):

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi},\ \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi},\ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}$$
$$\mathbf{Q}(k, Mach) = \mathbf{\Phi}^T A_e(k) \mathbf{\Phi} \tag{3}$$

Here, **M**, **K** and **C** are the generalized mass, stiffness and damping matrices; k, the reduced frequency is written as $k = \omega b/V$ where ω is the natural frequency and b is the wing semi-chord length. $A_e(k)$ is the aerodynamic influence coefficient matrix for a given fixed Mach number M and a set of reduced frequencies values k. The Laplace transformation is further applied to equation (1), and we obtain:

$$[\tilde{\mathbf{M}} s^2 + \tilde{\mathbf{C}} s + \tilde{\mathbf{K}}]\eta(s) + q_{dyn} \mathbf{Q}(s)\eta(s) = 0 \tag{4}$$

Q(s) are the unsteady aerodynamic force approximations of **Q**(k, $Mach$) in the Laplace domain. In this paper, we describe a new approximation method which uses the Chebyshev polynomials and its results.

Chebyshev polynomials theory

A. Chebyshev polynomials of the First Kind

These polynomials (Rivlin, 1990, Weisstein, 1999-2005) are a set of orthogonal polynomials defined as the solutions to the Chebyshev differential equation (10) and are denoted as $T_n(x)$. They are used as an approximation to a least squares fit, and are closely connected to trigonometric multiple-angle equations. The Chebyshev polynomials of the first kind denoted with $T_n(x)$ are implemented in Mathematica as ChebyshevT [n, x], and are normalized so that $T_n(1) = 1$.

B. Continuous functions by use of Chebyshev polynomials

Any continuous function may be expressed by use of Chebyshev polynomials using the following equation:

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x) \tag{5}$$

where Chebyshev polynomials used in equation (5) are expressed under the following form:

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)) \tag{6}$$

and the coefficients c_j used in equation (5) are expressed as follows :

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

C. Orthogonality of Chebyshev polynomials

The Chebyshev polynomials have a specific orthogonality property which allows us to keep the approximation's error within a predetermined bandwidth, and which might be expressed as follows:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_r(x)T_s(x)dx = \begin{cases} 0,\ r \neq s \\ \pi,\ r = s = 0 \\ \frac{\pi}{2},\ r = s \neq 0 \end{cases} \tag{8}$$

D. Recurrence formulae and the solution of Chebyshev polynomials

The following recurrence relationships are used in the new approximation method:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \end{cases} \tag{9}$$

and the following condition in the aim to find the Chebyshev polynomials solution is imposed:

$$T_r(x) = 0 \tag{10}$$

where r specifies the rank of the Chebyshev polynomial. Equation (10) gives the following solution:

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{11}$$

E. Extreme amplitudes

$T_r(x)$ is a function defined by cosines, which lets us conclude that between two solutions of this function we find an extreme of $|1|$ amplitude in the middle of the interval, specifically at:

$$x = \cos\frac{j\pi}{r} \; ; \quad j = 0,1,\ldots,r \tag{12}$$

Methodology for the Chebyshev approximation method

In order to develop our approximation method, we used the predefined functions for the Chebyshev polynomials expressed in equation (6) which have been implemented in the Maple's kernel, in Matlab.

These functions (*chebpade* and *chebyshev*) allow the construction of a polynomial interpolation for the unsteady generalized aerodynamic forces, acting on the Aircraft Test Model ATM for 14 values of reduced frequencies k and 9 values of Mach number. The elements forming the matrices of the unsteady generalized aerodynamic forces calculated by the Doublet Lattice Method DLM in STARS are denoted with $\mathbf{Q}(i,j)$ with $i = 1...8$ and $j = 1...8$ for the first eight elastic modes.

The approximation by means of this method is obtained by use of a similar path to the one used for Padé method. For each element of the unsteady aerodynamic force matrix we found a power series development under the following form, by use of Maple's "*chebyshev*" function:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{1}{2}c_0^{(ij)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s) \tag{13}$$

where $c_n^{(ij)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{Q}_{ij}(s) T_n^{(ij)}(s)}{\sqrt{(1-s^2)}} ds$ for $n = 0,1,\ldots$

We found an approximation by rational fractions by use of the "*chebpade*" function:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} a_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)}{1 + \sum_{n=1}^{P} b_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)} \tag{14}$$

where $M = P + 2$.

This new form integrates the orthogonality properties of Chebyshev polynomials and allows the variation of the degree of the numerator and the denominator, in order to obtain a very good approximation.

We compared the results found by means of our Chebyshev approximation method with the results given by Padé method. These results are expressed in terms of total normalized approximation error.

Padé method uses a parameter identification solution in order to determine a polynomial fractional form which identifies an orthogonal polynomial interpolation. This fractional form is the key aspect of this method, due to the fact that allows the order reduction system.

In Figures 1 and 2 it is shown that our new approximation method gives the best approximation error on an interval chosen in the proximity of each approximation point. The effect of the Chebyshev polynomials properties given in equations (8) is seen in this type of results. Due to these properties, we are able to impose a bandwidth for the error convergence for each element of the unsteady generalized aerodynamic force matrices.

Both figures show the overall normalized approximation error by Chebyshev and Padé methods. The differences between figures are based on the model order: Figure 1 shows the results for the [16, 14] polynomial model order while Figure 2 shows the results obtained for the [15, 13] polynomial model order. In these examples, the results were obtained using the Aircraft Test Model ATM data generated in STARS code at the Mach number $M = 0.5$ and for 14 reduced frequencies $k = [0.0100\ 0.1000\ 0.2000\ 0.3030\ 0.4000\ 0.5000\ 0.5882\ 0.6250\ 0.6667\ 0.7143\ 0.7692\ 0.8333\ 0.9091\ 1.0000]$.

Padé method gives a small error near the middle of the approximation interval and an increased error towards each end of it. The Chebyshev approximation method demonstrates an almost constant value of the error all along the approximation interval. The total normalized approximation errors differences at both ends of the approximation interval are noticed in both figures. Those differences are higher for $k_{14} = 1$ than for $k_1 = 0.01$.

The total normalized approximation errors were calculated for different values of the polynomial approximation order by the Padé and the Chebyshev polynomial fraction methods (polynomial model order should be equivalent for both methods) for all the Mach numbers and the same differences were observed. The total normalized approximation error obtained with the Chebyshev method was found to be much smaller with respect to the total normalized approximation error given by the Padé method.

In Table 1, a few examples regarding the values of the total normalized approximation errors provided by the Chebyshev method and by the Padé method are given. In this Table, three different orders of approximation were used: [16, 14], [15, 13] [10, 8] for the same Mach number $M = 0.5$ and the results are presented for the real aerodynamic forces part errors denoted by $J_{\mathbf{Q}\_\mathrm{REAL}}$ and for the imaginary aerodynamic forces part errors denoted by $J_{\mathbf{Q}\_\mathrm{IMAG}}$. It can be clearly seen that no matter the order of the polynomial approximation, the total normalized error for the Chebyshev method is lower than the total normalized error given by Padé method. These errors were calculated using the following formula:

$$
\begin{aligned}
J_{\mathbf{Q}\_\mathbf{REAL}} &= \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^{2}}}\right)\right)*100\% \\
J_{\mathbf{Q}\_\mathbf{IMAG}} &= \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^{2}}}\right)\right)*100\%
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

where $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}old}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}old}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces given by STARS for the ATM model and $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}new}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}new}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces approximated by Chebyshev or by Padé theories. N_{modes} is the total number of modes (also the dimension of $\mathbf{Q}$), k is the index of the reduced frequency and J is the total normalized error.

Open loop flutter results obtained by Chebyshev method

In order to validate our method, we used the STARS ATM developed by the NASA Dryden Flight Research Center. This lateral model (only anti-symmetric modes are provided) includes aero-structural elements (flexible aircraft) and control surfaces (ailerons and elevator). First, a free vibration analysis was performed in the absence of aerodynamics to obtain the free modes of vibration. We obtained the same frequencies and modes of vibration by our method in Matlab as with STARS.

Then in order to calculate aerodynamic forces in the frequency domain by the Doublet Lattice Method DLM, the same simulation parameters were considered as the ones considered in the STARS computer program: reference semi-chord length b = 38.89 in, reference air density at sea level $\rho_0 = 1.225$ kg/m^3, altitude at sea level $Z = 0$ ft, reference sound airspeed at sea level $a_0 = 340.294$ m/s.

In Table 2, the velocities and frequencies at which flutter occurs are calculated by different methods. The first column in Table 2 shows the type of method used; the second and third columns illustrate the corresponding flutter speeds and frequencies for each method. The first row in Table 2 gives the flutter speeds and frequencies calculated in STARS for the ATM lateral model by use of the flutter method ASE. In open loop, this method, called STARS – ASE, is a combination of the *Pk* flutter classical method with the Least Squares *LS* method with 2 lag terms. Rows 2 and 3 present the results obtained in STARS by direct use of the *k* and *Pk* methods. By use of our own computer programs and theories in Matlab, for *Pk* flutter methods and 2 different approximations, Padé and Chebyshev, we found very close flutter results if compared to the results obtained in STARS for the ATM. The small differences in flutter speeds between our results and the ones obtained with STARS are explained by the fact that the LS method uses only 2 lag terms, while this STARS – ASE method should use a maximum of 8 lag terms.

Closed loop flutter results obtained by Chebyshev method

We applied our new approximation method for the closed loop aeroservoelastic analysis, using the transfer function information provided by the aircraft's control laws (ailerons and elevator are used for lateral aircraft control). The conversion from the frequency domain into the Laplace domain (as closed loop calculations should be realized in the Laplace domain) was done this time by use of the LS method for the approximations obtained with Chebyshev polynomials. In order to achieve this type of conversion, we used the following variable change:

$$s = \mathrm{j}k \Rightarrow k = \frac{s}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}s \tag{16}$$

where "j" is the complex number $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$.

We rewrote the approximation of the unsteady generalized force matrix in the Laplace domain as follows:

$$\mathbf{Q}(s) = A_0 + A_1(-\mathrm{j}s) + A_2(-\mathrm{j}s)^2 + A_3\frac{-\mathrm{j}s}{-\mathrm{j}s+b_1} + A_4\frac{-\mathrm{j}s}{-\mathrm{j}s+b_2} + \cdots \tag{17}$$

and we took into account that $\mathbf{Q}(s)$ has a real part $\mathbf{Q}_R(s)$ and an imaginary part $\mathbf{Q}_I(s)$, such as:

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_R(s) + \mathrm{j}\mathbf{Q}_I(s) \tag{18}$$

We obtained then the following expressions for these aerodynamic forces:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_R(s) = A_0 + s^2 A_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2}{s^2 + b_n^2} A_{n+2} \\ \mathbf{Q}_I(s) = -A_1 s - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s b_n}{s^2 + b_n^2} A_{n+2} \end{cases} \tag{19}$$

where A_0, A_1,..., A_{n+2} are the LS decomposition matrices and b_n are the lag terms introduced by the LS method.

In Table 3, a comparison of the results obtained with our new method (a combination of the P flutter method with the Chebyshev approximations) with the results obtained by a combination of the P flutter method with the Padé approximations is provided for 2 to 6 lag terms.

Our new approximation method provides the same values for the flutter speeds and frequencies as the classical methods (which takes Padé approximations into account, because these methods are actually based on Padé) no matter the number of lag terms considered. These good results were expected to occur, following the properties of the Chebyshev polynomials.

It is well known that a larger number of lags implies on one hand an increased number of calculations and on the other hand it introduces new poles, thus modifying the initial system and generating approximation errors. For this reason, the advantage of using this new method with respect to classical methods is that using a small number of lags (2 lag terms) the same results are obtained as if using a large number of lags (6 lag terms).

Conclusion

The Chebyshev approximation method provides excellent flutter results for a small number of lag terms. However, due to the fact that the Chebyshev polynomials were generated by use of the ATM data, there are quite large differences between the values of the elements contained in the unsteady generalized aerodynamic force matrices (1e +10). Restraints regarding the threshold of the approximation error had to be imposed, i.e. for smaller elements we imposed an error value of 1e-4 and for larger elements an error value of 1e-2. Without these restraints, the Chebyshev polynomials cannot be generated.

We could see that by use of the Chebyshev method in open loop, we were able to find very good values for the flutter speeds and the frequencies at which flutter occurs. One of the most important achievements of our new method, if not the most important, is the fact that the computation time for the open loop case is up to 3 times smaller than in the *Pk*-Padé method and up to 30 times smaller than in our *Pk*-LS case, even for an increased approximation order.

As for the closed loop case, we observed that no matter the initial Chebyshev approximation order, it would be enough to make use of only 2 lags when converting to Laplace domain to obtain excellent approximation results.

Acknowledgements

The authors would like to thank Dr Gupta from NASA Dryden Flight Research Center for allowing us to use the ATM on STARS. We would also like to thank the other members of STARS engineering group such as Mr Tim Doyle and Dr Shun Lung for their precious assistance and collaboration.

References:

Adams, W. M. Jr., Hoadley, S.T. (1993). ISAC: A Tool for Aeroservoelastic Modeling and Analysis, *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Vol. 2, pp. 1010-1018.

Chen, P.C., Sulaeman, E. (2003). Nonlinear Response of Aeroservoelastic Systems Using Discrete State-Space Approach, *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 9, pp. 1658-1666.

Cotoi, I., Botez, R.M. (2001). Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis, *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications CA2001*, Banff, Canada, pp. 105-108.

Cotoi, I., Botez, R.M. (2002). Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions. *AIAA, Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, pp. 985-987.

Dowell, E.H. (1995). *A Modern Course in Aeroelasticity*. Dordrech, Pays-Bas: Kluwer Academic.

Dunn, H.J. (1980). An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain. *NASA TP-1738*.

Edwards, J.W. (February 1977). Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control. *SUDAAR 504*. Stanford University, Stanford, CA.

Gupta, K.K. (1997). STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program, *NASA TM-4795*, pp. 1-285.

Karpel, M. (1982). Design for Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State-Space Modeling, *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, pp. 221-227.

Karpel, M. (1998). Reduced-Order Models for Integrated Aeroservoelastic Optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.*

Newsom, J.R., Adams, W.M. Jr., Mukhopadhyay, V., Tiffany, S.H., and Abel, I. (1984). Active Controls: A Look at Analytical Methods and Associated Tools. *Proceedings of the 14th ICAS Congress, ICAS 84-4.2.3*, Toulouse, France, pp. 230-242.

Noll, T., Blair, M. and Cerra, J. (1986). ADAM, An Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems, *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11.

Pitt, D.M. (1992). FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool, *AIAA*-92-2395-*CP*.

Poirion, F. (1995). Modélisation Temporelle des Systèmes Aéroservoélastiques. Application à l'Étude des Effets des Retards. *La Recherche Aérospatiale*, No. 2, pp. 103-114.

Poirion, F. (1996). Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces. *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No. 6, pp. 1199-1201.

Rivlin, Th. J. (2nd ed.). (1990). Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory, New York: Wiley.

Rodden, W.P., Harder, R.L., and Bellinger, E.D. (1979). Aeroelastic Addition to NASTRAN, *NASA CR-3094*.

Roger, K.L. (1977). Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design. *Structural Aspects of Active Controls, CP-228, AGARD*, 4.1-4.11.

Tiffany, S.H., Adams, W.M. Jr. (1984). Fitting Aerodynamic Forces in the Laplace Domain: An Application of a Nonlinear Nongradient Technique to Multilevel Constrained Optimization. *NASA TM 86317*.

Tiffany, S.H. and Adams, W.M. (July 1988). Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation of Unsteady Aerodynamics. *NASA TP-2776*.

Vepa, R. (February 1977). Finite State Modeling of Aeroelastic System. *NASA CR-2779*.

Weisstein, E.W. (1999-2005). *Chebyshev Polynomial of the First Kind*. MathWorld – A Wolfram Web Resource [On-line]. Retrieved (March 2004) from: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html

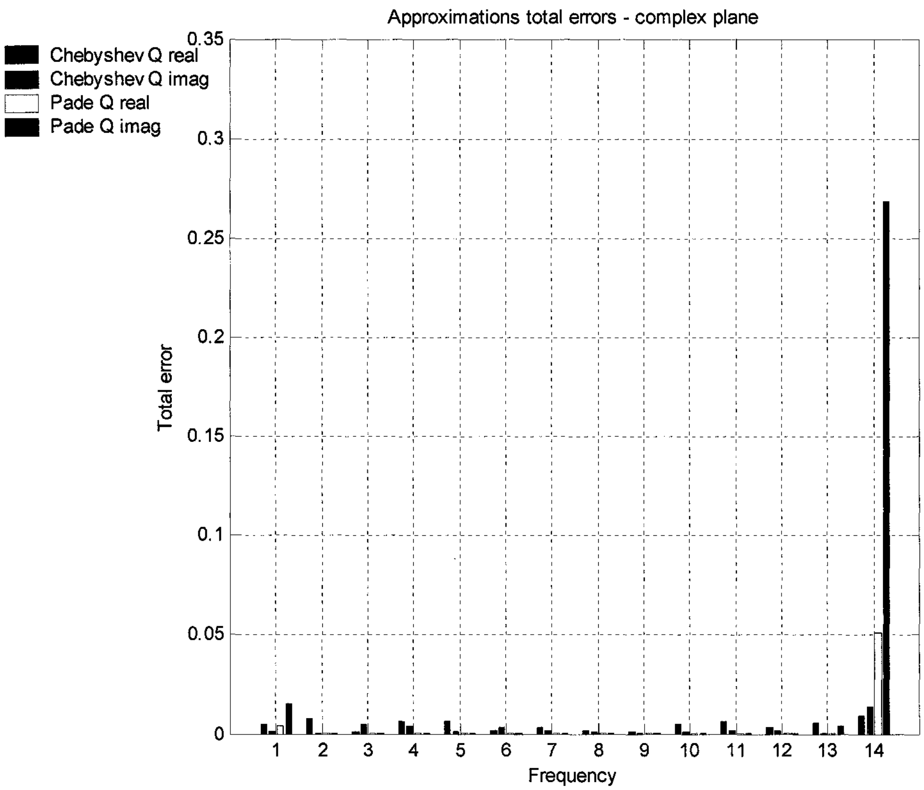


Figure 1 The Total Normalized Approximation Errors for [16, 14] Model Order

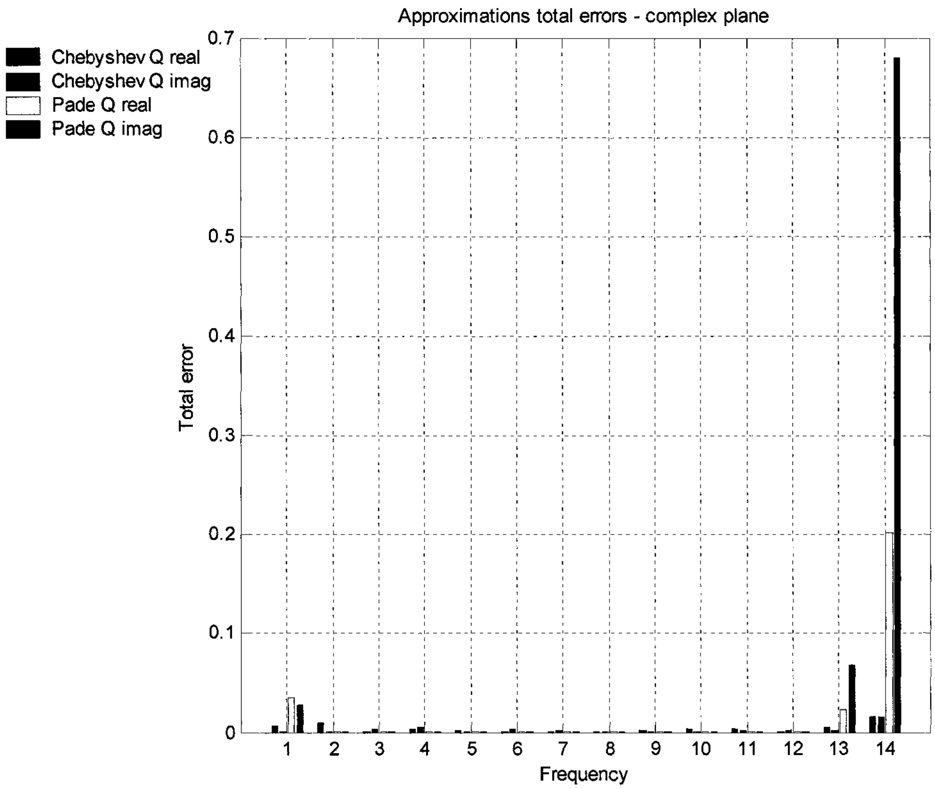


Figure 2 The Total Normalized Approximation Errors for [15, 13] Model Order

ORDER	METHOD	J_{Q_REAL}	J_{Q_IMAG}
[16,14]	Chebyshev	0.065065	0.037611
	Padé	0.065271	0.287657
[15,13]	Chebyshev	0.055391	0.040053
	Padé	0.260147	0.775989
[10,8]	Chebyshev	0.061466	0.035109
	Padé	0.136338	0.055638

Table 1 Total normalized approximation errors by Chebyshev and Padé methods

Method	Flutter results (mode 2)	
	Speed (knots)	Frequency (rad/s)
STARS - ASE	474.1	77.3
STARS - *k*	443.3	77.4
STARS - *Pk*	441.7	77.4
Pk - Padé [8,6]	445.5	77.5
Pk - Chebyshev [8,6]	446.5	77.5

Table 2 Flutter results comparison for ATM in open loop

Method	Flutter results (control mode 2)	
	Speed (knots)	Frequency (rad/s)
P-Padé[4,2]	287.7	51.15
P-Padé[5,3]	287.6	51.13
P-Padé[8,6]	287.6	51.10
P-Chebyshev 2lags	287.6	50.92
P-Chebyshev 3lags	287.6	50.92
P-Chebyshev 6lags	286.7	50.72

Table 3 Flutter results comparison for ATM in closed loop

ANNEXE 3

Méthode basée sur les théories des polynômes de Chebyshev pour les études des interactions aéroservoélastiques sur l'avion F/A – 18

L'article suivant a été soumis pour publication au *Journal of Aircraft*.

Method Based on Chebyshev Polynomials Theories for Aeroservoelastic Interactions Studies on an F/A-18 Aircraft

by
Alin Dorian Dinu, Ruxandra Mihaela Botez, Iulian Cotoi
École de technologie supérieure, Université du Québec,
Montréal, Québec, H3C 1K3, Canada

A significant aspect of aeroservoelasticity is the conversion of unsteady aerodynamic forces from the frequency domain into the Laplace domain. Until now, the most popular methods used for these studies have been the Minimum State and the Least Square methods. The classical method is the Least Square method based on Padé polynomials approximations. We present a new method for these studies, based on Chebyshev polynomials and their orthogonality properties. Results obtained by this method are compared to results obtained by the Padé method. Two sets of results are presented for this comparison. The first shows the values of the aerodynamic forces in the Laplace domain and the second shows the flutter speeds and frequencies. In both cases, different approximation orders were used for comparison. The new method presented here shows very good results versus those obtained with the Padé method on the F/A-18 aircraft.

Nomenclature

b	=	wing semi-chord length
k	=	reduced frequency
q_{dyn}	=	dynamic pressure
$\mathbf{C}$	=	modal damping matrix

K	=	modal elastic stiffness matrix
M	=	modal inertia or mass matrix
M	=	Mach number
Q	=	modal aerodynamic force matrix
$T_j(x)$	=	Chebyshev polynomial of the j^{th} order
V	=	true airspeed
$\mathbf{\Phi}$	=	modal matrix
η	=	generalized coordinates
ω	=	natural frequency

I. Introduction

Aeroservoelasticity studies on a Fly-by-Wire aircraft are multidisciplinary because they involve studies of three main disciplines and combinations of these three disciplines, which are: unsteady aerodynamics, elastic aircraft structure and controls. An example of a common combination is aeroelasticity, which is a combination of unsteady aerodynamics with elastic aircraft structure, and essentially represents the interaction of aerodynamic forces with the elastic aircraft structure. In aeroelasticity, unsteady aerodynamic forces are calculated in the frequency domain, for a range of reduced frequency values, by use of the Doublet Lattice Method DLM (subsonic regime) and the Constant Pressure Method CPM (supersonic regime) implemented in aeroelastic analysis software such as Nastran[1] and in aeroservoelastic analysis software such as: ADAM[2] (Analog and Digital Aeroservoelasticity Method), ZAERO[3], STARS[4] and FAMUSS[5].

The unsteady aerodynamic forces calculated in the frequency domain (for aeroelasticity studies) are further converted into the Laplace domain (for aeroservoelasticity studies) by use of the following methods[6-10]: Least Squares (LS), Matrix Padé (MP) and Minimum State (MS). Three of the above mentioned aeroservoelastic software packages (all except FAMUSS) use these three classical methods. The classical methods such as LS, MP and MS have been improved and renamed Extended LS, MP and MS – denoted by ELS, EMP and EMS.

Generally, improvements of the classical methods have been realized through the various conditions (restrictions) imposed on these approximations so that they pass through certain points. Force approximations are usually imposed to be exact at zero and at two other points. These two points should be chosen for flutter (first point) and for gust (second point) estimated frequencies[11].

Poirion[12, 13] made use of several approximations by the MS method, obtained for several fixed Mach numbers, and he developed a spline interpolation method versus Mach numbers. Poirion further calculated the unsteady aerodynamic force approximations in the Laplace domain for a range of reduced frequencies and several Mach numbers. These approximations were used at Airbus. Winther[14] developed a different formulation for the unsteady aerodynamic forces approximations in the Laplace domain for the aeroservoelastic behavior of aircraft in real time.

Botez and Cotoi[15, 16] used four different order reduction methods programmed in Matlab Toolbox (Minreal, Schur, Optimal Hankel and Balanced Stochastic Truncation) for the last term of the LS approximation written in the form of Padé polynomials. This term is actually equivalent to a linear system transfer function. In this paper, the authors have found that the error obtained by use of the new method is 12-40 times smaller than the error obtained by the MS method for the same number of augmented states. The new method overcomes the problem of choosing the number of lags for the MS procedure because the aerodynamic dimension is a result and not an initial parameter. On the other hand, the computing time is much longer than the computing time for the MS method – and it is already long without taking into account the calculations for the flutter speeds and frequencies. If the flutter envelope has to be traced, then the computing time would be even longer.

Smith[17] showed that the *P* - transform and FAMUSS methods may generate state model approximations of the system directly -- they did not require the additional lags. However, the aerodynamic forces calculated by the FAMUSS software include the option of lag states added to the system, while the *P*-transform method does not include this option.

Hiliuta and Botez[18] provided a better approximation of the aerodynamic force data in the frequency domain when these forces were not initially calculated for a range of evenly spaced reduced frequencies. They used a combination of fuzzy clustering and shape-preserving techniques to obtain an approximation of unsteady aerodynamic forces for any range of reduced frequencies.

Biskri et al. presented a new method[19] that used two analytical forms representing the aerodynamic unsteady forces conversion from the frequency into the Laplace domain. These two analytical forms are given by the Least Squares LS and the Minimum State MS methods. Their new method is a combination of these two methods, LS and MS. It has been found that with 4 lags, this method gives results that are very close to those found by the LS method with 8 lags. It has been observed that the best error values calculated for flutter speeds and frequencies in both cases (symmetric and anti-symmetric modes) were found by use of this new method with 4 lags. These results were obtained on a business aircraft with 44 symmetric modes and 50 anti-symmetric modes.

In this paper, an interpolation method is described which uses Chebyshev polynomials and their properties, programmed by use of existing Matlab and Maple routines. The pk – flutter method was developed in Matlab, and details of this method and the flutter results obtained on the Aircraft Test Model in STARS have been published[20]. The method of approximation by Chebyshev polynomials has been applied successfully, for open loop analysis[21] and for closed loop analysis[22] on the Aircraft Test Model. In this paper, the Chebyshev method was applied to the F/A-18 aircraft.

II. Aircraft Equations of Motion in the Laplace Domain

In the modified Laplace domain, the equations of motion of the aircraft are written in the following form[4]:

$$[\tilde{\mathbf{M}}\bar{s}^2 + \tilde{\mathbf{C}}\bar{s} + \tilde{\mathbf{K}}]\eta(\bar{s}) + q_{dyn}\mathbf{Q}(\bar{s})\eta(\bar{s}) = 0 \tag{1}$$

where the generalized mass $\tilde{\mathbf{M}}$, stiffness $\tilde{\mathbf{K}}$ and damping $\tilde{\mathbf{C}}$ are defined as:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{\Phi}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\mathbf{\Phi}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{\Phi} \tag{2}$$

where **M**, **C** and **K** are the modal mass, damping and stiffness matrices and $\mathbf{\Phi}$ is the modal matrix. In Eq. (1), $\mathbf{Q}(\bar{s})$ is the Laplace transform of the aerodynamic forces in the frequency domain $\mathbf{Q}(k, M) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_e(k)\mathbf{\Phi}$ where $\mathrm{A}_e(k)$ are the aerodynamic influence coefficients dependent on the reduced frequencies range $k = \omega b/V$, where ω is the natural frequency, b is the wing semi-chord length and V is the true airspeed. In the next chapter we explain the Chebyshev theory used in our new method for unsteady aerodynamic force approximations in the Laplace domain from the frequency domain.

III. The Chebyshev Theory

Chebyshev polynomials of the first kind[23] are a set of orthogonal polynomials defined as the Chebyshev differential equation solutions. These polynomials are calculated by use of trigonometric multiple-angle equations.

Any continuous function $f(x)$ may be expressed using Chebyshev polynomials as follows:

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x) \tag{3}$$

In Eq. (3), the coefficients c_j are expressed as follows:

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ where } j = 1,2,\ldots \tag{4}$$

and the Chebyshev polynomials $T_j(x)$ are given by:

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)) \tag{5}$$

Chebyshev polynomials are used in engineering applications because of their orthogonality properties, which provide a calculated predetermined bandwidth value for the error of approximation. This condition is written in an integral form:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_r(x)T_s(x)dx = \begin{cases} 0,\ r \neq s \\ \pi,\ r = s = 0 \\ \frac{\pi}{2},\ r = s \neq 0 \end{cases} \tag{6}$$

where $T_r(x)$ and $T_s(x)$ are Chebyshev polynomials of ranks r and s, respectively. The recurrence relationships[23-25] for Chebyshev polynomials may be written as:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \end{cases} \tag{7}$$

From Eq. (5), by replacing $j = r$, the condition required to find the Chebyshev polynomials solution is imposed:

$$T_r(x) = \cos(r \arccos(x)) = 0 \tag{8}$$

In Eq. (8), the following variable change is made:

$$y = r\arccos(x) \tag{9}$$

from where:

$$\cos(y) = 0 \tag{10}$$

which gives the solution

$$y = (2j+1)\frac{\pi}{2}; \qquad j = 0,1,\ldots \tag{11}$$

We further replace y given by Eq. (9) into Eq. (11) and the following equation is obtained:

$$r\arccos(x) = (2j+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \arccos(x) = \frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{12}$$

which can be written in the following form:

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \quad ; \; j = 0,1,\ldots,r-1 \tag{13}$$

$T_r(x)$ is a function defined by cosines, which lets us conclude that between two solutions of this function we will find an extreme of $|1|$ amplitude exactly in the middle of the interval, specifically at :

$$x = \cos\frac{j\pi}{r} \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,r \tag{14}$$

IV. Description of this new method based on Chebyshev theory for aerodynamic forces conversion studies in the Laplace domain

A power series development was realized by use of the "*chebyshev*" function that is a part of Maple's kernel in Matlab for each element (*ij*) of the unsteady aerodynamic forces denoted here by $\mathbf{Q}_{ij}$, as follows:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{1}{2}c_0^{(ij)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s) \tag{15}$$

where $c_n^{(ij)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathbf{Q}_{ij}(s)T_n^{(ij)}(s)}{\sqrt{(1-s^2)}}ds$ for $n = 0,1,\ldots$

Next, a second approximation for these unsteady forces was realized using the "*chebpade*" function pre-programmed in Maple's kernel in Matlab, represented by a ratio of rational fractions:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}(s) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{M} a_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)}{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{P} b_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s)} \tag{16}$$

where $M = P + 2$.

The Chebyshev polynomial orthogonality properties are integrated in Eq. (16). Different values for the degree of the denominator, and therefore for the numerator, are considered in the presentation of our results. For comparison purposes, we next consider the Padé classical method, which gives a polynomial fractional form for the unsteady force representation in the Laplace domain and, therefore, will reduce the order of the system. The results obtained by the two methods (Chebyshev and Padé) are given in the next section in the form of total normalized error of the unsteady aerodynamic force approximations.

V. Presentation of results obtained by Chebyshev and Padé methods for unsteady aerodynamic force approximations in the Laplace domain

The unsteady generalized aerodynamic forces, acting on an F/A-18 aircraft for a range of 14 reduced frequencies k = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.588, 0.625, 0.67, 0.71, 0.77, 0.83, 0.91, and 1, and Mach numbers M = 1.4 and 1.6, are calculated for aeroelastic studies using the CPM method in the supersonic regime. The elements of these matrices are denoted by $\mathbf{Q}(i,j)$ where i denotes the index of the row number and j represents the index of the column number.

In Figs. 1 to 4, total normalized approximation errors of unsteady aerodynamic forces by Padé and Chebyshev theories are shown for their real and imaginary parts, respectively. From these figures, we notice that a smaller approximation error is given by the Chebyshev method compared to that given by the Padé method. The largest differences between these approximation error values are best viewed on these figures at the beginning and at the end of the reduced frequency k interval (for k_1, k_2, k_{12}, k_{13} and k_{14}), because Chebyshev polynomials provide a very good approximation even at the endpoints of the reduced frequency interval.

An approximation order $[M, P]$ = [6, 4] gives the numerator maximum rank M = 4 and the denominator maximum rank P = 4 in the previous equation (16). For both Padé and Chebyshev polynomials the approximation order is defined in a similar manner and the same approximation order was considered in Figures 1-4.

Figures 1 and 3 show the results for the F/A-18 aircraft symmetric modes (Fig.1: Mach number M = 1.4 and Fig. 3: Mach number 1.6) and Figs. 2 and 4 show the results for the F/A-18 aircraft anti-symmetric modes (Fig. 2: Mach number M = 1.4 and Fig. 4: Mach number 1.6). The 14 reduced frequencies k = 0.01, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.588, 0.625, 0.67, 0.71, 0.77, 0.83, 0.91, and 1 are considered in this study and the indices of k's range are denoted on the horizontal axes of these four figures.

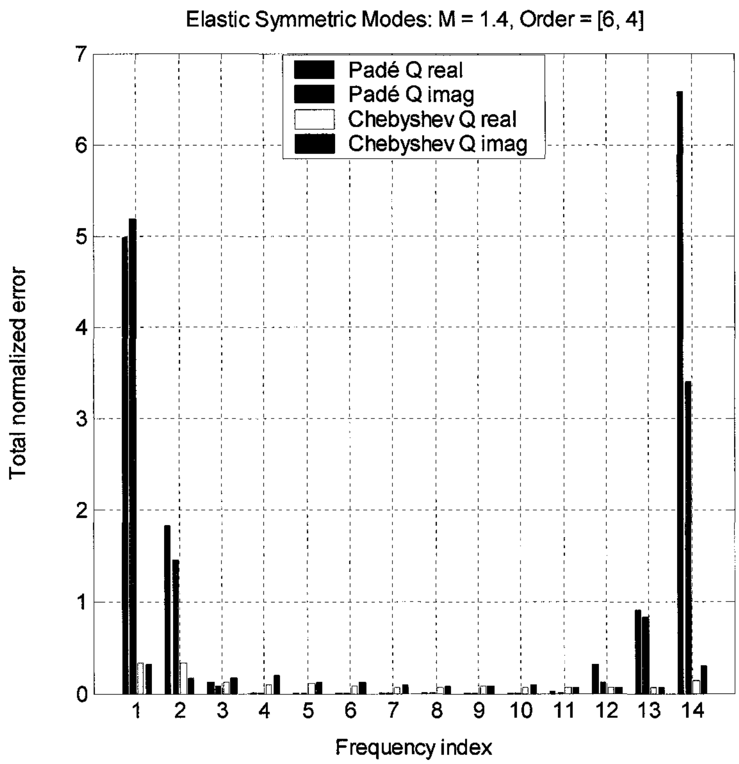


Fig. 1 Total normalized errors versus frequency index for F/A-18 symmetric modes, M = 1.4

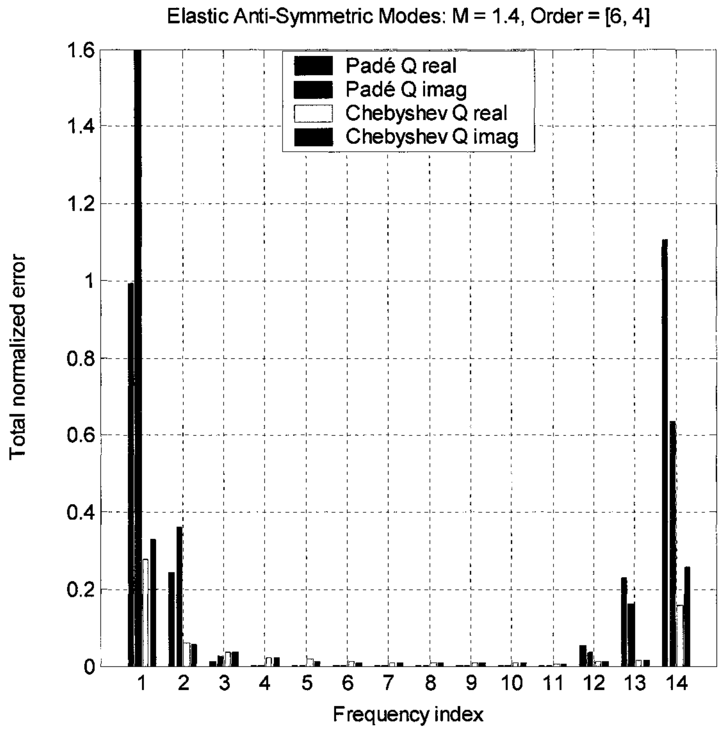


Fig. 2 Total normalized errors versus frequency index for F/A-18 anti-symmetric modes, $M = 1.4$

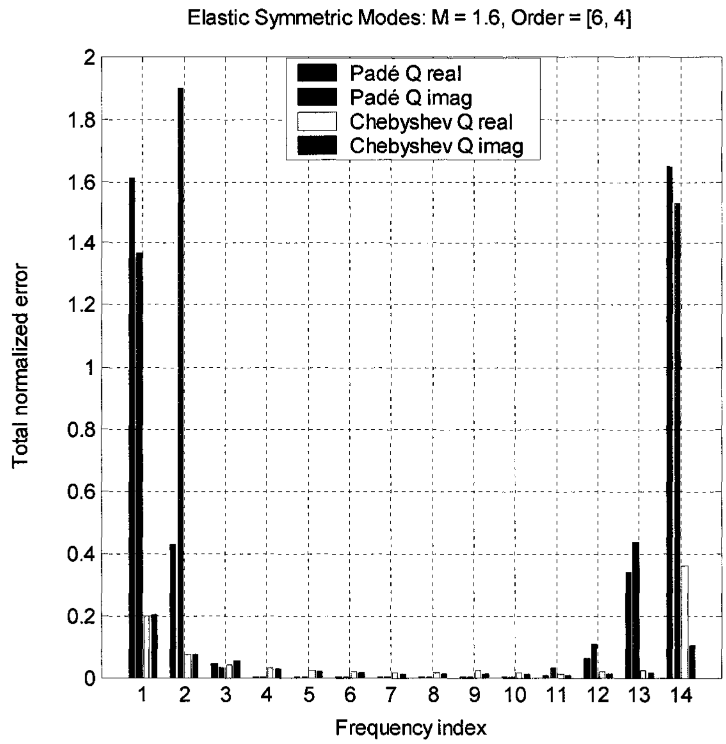


Fig. 3 Total normalized errors versus frequency index for F/A-18 symmetric modes, $M = 1.6$

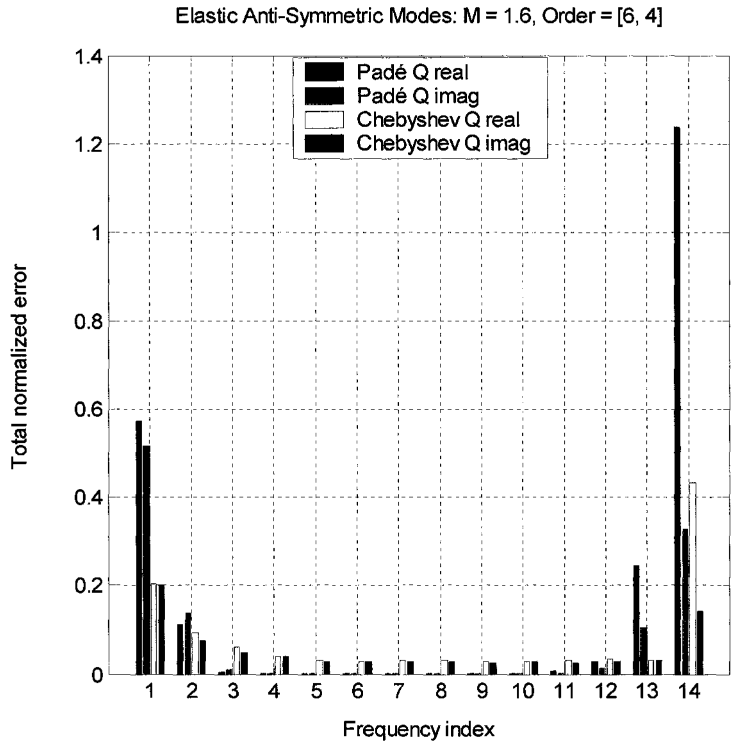


Fig. 4 Total normalized errors versus frequency index for F/A-18 anti-symmetric modes, $M = 1.6$

In addition to Figs. 1 to 4, the numerical approximation error values are further represented in Table 1 for the same two Mach numbers $M = 1.4$ and $M = 1.6$ and for three approximation orders: [4, 2], [5, 3] and [6, 4]. The results for the approximation order = [6, 4] are thus represented in two different formats (Figs. 1 to 4 and Table 1).

As seen in Table 1, the total normalized approximation error is much smaller using the Chebyshev polynomial method with respect to the overall approximation error given by the Padé method. We notice that the [6, 4] polynomial approximation order already gives a very small approximation error, and for this reason, the Chebyshev method is applied for a maximum of [6, 4] polynomial approximation order (and not for anything higher than this order).

We normalize the approximation error J for each element of the $\mathbf{Q}$ aerodynamic unsteady force matrix (the real and the imaginary part), for each reduced frequency k by use of the following two equations for the real and the imaginary part, respectively:

$$J_{\mathbf{Q}_{\mathbf{REAL}}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{R}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^{2}}}\right)\right)*100\%$$

$$J_{\mathbf{Q}_{\mathbf{IMAG}}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}}\frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}new}-\mathbf{Q}_{ij\mathbf{I}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^{2}}}\right)\right)*100\% \quad (17)$$

In these equations, $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}old}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}old}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces calculated first (this is the reason why **old** is added at the index of the aerodynamic forces) in the frequency domain, and $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}new}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}new}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces by use of Chebyshev or Padé methods. N_{modes} is the total number of modes (the $\mathbf{Q}$ matrix rows or column numbers that are equal), k is the index of the reduced frequency (for a total of 14 reduced frequencies, values noted previously) and J is the total normalized error.

Table 1 Total normalized errors

Mach number		M = 1.4			M = 1.6		
Approximation order		[4,2]	[5,3]	[6,4]	[4,2]	[5,3]	[6,4]
Elastic symmetric modes	$J_{Q\ real}$ Padé	19.5480	57.4781	14.8008	10.2124	27.8438	4.1392
	$J_{Q\ imag}$ Padé	17.0572	83.7882	11.1557	8.3135	31.0452	5.4229
	$J_{Q\ real}$ Chebyshev	5.5927	2.4765	1.7096	2.9960	1.1183	0.8651
	$J_{Q\ imag}$ Chebyshev	4.1354	2.2335	1.9872	1.8182	1.0864	0.5745
Elastic anti-symmetric modes	$J_{Q\ real}$ Padé	5.4610	13.5501	2.6550	3.2704	7.6795	2.2132
	$J_{Q\ imag}$ Padé	5.0902	26.4550	2.8232	2.9426	6.3378	1.1151
	$J_{Q\ real}$ Chebyshev	2.3408	1.1402	0.6517	1.6075	4.7742	1.1074
	$J_{Q\ imag}$ Chebyshev	1.9021	1.1312	0.7862	1.6173	0.8066	0.7590

An almost constant and very small approximation error value is found for the reduced frequency interval by use of the Chebyshev approximation method for the [6, 4] model order. Using the Padé method, the approximation error is found to be small (if calculated separately for each reduced frequency) mainly in the middle of the reduced frequency interval, and it increases at each end of this interval. As a result, the total normalized approximation error provided by Padé is much higher than the error obtained using Chebyshev theories, as seen in Table 1.

Another type of result is the one presented for the flutter *pk* analysis. Table 2 shows the speeds and frequencies where an aircraft becomes unstable due to flutter, using the *pk* flutter standard and the *pk* Chebyshev method (for 3 approximation orders). We have to mention here the fact that the *pk* Chebyshev method is actually the *pk* flutter method in which the aerodynamic forces are approximated in the Laplace domain by use of Chebyshev method. These studies are presented for the symmetric and anti-symmetric modes of an F/A 18 aircraft. Three approximation orders are taken into account in the Chebyshev method: [4, 2], [5, 3] and [6, 4], and two Mach numbers M = 1.4 and 1.6. These approximation orders and Mach number values are the same as those considered in Table 1.

Table 2 Flutter analysis values

Mach number		M = 1.4		M = 1.6	
		Flutter		Flutter	
Modes type	Method	Speed (ft/s)	Frequency (Hz)	Speed (ft/s)	Frequency (Hz)
Symmetric modes	*pk* Standard	1011.0628	28.0503	1127.4586	28.8910
	pk Chebyshev [4,2]	1011.1406	28.0496	1127.3121	28.8914
	pk Chebyshev [5,3]	1010.9892	28.0498	1127.5691	28.8917
	pk Chebyshev [6,4]	1011.0596	28.0505	1127.4249	28.8908
Anti-symmetric modes	*pk* Standard	1045.8572	29.1381	1229.7424	30.5467
	pk Chebyshev [4,2]	1045.0049	29.1322	1229.3621	30.5538
	pk Chebyshev [5,3]	1045.7295	29.1370	1229.5796	30.5480
	pk Chebyshev [6,4]	1045.7996	29.1381	1229.2617	30.5457

Flutter analysis results expressed in terms of speeds and frequencies calculated by our method were found to be very close to the initial flutter results obtained by the *pk* flutter standard method. The comparison between these results is shown in Table 3 by use of the next error representation:

$$Error\,\% = \frac{\left|Value\ Pk\,\text{Standard} - Value\ Pk\,\text{Chebyshev}\right|}{Value\ Pk\,\text{Standard}} * 100\,\% \tag{18}$$

where *Value* in Eq. (18) is the flutter speed or the flutter frequency represented in the first and second columns, for $M = 1.4$ and $M = 1.6$, respectively.

Table 3 Flutter results (speeds and frequencies) approximation errors

Mach number M		1.4		1.6	
		Flutter		Flutter	
Modes type	Method	Speed Error (%)	Frequency Error (%)	Speed Error (%)	Frequency Error (%)
Symmetric modes	*Pk* Chebyshev [4,2]	0.0076	0.0024	0.0129	0.0013
	Pk Chebyshev [5,3]	0.0072	0.0017	0.0098	0.0024
	Pk Chebyshev [6,4]	0.0003	0.0007	0.0029	0.0006
Anti-symmetric modes	*Pk* Chebyshev [4,2]	0.0814	0.0202	0.0309	0.0232
	Pk Chebyshev [5,3]	0.0122	0.0037	0.0132	0.0042
	Pk Chebyshev [6,4]	0.0055	0	0.0390	0.0032

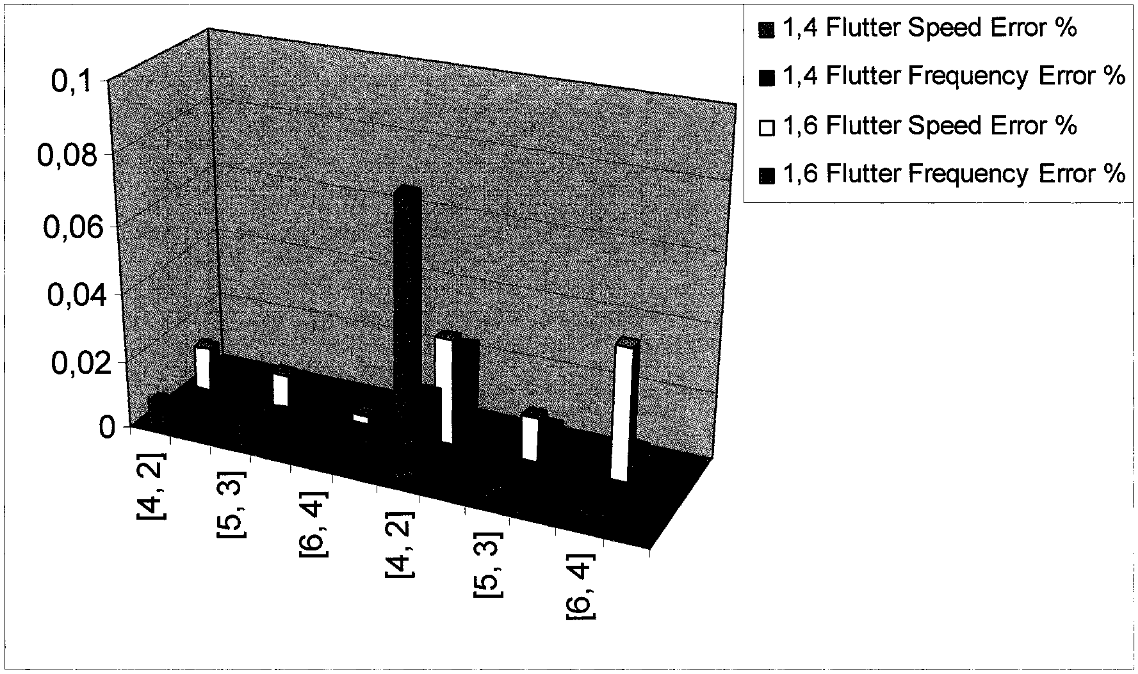


Fig. 5 Flutter results approximation errors

Results numerically given in Table 3 are visually represented in Fig. 6. In Table 1, it can be seen that the approximation's normalized total error calculated by the Chebyshev method quickly stabilizes around 1-2% (for the approximation order [6, 4]) and the approximation's normalized error calculated by the Padé method (and consequently by any other method based on Padé rational fractions) presents constant fluctuations that are dependent upon the approximation order.

Therefore, it has been found that an approximation order of [6, 4] (see Table 3) would be sufficient in the Chebyshev method applied to the F/A-18 aircraft's data to calculate flutter velocities and frequencies. For higher order approximations, the results remain the same as those obtained for the [6, 4] approximation order. It has also been found that there is a link between the approximation order and the computational costs: the higher the approximation order, the longer it takes for the computation.

The reader should not overlook the fact that the accuracy normally obtained using an increased approximation order could be over-weighted by computational truncation errors. Each investigator should choose the approximation order best suited for the data to be computed. Our method is an effort to find the best compromise between computational costs and accuracy.

VI. Conclusions

The Chebyshev approximation method provides an excellent approximation compared to the Padé method. However, because the Chebyshev polynomials have to be generated using the data provided for the F/A-18 aircraft – a process that manipulates some very large differences between the values of elements contained in the unsteady generalized aerodynamic force matrices (1e +10) – some restraints regarding the threshold of the approximation error had to be imposed, i.e. for smaller elements we have imposed a maximum error value of 1e-4 and for larger elements a maximum error value of 1e-3. Without these restraints, the Chebyshev polynomials cannot be generated.

We could see that by using the Chebyshev method on the F/A-18 aircraft, we found excellent approximated values for the flutter speed and for the frequencies at which flutter occurs. Regardless of which approximation order was used, the error was less than 0.08%, which represents a very small error. One of the most important achievements of this new method, if not the most important, is the fact that the computation time for the Chebyshev method is up to 4 times shorter than for the Padé method.

We found that the unsteady aerodynamic force approximations using the Chebyshev method take between 1 minute 30 seconds and 2 minutes and that they take between 5 and 6 minutes with the Padé method, along with approximately 80 MB of additional computer memory resources, depending on the approximation model order and the number of modes used. Therefore we can conclude that the Chebyshev method gives better overall results than the Padé method, and based on our previous application on the ATM in STARS, we conclude that remains an efficient method independent on the aircraft type.

Acknowledgments

The authors would like to thank Mr. K.K. Gupta from NASA Dryden Flight Research Center for allowing us to use the STARS computer program. We would also like to thank the other members of the STARS engineering team: Mr. Tim Doyle, Mr. Roger Truax and Mr. Shun Lung and to Mr. Marty Brenner for their precious assistance and collaboration.

This work was also possible due to funds received from the National Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and from the Ministère du Développement économique, de l'innovation et de l'exportation (MDEIE).

References

[1]Rodden, W.P., Harder, R.L., and Bellinger, E.D., "Aeroelastic Addition to NASTRAN", NASA CR-3094, 1979.

[2]Noll, T., Blair, M. and Cerra, J., "ADAM, An Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems", *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11, 1986.

[3]Dowell, E.H., *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic, Dordrech, The Netherlands, 1995.

[4]Gupta, K.K., "STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program", NASA TM-4795, 1997, pp. 1-285.

[5]Pitt, D.M., "FAMUSS: A New Aeroservoelastic Modeling Tool", AIAA-92-2395-CP, 1992.

[6]Tiffany, S.H. and Adams, W.M., "Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces", NASA TP 2776, July 1988.

[7]Edwards, J.W., "Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control", SUDAAR 504, Stanford University, Stanford, CA, February 1977.

[8]Roger, K.L., "Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design", *Structural Aspects of Active Controls, CP-228*, August 1977, pp. 4.1-4.11.

[9]Vepa, R., "Finite State Modeling of Aeroelastic System", NASA CR-2779, February 1977.

[10]Karpel, M., "Design for Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State Space Modeling", *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, 1982, pp 221-227.

[11]Dunn, H.J., "An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain", NASA TP-1738, 1980.

[12]Poirion, F., "Modélisation Temporelle des Systèmes Aéroservoélastiques. Application à l'Étude des Effets des Retards", *La Recherche Aérospatiale*, No. 2, 1995, pp. 103-114.

[13]Poirion, F., "Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces", *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No. 6, 1996, pp. 1199-1201.

[14]Winther, B.A., Goggin, P.J., and Dykman, J.R., "Reduced-Order Dynamic Aeroelastic Model Development and Integration with Nonlinear Simulation", *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 5, 2000, pp. 833-839.

[15]Cotoi, I., Botez, R.M., "Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions", *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, 2002, pp. 985-987.

[16]Cotoi, I., Botez, R.M., "Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis", *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications*, Banff, Canada, 2001, pp. 105-108.

[17]Smith, T.A., Hakanson, J.W., Nair, S.S., Yurkovich, R.N., "State-Space Model Generation for Flexible Aircraft", *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No. 6, 2004, pp. 1473-1481.

[18]Hiliuta, A., Botez, R.M., Brenner, M., "Approximation of unsteady aerodynamic forces Q(k, M) by use of fuzzy techniques", 46th

AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Austin, Texas, USA, April 2005.

[19]Biskri, D.E., Botez, R.M., Therrien, S., Rathé, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., "New mixed method for unsteady aerodynamic forces approximations for aeroservoelasticity studies", *IFASD 2005, Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2*005, Munich, Germany, 28/06-02/07/2005.

[20]Dinu, A.D., Cotoi, I., Botez, R.M., "Model order reduction for aeroservoelasticity studies by use of LRSRM and LRSM algorithms", The 24th International Congress of Aeronautical Sciences ICAS 2004, Yokohama, Japan, 30/08-03/09/2004.

[21]Dinu, A.D., Botez, R.M., Cotoi, I., "Chebyshev Polynomials for Unsteady Aerodynamic Calculations in Aeroservoelasticity," to appear in the *AIAA Journal of Aircraft,* September 2005.

[22]Botez, R.M., Dinu, A.D., Cotoi, I., *Approximations of Unsteady Aerodynamic Forces for Closed Loop Flutter Aeroservoelasticity Studies*, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, USA, 9-12 January, 2006.

[23]Weisstein, E.W., "Chebyshev Polynomial of the First Kind", *MathWorld - Wolfram Web*,
URL: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html, March 2004.

[24]Rivlin, Th. J., *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, 2nd ed., Wiley, New York, 1990.

[25]Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T., "Polynomial Approximation from Chebyshev Coefficients", *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, 2nd Edition Cambridge, England: Cambridge University Press, 1992, Chap. 5.

ANNEXE 4

Études des interactions aéroservoélastiques sur un avion corporatif

L'article suivant a été soumis pour publication au *Journal of Engineering*.

Aeroservoelasticity Interactions Studies on a Business Aircraft

Ruxandra Mihaela Botez[1], Alin Dorian Dinu[2], Iulian Cotoi[3],
Sylvain Therien, Nicholas Stathopoulos, Alexandre Rathé, Martin Dickinson
École de technologie supérieure, Université du Québec, Montréal, Québec, H3C 1K3, *Canada*

Multidisciplinary aeroservoelastic interactions are studied by combination of knowledge acquired in two main disciplines: aeroelasticity and servo-controls. In aeroelasticity, the Doublet Lattice Method DLM is used to calculate the unsteady aerodynamic forces $\mathbf{Q}(k, M)$ for a range of reduced frequencies k and Mach numbers on a business aircraft in the subsonic flight regime by use of Nastran software.

For aeroservoelasticity studies, there is the need to conceive methods for these unsteady aerodynamic forces $\mathbf{Q}(k, M)$ conversions from frequency into Laplace domain $\mathbf{Q}(\bar{s})$. Three methods are used for this type of conversion in the aircraft industry. These methods are : Least Square LS, Matrix Padé MP and Minimum State MS. A new method different from these three methods is presented, in which Chebyshev polynomials theories and their orthogonality properties are applied.

In this paper, a comparison between flutter results expressed in terms of flutter speeds and frequencies obtained with our method with flutter results obtained with classical Padé and Least Squares methods is here presented for a business aircraft at one Mach

[1] Professor, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada. AIAA Member.
[2] Ph.D. Student, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada.
[3] Researcher, Department of Automated Production Engineering, École de technologie supérieure, 1100 Notre Dame West, Montreal, Quebec, H3C 1K3, Canada.

number and a range of reduced frequencies. It has been found that results obtained with our method are better in terms of average error than results obtained with the two classical methods here presented.

Nomenclature

c	=	wing chord length
k	=	reduced frequency
q	=	non-dimensional generalized coordinates (with respect to time t)
q_{dyn}	=	dynamic pressure
$\mathbf{C}$	=	modal damping matrix
$\mathbf{K}$	=	modal elastic stiffness matrix
$\mathbf{M}$	=	modal inertia or mass matrix
M	=	Mach number
$\mathbf{Q}$	=	modal generalized aerodynamic force matrix
$\mathbf{Q_I}$	=	imaginary part of modal generalized aerodynamic force matrix
$\mathbf{Q_R}$	=	real part of modal generalized aerodynamic force matrix
T	=	Chebyshev polynomial
V	=	true airspeed
V_E	=	equivalent airspeed
V_0	=	reference true airspeed
$\mathbf{\Phi}$	=	modal transformation matrix
η	=	generalized coordinates
ν	=	airspeed ratio
ρ	=	true air density
ρ_0	=	reference air density
ω	=	natural frequency

I. Introduction

Unsteady aerodynamic forces for a range of reduced frequencies and Mach numbers are usually calculated in the subsonic regime by use of the Doublet Lattice Method DLM implemented in aeroelastic analyses software such as Nastran[1], ADAM[2], STARS[3] and FAMUSS[4]. For aeroservoelasticity studies, these unsteady aerodynamic forces calculated in the frequency domain should be converted into Laplace domain. In this paper, a new method is applied for this type of conversion.

The following classical methods[5-9]: Least Squares (LS), Matrix Padé (MP) and Minimum State (MS) are the most known methods for the conversion of the unsteady aerodynamic forces from frequency into Laplace domain. All above mentioned aeroservoelastic software (except FAMUSS) use mainly these methods or their extended versions such as: Extended LS (ELS), Extended MP (EMP) and Extended MS (EMS) [10]. Poirion[11, 12] conceived several unsteady aerodynamic forces approximations by use of the MS methods for several fixed Mach numbers.

Cotoi and Botez[13, 14] applied four different order reduction methods for the last term of the LS approximation. The value of the error obtained with the best chosen method among these 4 methods was found to be 12-40 times smaller than the value of the error obtained with the MS classical method. The disadvantage of this method was its computing time which is higher than the computing time taken by the MS method for these approximations. Therefore, the computing time of flutter frequencies and speeds was higher too.

Smith[15] showed that the P - transform and the FAMUSS methods generate state space system approximations directly. Hiliuta et al.[16] applied, for the calculations of unsteady aerodynamic forces approximations for any range of reduced frequencies, a new method by combination of fuzzy clustering with shape-preserving techniques. Biskri et al.[17]

presented a new method which combined the analytical expressions given by the LS and the MS methods. The authors found that, in order to find the same types of results, the new method needed a smaller number of lag terms than the classical LS method. This new method was applied on a business aircraft with 44 symmetric modes and 50 anti-symmetric modes.

A new method based on the Chebyshev polynomials and their orthogonality properties is described in this paper and this new method was applied a business aircraft with 44 symmetric modes and 50 anti-symmetric modes. Results obtained by use of this new method were found to be better than results obtained with the classical Padé or LS methods.

II. Equations of Motion of an Aircraft

The classical equations of motion of an aircraft are expressed as follows:

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\ddot{\eta}+\tilde{\mathrm{C}}\,\dot{\eta}+\tilde{\mathrm{K}}\,\eta+q_{\mathrm{dyn}}\mathrm{Q}(k,M)\eta = \mathrm{P}(t) \tag{1}$$

which is written as function of generalized coordinates η defined as $\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}\eta$ where $\mathbf{q}$ is the displacement vector and $\mathbf{\Phi}$ is the eigenvectors matrix. Structural matrices are the generalized mass, damping and stiffness matrices defined as function of the eigenvectors matrix $\mathbf{\Phi}$:

$$\tilde{\mathrm{M}}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\,\Phi,\ \ \tilde{\mathrm{C}}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\,\Phi,\ \ \tilde{\mathrm{K}}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{K}\,\Phi \tag{2}$$

In equation (1), other terms are $q_{dyn} = 0.5\rho V^2$ defined as the dynamic pressure with ρ as the air density and V as the true airspeed, P(t) is an external force due to gusts, turbulence or pilot inputs on aircraft control surfaces and $k = \omega b/V$ is the reduced frequency where ω is the natural frequency and b is the wing semi-chord length.

For aeroservoelastic interactions studies, there is the need to obtain the aerodynamic forces in the Laplace domain; therefore equation (1) will be converted in the Laplace domain as follows:

$$[\tilde{\mathbf{M}}s^2 + \tilde{\mathbf{C}}s + \tilde{\mathbf{K}}]\eta(s) + q_{dyn}\mathbf{Q}(s)\eta(s) = 0 \tag{3}$$

A new method used to convert the aerodynamic forces Q(k, M) from frequency into Laplace domain $\mathbf{Q}(s)$ is described in this paper. This method uses the Chebyshev polynomials and their orthogonality properties. In order to understand this method, we describe in the next section the Chebyshev polynomials and their orthogonality properties.

III. Chebyshev Polynomials and their Orthogonality Properties

The first kind Chebyshev polynomials[18] $T_n(x)$ are given by solutions to equation (5) and are are normalized so that $T_n(1) = 1$. Recurrence relationships[18-20] are used in the Chebyshev polynomials definitions as follows:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{r+1}(x) = 2xT_r(x) - T_{r-1}(x) \end{cases} \tag{4}$$

where r is the Chebyshev polynomial rank. The solution of Chebyshev polynomials is found with the following condition:

$$T_r(x) = 0 \tag{5}$$

By use of trigonometric multiple-angle equations, the solution of equation (5) is expressed as follows:

$$x = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2r} \tag{6}$$

Then, the expression:

$$\tilde{Q}_r(x) = \frac{1}{2^{r-1}} T_r(x) \tag{7}$$

oscillates with an extreme amplitude within the interval [-1, 1].

A continuous function $f(x)$ may be expressed by use of Chebyshev polynomials theories as follows:

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x) \tag{8}$$

where the Chebyshev polynomials are given by the following equation :

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)) \tag{9}$$

and where the coefficients c_j are:

$$c_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{where} \quad j = 1,2,\ldots \tag{10}$$

The orthogonality properties of Chebyshev polynomials allow the approximation's error to be kept within a predetermined bandwidth:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_r(x) T_s(x) dx = \begin{cases} 0, \; r \neq s \\ \pi, \; r = s = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \; r = s \neq 0 \end{cases} \tag{11}$$

IV. Chebyshev method for aeroservoelastic interactions studies

For aeroelasticity studies, the unsteady generalized aerodynamic forces Q(*i*,*j*) are calculated by the Doublet Lattice Method DLM in NASTRAN, where $i, j = 1,2,\ldots,50$ for the CL-604 anti-symmetric 50 modes and $i, j = 1,2,\ldots,44$ for the CL-604 symmetric 44 modes. These forces are calculated on a CL-604 for one Mach number and a set of reduced frequencies.

Predefined Chebyshev functions, such as *chebpade* and *chebyshev* defined in Matlab allow the construction of a polynomial interpolation for the unsteady generalized aerodynamic forces from frequency to Laplace domain.

The "*chebyshev*" function is used for the unsteady aerodynamic force matrix approximations under the following power series form:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{1}{2} c_0^{(ij)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(ij)} T_n^{(ij)}(s) \tag{12}$$

where coefficients of this approximation are $c_n^{(ij)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\mathbf{Q}_{ij}(s) T_n^{(ij)}(s)}{\sqrt{(1-s^2)}} ds$ for $n = 0, 1, \ldots$

The "*chebpade*" function is used for the unsteady aerodynamic force matrix approximations under the following rational fractions form:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{ij}(s)=\frac{\sum_{n=0}^{M}a_n^{(ij)}T_n^{(ij)}(s)}{1+\sum_{n=1}^{P}b_n^{(ij)}T_n^{(ij)}(s)} \tag{13}$$

where the numerator degree M is greater than the denominator degree P by a factor of 2, and is also written as $M = P + 2$. Thus, the order of the Chebyshev polynomials can be written under the form [M, P] and this order will be varied in the results chapter in order to see the differences appearing between results obtained for different orders of Chebyshev polynomials.

V. Flutter analysis theory

In order to demonstrate the flutter analysis theory used in this paper, we define the following ratios: the air density ratio σ which is the ratio between the air density at a certain altitude ρ and the air density at the sea level ρ_0 and the airspeed ratio ν which is the ratio between the equivalent airspeed V_E and the reference true airspeed V_0:

$$\sigma=\frac{\rho}{\rho_0} \tag{14}$$

$$\nu=\frac{V_E}{V_0} \tag{15}$$

Equation (1) is used for flutter analysis where the aerodynamic unsteady forces matrix $\mathbf{Q}$ is complex and therefore $\mathbf{Q}$ has a real part $\mathbf{Q_R}$ and an imaginary part $\mathbf{Q_I}$. The aerodynamic stiffness $\mathbf{Q_R}$ is in phase with the vibration displacement, therefore is associated with η. The *aerodynamic damping* $\mathbf{Q_I}$ is in phase with the vibration velocity, therefore is associated with $\dot{\eta}$. Thus, equation (1) may be written as follows:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta}+\left(\mathbf{C}+\frac{1}{\omega}q_{dyn}\mathbf{Q_I}\right)\dot{\eta}+\left(\mathbf{K}+q_{dyn}\mathbf{Q_R}\right)\eta=0 \tag{16}$$

From the reduced frequency k definition, ω is written as a function of k:

$$\omega=kV/b=2kV/c \tag{17}$$

where $c = 2b$ is the chord.

We replace ω given by equation (17) and $q_{dyn} = 0.5\rho V^2$ already expressed in the second section in equation (16), so that next equation is obtained:

$$\mathbf{M}\ddot{\eta}+\left(\mathbf{C}+\frac{1}{4k}\rho Vc\mathbf{Q_I}\right)\dot{\eta}+\left(\mathbf{K}+\frac{1}{2}\rho V^2\mathbf{Q_R}\right)\eta=0 \tag{18}$$

From the dynamic pressure definition, we write :

$$\rho V^2=\rho_0 V_E^2 \tag{19}$$

The equivalent airspeed V_E is written as function of air density ratio σ :

$$V_E=\sqrt{\sigma}V \tag{20}$$

Terms on both sides of equation (19) are divided by V, and by use of equation (20), we obtain:

$$\rho V = \rho_0 \frac{V_E^2}{V} = \rho_0 V_E \frac{V_E}{V} = \rho_0 V_E \sqrt{\sigma} \tag{21}$$

Equation (18) is further written as function of the equivalent airspeed V_E by use of equations (19) to (21) :

$$\mathbf{M}\ddot{\eta} + \left(\mathbf{C} + \frac{1}{4k}\rho_0 c\sqrt{\sigma}V_E\mathbf{Q_I}\right)\dot{\eta} + \left(\mathbf{K} + \frac{1}{2}\rho_0 V_E^2\mathbf{Q_R}\right)\eta = 0 \tag{22}$$

VI. Results

A comparison is presented in this paper between the results obtained by use of our Chebyshev approximation method with the results obtained by two classical approximation methods such as the Least Squares LS and Padé methods. Regarding these two classical methods, the Least Squares LS method is very well known in aeroservoelastic interactions studies and was already applied in aircraft industry, while the Padé method uses a parameter identification solution in order to determine a polynomial fractional form which identifies an orthogonal polynomial interpolation. This fractional form is the key aspect of the Padé method, due to the fact that allows the order reduction system.

These methods were applied for unsteady aerodynamic forces approximations on a business aircraft modeled by finite elements methods with NASTRAN code at the Mach number $M = 0.88$ and at 8 reduced frequencies $k = 0.001$, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1 and 1.4 and for different polynomial approximation orders.

The polynomial approximation order in the Chebyshev method such as [6, 4] represents the maximum rank of the Chebyshev polynomials used to form the numerator (M) and the denominator (P) in equation (13). Thus, in equation (13), an approximation order [M, P] = [6,4] gives M = 6 and P = 4 where M is the maximum rank of Chebyshev polynomials at the numerator and P is the maximum rank of Chebyshev polynomials at the denominator. The approximation order for Padé polynomials is defined in the same manner as the approximation order for Chebyshev polynomials. The first set of comparison results are mainly expressed in terms of the *approximation's normalized error.*

Figure 1 shows the normalized approximation error for real and imaginary aerodynamic forces for the [6, 4] symmetric modes model order by use of Padé and Chebyshev approximation methods, and Figure 2 shows the normalized approximation error for real and imaginary aerodynamic forces for the [6, 4] anti-symmetric modes model order by use of Padé and Chebyshev approximation methods.

Padé method gives a small error near the approximation point (in our examples, the middle of the reduced frequency interval) and an increased error towards each end of the interval. The Chebyshev approximation method demonstrates an almost constant value of the error all along the approximation interval. The threshold of this error is imposed from the beginning of the calculations in order to find the unsteady generalized aerodynamic force approximation matrices.

Next, different other values of the polynomial approximation order by the Padé method and the Chebyshev polynomial fractions method (polynomial order should be equivalent for both methods) were used for the total normalized approximation error calculations - which were found to be much smaller for the Chebyshev polynomials method with respect to the overall approximation error given by Padé polynomials method.

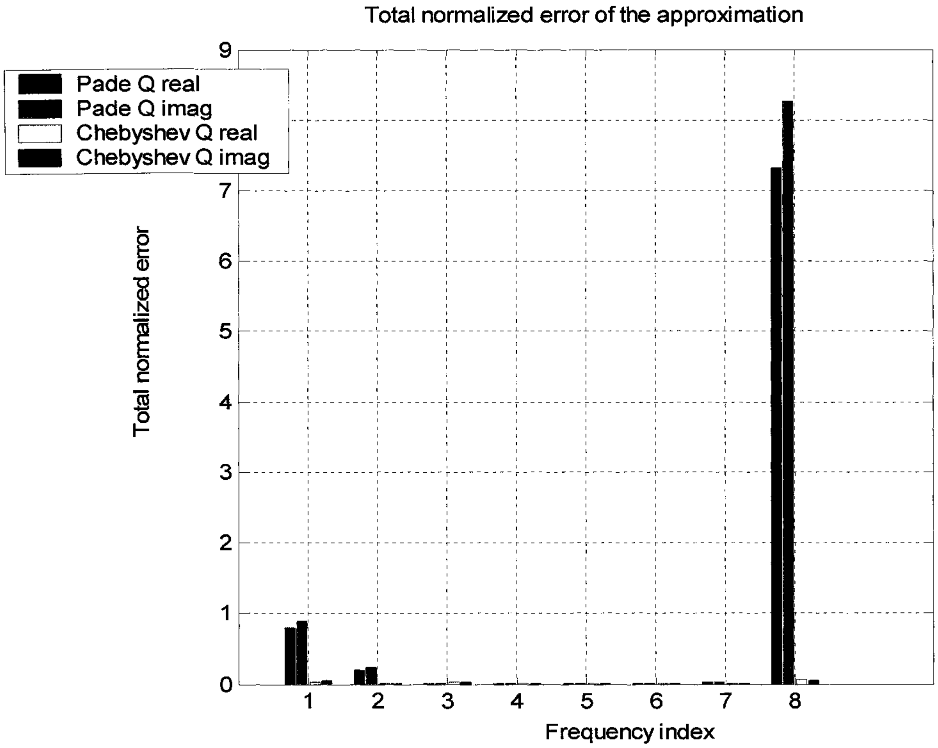


Figure 1. **Total normalized errors versus frequency index for CL-604 symmetric modes, order [6, 4]**

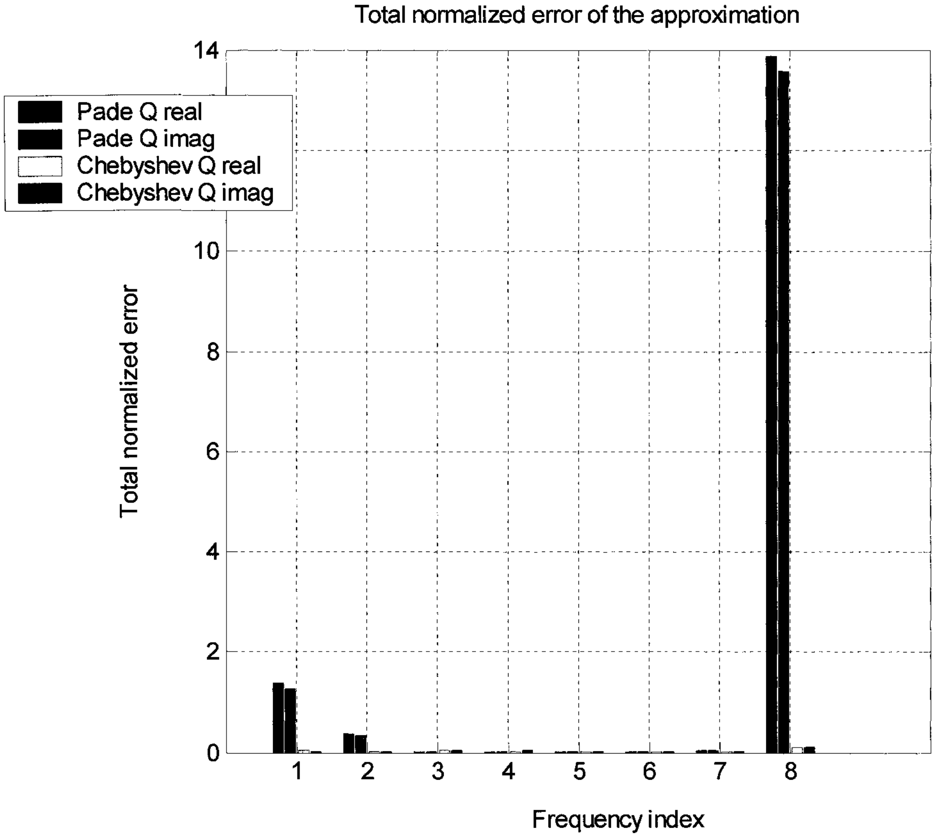


Figure 2 **Total normalized errors versus frequency index for CL-604 anti-symmetric modes, order [6, 4]**

The approximation error for each element of the **Q** matrix is normalized for the real and the imaginary part, at each reduced frequency by use of the following equations:

$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{real}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}} \frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\,\mathbf{R}new} - \mathbf{Q}_{ij\,\mathbf{R}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right) * 100\% \tag{23.1}$$

$$J_{\mathbf{Q}\ \mathrm{imaginary}} = \sum_{k=1}^{14}\left(\sum_{i=1}^{N_{modes}}\left(\sum_{j=1}^{N_{modes}} \frac{\left|\mathbf{Q}_{ij\,\mathbf{I}new} - \mathbf{Q}_{ij\,\mathbf{I}old}\right|}{\sqrt{\left|\mathbf{Q}_{ij}\right|^2}}\right)\right) * 100\% \tag{23.2}$$

and $J_{\mathbf{Q}} = J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{real}} + J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{imaginary}}$

where $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}old}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}old}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces given by NASTRAN and $\mathbf{Q}_{\mathbf{R}new}$ and $\mathbf{Q}_{\mathbf{I}new}$ are the real and the imaginary parts of the unsteady aerodynamic forces approximated by Padé or Chebyshev theories. N_{modes} is the total number of modes (also the dimension of $\mathbf{Q}$), k is the index of the reduced frequency and J is the total normalized error.

As exact numerical values for these approximations are difficult to compare on Figures 1 and 2, in Table 1 we compare the numerical values of these errors obtained for 5 different approximation orders: [6, 4], [7, 5], [8, 6], [9, 7] and [10, 8]. A part of numerically values of results represented graphically on Figures 1 and 2 are given in Table 1 for polynomials approximation order [6, 4].

Table 1 Total normalized errors

Mode type	Approximation order	$J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{real}}$ Padé	$J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{imag}}$ Padé	$J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{real}}$ Chebyshev	$J_{\mathbf{Q}\,\mathrm{imag}}$ Chebyshev
Symmetric modes	[6, 4]	8.35821	9.4265	0.1637	0.1544
	[7, 5]	123.9417	139.7621	0.0354	0.0132
	[8, 6]	50.9315	96.2094	0.0354	0.0132
	[9, 7]	1.8054	1.1595	0.0354	0.0132
	[10, 8]	58.9544	65.7236	0.0354	0.0132
Anti-symmetric modes	[6, 4]	15.6480	15.2306	0.3040	0.3024
	[7, 5]	n.o.	n.o.	0.0397	0.0192
	[8, 6]	n.o.	n.o.	0.0397	0.0192
	[9, 7]	n.o.	n.o.	0.0397	0.0192
	[10, 8]	n.o.	n.o.	0.0397	0.0192

n.o. = not obtained due to the fact that the approximation requires more than 1 GB of memory which is more memory than Matlab 6.5 can handle

As shown in Table 1, the Chebyshev method gives a smaller error than Padé method. In most of the cases, the normalized error given by Chebyshev method can be up to 100 times smaller than the error given by the Padé approximation method. In other cases, the use of Padé method is not efficient because of the amount of memory requested, which is too high for Matlab 6.5 use.

The second type of results comparison is given in terms of numerical values for flutter equivalent airspeeds V_E and frequencies *Freq* and their errors J_{VE} and J_{Freq} which are expressed by the following equations:

$$J_{VE} = \frac{\left|V_{E\_pk\_standard} - V_{E\_pk\_approx\_method}\right|}{V_{E\_pk\_standard}} * 100\% \tag{24.1}$$

$$J_{Freq} = \frac{\left|Freq_{pk\_standard} - Freq_{pk\_approx\_method}\right|}{Freq_{pk\_standard}} * 100\% \tag{24.2}$$

where, in equation (24.1), $V_{E\_pk\_standard}$ and $Freq_{pk\_standard}$ represent the equivalent airspeeds and frequencies calculated by the *pk standard method* presented previously in section V, while $V_{E\_pk\_approx\_method}$ and $Freq_{\_pk\_approx\_method}$ are the equivalent airspeeds and frequencies calculated with the *pk_approximation method*, which might be one of the two methods: *pk*-LS method (with 8 and 10 lag terms) and *pk*-Chebyshev method. The total average error is expressed by the following equation:

$$J = \frac{\sum_{i=1}^{N_{flutter}} \left(J_{\mathrm{Veas}}(i) + J_{\mathrm{Freq}}(i)\right)}{2 * N_{flutter}} \tag{25}$$

where $N_{flutter}$ is the number of flutter points detected. For the business aircraft here presented, a number of 4 flutter points were detected, and the corresponding modes to these flutter points are given in Tables 2 and 3. In these tables, the flutter errors J (see equations (24) and (25)) are presented in percentage values for the flutter equivalent airspeeds and frequencies for business aircraft with a number of 50 anti-symmetric modes (Table 2) and for 44 symmetric modes (Table 3). From Table 2 and Table 3, the average error was found to be very much smaller in case of *pk*-Chebyshev method application than in case of *pk*-LS method application, which demonstrates the superiority of the Chebyshev method with respect to the *pk*-LS method.

Table 2 Flutter errors *J* (%) for business aircraft 50 anti-symmetric modes

Method	F#2 Mode 9		F#3 Mode 10		F#5 Mode 17		F#7 Mode 66		Average error J
	J_{VE}	J_{Freq}	J_{VE}	J_{Freq}	J_{VE}	J_{Freq}	J_{VE}	J_{Freq}	
pk-LS 8 lags	0.55	0.16	1.00	1.21	4.87	0.37	1.03	0.34	1.19
pk-LS 10 lags	0.67	0	1.67	1.32	6.50	0.46	2.34	0.18	1.64
pk-Chebyshev	1.50	0.32	0.09	0	0.29	0.09	0.19	0	0.31

Table 3 Flutter errors *J* (%) for business aircraft 44 symmetric modes

Method	F#1 mode 7		F#4 mode 15		F#6 mode 19		F#8 mode 41		Average error J
	J_{Veas}	J_{Freq}	J_{Veas}	J_{Freq}	J_{Veas}	J_{Freq}	J_{Veas}	J_{Freq}	
pk-LS 8 lags	4.70	0.84	0.47	0.42	0.48	0.07	0.38	0.07	0.93
pk-LS 10 lags	4.23	0.42	5.92	1.53	0.06	0.15	0.24	0	1.57
pk-Chebyshev	0.20	0.14	0.21	0	0.05	0	0.08	0.04	0.09

VII. Conclusions

Generally, an approximation method is considered to be better than another method if its approximation error is smaller and if its computation time is faster; and, ultimately, if less computer resources are used, which could be in some cases a crucial criterion (when a significantly larger quantity of data to be approximated is used).

The case of the CL-604 from Bombardier proves to be in fact one of these cases, due to software limitations: the Padé approximation failed when we tried to use it for the 50 elastic anti-symmetric mode case for model orders higher than [6, 4] because this approximation would require more than 1 GB of memory, which is more than Matlab 6.5 can handle.

Regarding the computation time, the Chebyshev method proved to be 4 times faster than Padé, depending on the number of modes and the model order used.

The Chebyshev method, when compared with Padé, provided much smaller approximation errors, as shown in Table 1. A remarkable aspect regarding the Chebyshev method is that, using it on the CL-604's data, the total normalized approximation error obtained with this method rapidly converged (with the increase of the model order) to a constant very small value for both symmetric and anti-symmetric mode cases, while the same approximation error provided by the Padé method was higher and presented large fluctuations. Due to this type of error, the Padé approximation was not able to provide all flutter points for the CL-604 when used in conjunction with the *pk* method, while the Chebyshev method provided these values with high accuracy. This is the reason why, to compare the flutter results of the Chebyshev method, we made appeal at the *pk*-LS method, a much slower, but accurate approximation method, based on Padé decomposition. However, even when compared to LS, the Chebyshev method, which proved to be up to 30 times faster than LS, provided smaller flutter average errors, no matter the number of lag terms that we have implemented when using the LS.

Previous results obtained with the Chebyshev approximation method on the Aircraft Test Model data from STARS and the F/A-18 aircraft data kindly provided to us by NASA Dryden Flight Research Center and the results presented above for the CL-604 aircraft data from Bombardier make us conclude that this approximation method is not problem dependent and that it is a fast, reliable and very accurate method.

Acknowledgments

The authors would like to thank Mr. K.K. Gupta from NASA Dryden Flight Research Center for allowing us to use the ATM on STARS. We would also like to thank the other members of the STARS engineering group including Mr. Tim Doyle, Mr. Shun Lung and Mr. Marty Brenner for their precious assistance and collaboration.

References

[1]Rodden, W.P., Harder, RL, and Bellinger, E.D., "Aeroelastic Addition to NASTRAN", NASA CR-3094, 1979.

[2]Noll, T., Blair, M. and Cerra, J., "ADAM, An aeroservoelastic analysis method for analog or digital systems", Journal of Aircraft, Vol 23(11), 1986.

[3]Gupta, K.K., "STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program", NASA TM-4795, 1997, pp. 1-285.

[4]Pitt, D.M., FAMUSS: A new aeroservoelastic modeling tool, AIAA-92-2395-CP, 1992.

[5]Tiffany, S.H. and Adams, W.M., "Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces", NASA TP-2776, July 1988.

[6]Edwards, J.W., "Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control", SUDAAR 504, Stanford University, Stanford, CA, February 1977.

[7]Roger, K.L., "Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design", *Structural Aspects of Active Controls, CP-228*, August 1977, pp. 4.1-4.11.

[8]Vepa, R., "Finite State Modeling of Aeroelastic System", NASA CR-2779, February 1977.

[9]Karpel, M.,"Design for Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State Space Modeling", *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, 1982, pp 221-227.

[10]Dunn, H.J., "An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain", NASA TP-1738, 1980.

[11]Poirion, F., "Modélisation Temporelle des Systèmes Aéroservoélastiques. Application à l'Étude des Effets des Retards", *La Recherche Aérospatiale*, No. 2, 1995, pp. 103-114.

[12]Poirion, F., "Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces", *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No. 6, 1996, pp. 1199-1201.

[13]Cotoi, I, Botez, R.M., "Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions", *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, 2002, pp. 985-987.

[14]Cotoi, I, Botez, R.M., "Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis", *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications* CA2001, Banff, Canada, 2001, pp. 105-108.

[15]Smith, T.A., Hakanson, J.W., Nair, S.S., Yurkovich, R.N., "State-Space Model Generation for Flexible Aircraft", *Journal of Aircraft*, Vol. 41, No. 6, 2004, pp. 1473-1481.

[16]Hiliuta, A., Botez, R.M., Brenner, M., "Approximation of unsteady aerodynamic forces Q(*k*,*M*) by use of fuzzy techniques", 46th

AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Austin, Texas, USA, 18-21/04/2005.

[17]Biskri, D.E., Botez, R.M., Therrien, S., Rathé, A., Stathopoulos, N., Dickinson, M., "New *mixed method for unsteady aerodynamic forces approximations for aeroservoelasticity studies*", *IFASD 2005, Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics 2*005, Munich, Germany, 28/06-02/07/2005.

[18]Weisstein, E.W., "Chebyshev Polynomial of the First Kind", *MathWorld - Wolfram Web*,
URL: http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html, March 2004.

[19]Rivlin, Th. J., *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, 2nd ed., Wiley, New York, 1990.

[20]Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, W.T., "Polynomial Approximation from Chebyshev Coefficients", *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, 2nd Edition Cambridge, England: Cambridge University Press, 1992, Chapter 5.

ANNEXE 5

La procédure de réduction du modèle Luus-Jakola appliquée aux systèmes aéroservoélastiques

L'article suivant a été publié dans les comptes rendus du ARA 2002, le 26ème Congrès Annuel de l'Académie Américaine – Roumaine des Arts et Science, 28 mai – 4 juin 2002, Oradea, Roumanie.

THE LUUS-JAKOLA MODEL REDUCTION PROCEDURE APPLIED TO AEROSERVOELASTIC SYSTEMS

Botez M. Ruxandra, Cotoi Iulian and Dinu Alin Dorian
Ecole de Technologie Supérieure,
Département du Génie de la Production Automatisée
1100 Notre-Dame Ouest, H3C 1K3 Montréal, Qué., Canada

Starting with a Padé approximation of the generalized aerodynamic forces we present a method to obtain a reduced order model using an iterative dynamic procedure known as the Luus-Jakola optimization procedure. The main advantage of this procedure is that it retains pertinent frequency information.

1. Introduction

The application of modern control design techniques, simulation and optimization procedures to aeroservoelastic systems require the aeroservoelastic equations of motion to be transformed into a first-order, time-domain (stat-space) form [1]. In order to achieve this goal the unsteady aerodynamic forces must be linearized using an approximation in the frequency domain by rational functions of the Laplace variable *s*.

The formula of approximation chosen strongly influences the order of the state-space model. The size of the model affects the efficiency of subsequent analyses; therefore it is necessary to obtain a model as small as possible without degrading the accuracy of the approximation.

In a previous paper [2] we have presented a method to obtain a reduced order state-space model for an aeroservoelastic system. The method is based on a Padé-like approximation of each and every term of the unsteady aerodynamic matrix.

Then, by using modern reduction techniques from control theory a reduced order state-space model is obtained. In this paper we follow a similar path, but we present a new way to obtain a reduced order model with the help of the iterative Luus-Jakola (**LJ**) optimization procedure.

The **LJ** procedure requires less computational effort than the model order reduction and is less prone to numerical errors. The reduction techniques from control theory address the system as a whole and they are not very well suited for large systems. The method here presented deals with every term of the Padé approximation. Furthermore, this method can be implemented to retain pertinent frequency information from the original approximation.

2. Equations of motion and Padé approximation of the unsteady aerodynamic forces

Let us denote by $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$ the generalized mass, elastic stiffness and damping matrices of the flexible aircraft, by $q_{dyn} = 0{,}5\ \rho V^2$, the dynamic pressure, where ρ is the air density and V is the true airspeed. If $\mathbf{A}_e(k)$ represents the aerodynamic influence coefficient matrix for a given Mach number M and a reduced frequency $k = \omega b / V$, with ω the natural frequency and b the wing semi-chord length, and if q is the displacement vector, then the equations of motion can be written as:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + q_{dyn}\,\mathbf{A}_e(k)\,\mathbf{q} = 0$$

Introducing η the generalized variable defined as $q = \Phi \eta$, where Φ represents the eigenvectors of the free-vibration problem, the above equation becomes

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\eta} + \hat{\mathbf{C}} \dot{\eta} + \hat{\mathbf{K}} \eta + q_{dyn} \mathbf{Q}(k) \eta = 0$$

where $\hat{\mathbf{M}} = \Phi^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \Phi$, and so forth.

Taking the Laplace transform of the last equation obtain:

$$\left[\hat{\mathbf{M}} s^2 + \hat{\mathbf{C}} s + \hat{\mathbf{K}} + q_{dyn} \mathbf{Q}(s) \right] \quad \eta(s) = 0$$

In the latter equation the unsteady aerodynamic forces $\mathbf{Q}(s)$ are unknown for every s in the Laplace domain. An approximation has to be constructed such as, when switching back to time domain the order of the state-space model should not be too big.

Since the model is expected to perform as a bounded input bounded output system efficient rational function approximations have been developed. The most popular methods are the Least-Squares (**LS**), the Matrix Padé (**MMP**) and the Minimum State (**MS**). The method yielding the smallest order state-space model is the **MS** approximation. The drawback of this method resides in its highly iterative nature.

In this paper we approximate each element of the aerodynamic matrix $\mathbf{Q}(s)$ by a Padé approximant:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{N+2} s^{N+2}}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_N s^N}$$

The coefficients of the denominator must satisfy the Routh-Hurwitz criterion, which is equivalent to asking that all the roots of the denominator have strictly negative real parts. The criterion ensures the bounded stability of the model we obtain.

In order to achieve a better accuracy one can increment the order of the approximation, that is N. For instance, if we consider 10 modes of vibration, then the global approximation error is $J = 32.6297$ for $N = 1$, $J = 27.7619$ for $N = 2$ and $J = 19.7246$ for N=3.

Here J is defined as follows:

$$J = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{l=1}^{p} \left| \mathbf{Q}_{ij}(jk_l) - \mathbf{Q}^{tab}{}_{ij}(jk_l) \right|^2$$

with k_l a set of reduced frequencies for which it is possible to tabulate the unsteady aerodynamic forces $\mathbf{Q}^{tab}$ using the Doublet Lattice Method **DLM**.

It should be noted, that although there is a decrease of the global error several elements do not necessarily have smaller error when one increases N. Therefore a mix of approximants of different order should be used in order to obtain the smallest possible error.

Once this step has been performed it is a very simple manner to write the approximation of the unsteady aerodynamic forces as follows:

$$\mathbf{Q}(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + Z(s)$$

where A_0, A_1 and A_2 are numerical matrices and $Z(s)$ is a matrix formed of strictly proper rational functions.

The elements of $Z(s)$ are rational functions of s. Therefore $Z(s)$ can be viewed as the transfer function of a proper and stable Multiple Input Multiple Output (MIMO) linear system. In order to obtain a reduced order state-space (time domain) linear system a reduction method can be used. There are a few methods that can be used, such as the balanced minimal realization, the Schur reduction method, the Hankel approximation method, the Balanced Stochastic Truncation method and so on. These methods have been used to reduce the order of the model (see [2]).

In this paper we use the Luus - Jakola (**LJ**) optimization procedure to perform the model order reduction. The **LJ** iterative procedure is depicted in the following section.

3. The LJ optimization and model reduction

The **LJ** optimization procedure can be summarized as follows [3]:

- Given an initial point x_0, choose a diagonal matrix formed with random numbers between [-1,1] and r a region size vector. Put

$$x = x_0 + Dr$$

- Check the feasibility of such x. For a feasible point x, evaluate the objective function.

- After an iteration (i. and ii.) replace x_0 by the x which decreases the most the objective function. Perform a contraction of the region size

$$r_{j+1} = 0.95\, r_j$$

The idea behind the **LJ** reduction method is to start with an approximation of order N of an element of the unsteady aerodynamic matrix:

$$\mathbf{Q}_{ij}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_{N+2} s^{N+2}}{b_0 + b_1 s + \dots + b_N s^N}$$

and to look for an approximation of the latter of the form

$$\bar{\mathbf{Q}}_{ij}(s) = \frac{x_0 + x_1 s + \dots + x_M s^{M-1}}{x_{M+1} + x_{M+2} s + \dots + x_{2M+3} s^M}$$

Here the unknown are the x's and are found using the **LJ** procedure described at the beginning of this paragraph.

For this reason, we minimize the sum of square deviations between the aerodynamic forces and their approximation expressed as:

$$I = \sum_i ([\mathrm{Re}(\mathbf{Q}(j\omega_i)) - \mathrm{Re}(\bar{\mathbf{Q}}(j\omega_i))]^2 + [\mathrm{Im}(\mathbf{Q}(j\omega_i)) - \mathrm{Im}(\bar{\mathbf{Q}}(j\omega_i))]^2)$$

where the ω's are frequency values chosen in a geometric sequence, $\omega_{i+1} = 1.1*\omega_i$. This choice gives more frequency points near zero.

4. Numerical results

A flexible aircraft with 10 vibration modes has been considered. The finite element model of the symmetric one half of an aircraft is used to verify this new optimization theory of unsteady aerodynamic forces (see [4]).

The Doublet Lattice Method DLM implemented in STARS [4] was used to obtain the tabulated unsteady aerodynamic matrices in the frequency domain, for a given Mach number M=0.6 and a set of 14 reduced frequencies $k = \{0.01, 0.1, 0.2, 0.303, 0.4, 0.5, 0.5882, 0.6250, 0.6667, 0.7143, 0.7692, 0.8333, 0.9091, 1.0000\}$.

With this tabulated data each element of the aerodynamic matrix is approximated by a Padé approximant.

We have chosen the first element of the aerodynamic matrix $\mathbf{Q}_{11}$ in order to describe our method. The Padé approximant is:

$$\mathbf{Q}_{11}(s) = \frac{98.536 + 35.391 s + 90.428 s^2}{1.722 + 1.342 s + 1.894 s^2 + 0.636 s^3}$$

Denoting the gain = 8.536496/1.7221107, we search for an approximation of the following form:

$$\overline{\mathbf{Q}}_{11}(s) = gain * \frac{1 + x_1 s}{1 + x_2 s + x_3 s^2}$$

We use 42 frequencies, starting with 0.01 until 0.5476 rad/sec. The error I was found to be 0.007987, for $x_1 = 0.915484$, $x_2 = 1.335922$ and $x_3 = 0.425702$. In Figure 1 we compare the Nyquist and Bode plot to see the degradation introduced by our approximation. We can see that for a frequency range of interest in our study the two approximations are in good agreement. It should be noted that the initial points x_1, x_2, x_3 in the **LJ** procedure can be chosen such that the **LJ** approximation retains pertinent frequency information from the Padé approximation.

5. Conclusions

We have presented a new method for obtaining a reduced order model starting with a rational function approximation of the unsteady aerodynamic forces. Our method has the advantage of treating each and every element of the unsteady aerodynamic forces separately therefore reducing the computational effort.

6. Acknowledgements

The authors would like to thank to Professor Luus for his advice and support. They would also like to thank Dr. Kajal Gupta at NASA Dryden Research Flight Center for allowing us to use the ATM model in STARS. Many thanks are due to the other members of STARS engineering group for their continuous assistance and collaboration: Tim Doyle, Can Bach and Shun Lung.

Bibliography

[1] Karpel, M., *Design for active flutter suppression and gust alleviation using state space aeroelastic modeling*, Journal of Aircraft, Vol. 19 (3), pp. 221-227.

[2] Cotoi, I., Botez, R.M., 2001, *Optimization of unsteady aerodynamic forces for aeroservoelastic analysis*, Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications CA2001, Banff, Canada, pp. 105-108, 27-29 June.

[3] Luus, R., *Iterative Dynamic Programming*, Ed. Chapman& Hall/CRC, Boca Raton London New York, 2000, pp.44-54.

[4] Gupta, K., Gupta, K.K., 1997. *STARS-An integrated multidisciplinary, finite-element, structural, fluids, aeroelastic, and aeroservoelastic analysis computer program*, NASA TM 101709.

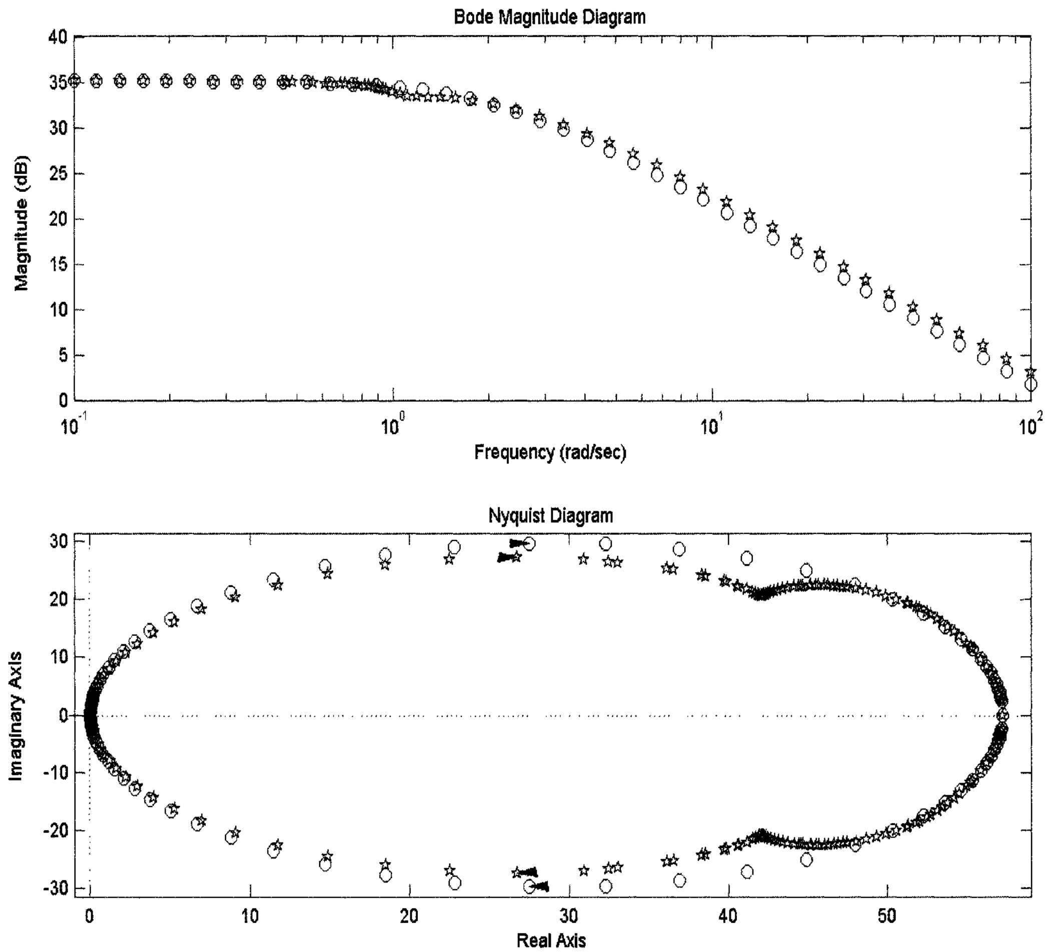


Figure 1: The Bode and Nyquist plot for the Q_{11} element.

In blue, the Padé approximant of order $N = 2$ and in red the LJ approximation.

ANNEXE 6

Linéarisation des angles d'Euler

Nous définissons le triplet (Φ, Θ, Ψ) comme étant les angles d'Euler qui forment la matrice de rotation du repère inertiel par rapport au repère lié aux axes de l'avion [38].

Nous définissons Ω_{B}, la vitesse angulaire du repère lié aux axes de l'avion par rapport au repère inertiel projeté dans le repère lié aux axes de l'avion :

$$\Omega_{\mathrm{B}} = \left[P \;\; Q \;\; R\right]^{\mathrm{T}} \tag{A6.1}$$

Nous pouvons relier les dérivées des angles d'Euler à la vitesse angulaire de l'avion comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \dfrac{\sin\Phi}{\cos\Theta} & \dfrac{\cos\Phi}{\cos\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \tag{A6.2}$$

Pour linéariser l'équation (A7.2), nous définissons les valeurs nominales et les perturbations des angles d'Euler et de la vitesse angulaire. Le triplet $(\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0)$ représente les valeurs nominales des angles d'Euler et $\vartheta = \left[\phi \;\; \theta \;\; \psi\right]^{\mathrm{T}}$ est le vecteur des perturbations. Pour la vitesse angulaire nous définissons la valeur nominale $\Omega_{\mathrm{B0}} = \left[P_0 \;\; Q_0 \;\; R_0\right]^{\mathrm{T}}$ et le vecteur des perturbations $\omega_{\mathrm{B}} = \left[p \;\; q \;\; r\right]^{\mathrm{T}}$.

Nous obtenons la dynamique des angles d'Euler linéarisée autour des valeurs nominales comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 + \phi \\ \Theta_0 + \theta \\ \Psi_0 + \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\Phi_0 + \phi)\tan(\Theta_0 + \theta) & \cos(\Phi_0 + \phi)\tan(\Theta_0 + \theta) \\ 0 & \cos(\Phi_0 + \phi) & -\sin(\Phi_0 + \phi) \\ 0 & \dfrac{\sin(\Phi_0 + \phi)}{\cos(\Theta_0 + \theta)} & \dfrac{\cos(\Phi_0 + \phi)}{\cos(\Theta_0 + \theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 + p \\ Q_0 + q \\ R_0 + r \end{bmatrix} \tag{A6.3}$$

L'équation (A7.3) nous donne une équation de « trim » pour les angles d'Euler :

$$\begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Theta_0 \\ \Psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi_0 \tan\Theta_0 & \cos\Phi_0 \tan\Theta_0 \\ 0 & \cos\Phi_0 & -\sin\Phi_0 \\ 0 & \dfrac{\sin\Phi_0}{\cos\Theta_0} & \dfrac{\cos\Phi_0}{\cos\Theta_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \tag{A6.4}$$

et une équation de perturbations :

$$\dot{\vartheta} = \mathbf{E}_v \omega_{\mathrm{B}} + \mathbf{E}_p \vartheta \tag{A6.5}$$

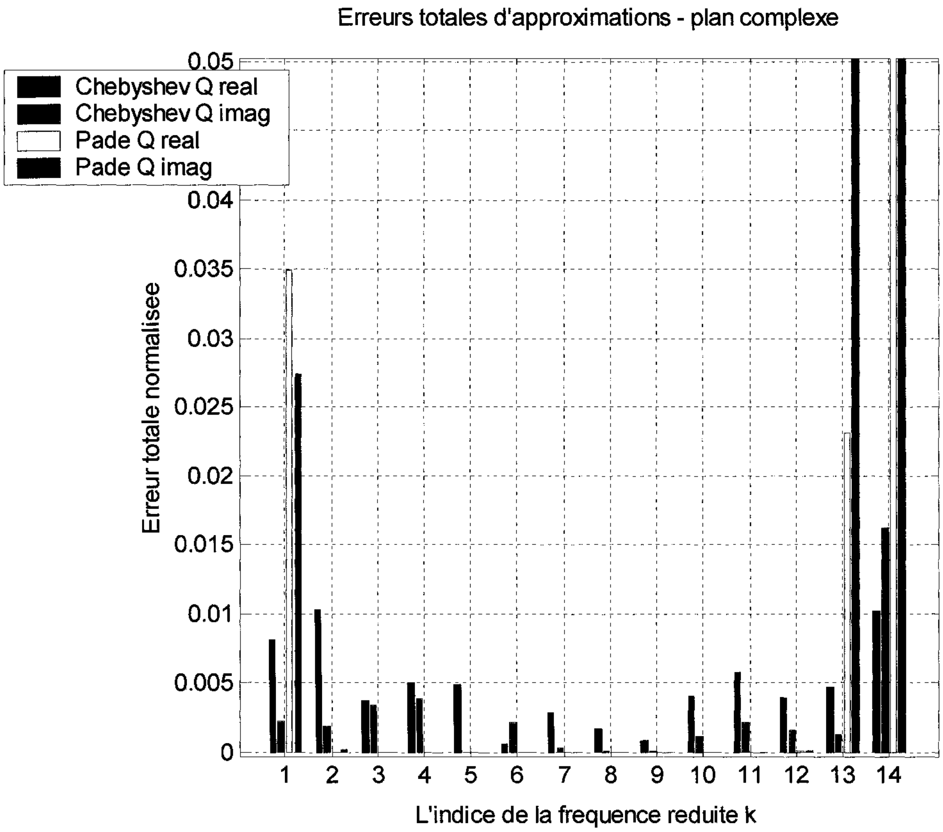
Dans l'équation (A7.5), les matrices $\mathbf{E}_v$ et $\mathbf{E}_p$ sont définies comme suit :

$$\mathbf{E}_{v} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi_0 \tan\Theta_0 & \cos\Phi_0 \tan\Theta_0 \\ 0 & \cos\Phi_0 & -\sin\Phi_0 \\ 0 & \dfrac{\sin\Phi_0}{\cos\Theta_0} & \dfrac{\cos\Phi_0}{\cos\Theta_0} \end{bmatrix} \tag{A6.6}$$

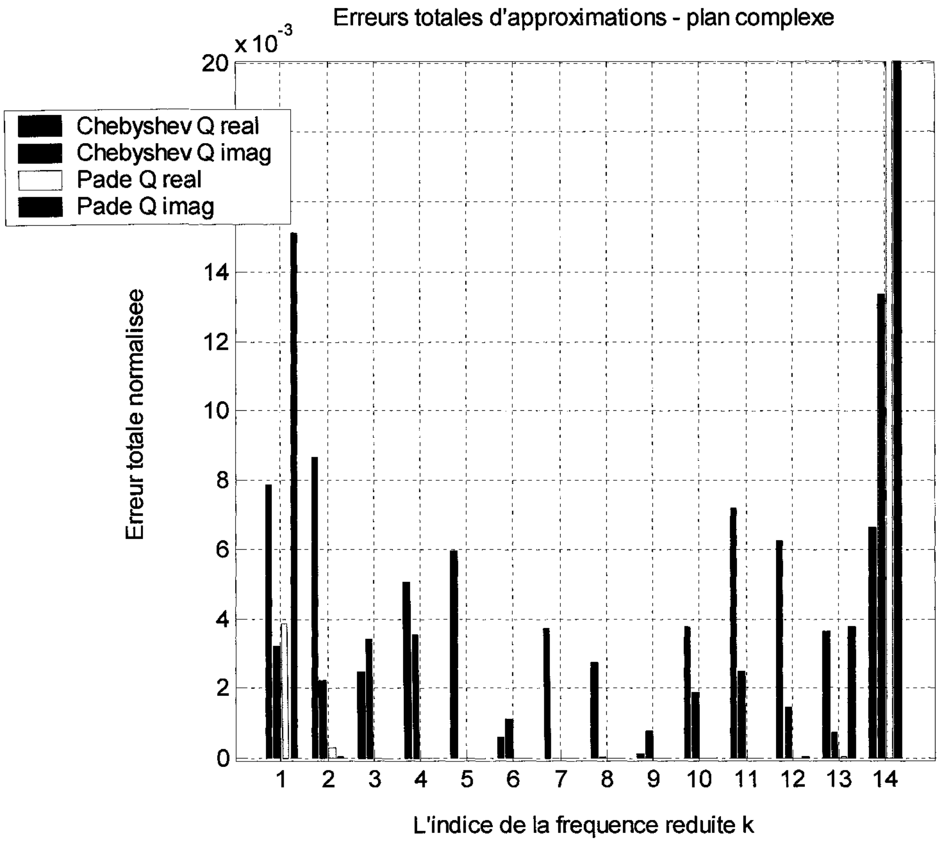
$$\mathbf{E}_{p} = \begin{bmatrix} \tan\Theta_0 \left(\cos\Phi_0 Q_0 - \sin\Phi_0 R_0\right) & \dfrac{1}{\cos^2\Theta_0}\left(\sin\Phi_0 Q_0 + \cos\Phi_0 R_0\right) & 0 \\ -\sin\Phi_0 Q_0 - \cos\Phi_0 R_0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\cos\Theta_0}\left(\cos\Phi_0 Q_0 - \sin\Phi_0 R_0\right) & \dfrac{\sin\Theta_0}{\cos^2\Theta_0}\left(\sin\Phi_0 Q_0 + \cos\Phi_0 R_0\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{A6.7}$$

ANNEXE 7

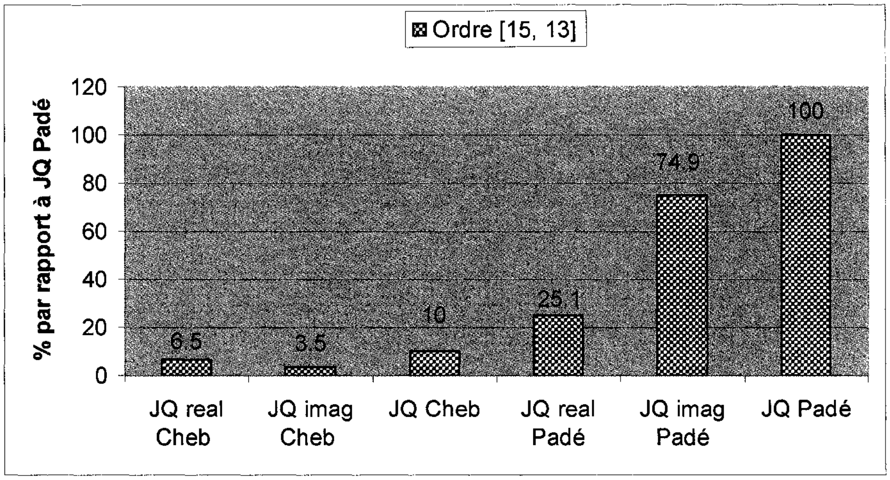
Graphiques supplémentaires pour les erreurs d'approximation obtenues par les méthodes Chebyshev et Padé pour le modèle de l'ATM



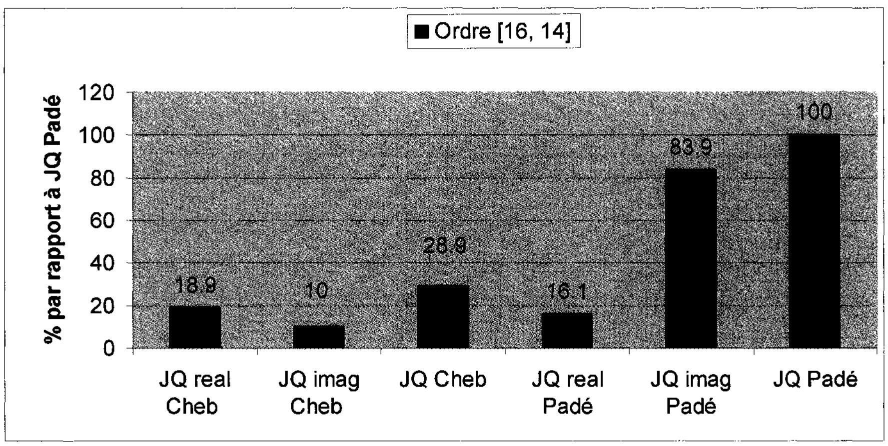
Graphique A7.1 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé - agrandissement pour l'ordre [15, 13] et *Mach* = 0,5



Graphique A7.2 Erreurs totales normalisées de Chebyshev et Padé - agrandissement pour l'ordre [16, 14] et *Mach* = 0,5



Graphique A7.3 Le diagramme des erreurs d'approximation obtenues par les méthodes Chebyshev et Padé par rapport à l'erreur totale normalisée obtenue par la méthode Padé pour l'ordre [15, 13] et *Mach* = 0,5



Graphique A7.4 Le diagramme des erreurs d'approximation obtenues par les méthodes Chebyshev et Padé par rapport à l'erreur totale normalisée obtenue par la méthode Padé pour l'ordre [16, 14] et *Mach* = 0,5

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adams, W.A., Hoadley, S.T. (1993). *ISAC: A Tool for Aeroservoelastic Analysis*. NASA TM 109031.

[2] Adams, W. M. Jr., Hoadley, S.T. (1993). *ISAC: A Tool for Aeroservoelastic Modeling and Analysis*. Collection of Technical Papers - AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Vol. 2, pp. 1010-1018.

[3] Abel, I., Perry, B. III, Newsom, J.R. (1982). *Comparison of Analytical and Wind-Tunnel Results for Flutter and Gust response of a Transport Wing with Active Controls*. NASA TP 2010.

[4] Burken, J.J., Alag, G.S., Gilyard, G.B. (1986). *Aeroelastic Control of Oblique Wing Aircraft*. NASA TM-86808.

[5] Buttrill, C.S., Houck, J.A., Heeg, J. (1990). *Hot Bench Simulation of the Active Flexible Wing Wind Tunnel Model*, AIAA Paper 90-3121, Proceedings of Flight Simulation Technologies Conference, AIAA, Dayton, OH., USA.

[6] Buttrill, C.S., Bacon, B.J., Heeg, J., Houck, J.A., Wood, D. (1992). *Simulation and Model Reduction for the AFW Program*. AIAA Paper 92-2081, Proceedings of the Dynamics Specialists Conference, AIAA, Dallas, TX., USA.

[7] Christhilf, D.M., Adams, W.M., Jr. (1992). *Multifunction Tests of a Frequency Domain Based Flutter Suppression System*. NASA TM-107617.

[8] Newsom, J.R., Pototzky, A.S., Abel, I. (1983). *Design of the Flutter Suppression System for the DAST ARW-1R – A Status Report*. NASA TM-84642.

[9] Adams, W.M. Jr., Tiffany, S.H. (1984). *Design of a Candidate Flutter Suppression Control Law for DAST ARW-2*. NASA TM 86257.

[10] Spain, C.V., Zeiler, T.A., Gibbons, M.D., Soistmann, D.L., Pozefsky, P., DeJesus, R.O., Brannon, C.P. (1993). *Aeroelastic Character of a National Aerospace Plane Demonstrator Concept*. AIAA Paper 93-1314. Proceedings of the 34th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA, La Jolla, CA, April 19-22.

[11] Raney, D. L., Pototzky, A.S., McMinn, J.D., Wooley, C.L. (1993). *Impact of Aero-Propulsive-Elastic Interactions on Longitudinal Flight Dynamics of an Air - Breathing Hypersonic Vehicle*. AIAA Paper 93-1367. Proceedings of the 34th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, AIAA, La Jolla, CA, April 19-22.

[12] Noll, T., Blair, M., Cerra, J. (1986). ADAM, an Aeroservoelastic Analysis Method for Analog or Digital Systems. *Journal of Aircraft*, Vol. 23, No. 11, pp. 852-858.

[13] Pitt, D.M., Goodman, C.E. (1992). *FAMUSS: A New Aeroservoelastic Flexible Aircraft Modeling Tool*. AIAA Paper 92-2395-CP.

[14] Gupta, K.K. (1997). *STARS – An Integrated, Multidisciplinary, Finite-Element, Structural, Fluids, Aeroelastic, and Aeroservoelastic Analysis Computer Program*. NASA TM-4795, pp. 1-285.

[15] Luo, X., Grandhi R.V. (1997). ASTROS for Reliability-Based Multidisciplinary Structural Analysis and Optimization. *Journal of Computers & Structures*, Vol. 62, No. 4, pp. 737-745.

[16] Nam, C., Chen, P.C., Liu, D.D. (2000). *ASTROS* with Smart Structures and ASE Modules: Application to Flutter Suppression and Gust-Load Alleviation*. AIAA 2000-1365, pp. 257-266.

[17] Chen, P.C., Sulaeman, E., Liu, D.D., Denegri, C.M. (2002). *Influence of External Store Aerodynamics on Flutter / LCO of a Fighter Aircraft*. AIAA Paper 2002-1410. 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, CO, USA, 22-25 April, pp. 1-11.

[18] Chen, P.C., Sulaeman, E. (2003). Nonlinear Response of Aeroservoelastic Systems Using Discrete State-Space Approach. *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 9, pp. 1658-1666.

[19] Roger, K.L. (1977). *Airplane Math Modeling Methods for Active Control Design*. Structural Aspects of Active Controls CP-228, August 1977, pp. 4.1-4.11.

[20] Karpel, M. (1982). Design for Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State Space Modeling. *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, pp. 221-227.

[21] Dowell, E.H. (1995). *A Modern Course in Aeroelasticity*. Dordrech, The Netherlands: Kluwer Academic.

[22] Vepa, R. (1977). *Finite State Modeling of Aeroelastic System.* NASA CR-2779.

[23] Tiffany, S.H., Adams, W.M. Jr. (1984). *Fitting Aerodynamic Forces in the Laplace Domain: An Application of a Nonlinear Nongradient Technique to Multilevel Constrained Optimization.* NASA TM 86317.

[24] Tiffany, S.H. and Adams, W.M. (1988). *Nonlinear Programming Extensions to Rational Function Approximation Methods for Unsteady Aerodynamic Forces.* NASA TP 2776.

[25] Edwards, J.W. (1977). *Unsteady Aerodynamic Modeling and Active Aeroelastic Control.* SUDAAR 504. Stanford University, Stanford, CA.

[26] Dunn, H.J. (1980). *An Analytical Technique for Approximating Unsteady Aerodynamics in the Time Domain.* NASA TP-1738.

[27] Poirion, F. (1995). Modélisation Temporelle des Systèmes Aéroservoélastiques. Application à l'Étude des Effets des Retards. *La Recherche Aérospatiale*, No. 2, pp. 103-114.

[28] Poirion, F. (1996). Multi-Mach Rational Approximation to Generalized Aerodynamic Forces. *Journal of Aircraft*, Vol. 33, No. 6, pp. 1199-1201.

[29] Cotoi, I, Botez, R.M. (2001). *Optimization of Unsteady Aerodynamic Forces for Aeroservoelastic Analysis.* Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Applications CA2001, Banff, Canada, pp. 105-108.

[30] Cotoi, I, Botez, R.M. (2002). Method of Unsteady Aerodynamic Forces Approximation for Aeroservoelastic Interactions. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 25, No. 5, pp. 985-987.

[31] Luus, R. (2000). *Iterative Dynamic Programming.* Boca Raton – London - New York: Chapman & Hall/CRC, pp.44-54.

[32] Botez, R.M., Cotoi, I., Dinu, A.D. (2002). *The Luus-Jakola Model Reduction Procedure Applied to Aeroservoelastic Systems.* 26th Annual Congress of the American-Romanian Academy of Arts and Science, May 28th – June 4th, Oradea, Romania.

[33] Herda, M. (2003). *Identification du modèle d'un avion aéroélastique à l'aide d'une nouvelle méthode d'approximation des forces aérodynamiques non stationnaires*. Thèse de maîtrise, École de technologie supérieure.

[34] Weisstein, E.W. *Chebyshev Polynomial of the First Kind.* MathWorld - Wolfram Web, [En ligne]. http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html (Page consultée le 14 mars 2003).

[35] Rivlin, Th. J. (1990). *Chebyshev Polynomials: From Approximation Theory to Algebra and Number Theory* (2e éd.). New York: Wiley.

[36] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. (1992). *Polynomial Approximation from Chebyshev Coefficients. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing* (2e éd.) Cambridge, England: Cambridge University Press, Chap. 5.

[37] Botez, R.M., Biskri, D., Cotoi, I., Hamza, D., Herda, M. (2003). *Unsteady Aerodynamic Forces Methods for Aeroservoelasticity Studies*. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD 2003, Amsterdam, Holland, 4-6 June.

[38] Nelson, R.C. (1998). *Flight Stability and Automatic Control* (2e éd.) Montreal – New York: McGraw Hill, pp. 96-130.

[39] Hamza, D. (2003). *Simulation de la conversion des forces aérodynamiques pour l'avion à commande électrique fly-by-wire*. Thèse de maîtrise, École de technologie supérieure.

[40] Doin, A. (2001). *Analyse des systèmes aéroservoélastiques bouclés en configuration de rétroaction. Application aux phénomènes de battement.* Thèse de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

[41] Penzl, T. (2000). *Algorithms for model reduction of large dynamical systems.* SFB 393 - Preprint. Technische Universitat Chemnitz, Germany.

[42] Penzl, T. (2000). A cyclic low-rank Smith method for large sparse Lyapunov equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 21, No. 4, pp. 1401-1418.

[43] Penzl, T. (1999). *Lyapack Version 1.0.* Netlib.Org Web, [En ligne]. http://www.netlib.org/lyapack (Page consultée le 20 janvier 2004).

[44] Hammarling, S. (1982). Numerical solution of the stable, non-negative definite Lyapunov equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 2, pp. 303-323.

[45] Jaimoukha, I.M., Kasenally, E.M. (1994). Krylov subspace methods for solving large Lyapunov equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 31, pp. 227-251.

[46] Golub, G.H., Van Loan, C.F. (1996). *Matrix Computations* (3e éd.). Baltimore: John Hopkins University Press.

[47] National Aeronautics and Space Administration – Dryden Flight Research Center (NASA – DFRC). *Dryden Aircraft Photo Collection*. NASA DFRC Web, [En ligne]. http://www.dfrc.nasa.gov/Gallery/Photo/index.html (Page consultée le 10 juin 2005).